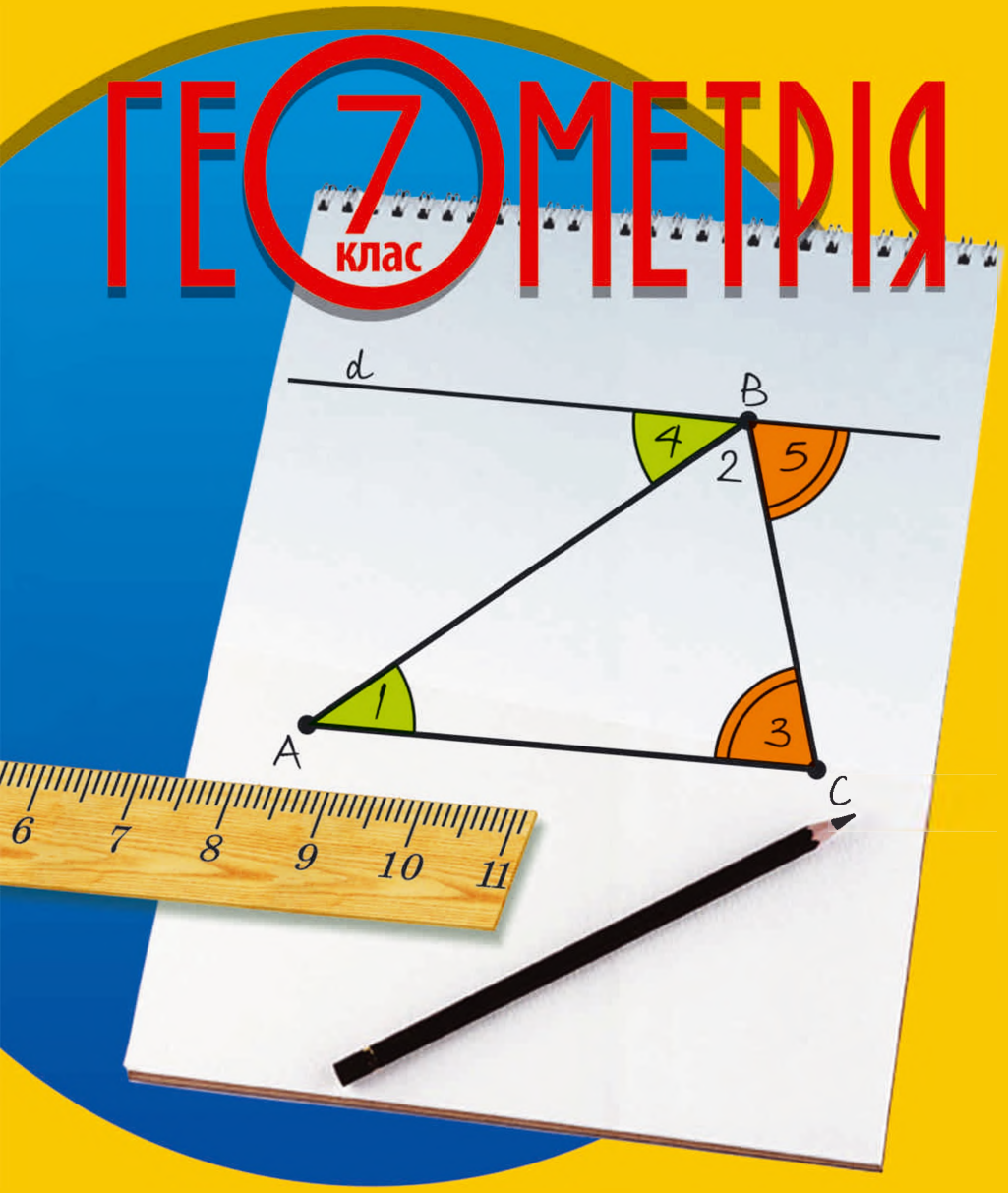
Олександр Роганін · Анатолій Капіносов

ГЕОМЕТРІЯ

7 клас



Видавництво ™«Підручники і посібники»

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я723
Р 59

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.07.2015 р. № 777)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Роганін О. М.

Р 59 Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. М. Роганін, А. М. Капіносов. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2015. — 240 с.

ISBN 978-966-07-2860-8

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я723

ISBN 978-966-07-2860-8

ЗМІСТ

Частина 3.
ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Частина 4.
КОЛО І КРУГ

ЮНІ ДРУЗІ!

Ви починаєте вивчати геометрію — розділ математики, який розглядає властивості геометричних фігур.

З деякими геометричними фігурами ви вже ознайомлені: згадайте точку, пряму, відрізок, промінь, кут, трикутник, прямокутник, квадрат, коло, круг, прямокутний паралелепіпед, куб. Їх зображено на рис. 1.

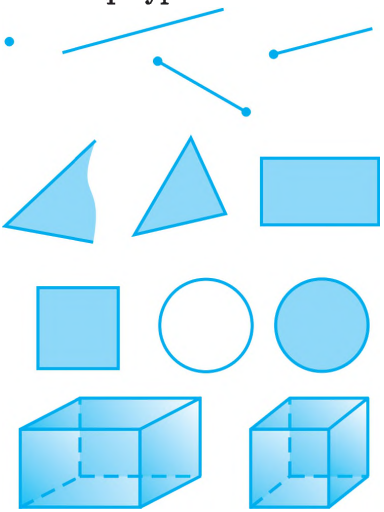


Рис. 1

Вивчаючи геометрію, ви дізнаєтесь чимало нового і, до того ж, навчитеся правильно міркувати, адже геометрію вважають найкращою школою міркування!

Підручник поділено на чотири частини, кожна з яких складається з параграфів, а параграфи — з пунктів.

У кожному параграфі є рубрики «Основне в параграфі», «Розв'язуємо разом», «Бесіда після уроку», «Запитання та завдання», «Задачі до параграфа», «Цікаво знати», «Застосуйте знання». У теоретичному матеріалі й рубриці «Розв'язуємо разом» значком ■ виділено закінчення доведення теореми чи розв'язання задачі. У рубриці «Задачі до параграфа» чорним позначено номери задач, які рекомендовано для класної роботи, а кольором — для домашньої. Задачі в цій рубриці подано за трьома рівнями: А — задачі початкового та середнього, Б — достатнього, В — високого. Рубрики «Бесіда після уроку», «Цікаво знати», «Застосуйте знання» призначено для індивідуальної роботи учнів. За допомогою завдань рубрик «Контроль навчальних досягнень» і «Задачі для повторення курсу геометрії 7 класу» ви зможете перевірити свої знання.

Бажаємо вам успіхів у захопливій подорожі у царину Геометрії!

1 ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

§1 ПЛОЩИНА, ПРЯМА, ТОЧКА

1. Загальне уявлення про площину, пряму і точку
2. Властивості належності точок і прямих
3. Взаємне розміщення точок на прямій

1. ЗАГАЛЬНЕ УЯВЛЕННЯ ПРО ПЛОЩИНУ, ПРЯМУ І ТОЧКУ

Уявіть собі поверхню столу, віконного скла, води в озері в безвітряну погоду (рис. 2).

Рис. 2

Указані поверхні дають уявлення про ***площину***, точніше про частину площини, бо далі ми уявлятимемо площину ***нескінченною***.

На площині можна проводити лінії — подібно до того, як ви проводите лінії олівцем на аркуші паперу. Ми вивчатимемо переважно прямі лінії, які зазвичай називають просто ***прямими***. Прямі проводять за допомогою лінійки (рис. 3).

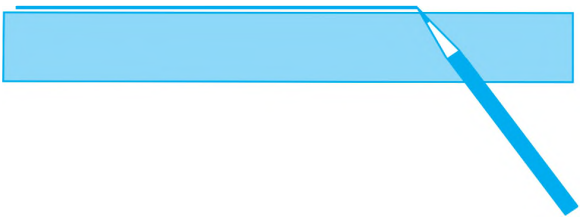


Рис. 3

Наочне уявлення про пряму, точніше про частину прямої, дає туго натягнута нитка (рис. 4). Далі ми уявлятимемо пряму ***нескінченною*** — необмежено продовженою в обидва боки.

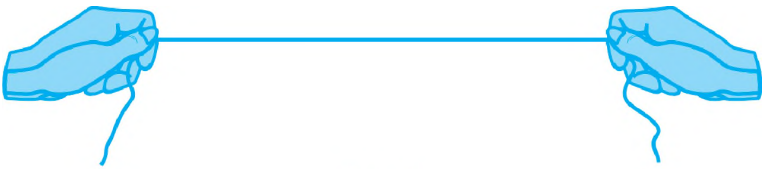


Рис. 4

Прямі на рисунках позначають маленькими латинськими буквами. На рис. 5 позначено прямі *a* та *b*.

На площині можна також позначати точки — подібно до того, як ви ставите точки на аркуші паперу олівцем. Точки позначають великими латинськими літерами. На рис. 6 позначені точки *A*, *B* та *C*.

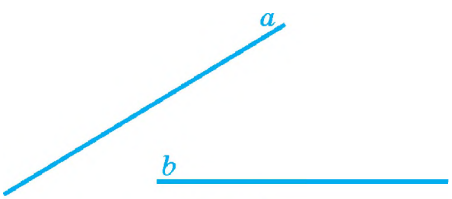


Рис. 5

Рис. 6

2. ВЛАСТИВОСТІ НАЛЕЖНОСТІ ТОЧОК І ПРЯМИХ

Проведемо деяку пряму c та відзначимо дві точки: точку A, що належить прямій c, і точку B, що не належить цій прямій (рис. 7).

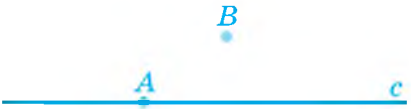


Рис. 7

Для будь-якої прямої є точки, які належать прямій, і точки, які їй не належать.

Якщо точка належить прямій, то кажуть також, що точка ***лежить*** на цій прямій, або що пряма ***проходить*** через цю точку.

Через одну точку може проходити кілька прямих. На рис. 8 зображено прямі a та b, що проходять через точку C. У такому випадку кажуть, що прямі a та b ***перетинаються*** в точці C і що точка C є ***точкою перетину*** цих прямих.

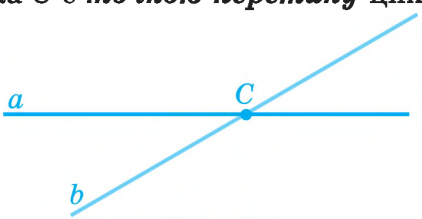


Рис. 8

Позначте на аркуші паперу дві точки — A та B. За допомогою лінійки проведіть через ці точки пряму (рис. 9). Спробуйте провести через точки A та B ще одну пряму. Ви одержите ту ж пряму.

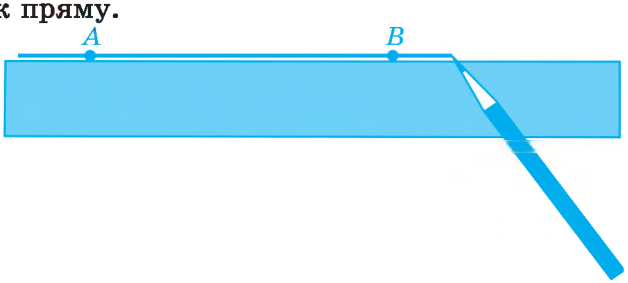


Рис. 9

Через дві точки можна провести лише одну пряму.

Пряму часто позначають двома великими літерами латинського алфавіту. Наприклад, пряму, зображену на рис. 9, можна позначити як AB.

З того, що через дві точки можна провести лише одну пряму, випливає, що

дві прямі можуть перетинатися не більше ніж в одній точці.

Так, якби дві різні прямі a та b мали дві спільні точки — M і N, то це означало б, що через ці дві точки можна провести дві різні прямі (рис. 10). Але цього бути не може: через дві точки можна провести лише одну пряму.

Рис. 10

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Проведіть пряму a й позначте точку M. Які можливі випадки розміщення точки M відносно прямої a? Виконайте рисунки і сформулюйте відповідну властивість.

2. Проведіть пряму a і позначте на ній точки A і D. Чи існує інша пряма, якій належать точки A і D? Сформулюйте відповідну властивість.

3. За рисунком 11 назвіть:

а) точки, які належать прямій a;

б) точки, які належать прямій b;

в) точки, які не належать прямій b;

г) точку, яка не належить жодній із прямих a, b і c;

д) пряму c двома точками, які їй належать;

е) точку перетину прямих b і c;

є) спільну точку прямих a і c.

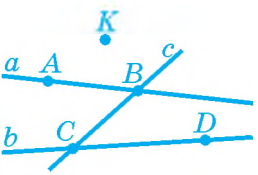


Рис. 11

3. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ТОЧОК НА ПРЯМІЙ

Позначте на прямій які-небудь три точки. Одна з них лежить ***між*** двома іншими. Наприклад, на рис. 12 точка *B* лежить між точками *A* та *C*, а кожна з точок *A* і *C* не лежить між двома іншими.

Рис. 12

Можна сказати також, що точки *A* і *C* лежать ***з різних боків*** від точки *B* (або що точки *B* і *C* лежать ***з одного боку*** від точки *A*).

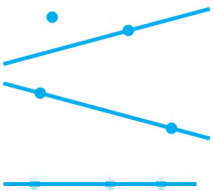
ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

4. Проведіть пряму *a* і позначте на ній точки *A*, *B*, *C* і *D* так, щоб точка *D* лежала між точками *A* і *B*, а точка *C* — між точками *B* і *D*.

5. Проведіть пряму *a*, позначте на ній точки *M*, *O* і *K* так, щоб дві з них лежали з одного боку від точки *M*, а дві — з різних боків від точки *O*. Яка з точок *M*, *O* і *K* лежить між двома іншими?

ОСНОВНЕ В § 1

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ТОЧОК І ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ



Для будь-якої прямої є точки, які належать прямій, і точки, які їй не належать.

Через дві точки можна провести лише одну пряму.

Із трьох точок на прямій тільки одна лежить між двома іншими.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

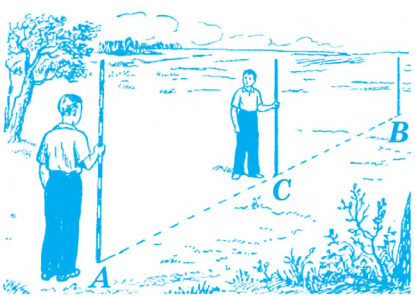
Вправа 1. На прямій лежать точки M, N, P і Q. Точка N лежить між точками P і Q, а точка M лежить між точками P і N. Позначте, як можуть бути розміщені точки на прямій.

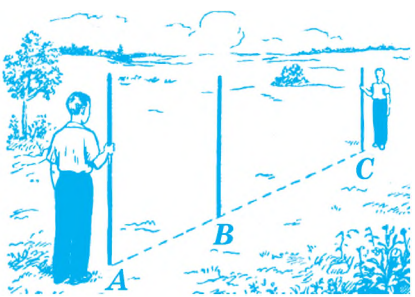
Розв'язання. Врахуємо спочатку першу частину умови. Точки P, Q і N можна розташувати на прямій так:

Відповідно до другої частини умови, точка M лежить між точками P й N. Отже, усі чотири точки на прямій можуть бути розташовані так:

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Наведіть приклади предметів, які вас оточують і дають уявлення про точки, пряму, площину.



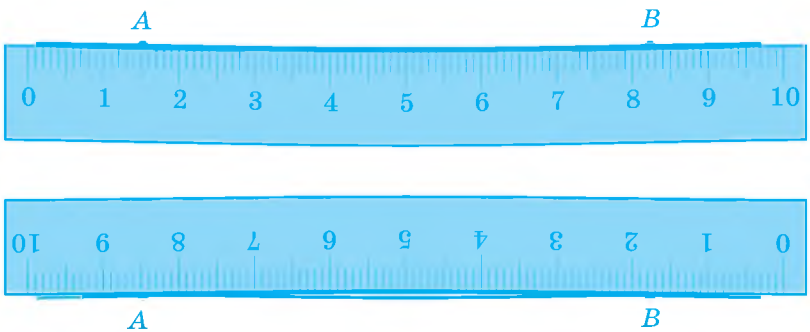


2. Для проведення прямих на місцевості користуються віхами — кілками, загостреними з одного боку. Користуючись наведеними рисунками, поясніть, як проводять пряму на місцевості.

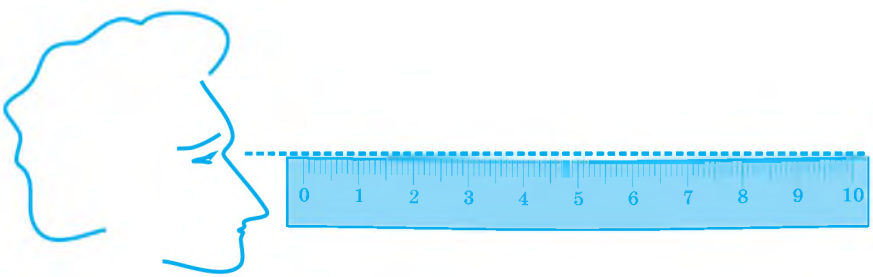
3. Щоб влучити в мішень у тирі, потрібно прицілитися. Поясніть, як це зробити.

БЕСІДА ПІСЛЯ УРОКУ

За допомогою лінійки нам вдалося провести через дві точки ДВІ різні прямі: другу пряму було проведено за допомогою перевернутої лінійки. Чи не суперечить це основній властивості прямої?



Так, суперечить. Те, що, перевернувши лінійку, вдалося провести дві різні «прямі», означає, що лінійка дещо вигнута: у цьому легко переконатися, подивившись на лінійку ось так:



Саме в такий спосіб часто перевіряють прямолінійність лінійок та інших предметів. Так можна перевірити, до речі, і прямолінійність лінії на кресленні. Наприклад, «на око» важко повірити, що лінії *AC* і *BD* на рисунку 13 прямі. Але якщо підняти рисунок до рівня очей і подивитись уздовж цих ліній, то відразу можна переконатися в цьому.

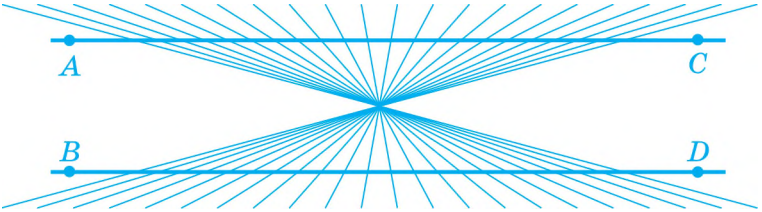


Рис. 13

Я не можу уявити собі нескінченну пряму.

Насправді уявити собі нескінченну пряму важко. Ідея нескінченності — геніальний винахід античних математиків: вони помітили, що до будь-якого натурального числа можна додати одиницю, і тому натуральний ряд (ряд натуральних чисел) нескінченний. Якщо ви вже уявляєте собі нескінченний ряд натуральних чисел, то аналогічно зможете уявити пряму, яка може утворитися продовженням її частин щоразу, наприклад, на 1 см.

Цікаво, що пряма нескінченна не тільки «у великому», але й «у малому». Однією з властивостей прямої є те, що між ***будь-якими*** двома різними її точками завжди існує хоча б одна точка, яка належить цій прямій. А звідси випливає, що між будь-якими двома точками прямої є ***нескінченно багато*** точок цієї прямої.

Так, між точками A_1 і A_2 є точка A_3, між точками A_1 і A_3 є точка A_4, і т. д. (див. рис. 14).

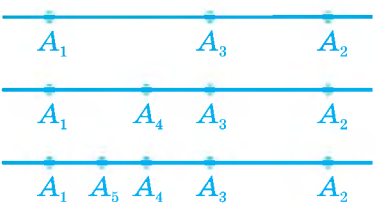


Рис. 14

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 1

1. Укажіть два можливі випадки розміщення точки M відносно прямої a. Виконайте відповідні рисунки.
2. Скільки різних прямих можна провести через дві точки?
3. На прямій зображено три точки. Скільки із цих точок лежать між двома іншими?
4. Поясніть, чому дві прямі не можуть мати дві спільні точки.

ЗАДАЧІ ДО § 1

РІВЕНЬ А

6. Позначте точки A, B і C так, щоб записи AB й AC позначали ту саму пряму.
7. Позначте точки O, C і D так, щоб записи OC й OD позначали дві різні прямі.
8. На площині позначено три точки — A, B і C. Скільки прямих можна провести через ці точки? Які можливі випадки? Виконайте відповідні рисунки.
9. Позначте точки A і C й проведіть три прямі, що перетинаються в точці C і жодна з яких не проходить через точку A.
10. Позначте точку B і проведіть три прямі так, щоб точка B належала тільки двом із цих прямих.
11. Позначте точку M. Проведіть через неї чотири прямі a, b, c і d. Проведіть пряму m, що перетинає прямі a, b, c і d відповідно в точках A, B, C і D. Назвіть і запишіть прямі b і c через точки, що лежать на них.

РІВЕНЬ Б

12. На площині позначено дві точки — A та B. Скільки прямих можна провести: **а)** через точку A; **б)** через точку B; **в)** через обидві ці точки?

13. Позначте чотири точки, що не лежать на одній прямій так, щоб:

а) три з них лежали на одній прямій;

б) жодні три з них не лежали на одній прямій.

14. Прямі a і c перетинаються в точці O. Відомо, що точка M належить прямій a. Чи може точка M належати прямій c? Відповідь обґрунтуйте.

15. На площині проведено десять прямих і позначено дві точки. Скільком даним прямим можуть належати обидві дані точки? Відповідь обґрунтуйте.

16. На площині позначено три точки. Відомо, що жодна з цих точок не лежить між двома іншими. Чи можуть ці точки належати одній прямій? Відповідь обґрунтуйте.

17. Позначте точки M, O і K так, щоб жодна з них не лежала між двома іншими.

18. На площині позначено чотири точки M, N, K і P. Відомо, що точки M, N і K лежать на одній прямій і точки M, N і P лежать на одній прямій. Як розміщені точки M, N, K і P?

РІВЕНЬ В

19*. Скільком прямим може належати одна дана точка; дві дані точки; три дані точки; чотири дані точки?

20. Чи існує на прямій точка, відносно якої всі інші точки лежать з одного боку від неї, тобто яка не лежить між жодними двома іншими?

21*. Які з наведених тверджень є істинними, а які — хибними? Хибність тверджень проілюструйте рисунками.

а) Будь-які три точки лежать на одній прямій;
б) будь-які дві точки належать одній прямій;
в) через будь-які чотири точки проходить пряма;
г) існує чотири точки, що належать одній прямій;
д) існує чотири точки, що не належать одній прямій;
е) будь-які чотири точки не належать одній прямій.

22. Позначте п'ять точок на площині, жодні три з яких не належать одній прямій. Через кожні дві із цих п'ятьох точок проведіть пряму. Встановіть, скільки прямих проведено через кожну із цих точок. Знайдіть загальну кількість проведених прямих.

23. Чотири прямі перетинаються кожна з кожною. Скільки може бути точок перетину прямих? Виконайте відповідні рисунки.

24. Позначте чотири точки. Через кожні дві з них проведіть пряму. Скільки всього можна провести прямих? Розгляньте всі можливі випадки.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Термін «*точка*» походить від дієслова «*ткнути*».
- Термін «*лінія*» походить від латинського слова «*лінеа*», що означає «*льон*», «*льняна нитка*», іноді це слово розуміють як «*пряма лінія*», звідки й походить слово «*лінійка*».
- Евклід казав, що «*точка — це те, що не має частин*».

ЕВКЛІД
(бл. 365 р. – бл. 300 р. до н. е.)
Давньогрецький геометр

§2 ПРОМІНЬ І ВІДРІЗОК

1. ПРОМІНЬ

Позначимо на деякій прямій точку A. Розглянемо частину цієї прямої, яка складається із цієї точки, а також з усіх точок, що лежать з одного боку від неї (рис. 15). Цю частину прямої називають ***променем***, а дану точку — ***початком*** променя.

Рис. 15

Зазвичай промінь позначають двома великими латинськими літерами, перша з яких позначає початок променя, а друга — будь-яку іншу точку променя. Наприклад, на рис. 16 зображено промінь AB.

Рис. 16

Іноді промінь позначають так само, як і пряму — однією маленькою латинською літерою.

Два промені однієї прямої, які мають тільки одну спільну точку, називають ***доповняльними***. Такими, наприклад, є промені BA і BC на рис. 17. Точка B є спільним початком цих променів.

Рис. 17

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

25. Накресліть промінь AD і позначте точки M, P і K, які йому належать. Запишіть три інші позначення променя AD.

26. На скільки променів ділить пряму кожна її точка? Як називають ці промені? Чому така їх назва?

27. Укажіть на рисунку 18 промінь, який:

а) не має спільних точок з прямою a;

б) має з прямою a одну спільну точку;

в) належить прямій a.

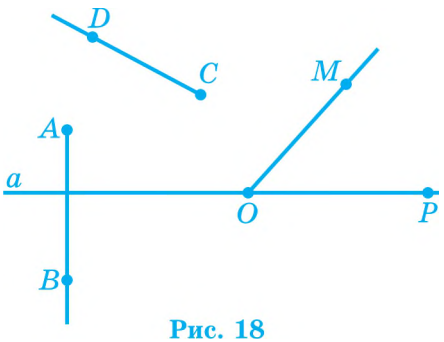


Рис. 18

2. ВІДРІЗОК І ЙОГО ВИМІРЮВАННЯ

Позначимо на деякій прямій дві точки — A та B. Розглянемо частину цієї прямої, що складається із точок A та B, а також усіх її точок, які лежать між цими точками. Цю частину прямої називають ***відрізком***, а точки A та B — ***кінцями відрізка*** (рис. 19). Усі точки відрізка, крім його кінців, називають його внутрішніми точками.

Рис. 19

Відрізок зазвичай позначають двома великими латинськими літерами, якими позначено його кінці. Наприклад, на рис. 19 зображено відрізок AB. Цей відрізок можна записати також як BA.

Іноді відрізок позначають так само, як і пряму, — однією маленькою латинською літерою.

Ви знаєте, як вимірювати довжину відрізка за допомогою лінійки з поділками. Наприклад, довжина відрізка AB на рис. 20 дорівнює 4 см. Довжину відрізка позначають зазвичай так само, як і сам відрізок. Наприклад, $AB = 4$ см.

Кожен відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Іноді для спрощення формулювань довжину відрізка ми називатимемо ***відрізком***.

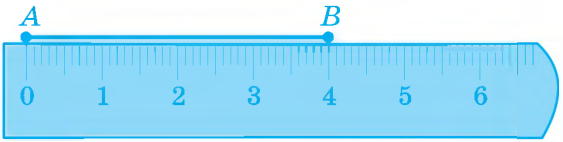


Рис. 20

Відзначимо на відрізку AC деяку точку B (рис. 21). Тоді для довжин відрізків AC, AB та BC має місце співвідношення $AC = AB + BC$.

Рис. 21

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які його можна розбити будь-якою його внутрішньою точкою.

Указуючи довжину відрізка, слід зазначати, у яких одиницях вона виміряна. На кресленнях у зошиті одиницею вимірювання зручно вибирати один сантиметр (1 см).

Точку, яка ділить даний відрізок на два відрізки рівної довжини, називають ***серединою відрізка***. Наприклад, точка C на рис. 22 є серединою відрізка AB, бо $AC = 2$ см і $CB = 2$ см.

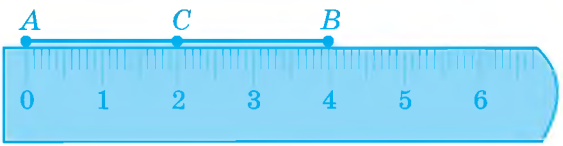


Рис. 22

На даному промені від його початку завжди можна відкласти відрізок заданої довжини, і до того ж лише ***один***. Це можна зробити, наприклад, за допомогою лінійки з поділками. На рис. 23 на промені a з початком у точці O відкладено відрізок OA завдовжки 2,5 см (або 2 см 5 мм).

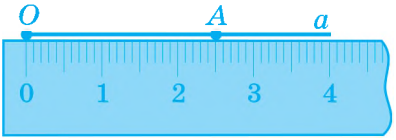


Рис. 23

Відстанню між двома точками називають довжину відрізка з кінцями в цих точках. Наприклад, відстань між точками *A* та *B* на рис. 24 дорівнює 5 см.

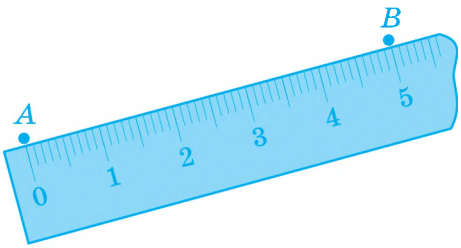


Рис. 24

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

28. Проведіть пряму *a* і позначте на ній довільні точки *C* і *D*. Виділіть жирною лінією відрізок *CD*.

29. Скількома відрізками можна сполучити дві дані точки?

30. Скільком прямим може належати будь-який відрізок? А скільком променям?

31. Укажіть на рисунку 25 відрізок, який...

а) не має спільних точок із прямою *a*;

б) має з прямою *a* одну спільну точку;

в) є частиною прямої *a*.

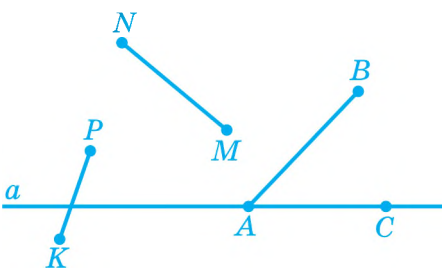


Рис. 25

32. Запишіть у сантиметрах довжину відрізка (рис. 26):
а) AC; б) AB; в) AK; г) AM; д) AN.

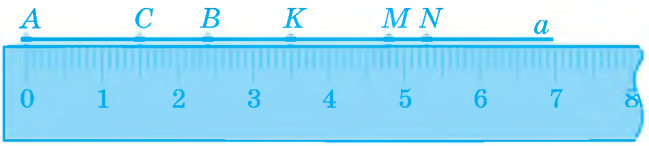


Рис. 26

33. Дано відрізок a (рис. 27). Проведіть деякий промінь OA. Відкладіть на ньому від початку O за допомогою циркуля відрізок a.

Рис. 27

Рис. 28

34. Дано відрізок c (рис. 28). Проведіть пряму a, позначте на ній точку A і відкладіть від точки A в різні боки від неї відрізки $AB = c$ і $AC = c$. Чим є точка A для відрізка BC?

3. ПОРІВНЯННЯ ВІДРІЗКІВ

Дві геометричні фігури називають ***рівними***, якщо їх можна сумістити ***накладанням***.

Наприклад, відрізки AB і CD рівні (рис. 29), бо, наклавшись, вони сумістяться.

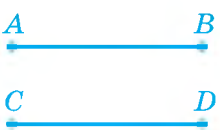


Рис. 29

Рівні відрізки мають рівні довжини, а відрізки рівної довжини є рівними.

Якщо довжини двох відрізків не рівні, то відрізок більшої довжини називають більшим. Наприклад, на рис. 30 відрізок AC завдовжки 5 см більший, ніж відрізок AB завдовжки 4 см, тобто $AC > AB$.

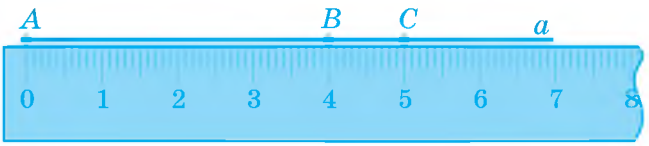


Рис. 30

Рівні відрізки позначають на кресленнях за допомогою однакової кількості невеликих рисок. Наприклад, на рис. 31 зображено рівні між собою відрізки AB і CD, а також рівні між собою відрізки MN і PQ.

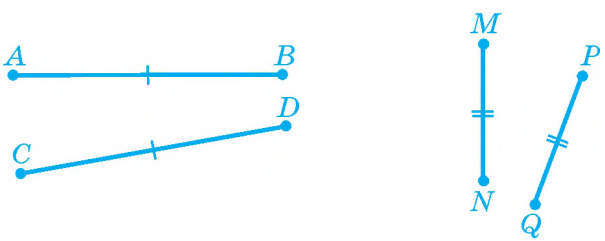


Рис. 31

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

35. При накладанні відрізка AB на відрізок CD точка A сумістилася із точкою C. Порівняйте відрізки AB і CD, якщо:

а) точка B сумістилася з точкою D;

б) точка B сумістилася з внутрішньою точкою відрізка CD;

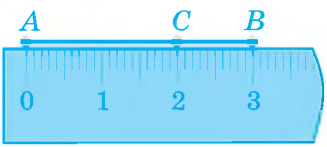
в) точка D сумістилася з внутрішньою точкою відрізка AB.

ОСНОВНЕ В § 2

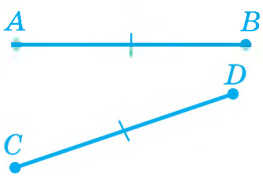
Промінь — частина прямої, що складається з точки, яку називають початком променя, а також з усіх точок прямої, що лежать з одного боку від указаної точки. Наприклад, промінь AB.

Доповняльні промені — два промені однієї прямої, які мають лише одну спільну точку. Наприклад, промені BA і BC — доповняльні.

Відрізок — частина прямої, що складається із двох точок прямої, а також усіх точок прямої, які лежать між цими точками.



Кожен відрізок має певну **довжину**, більшу від нуля.
Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка: $AB = AC + CB$.
Відстань між двома точками — це довжина відрізка з кінцями в цих точках.



Дві геометричні фігури **рівні**, якщо їх можна сумістити накладанням.
Рівні відрізки мають рівні довжини.
Відрізки рівної довжини рівні.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Точка C лежить на відрізку AB завдовжки 15 см, до того ж довжина відрізка AC на 5 см більша від довжини відрізка BC. Знайдіть довжини відрізків AC і BC (рис. 32).

Рис. 32

Розв'язання. Нехай $BC = x$ см, тоді $AC = (x + 5)$ см. Оскільки $AB = AC + CB$, то $x + x + 5 = 15$. Розв'яжемо одержане рівняння: $2x + 5 = 15$; $2x = 10$; $x = 5$. Отже, $BC = 5$ см, $AC = 5$ см $+ 5$ см $= 10$ см.

Відповідь. 10 см; 5 см. ■

Коментар. Розв'язуючи геометричні задачі за допомогою рівнянь, не обов'язково позначати невідому величину літерою x. Часто для невідомої довжини відрізка використовують позначення цього відрізка. Тоді наведене вище розв'язання матиме такий вигляд.

З умови задачі випливає, що $AC + BC = 15$ і $AC = BC + 5$. Підставляючи у співвідношення $AC + BC = 15$ замість AC вираз $BC + 5$, одержуємо $BC + 5 + BC = 15$, звідки $2BC + 5 = 15$. Звідси $BC = 5$ (см). Тоді $AC = 5$ см $+ 5$ см $= 10$ см.

Вправа 2. На відрізку AB завдовжки 20 см узято точку C. Знайдіть довжини відрізків AC і BC, якщо вони відносяться як 2 : 3 (рис. 33).

Рис. 33

Розв'язання. Нехай $AC = 2x$ см. Тоді $BC = 3x$ см. За умовою задачі $2x + 3x = 20$. Розв'яжемо одержане рівняння: $5x = 20$; $x = 4$. Отже, $AC = 2x = 2 \cdot 4 = 8$ (см), $BC = 3x = 3 \cdot 4 = 12$ (см).

Відповідь. 8 см; 12 см. ■

Вправа 3. Чи можуть точки A, B, C лежати на одній прямій, якщо $AC = 6$ см, $BC = 4$ см, $AB = 8$ см?

Розв'язання. Якби точки A, B і C лежали на одній прямій, то довжина найбільшого з відрізків AC, BC чи AB дорівнювала б сумі довжин двох інших відрізків. З умови випливає, що довжина найбільшого відрізка не дорівнює сумі довжин двох інших відрізків ($8 \neq 6 + 4$). Отже, точки A, B і C не можуть лежати на одній прямій.

Відповідь. Точки A, B і C не можуть лежати на одній прямій. ■

Вправа 4. Точки A, B і C лежать на одній прямій, до того ж $AB = 9$ см, $BC = 4$ см. Чому дорівнює відстань між точками A і C?

Розв'язання. Можливі два випадки взаємного розміщення точок на прямій: 1) точки A і C лежать з різних боків від точки B; 2) точки A і C лежать з одного боку від точки B.

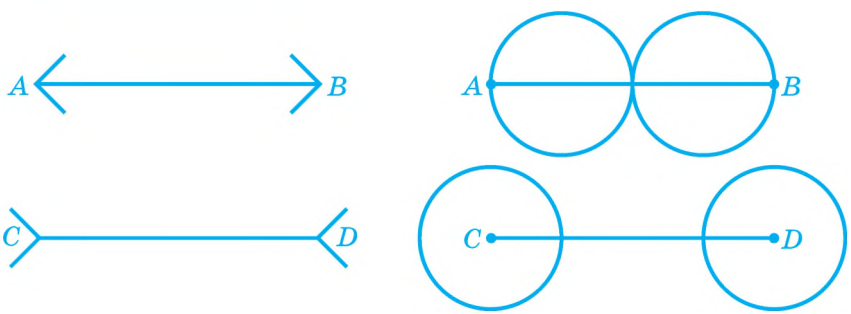
Якщо точки A і C лежать з різних боків від точки B, то $AC = AB + BC = 9$ см $+ 4$ см $= 13$ см (верхній рисунок). Якщо ж точки A і C лежать з одного боку від точки B, то точка C належить відрізкові AB, тому що $BC < AB$. У цьому випадку $AC + BC = AB$, звідки $AC = AB - BC = 9$ см $- 4$ см $= 5$ см (нижній рисунок).

Відповідь. 13 см або 5 см. ■

Коментар. Математичну задачу вважають розв'язаною лише тоді, коли розглянуто ***всі*** можливі випадки, що задовольняють умову задачі. Тому в наведеній задачі потрібно було врахувати ***обидва*** можливі випадки розташування точок A і C відносно точки B.

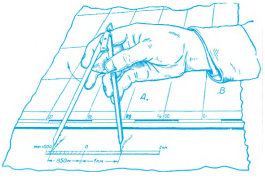
ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Порівняйте на око відрізки AB і CD. Перевірте правильність порівняння за допомогою лінійки з поділками.



2. Для вимірювання відстаней на місцевості використовують рулетку або польовий циркуль, які зображено на рисунку. Поясніть, як це роблять.

3. Для встановлення відстані на місцевості за допомогою карти використовують циркуль, як зображено на рисунку, та масштаб карти. Поясніть, як це роблять.



4. Як можна визначити товщину 1 аркуша підручника?
5. Відстань від Землі до Сонця дорівнює 150 млн км, а до Місяця — 400 тис. км. Чому дорівнює відстань від Місяця до Сонця в період сонячного затемнення? Місячного затемнення?

БЕСІДА ПІСЛЯ УРОКУ

Чому промінь назвали саме так? Чи пов'язано це із променем світла?

Справді, прообразом геометричного променя був промінь світла. Для побудови ходу світлових променів часто використо-

вують геометричні побудови. На уроках фізики ви вивчатимете розділ, у якому розглядають хід світлових променів — «геометричну оптику». Родоначальником геометричної оптики був давньогрецький учений Евклід.

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 2

1. Яку фігуру називають променем? Проведіть промінь DC.
2. Які два промені називають доповняльними?
3. Яку фігуру називають відрізком? Накресліть відрізок MN завдовжки 3 см.
4. Сформулюйте основні властивості довжини відрізка.
5. Які фігури називають рівними? За якої умови два відрізки будуть рівними?
6. Сформулюйте основну властивість відкладання відрізка.
7. Що називають відстанню між двома точками? Як знайти відстань між точками C і D?

ЗАДАЧІ ДО § 2

РІВЕНЬ А

36. Як розміщені точки A, B і C на прямій, якщо записи AB й AC позначають: **а)** той самий промінь; **б)** два різні промені?

37. Точка C лежить на відрізку AD (рис. 34). Обчисліть довжину відрізка:

а) AD, якщо $AC = 3{,}4$ см, $CD = 2{,}6$ см;

б) AC, якщо $AD = 6{,}2$ см, $CD = 2{,}8$ см;

в) CD, якщо $AD = 64$ мм, $AC = 42$ мм.

Рис. 34

38. Чому дорівнює відстань між двома точками, якщо точка, яка лежить між ними, розміщена від них на відстанях, що відповідно дорівнюють: **а)** 3 см і 5 см; **б)** 2,8 мм і 1,2 мм?

39. Проведіть пряму c, позначте на ній точку A. З різних боків від точки A позначте на прямій c точки M і K так, що $AM = 2$ см, $AK = 3{,}4$ см. Обчисліть відстань між точками M і K.

40. Проведіть пряму a. Позначте на ній точки C і D, відстань між якими дорівнює 3,8 см, та таку точку M відрізка CD, що $CM = 2$ см. Обчисліть довжину відрізка MD.

41. Проведіть пряму a й позначте на ній точку M. З одного боку від точки M побудуйте на прямій a точки A і C так, що $MA = 3$ см, $MC = 4{,}8$ см. Обчисліть довжину відрізка AC.

42. Точка M відрізка AB лежить на відстані 5 см від точки A і на відстані 9 см від точки B. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до його кінців.

43. На відрізку AB завдовжки 32 см узято точку O. Знайдіть довжину відрізка AO, якщо його довжина на 6 см більша від довжини відрізка OB.

44. Точка ділить відрізок завдовжки 48 см на частини, різниця довжин яких дорівнює 8 см. Знайдіть довжину кожної частини.

45. На прямій a точки M, O і K розміщені так, що точка O лежить між точками M і K. Відстань між точками M і K дорівнює 48 см. Знайдіть відстань між точками O і K, якщо вона удвічі менша за відстань між точками O і M.

46. Довжина відрізка дорівнює 80 см. Знайдіть довжини відрізків, на які його ділить внутрішня точка, якщо:

а) довжина одного з них утричі більша від довжини іншого;

б) довжина одного з них у 4 рази менша від довжини іншого.

47. На якій відстані від кінців відрізка завдовжки 35 см лежить точка, що ділить його на частини у відношенні 2 : 5?

48. Знайдіть довжини частин, на які ділить відрізок його внутрішня точка, якщо довжина відрізка дорівнює 48 см, а довжини частин відносяться як: **а)** 3 : 5; **б)** 5 : 7.

49. Скільки відрізків, що дорівнюють даному, можна відкласти на:

а) промені від його початкової точки;

б) прямій від будь-якої її точки?

Відповідь проілюструйте рисунками.

50. Дано відрізки завдовжки a і b (рис. 35).

а) Проведіть промінь OA. Відкладіть на промені від точки O відрізок OC завдовжки $a + b$.

б) Проведіть промінь OM. Відкладіть на промені від точки O відрізок OC завдовжки $a - b$.

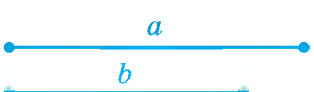


Рис. 35

Рис. 36

51. Дано відрізок завдовжки m (рис. 36). Проведіть промінь OM і відкладіть на ньому відрізок: **а)** OA завдовжки $2m$; **б)** OB завдовжки $3m$; **в)** OC завдовжки $5m$.

Яку частину відрізка OC становить відрізок OA; OB?

РІВЕНЬ Б

52. На прямій a позначено точки A, C і D. Відомо, що $AC = 3$ см, $AD = 5$ см. Чому дорівнює відстань між точками C і D? Скільки розв'язків має задача? Для кожного випадку виконайте рисунок.

53. На прямій, яка містить відрізок AB, позначено точку C. Відомо, що $AB = 3$ см, $AC = 9$ см. Знайдіть відстань між точками B і C. Скільки розв'язків має задача?

54. На відрізку AB позначено п'ять внутрішніх точок, які ділять його на рівні частини. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо довжина однієї частини дорівнює 3,5 см.

55. Точка ділить даний відрізок на дві частини, відстань між серединами яких дорівнює 3,4 см. Знайдіть довжину даного відрізка.

56. Пряма m проходить через точки A, B, C і D, до того ж точка C лежить між точками A і D, $AC = 3{,}9$ см, $CD = 3{,}1$ см. Чи належить відрізку AD точка B, якщо $AB = 7{,}1$ см?

РІВЕНЬ В

57. На відрізку MK взято точки O і P, до того ж точка O лежить між точками M і P. Знайдіть відстань між точками O і P, якщо $MP = OK = 28$ см, $MK = 36$ см.

58. Точки A, B, C і D належать прямій a. Відомо, що $AB = 28$ см, $BC = 12$ см, $CD = 7$ см. Встановіть найбільшу і найменшу з можливих відстаней між точками A і D. Виконайте відповідні рисунки.

59. Точка C належить відрізку AB завдовжки 9 см. Знайдіть довжину відрізка AC, якщо $4AC + 3CB = 32$ см.

60. Відрізок завдовжки a см поділили на 6 рівних частин. Знайдіть відстань між серединами крайніх частин.

61. Проведіть пряму і позначте п'ять точок, що їй належать. Скільки всього утворилося відрізків? Як за кількістю точок на прямій обчислити кількість відрізків, що утворяться?

62. Позначте шість точок так, щоб жодні три з них не лежали на одній прямій. Кожні дві точки сполучіть відрізком. Скільки проведено відрізків, одним кінцем яких є одна з шести цих точок? Скільки проведено усіх відрізків?

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Уперше лінійка, як засіб для побудови та вимірювання довжини відрізка, з'явилася у Стародавньому Китаї.
- Термін «*відрізок*» походить від слова «*відрізати*».
- Позначення відрізка двома буквами, які відповідають його кінцям, запровадили ще стародавні греки.
- Раніше кожна країна встановлювала свої одиниці вимірювання: Англія — фут (30,48 см), дюйм (2,54 см) та ін., Україна — верста (1,0668 км), сажень (2,1336 м), аршин (71,12 см), вершок (4,445 см) тощо.
- Існують й інші одинці вимірювання відстаней: у мореплавстві — морська миля (1,852 км), у географії — географічна миля (7,422 км), в астрономії — світловий рік (шлях, який світло проходить за рік).

§3 КУТ

1. ПІВПЛОЩИНА

Пряма розбиває площину на дві ***півплощини*** (рис. 37). Уважатимемо, що ця пряма належить обом півплощинам.

Візьмемо дві точки, які не лежать на цій прямій. Вони лежать в одній півплощині відносно даної прямої, якщо відрізок з кінцями в цих точках не перетинає дану пряму. Так, точки A та B на рис. 37 лежать в одній півплощині відносно прямої a, оскільки відрізок AB не перетинає пряму a. Можна казати також, що точки A та B лежать з одного боку від прямої a.

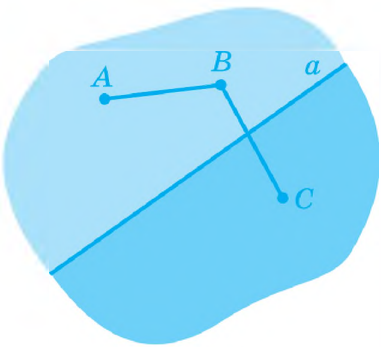


Рис. 37

Якщо ж відрізок з кінцями в таких точках перетинає дану пряму, то кінці відрізка лежать у різних півплощинах відносно даної прямої. Так, точки B і C на рис. 37 лежать у різ-

них півплощинах відносно прямої a, оскільки відрізок BC перетинає пряму a. Можна казати також, що точки B та C лежать з різних боків від прямої a.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

63. Накресліть пряму a. Позначте точку A, що їй не належить. Заштрихуйте ту частину площини, яка складається з усіх точок, що лежать з точкою A з одного боку від прямої a. Як називають фігуру, яка складається з прямої a й заштрихованої частини?

64. Точки A та B лежать з різних боків від прямої a, а точки B і C — з одного боку. Як розміщені відносно прямої a точки A і C?

2. КУТ

Накреслимо два промені OA і OB зі спільним початком (рис. 38). Вони ділять площину на дві частини (ці частини по-різному зафарбовані).

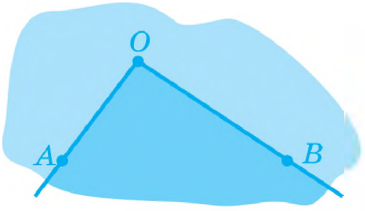


Рис. 38

Два промені зі спільним початком і частину площини, обмежену ними, називають ***кутом***[1]. Промені називають ***сторонами*** кута, а їх спільний початок — ***вершиною*** кута.

Два промені зі спільним початком ділять площину на два кути: на рис. 38 ці кути по-різному зафарбовані.

[1] Іноді кутом називають фігуру, утворену лише двома променями зі спільним початком.

Кут зазвичай позначають трьома великими латинськими літерами, середня з яких позначає вершину кута, а дві крайні — точки на сторонах кута. Якщо зрозуміло, про який кут ідеться, то такий кут можна позначати однією літерою, яка позначає вершину кута. Іноді кути позначають цифрами. Слово «кут» часто замінюють значком «∠». На рис. 39 зображено кути: $\angle ABC$, $\angle B$, $\angle 1$, $\angle K$ і $\angle MNP$.

Якщо сторони кута є доповняльними променями, то кут називають ***розгорнутим***. Таким є кут K на рис. 39.

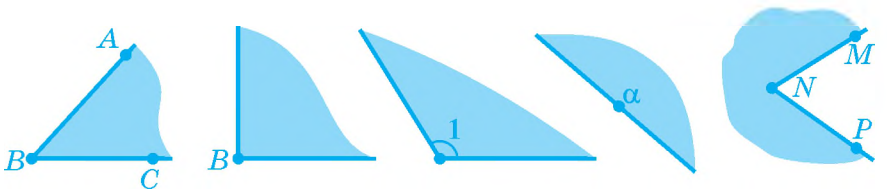


Рис. 39

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

65. Накресліть на аркуші паперу два промені зі спільним початком, які не лежать на одній прямій, і виріжте два кути.

66. Накресліть два доповняльні промені OA й OC. Утворені кути позначте однією і двома дугами. Як називають ці кути?

67. Назвіть вершину та сторони кута: **а)** $\angle MOK$; **б)** $\angle AOC$; **в)** $\angle ACD$.

3. ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ

Ви вже знаєте, що кути вимірюють у градусах.

Кожен кут має певну градусну міру. Градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°.

Для вимірювання кутів використовують транспортир. Наприклад, кут AOB на рис. 40 дорівнює 60°. Градусну міру

кута зазвичай позначають так само, як і сам кут, наприклад: $\angle AOB = 60°$. Іноді замість терміна «градусна міра кута» для спрощення формулювань використовуватимемо термін «кут».

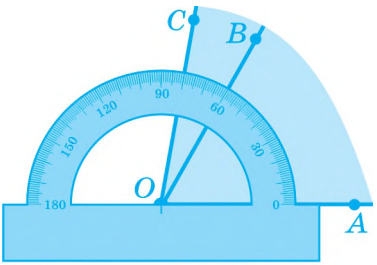


Рис. 40

Уважатимемо, що промінь ***проходить між сторонами кута***, якщо він виходить з вершини цього кута, належить цьому кутові й не збігається з жодною його стороною. Наприклад, промінь OB на рис. 40 проходить між сторонами зафарбованого кута AOC.

Промінь, що проходить між сторонами кута, ***ділить*** його на два кути. Наприклад, на рис. 40 промінь OB ділить кут AOC на кути AOB і BOC.

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які його ділить будь-який промінь, що проходить між його сторонами.

Наприклад, на рис. 40 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 60° + 20° = 80°$, а на рис. 41: $\angle 1 = \angle NMK + \angle KMP = 180° + 30° = 210°$.

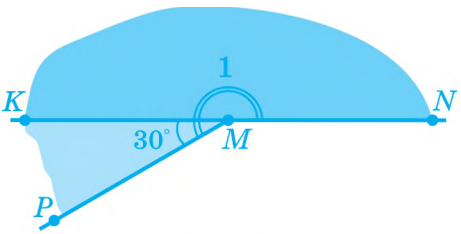


Рис. 41

У цьому навчальному році ми розглядатимемо лише кути, градусна міра яких не перевищує 180°.

На рис. 42 від променя OA відкладено кут AOB в одну півплощину, а кут AOC такої ж градусної міри — в іншу півплощину.

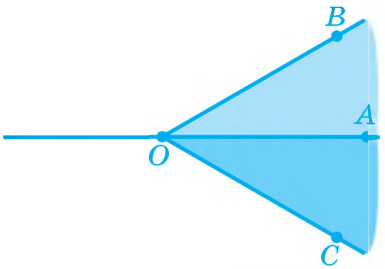
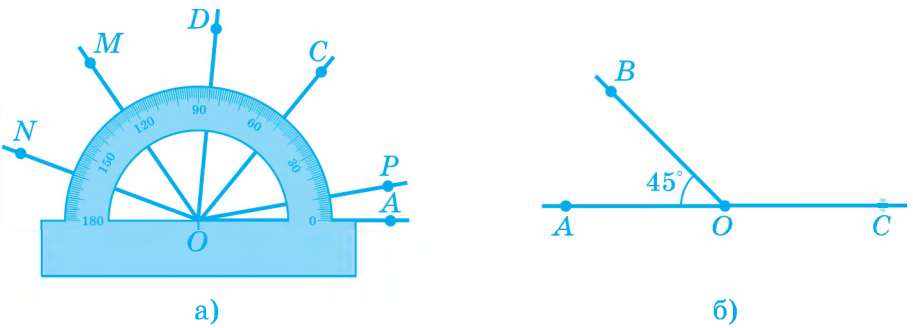


Рис. 42

У задану півплощину від даного променя завжди можна відкласти лише один кут заданої градусної міри.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

68. Знайдіть градусні міри кутів, зображених на рисунку 43 а: **а)** $\angle AOP$; **б)** $\angle AOM$; **в)** $\angle AON$; **г)** $\angle POC$; **д)** $\angle POD$; **е)** $\angle MON$.



а) б)

Рис. 43

69. Знайдіть кут BOC (рис. 43 б).

70. Побудуйте: **а)** $\angle A = 35°$; **б)** $\angle B = 110°$; **в)** $\angle C = 165°$. Позначте кути дугами.

4. ПОРІВНЯННЯ КУТІВ

Відкладемо від даного променя в одну півплощину два кути з однаковою градусною мірою. Ці кути збігатимуться, тобто

кути з однаковою градусною мірою рівні.

Очевидно: ***якщо два кути рівні, то їхні градусні міри теж рівні.***

Якщо градусні міри двох кутів не рівні, то кут з більшою градусною мірою називають більшим з них. Наприклад, кут BAD на рис. 44 більший від кута BAC (перевірте це за допомогою транспортира). Найбільшим же кутом на цьому рисунку є кут CAD, а кути BAD і BAC є його частинами.

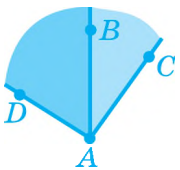


Рис. 44

Рівні кути надалі позначатимемо рівною кількістю дуг. На рис. 45 зображено рівні між собою кути A та B, а також рівні між собою кути C і D.

Рис. 45

Промінь, який виходить з вершини кута та ділить його на два рівні кути, називають ***бісектрисою*** цього кута.

Наприклад, на рис. 46 $\angle ABD = \angle DBC$, отже, промінь BD є бісектрисою кута ABC.

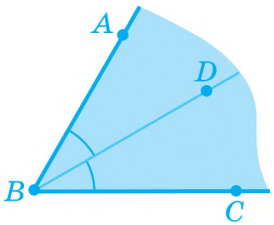


Рис. 46

Кут, що дорівнює 90°, називають ***прямим кутом***. Кут, менший від 90°, називають ***гострим кутом***, а кут, більший від 90°, але менший від 180°, називають ***тупим кутом***. На рис. 47 зображено гострий кут A, прямий кут B та тупий кут C. Як ви помітили, прямий кут позначають на кресленнях спеціальним значком «⌐» (рис. 47).

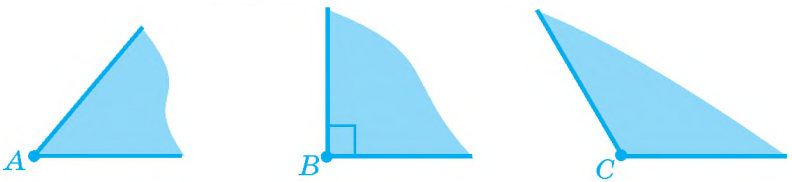


Рис. 47

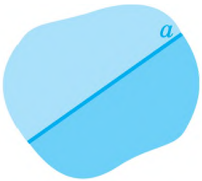
ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

71. Установіть вид кута, якщо промінь, який проходить між його сторонами, ділить цей кут на кути: **а)** 32° і 92°; **б)** 27° і 53°; **в)** 110° і 70°; **г)** 38° і 52°.

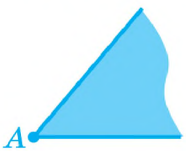
72. Побудуйте за допомогою транспортира кут A, градусна міра якого дорівнює 70°, і проведіть його бісектрису.

73. Установіть градусну міру і вид кута, якщо його бісектриса утворює з однією з його сторін кут, що дорівнює: **а)** 35°; **б)** 75°; **в)** 90°.

ОСНОВНЕ В § 3

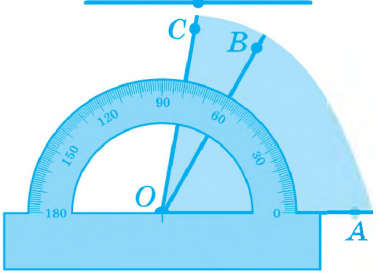


Пряма розбиває площину на дві півплощини.



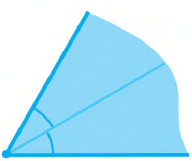
Кут — це два промені, які мають спільний початок, і частина площини, обмежена цими променями. Промені називають сторонами кута, а їх спільний початок — вершиною кута.

Розгорнутий кут — це кут, сторони якого є доповняльними променями.

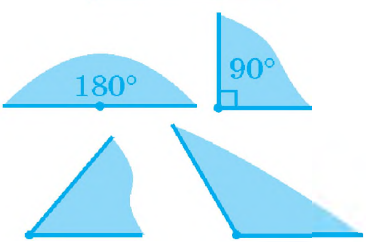


Кожен кут має певну градусну міру. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які його поділяє будь-який промінь, що проходить між його сторонами.

Наприклад, $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$.



Бісектриса кута — промінь, який виходить з вершини кута та поділяє його на два рівні кути.



Розгорнутий кут дорівнює 180°.

Прямий кут дорівнює 90°.

Гострий кут менший від 90°.

Тупий кут більший від 90°, але менший від 180°.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Точки A, B і C не лежать на одній прямій. Чи може пряма a, яка не містить точок A, B і C, перетинати лише ***один*** з відрізків AB, BC, AC?

Розв'язання. Пряма a розбиває площину на дві півплощини. Можливі два випадки (див. рис. 48): 1) усі три дані точки лежать в одній із цих півплощин; 2) не всі три точки лежать в одній півплощині. У першому випадку пряма a не перетинає ***жоден*** з відрізків AB, BC, AC. У другому випадку нехай дві з даних точок (наприклад, A і B) лежать в одній півплощині, а одна точка (наприклад, C) — в іншій. Тоді пряма a перетинає не один, а ***два*** відрізки: AC і BC.

Рис. 48

Відповідь. Не може. ■

Вправа 2. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB, який дорівнює 100°. Які градусні міри кутів AOC і BOC, якщо кут AOC на 40° менший від кута BOC (рис. 49)?

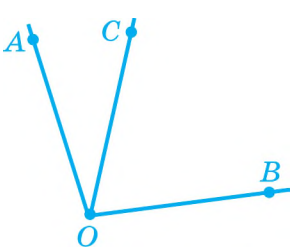


Рис. 49

Розв'язання. Нехай $\angle AOC = x°$, тоді $\angle BOC = (x + 40)°$. Оскільки $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC$, то маємо $x + x + 40 = 100$. Звідси $x = 30$. Отже, $\angle AOC = 30°$, $\angle BOC = 30° + 40° = 70°$.

Відповідь. $\angle AOC = 30°$, $\angle BOC = 70°$. ■

Вправа 3. Відомо, що $\angle AOC = 70°$, $\angle BOC = 30°$. Чому може дорівнювати кут AOB?

Розв'язання. Кути AOC і BOC, які мають спільну сторону OC, можна відкласти від сторони OC або в різні півплощини, або в одну півплощину (див. рис. 50).

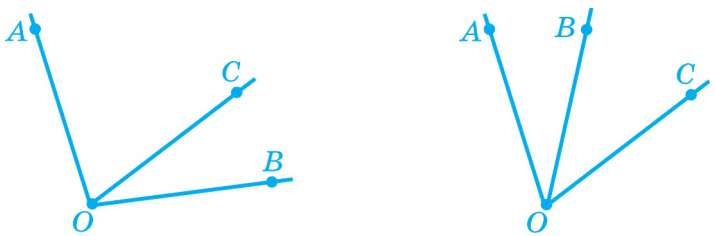


Рис. 50

У першому випадку $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC = 70° + 30° = 100°$. У другому випадку промінь OB лежить між сторонами кута AOC, або промінь OA лежить між сторонами кута BOC. Промінь OA не може проходити між сторонами кута BOC, бо тоді $30° = \angle BOA + 70°$, що неможливо. Отже, промінь OB лежить між сторонами кута AOC. У цьому випадку $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, звідки одержуємо $\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC = 70° - 30° = 40°$.

Відповідь. 100° або 40°. ■

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Порівняйте на око кути ABC і MNP, які зображено на рисунку. Перевірте своє припущення вимірюванням градусних мір цих кутів.

2. Порівняйте на око кути *ABC* і *KLM*, які зображено на рисунку. Перевірте своє припущення вимірюванням градусних мір цих кутів.

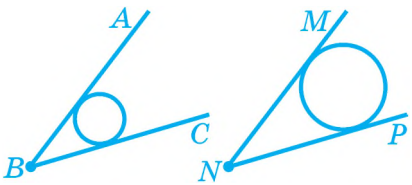


Рис. до завдання 1

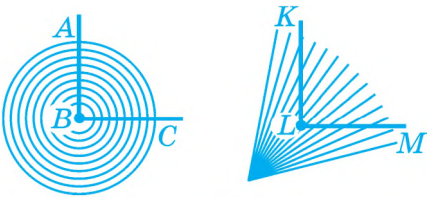
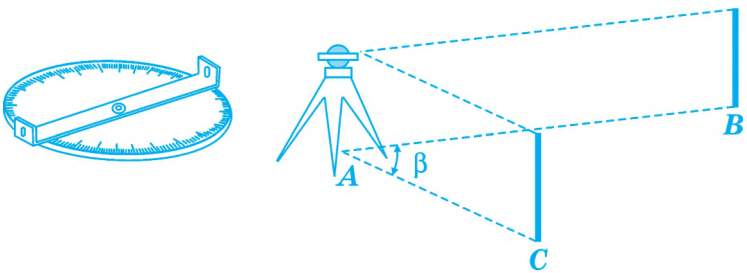


Рис. до завдання 2

3. Кути на місцевості вимірюють астролябією, яку зображено на рисунку. Поясніть, як це роблять.



САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 3

1. Накресліть кут *BAC*, відзначте його дугою. Назвіть його вершину та сторони.
2. Яку фігуру називають кутом?
3. Накресліть розгорнутий кут, позначте його дугою.
4. Який кут називають розгорнутим? Чому дорівнює градусна міра розгорнутого кута?
5. Які основні властивості вимірювання кутів?
6. Який кут називають гострим; прямим; тупим?
7. Що таке бісектриса кута?
8. Сформулюйте властивість відкладання кута.

ЗАДАЧІ ДО § 3

РІВЕНЬ А

74. Знайдіть градусну міру кута, якщо промінь, що проходить між його сторонами, ділить цей кут на кути: **а)** 35° і 45°; **б)** 17° і 103°.

75. Проведіть промінь AB. За допомогою транспортира відкладіть від нього в різні півплощини кути $\angle CAB = 35°$ і $\angle DAB = 45°$. Обчисліть градусну міру кута DAC.

76. Проведіть промінь OA. За допомогою транспортира відкладіть від нього в одну півплощину кути $\angle BOA = 40°$ і $\angle COA = 105°$. Обчисліть градусну міру кута, утвореного променями OB і OC.

77. Промінь, що проходить між сторонами кута, ділить цей кут на кути 72° і 38°. Який кут утворює бісектриса даного кута з його стороною?

78. Побудуйте прямий кут і, виконавши необхідні обчислення, проведіть промінь, який проходить між сторонами цього кута так, щоб різниця кутів, на які він ділить прямий кут, дорівнювала 20°. Запишіть градусні міри утворених кутів.

79. Побудуйте розгорнутий кут і проведіть промінь, який проходить між сторонами цього кута і ділить його на кути, які відносяться як 2 : 3. Знайдіть градусні міри утворених кутів.

80. Який кут утворюють стрілки годинника: **а)** о 6-й годині; **б)** о 3-й годині; **в)** о 1-й годині; **г)** о 4-й годині?

81. Який кут утворюють стрілки годинника: **а)** о 15-й годині; **б)** о 9-й годині; **в)** о 20-й годині; **г)** о 23-й годині?

82. На який кут повернеться хвилинна стрілка: **а)** за 30 хвилин; **б)** за 15 хвилин; **в)** за 5 хвилин; **г)** за 20 хвилин?

РІВЕНЬ Б

83. У прямому куті проведено довільний промінь, що проходить між сторонами цього кута, і бісектриси кутів, на які він ділить прямий кут. Знайдіть кут між бісектрисами.

84. У куті A проведено довільний промінь, що проходить між сторонами цього кута, і бісектриси кутів, на які він поділив кут A. Знайдіть градусну міру кута A, якщо кут між бісектрисами дорівнює 75°.

85. Бісектриса даного кута утворює з його стороною кут, що дорівнює 36°. Чи може промінь проходити між сторонами цього кута, якщо він утворює з його стороною кут, що дорівнює 76°?

86. OB — промінь, що проходить між сторонами кута AOC, OC — промінь, що проходить між сторонами кута BOD. Знайдіть градусну міру кута BOC, якщо $\angle AOD = 67°$, $\angle AOC = 40°$, $\angle BOD = 49°$.

87. Відомо, що кут AOB дорівнює 100° (рис. 51). Промінь OC ділить кут AOB на кути AOC і COB такі, що кут AOC утричі більший від кута COB. Знайдіть градусну міру: **а)** кута COB; **б)** кута AOC.

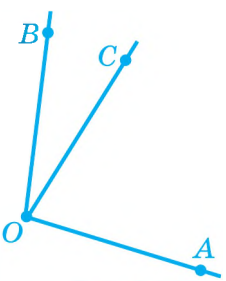


Рис. 51

88. У даному куті проведено п'ять променів, що проходять між сторонами цього кута і ділять його на рівні кути. Знайдіть градусну міру даного кута, якщо один з утворених кутів дорівнює 27°.

89. На який кут повернеться хвилинна стрілка: **а)** за 1 хвилину; **б)** за 6 хвилин; **в)** за 18 хвилин; **г)** за 24 хвилини?

90. На який кут повернеться годинна стрілка: **а)** за 2 години; **б)** за 4 години?

91. Який кут утворюють стрілки годинника: **а)** о 12 годині 30 хвилин; **б)** о 13 годині 30 хвилин; **в)** о 15 годині 30 хвилин; **г)** о 5 годині 30 хвилин?

РІВЕНЬ В

92. Дано пряму і сім точок, що їй не належать. Відомо, що три точки відносно даної прямої лежать в одній півплощині, а чотири точки — в іншій півплощині. Кожну пару точок сполучили відрізком. Скільки відрізків: **а)** перетинають пряму; **б)** не перетинають прямої?

93. Точки A, B, C і D не лежать на одній прямій. Відомо, що відрізок AB перетинає пряму CD, а відрізок CD перетинає пряму AB. Доведіть, що відрізки AB і CD перетинаються.

94. Промінь, що проходить між сторонами розгорнутого кута, ділить його на два кути, різниця яких становить $\frac{1}{6}$ їх суми. Знайдіть градусні міри цих кутів.

95. Промінь. що проходить між сторонами прямого кута, ділить його на два кути, різниця яких становить $\frac{1}{5}$ їх суми. Знайдіть градусні міри цих кутів.

96. З точки O проведено промені OA, OB, OC і OD. Відомо, що $\angle AOB = 75°$, $\angle BOC = 35°$, $\angle COD = 15°$. Установіть найбільшу та найменшу можливі градусні міри кута AOD. Виконайте відповідні рисунки.

97. Десять променів AB_1, AB_2, ..., AB_{10}, що проходять між сторонами кута CAD, ділять кут CAD на рівні кути CAB_1, B_1AB_2, ..., $B_{10}AD$. Знайдіть градусну міру кута CAD, якщо кут між бісектрисами кутів CAB_1 і $B_{10}AD$ дорівнює 60°.

98. Для градусних мір кутів AOC і COB, на які ділить кут AOB промінь OC, виконується рівність: $3\angle AOC + 2\angle COB = 140°$. Знайдіть градусну міру кута AOC, якщо $\angle AOB = 60°$.

99. Промінь OD ділить прямий кут AOB на кути AOD і BOD так, що виконується рівність: $4\angle AOD + 3\angle BOD = 280°$. Знайдіть градусну міру меншого із цих кутів.

100. Який кут утворюють стрілки годинника: **а)** о 12 годині 20 хвилин; **б)** о 14 годині 20 хвилин; **в)** о 17 годині 20 хвилин?

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Термін «*бісектриса*» походить від латинського «*бі*» — «*два*» і «*сектор*» — «*розсікати*», тобто та, що розсікає надвоє.
- Термін «*градус*» походить від латинського «*градус*» — «*крок*». За спостереженням вавилонян, сонячний диск вкладається у свій денний шлях від сходу до заходу 180 разів, тобто «Сонце робить 180 кроків».
- Термін «*транспортир*» походить від латинського «*транспортаре*», що означає «*переносити*», оскільки спочатку транспортир використовували не стільки для вимірювання кутів, скільки для побудови кута, що дорівнює даному.
- Кути вимірюють не лише у градусах, а й у радіанах (1 радіан $\approx 57°18'$), градах (1 град $\approx 0{,}9°$), румбах (1 румб $\approx 11{,}29°$).
- Знак кута «$\angle$» було введено у XVII ст.

§4 ТРИКУТНИК

1. Основні елементи трикутника
2. Рівні трикутники

1. ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ ТРИКУТНИКА

Візьмемо три точки, які не лежать на одній прямій (рис. 52), і сполучимо їх попарно відрізками. Отримаємо уже відомий нам трикутник.

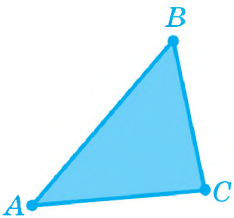


Рис. 52

Трикутником називають частину площини, обмежену трьома відрізками, що попарно сполучають три точки, які не лежать на одній прямій. Ці відрізки називають ***сторонами*** трикутника, а їхні кінці — ***вершинами*** трикутника. Сторони і вершини трикутника належать трикутнику[1].

Трикутник позначають трьома літерами, які відповідають його вершинам. На рис. 52 зображено трикутник ABC. Слово «трикутник» часто замінюють значком «Δ». Наприклад, ΔABC.

Кутом трикутника ABC при вершині A називають кут, утворений променями AB й AC. Сторону BC називають ***про-***

[1] Іноді трикутником називають фігуру, утворену трьома відрізками, які попарно сполучають три точки, що не лежать на одній прямій.

тилежною до вершини A або до кута A. Аналогічно кут A є протилежним до сторони BC, а кути B і C — прилеглими до сторони BC.

Суму довжин сторін трикутника називають його ***периметром***.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

101. Позначте точки A, C і D, що не лежать на одній прямій. Накресліть трикутник ACD. Запишіть його: **а)** сторони; **б)** кути (трьома й однією літерою). Заштрихуйте трикутник.

102. Накресліть трикутник MNK. Запишіть: **а)** кути, прилеглі до сторони MN (однією й трьома літерами); **б)** кути, прилеглі до сторони MK; **в)** сторону, протилежну до кута K; **г)** сторони, прилеглі до кута M.

103. Обчисліть периметр трикутника, сторони якого дорівнюють: **а)** 5 см; 7 см; 9 см; **б)** 4,5 см; 6,5 см; 6 см.

104. Периметр трикутника дорівнює 26 см, а сума довжин двох його сторін дорівнює 15 см. Знайдіть довжину третьої сторони.

2. РІВНІ ТРИКУТНИКИ

Трикутники, як і будь-які інші геометричні фігури, вважають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

При накладанні рівних трикутників суміщаються відповідні сторони та відповідні кути цих трикутників. Тому ***в рівних трикутників відповідні сторони та кути рівні.***

Наприклад, на рис. 53 зображено рівні трикутники ABC, KMN і PQR.

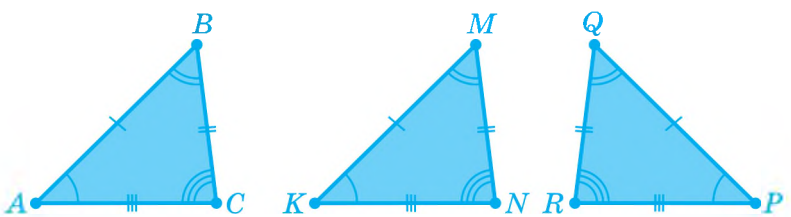


Рис. 53

Увага: перед тим як суміщати трикутники на площині, їх можна «перевертати» у просторі.

Для позначення рівності трикутників використовують знак «дорівнює»: наприклад $\Delta ABC = \Delta KMN$. Такий запис означає, що $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle M$, $\angle C = \angle N$, $AB = KM$, $AC = KN$, $BC = MN$.

Зверніть увагу на ***послідовності запису літер у позначенні вершин рівних трикутників***: літери, які відповідають рівним кутам, потрібно записувати в обох трикутниках ***на однакових місцях***.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

105. На рисунку 54 зображено рівні трикутники. Запишіть пари вершин, які при накладанні трикутників сумістяться. Доповніть записи рівностей трикутників: **а)** $\Delta DCA = \ldots$; **б)** $\Delta CDA = \ldots$; **в)** $\Delta ADC = \ldots$.

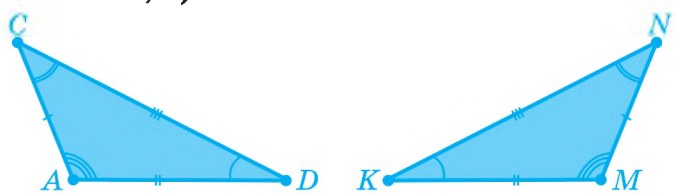


Рис. 54

106. Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см. Чому дорівнюють сторони рівного йому трикутника?

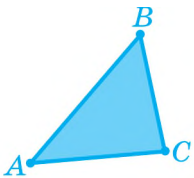
107. Кути трикутника дорівнюють 30°, 40° і 110°. Чому дорівнюють градусні міри кутів трикутника, рівного цьому трикутнику?

108. Дано $\Delta ABO = \Delta MKN$. Запишіть рівні сторони й рівні кути трикутників.

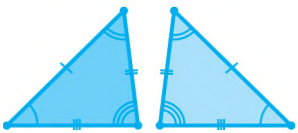
109. Дано $\Delta ABC = \Delta MOK$. $AB = 4$ см, $AC = 7$ см і $BC = 5$ см. Знайдіть довжини сторін трикутника MOK.

110. Дано $\Delta ACD = \Delta MOK$. $\angle M = 20°$, $\angle K = 70°$ і $\angle O = 90°$. Знайдіть градусні міри кутів трикутника ACD.

ОСНОВНЕ В § 4



Трикутник — частина площини, обмежена трьома відрізками, що попарно з'єднують три точки, які не лежать на одній прямій. Ці відрізки називають сторонами трикутника, а їхні кінці — вершинами трикутника.



У рівних трикутників відповідно рівні сторони та кути.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Трикутники ABC і KLM рівні. Відомо, що $AB = 5$ см, $\angle C = 60°$. Знайдіть сторону KL та кут M.

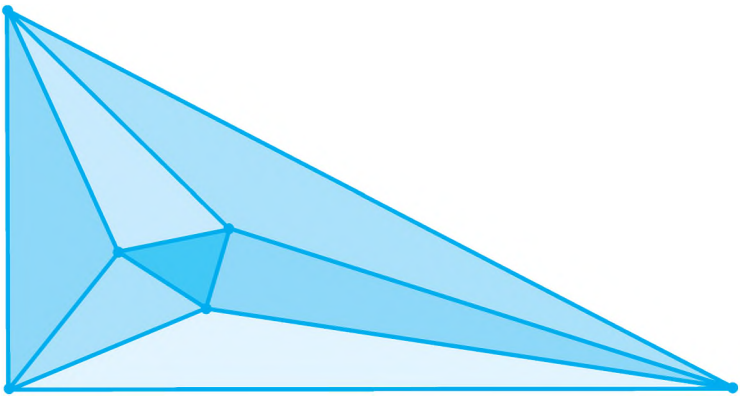
Розв'язання. Оскільки $\Delta ABC = \Delta KLM$, то $KL = AB$, $\angle M = \angle C$. Отже, $KL = 5$ см, $\angle M = 60°$.

Відповідь. 5 см, 60°. ■

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Укажіть об'єкти, які можуть бути моделями рівних трикутників.

2. Користуючись рисунком, укажіть, скільки трикутників зображено.



БЕСІДА ПІСЛЯ УРОКУ

Рівні трикутники можна сумістити накладанням. Чи означає це, що, коли ми переміщуємо трикутник, він завжди залишатиметься рівним собі?

Саме так, бо геометрія виникла з розгляду властивостей реальних ***твердих*** фігур, тобто фігур, що не змінюються при переміщенні в просторі. Наприклад, відрізок — це модель твердого стержня, що має визначену довжину, яка не змінюється при переміщенні. Якби фігури змінювалися при переміщенні, то ми не змогли б користуватися навіть лінійкою, бо після її переміщення відзначені на ній «сантиметри» стали б уже іншими!

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 4

1. Скільки вершин, сторін і кутів має трикутник?
2. Який кут лежить проти сторони AB трикутника ABC?
3. Яка сторона протилежна вершині C трикутника ABC?
4. Які сторони є прилеглими до вершини B трикутника ABC?
5. Дано два рівні трикутники — ABC і KLM. Назвіть відповідно рівні елементи трикутників.

ЗАДАЧІ ДО § 4

РІВЕНЬ А

111. Периметр трикутника дорівнює 36 см, а довжина однієї з його сторін — 16 см. Знайдіть довжини двох інших сторін, якщо: **а)** їх різниця дорівнює 4 см; **б)** їх відношення дорівнює 2 : 3.

112. Периметр трикутника дорівнює 42 см, а довжини його сторін відносяться як 3 : 5 : 6. Знайдіть довжину найменшої сторони трикутника.

113. Дано $\Delta ABC = \Delta MNK$. Периметр трикутника ABC дорівнює 37 см, $AB = 10$ см, $BC = 12$ см. Знайдіть сторону MK трикутника MNK.

114. Дано $\Delta ABC = \Delta NOK$. Знайдіть периметр трикутника NOK, якщо відомо, що $AB = 6$ см, $BC = 9$ см і $NK = 13$ см.

РІВЕНЬ Б

115*. Дано $\Delta ABC = \Delta PQR$. Чи є правильними записи:
а) $\Delta BAC = \Delta QPR$; **б)** $\Delta BCA = \Delta RQP$?

116*. На площині позначено такі точки A, C і D, що для трикутника з вершинами в цих точках виконується рівність $\Delta ACD = \Delta CDA$. Доведіть, що в трикутнику з вершинами в даних точках усі кути рівні.

117*. Знайдіть периметр трикутника з вершинами в точках P, O і K, якщо $OP = 7$ см, $PK = 6$ см і для трикутника виконується рівність $\Delta POK = \Delta KOP$.

РІВЕНЬ В

118*. Дано чотири точки A, B, C і D, які лежать на одній прямій, і точку O, яка не лежить на цій прямій (рис. 55). Кожні дві з п'яти точок сполучено відрізком. Скільки утворилося трикутників, однією з вершин яких є точка A; точка B; точка C; точка D? Скільки всього утворилося трикутників?

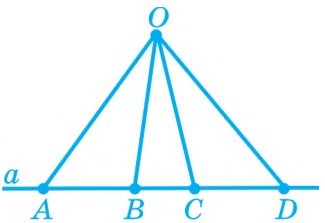


Рис. 55

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Перші відомості про трикутник та його властивості ми знаходимо в єгипетських папірусах, яким понад 4000 років.
- 2000 років тому в Давній Греції вивчення властивостей трикутника досягало такого високого рівня, а вчені створили теорії, що їх глибину змогли по-справжньому зрозуміти й оцінити лише математики XIX – XX століть.


ГЕРОН
(бл. I ст. до н. е.)
Давньогрецький учений

- Термін «*периметр*» походить від грецького «*пери*» — «*навколо*» і «*метрео*» — «*міряти*» — виміряний навколо.
- Властивості трикутника систематично викладено в книзі давньогрецького геометра Евкліда «Начала».

- Знак «∇» для позначення трикутника ще в I ст. н. е. застосовував старогрецький учений Герон, а знак «Δ» застосовують з IV ст. н. е.

2 ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

§5 СУМІЖНІ ТА ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

1. Суміжні кути
2. Вертикальні кути
3. Перпендикулярні прямі

1. СУМІЖНІ КУТИ

Два кути, у яких одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями, називають ***суміжними кутами***. На рис. 56 зображено суміжні кути ABD і DBC.

Оскільки в суміжних кутів дві сторони BA й BC є доповняльними променями, а спільна сторона BD проходить між сторонами кута ABC, то $\angle ABD + \angle DBC = 180°$.

Отже, отримаємо властивість суми кутів:

сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Із цього випливає: коли один із суміжних кутів гострий, то інший — тупий. А якщо один із суміжних кутів прямий, то й інший кут теж прямий (рис. 57). Якщо суміжні кути рівні, то вони обидва прямі.

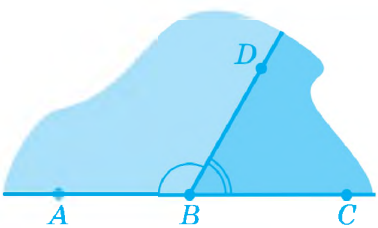


Рис. 56

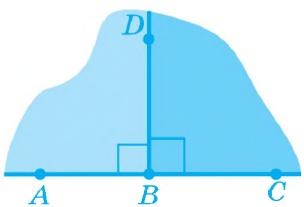


Рис. 57

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

119. Накресліть розгорнутий кут AOB. Проведіть у ньому промінь OC. Як називають кути AOC і BOC? Чому дорівнює сума їх градусних мір?

120. Накресліть гострий кут BAC. Побудуйте суміжний з ним кут зі спільною стороною: **а)** AB; **б)** AC. Якими є побудовані кути?

121. Як за градусною мірою кута знайти градусну міру суміжного з ним кута?

122. Яким є кут, якщо суміжний з ним кут є: **а)** гострим; **б)** тупим; **в)** прямим? Відповідь обґрунтуйте.

123. Якими є два кути, якщо суміжні з ними кути рівні?

2. ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

Накреслимо дві прямі AB і CD, які перетинаються в точці O (рис. 58). При цьому утворяться чотири кути, менші від розгорнутого: кути AOC, COB, BOD та AOD. Зверніть увагу на те, що сторони кута AOC є доповняльними променями до сторін кута BOD, а сторони кута COB — доповняльними променями до сторін кута AOD.

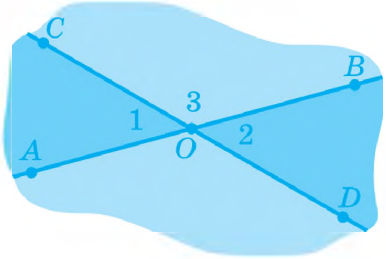


Рис. 58

Два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями до сторін іншого, називають ***вертикальними кутами***.

На рис. 58 вертикальними є кути AOC і BOD, а також кути COB і AOD. Вертикальні кути на цьому рисунку зафарбовано одним кольором.

Вертикальні кути здаються нам рівними — чи не так? Можна, звичайно, перевірити це за допомогою транспортира, але спробуймо замість вимірювань вдатися до міркувань.

Розгляньмо, наприклад, вертикальні кути 1 і 2 на рисунку 58. Кожний з цих кутів є суміжним кутом для того самого кута 3. Суми градусних мір суміжних кутів дорівнюють 180°, тому

$$\angle 1 + \angle 3 = 180°, \angle 2 + \angle 3 = 180°.$$

Праві частини цих рівностей рівні, тому рівні й ліві частини, тобто $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3$. Звідси випливає, що $\angle 1 = \angle 2$. У такий спосіб ми дійшли висновку, що ***вертикальні кути рівні*** (властивість вертикальних кутів).

Проведене міркування є прикладом ***доведення***: ми, не проводячи вимірювань, установили, що вертикальні кути рівні. Більш того: ми довели, що ***будь-які*** вертикальні кути рівні, а це встановити вимірюванням просто неможливо, бо вертикальних кутів існує нескінченно багато!

Доведемо тепер, що коли один з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 90°, тобто є прямим, то й усі інші кути, менші від розгорнутого, теж є прямими.

Нехай, наприклад, $\angle 1 = 90°$ (рис. 59). Кути 1 і 2 суміжні, тому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Звідки $\angle 2 = 180° - 90° = 90°$. Кути 1 і 3, а також 2 і 4 є вертикальними, тому $\angle 3 = \angle 1 = 90°$ і $\angle 4 = \angle 2 = 90°$. Отже, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90°$.

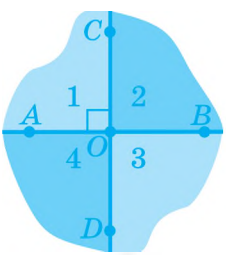


Рис. 59

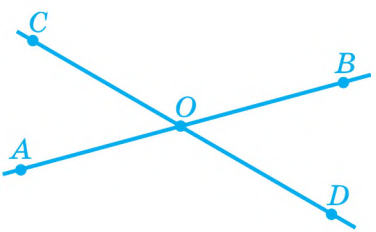


Рис. 60

Менший з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, називають ***кутом між цими прямими***. Наприклад, кут між прямими AB і CD на рис. 60[1] дорівнює кутові AOC або рівному йому кутові BOD.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

124. Які кути називають вертикальними? Яка їх властивість?

125. Накресліть гострий кут AOB. Побудуйте промінь OC — доповняльний до променя OA і промінь OD — доповняльний до променя OB. Як називають гострі кути AOB і COD? Як називають утворені тупі кути AOD і COB?

126. Знайдіть градусну міру кута, якщо вертикальний з ним кут дорівнює: **а)** 40°; **б)** 148°.

127. Накресліть: **а)** гострий кут; **б)** тупий кут. Побудуйте за допомогою лінійки й олівця рівний йому кут.

3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

Прямі, при перетині яких утворюється прямий кут, називають ***перпендикулярними***. Перпендикулярність прямих позначають значком «⊥». Наприклад, на рис. 61 $a \perp b$.

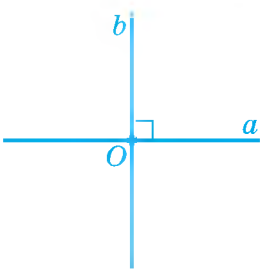


Рис. 61

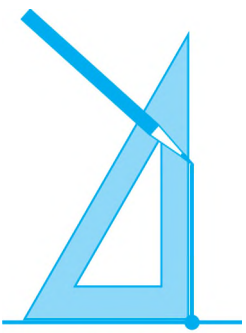


Рис. 62

[1] Надалі для спрощення рисунків ми не зафарбовуватимемо кути.

Усі кути, утворені при перетині перпендикулярних прямих, дорівнюють 90°. Тому кут між перпендикулярними прямими дорівнює 90°.

Для проведення прямої, перпендикулярної даній, використовують косинець, як показано на рис. 62.

Доведемо властивість перпендикулярних прямих:

через кожну точку прямої можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до неї.

Так, якби через точку *O* прямої *OA* можна було б провести не одну, а дві перпендикулярні до неї прямі *OB* й *OC* (рис. 63), то це означало б, що від променя *OA* в задану півплощину відкладено два ***різні*** кути *AOB* й *AOC* ***однакової*** градусної міри (90°). А це суперечить тому, що в задану півплощину від променя можна відкласти лише ***один*** кут заданої градусної міри. Доведення завершено. ■

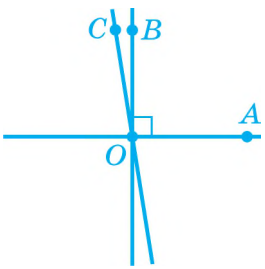


Рис. 63

Промені або відрізки називають ***перпендикулярними***, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Перпендикуляром до даної прямої називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого лежить на даній прямій. Спільну точку даної прямої та перпендикуляра до неї називають ***основою перпендикуляра.***

На рис. 64 зображено перпендикуляр *AB* до прямої *c*. Його основою є точка *B*.

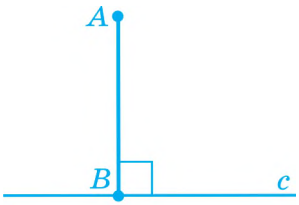


Рис. 64

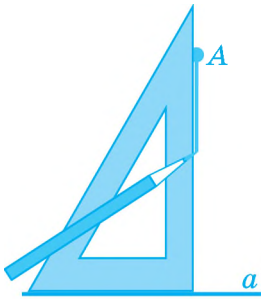


Рис. 65

Для проведення перпендикуляра до прямої з точки, яка не лежить на цій прямій, можна використати косинець (рис. 65).

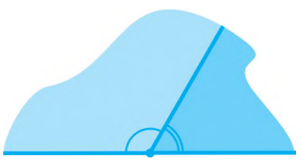
ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

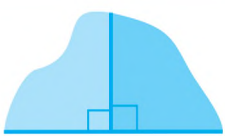
128. Градусна міра одного з кутів, утвореного при перетині двох прямих, дорівнює: **а)** 30°; **б)** 140°. Знайдіть градусну міру трьох інших кутів.

129. Під яким кутом перетинаються дві прямі, якщо градусна міра одного з утворених при їх перетині кутів дорівнює: **а)** 75°; **б)** 118°; **в)** 165°?

130. Чому дорівнює сума градусних мір усіх чотирьох кутів, на які дві прямі, що перетинаються, ділять площину?

ОСНОВНЕ В § 5



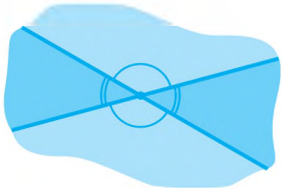


Суміжні кути — це два кути, одна сторона яких спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями.

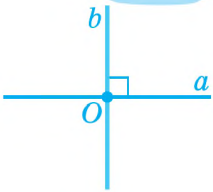
Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Якщо один із суміжних кутів прямий, то й інший кут прямий.

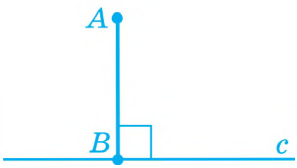
Якщо суміжні кути рівні, то вони обидва є прямими.



Вертикальні кути — це два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями до сторін іншого.
Вертикальні кути рівні.



Перпендикулярні прямі — це прямі, які перетинаються під прямим кутом.
Через кожну точку прямої можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної.



AB — перпендикуляр до прямої *c*.
Основа перпендикуляра — точка *B*.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Чому дорівнює кут між бісектрисами суміжних кутів?

Розв'язання. Нехай *BM* і *BN* — бісектриси суміжних кутів *ABD* і *DBC* (рис. 66) Знайдемо градусну міру кута між бісектрисами: $\angle MBN = \angle MBD + \angle DBN = \frac{1}{2}\angle ABD + \frac{1}{2}\angle DBC = \frac{1}{2}(\angle ABD + \angle DBC) = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

Отже, кут між бісектрисами суміжних кутів є прямим.
Відповідь. 90°. ■

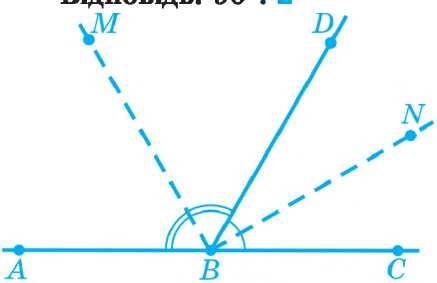


Рис. 66

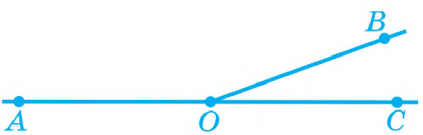


Рис. 67

Вправа 2. Один із суміжних кутів у 8 разів більший від іншого. Знайдіть градусну міру цих кутів.

Розв'язання. Виконаємо рисунок (див. рис. 67). Нехай $\angle BOC = x$, тоді $\angle AOB = 8x$. Оскільки кути суміжні, то $x + 8x = 180°$, звідки $x = 20°$. Отже, $\angle BOC = 20°$ і $\angle AOB = 8 \cdot 20° = 160°$.

Відповідь. 160° і 20°. ■

Вправа 3. Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 160°. Знайдіть градусні міри кожного з чотирьох кутів.

Розв'язання. Кути, про які йдеться в умові, не є суміжними, оскільки їх сума не дорівнює 180°. Тому це вертикальні кути, які є рівними. Оскільки їх сума дорівнює 160°, то кожен з них дорівнює $160° : 2 = 80°$. Кут, суміжний з кожним з цих кутів, дорівнює $180° - 80° = 100°$.

Відповідь. 80°, 100°, 80°, 100°. ■

Вправа 4. Три прямі перетинаються в одній точці. Три з утворених при цьому шести кутів α, β і γ відносяться як $1 : 2 : 3$ (див. рис. 68). Чи є серед даних прямих перпендикулярні?

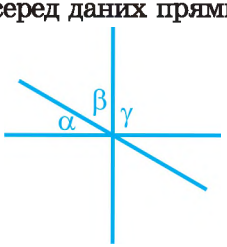


Рис. 68

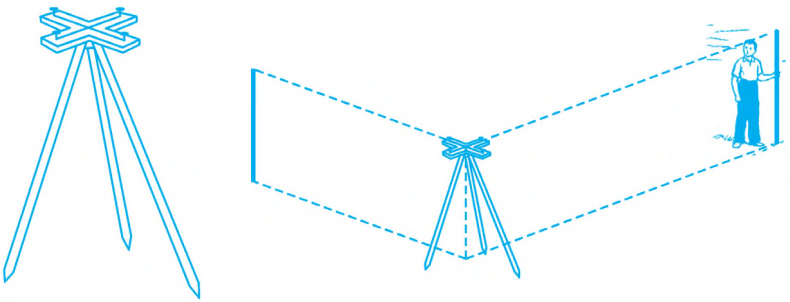
Розв'язання. Оскільки всі три кути різні, то серед них немає вертикальних. Очевидно, що тоді кути α, β і γ утворюють разом розгорнутий кут, звідки $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Відповідно до умови, $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3\alpha$, тому одержуємо: $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180°$; $6\alpha = 180°$. Отже, $\alpha = 30°$, $\beta = 2 \cdot 30° = 60°$, $\gamma = 3 \cdot 30° = 90°$. Отже, один з кутів, які утворилися при перетині прямих, — прямий, тобто дві з даних прямих перпендикулярні.

Відповідь. Так. ■

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Укажіть об'єкти, які можуть бути моделями перпендикулярних прямих.

2. Для побудови перпендикулярних прямих на місцевості застосовують екер. Поясніть за рисунком, як за допомогою цього приладу будують прямий кут.



3. Як знайти кут між стінками високого паркана, не проникаючи за цей паркан?
4. Згинаючи аркуш паперу, утворіть моделі перпендикулярних прямих.
5. Як, використовуючи шаблон кута у 10°, побудувати перпендикулярні прямі?

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 5

1. Які два кути називають суміжними? Яку вони мають властивість?
2. Сформулюйте і доведіть властивість суміжних кутів.

3. Які два кути називають вертикальними? Яку вони мають властивість?
4. Сформулюйте і доведіть властивість вертикальних кутів.
5. Які дві прямі називають перпендикулярними? Яку вони мають властивість?
6. Сформулюйте і доведіть властивість перпендикулярних прямих.
7. Який кут називають кутом між двома прямими?
8. Яку суперечність отримуємо при доведенні властивості перпендикулярних прямих?

ЗАДАЧІ ДО § 5

РІВЕНЬ А

131. Накресліть за допомогою транспортира гострий кут 40°. Побудуйте тупі кути, суміжні з ним. Обчисліть суму тупих кутів.

132. Знайдіть кут, якщо сума двох кутів, суміжних з ним, дорівнює 204°. Побудуйте ці кути.

133. Бісектриса кута утворює з його стороною кут 36°. Знайдіть кут, суміжний з даним.

134. Промінь, що проходить між сторонами даного кута, ділить його на кути 38° і 52°. Доведіть, що кут, суміжний з даним, є прямим.

135. Різниця двох суміжних кутів дорівнює 40°. Знайдіть кожний із цих кутів.

136. Один із суміжних кутів на 20° більший від іншого. Визначте градусну міру: **а)** більшого із суміжних кутів; **б)** кута, який удвічі більший від меншого з цих кутів?

137. Кут α поміщається в одному із суміжних кутів тричі, а в іншому — 7 разів. Скільки разів поміститься кут α в розгор-

нутому куті? Визначте градусну міру: **а)** кута α; **б)** меншого із суміжних кутів; **в)** більшого із суміжних кутів.

138. Знайдіть кожен із двох суміжних кутів, якщо їхні градусні міри відносяться як 3 : 7.

139. Установіть, якими — суміжними чи вертикальними — є два кути, утворені при перетині двох прямих, якщо:

а) їх різниця дорівнює 60°;

б) їх сума дорівнює 60°;

в) їх градусні міри відносяться як 1 : 2.

140*. Під яким кутом перетинаються дві прямі, якщо сума: **а)** двох кутів, що утворюються при їх перетині, дорівнює 70°; **б)** двох кутів, що утворюються при їх перетині, дорівнює 200°; **в)** трьох кутів, що утворюються при їх перетині, дорівнює 330°; **г)** трьох кутів, що утворюються при їх перетині, дорівнює 240°?

141. Знайдіть градусну міру кожного з вертикальних кутів, якщо їх сума дорівнює: **а)** 46°; **б)** 128°; **в)** 172°.

142. Сума двох вертикальних кутів, утворених при перетині прямих a і c, дорівнює 180°. Доведіть, що прямі a й c перпендикулярні.

РІВЕНЬ Б

143. Під яким кутом перетинаються дві прямі, якщо різниця градусних мір двох із чотирьох утворених кутів дорівнює 50°?

144. Під яким кутом перетинаються дві прямі, якщо сума градусних мір двох із чотирьох утворених кутів дорівнює 290°?

145. Сума градусних мір кута A і двох суміжних з ним кутів дорівнює 220°. Знайдіть градусну міру кута A.

146. Під яким кутом перетинаються дві прямі, якщо сума градусних мір трьох з чотирьох утворених кутів дорівнює 250°?

147. На рисунку 69 $\angle AOC = 155°$, $\angle BOD = 115°$. Доведіть, що прямі OC і BO перпендикулярні.

148. На рисунку 70 $\angle MOD = 145°$, $\angle AON = 155°$. Знайдіть кут між прямими AB і CD.

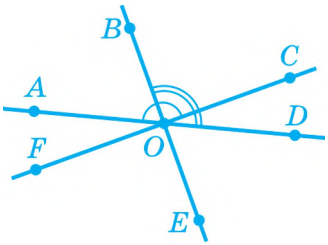


Рис. 69

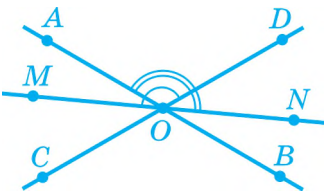


Рис. 70

РІВЕНЬ В

149. Дано два кути, різниця яких дорівнює 110°. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них, дорівнює 150°.

150. Дано гострий кут A і тупий кут B, градусні міри яких відносяться як 2 : 3. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них, дорівнює 110°.

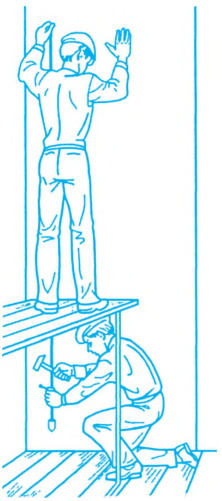
151. Градусні міри гострого і тупого кутів відносяться як 5 : 24. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з цих кутів, дорівнює 60°.

152. Бісектриса даного кута утворює з його стороною кут, удвічі менший від кута, суміжного з даним. Знайдіть градусну міру даного кута.

153. Сума градусних мір трьох із чотирьох кутів, на які ділять площину дві прямі, що перетинаються, дорівнює 250°. Яким може бути значення суми при іншому виборі трьох кутів?

154. Сума градусних мір двох з чотирьох кутів, на які ділять площину дві прямі, що перетинаються, утричі більша від суми двох інших. Знайдіть кут, під яким перетинаються прямі.

ЦІКАВО ЗНАТИ



- Термін «*вертикальний*» походить від латинського «*вертікаліс*», що в перекладі означає «*прямовисний*», тобто той, що має напрямок виска (вертикальний напрямок). Висок складається зі шнурка (мотузки) та підвішеного до нього тягарця. Будівельники користуються виском, коли зводять стіни.
- Термін «*суміжний*» означає «*такий, що межує з чим-небудь; прилеглий до чогось*». У побуті, наприклад, кажуть про суміжні кімнати, тобто про кімнати, які мають спільну стіну.
- Рівність вертикальних кутів уперше довів давньогрецький учений Фалес Мілетський.
- Знак перпендикулярності «⊥» увів у XVII ст. французький математик П. Ерігон.

§6 ГЕОМЕТРІЯ — ШКОЛА МІРКУВАННЯ

1. Де і як зародилася геометрія
2. Види математичних речень

1. ДЕ І ЯК ЗАРОДИЛАСЯ ГЕОМЕТРІЯ

СТАРОДАВНІЙ ЄГИПЕТ

Слово «геометрія» походить від грецьких слів «*гео*» — ***земля*** і «*метрео*» — ***вимірюю***. Пояснюється це тим, що геометрами греки називали давньоєгипетських землемірів.

Землемірів дуже поважали у Стародавньому Єгипті, бо вони відновлювали межі земельних ділянок після розливів Нілу, які відбувалися щороку.

Геометричні знання єгиптяни використовували також у будівництві величезних пірамід. Папіруси, які збереглися досі, вказують на те, що давньоєгипетська геометрія була швидше збірником рецептів («роби так»), а не наукою в сучасному розумінні цього слова.

СТАРОДАВНЯ ГРЕЦІЯ

Приблизно за шість століть до нашої ери з геометричними знаннями єгиптян ознайомилися грецькі вчені. Вивчаючи геометрію єгиптян, греки значно перевершили своїх учителів. Основним досягненням давньогрецьких учених був винахід ***методу міркувань***. Греки здогадалися, що чимало властивостей геометричних фігур можна встановлювати без вимірювань за допомогою ***міркувань***. Геометрія виявилася чудо-

вою «школою мислення», завдяки чому вона стала взірцем для багатьох наук.

Користь від вивчення геометрії полягає не лише в ознайомленні з властивостями геометричних фігур, але й в ***оволодінні методами міркувань***. А це потрібно ***кожному***, тому що ті самі методи міркувань можна застосовувати в усіх науках, у ділових питаннях та й просто в житті. Тому, вивчаючи геометрію, потрібно уважно ***стежити за ходом міркувань***, ***міркувати самому***, навчаючись на геометричних взірцях, які є неперевершеними вже більш ніж два з половиною тисячоліття.

Першим застосував метод міркувань для доведення Фалес Мілетський, який жив у VII–VI століттях до нашої ери.

ФАЛЕС МІЛЕТСЬКИЙ
(бл. 625 — бл. 547 до н. е.)

ПІФАГОР
(бл. 572 — бл. 497 до н. е.)

Рис. 71

Найславетнішим учнем Фалеса був Піфагор, який заснував товариство піфагорійців, що займалися вивченням арифметики, музики, геометрії й астрономії. Піфагор та його учні встановили чимало властивостей геометричних фігур, у тому числі знамениту «теорему Піфагора» — перлину всієї математики. Ви вивчатимете її наступного навчального року.

У III столітті до н. е. геометричні знання, накопичені за кілька століть, зібрав у знамениту книгу «Начала» грецький учений Евклід.

2. ВИДИ МАТЕМАТИЧНИХ РЕЧЕНЬ

У математиці використовують особливі типи речень, які потрібно вміти розрізняти і правильно користуватися ними.

По-перше, це ***означення***. Так називають речення, які пояснюють зміст поняття. Наприклад: «Два кути, у яких одна сторона спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями, називають суміжними кутами».

По-друге, це ***аксіоми*** (від грецького «*аксіос*», що в перекладі означає «*не викликає сумнівів*»). Так називають твердження, які приймають без доведення. Наприклад, аксіомою є твердження: «Через будь-які дві точки можна провести лише одну пряму».

По-третє, це ***теореми***. Так називають твердження, істинність яких ***доводять*** за допомогою міркувань (грецьке слово «*теоріо*», що в перекладі означає «*міркую*»). Наприклад, теоремою є доведене вище твердження про рівність вертикальних кутів (до речі, саме ця теорема була першою з тих, що довів Фалес).

У доведенні теореми використовують означення, аксіоми, а також раніше доведені теореми.

Формулювання кожної теореми складається із двох частин, які називають ***умовою*** та ***висновком***. В умові йдеться про те, що дано, а у висновку — що потрібно довести.

Щоб краще усвідомити, у чому полягають умова й висновок теореми, корисно формулювати теорему, використовуючи словесну конструкцію «якщо..., то...». Наприклад: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні». Тут умовою теореми є «кути вертикальні», а висновком — «вони рівні».

Деякі теореми безпосередньо випливають з аксіоми або теореми. Їх називають ***наслідками***.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

155. Закінчіть думку:

а) речення, яке пояснює зміст поняття, називають ...;

б) твердження, яке приймають без доведення, називають ...;

в) твердження, істинність якого доводять, називають ... .

156. Серед наведених нижче тверджень укажіть аксіоми:

а) для будь-якої прямої є точки, які належать прямій, і точки, які не належать їй;

б) відрізок — це частина прямої, яка складається з усіх точок, розміщених між двома точками, а також самих цих точок;

в) кожен відрізок має певну довжину.

157. Серед наведених нижче тверджень укажіть означення:

а) із трьох точок на прямій одна лежить між двома іншими;

б) промінь — це частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать з одного боку від деякої точки, а також самої цієї точки;

в) довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які його розділяє будь-яка його точка;

г) дві геометричні фігури рівні, якщо їх можна сумістити накладанням.

158. Серед наведених нижче тверджень укажіть теореми:

а) кут — це частина площини, обмежена двома променями, що мають спільний початок;

б) вертикальні кути рівні;

в) два кути, у яких одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями, називають суміжними кутами;

г) через задану точку прямої можна провести лише одну пряму, перпендикулярну даній прямій.

159. Виділіть умову та висновок у наведених теоремах. Сформулюйте ці теореми, використовуючи словесну конструкцію «якщо..., то...»:

а) відрізки рівної довжини рівні;

б) кути з рівною градусною мірою рівні.

160. Визначте, які з наведених нижче тверджень є аксіомами, які — теоремами, а які — означеннями:

а) через будь-які дві точки можна провести тільки одну пряму;

б) два промені однієї прямої, які мають тільки одну спільну точку, називають доповняльними;

в) відстань між двома точками дорівнює довжині відрізка з кінцями в цих точках;

г) на даному промені від його початку можна відкласти лише один відрізок заданої довжини;

д) розгорнутий кут дорівнює 180°;

е) вертикальні кути рівні.

ОСНОВНЕ В § 6

У геометрії властивості фігур установлюють за допомогою міркувань.

Означеннями називають одне або кілька речень, які пояснюють зміст поняття.

Аксіомами називають твердження, прийняті без доведення.

Теоремами називають твердження, істинність яких доводять за допомогою міркувань.

Формулювання теореми складається з умови та висновку. В умові йдеться про те, що дано, а у висновку — що потрібно довести.

БЕСІДА ПІСЛЯ УРОКУ

Чи можна вказати означення, аксіоми й теореми, які ми уже вивчили?

Авжеж! Наведемо вже знайомі вам основні означення, аксіоми, теореми та наслідки — це буде добрим повторенням вивченого.

ОЗНАЧЕННЯ

Променем називають частину прямої, яка складається з усіх її точок, що лежать з одного боку від вибраної на ній точки, а також самої цієї точки.

Два промені однієї прямої, які мають тільки одну спільну точку, називають доповняльними.

Відрізком називають частину прямої, яка складається з усіх точок прямої, що лежать між двома її даними точками, а також самих цих точок.

Відстанню між двома точками називають довжину відрізка з кінцями в цих точках.

Дві геометричні фігури називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Два промені зі спільним початком і частину площини, обмежену ними, називають кутом.

Кут називають розгорнутим, якщо сторони кута є доповняльними променями.

Промінь, який виходить з вершини даного кута та ділить його на два рівних кути, називають бісектрисою цього кута.

Кут, який дорівнює 90°, називають прямим кутом. Кут, менший від 90°, називають гострим кутом, а кут, більший від 90°, але менший від 180°, називають тупим кутом.

Трикутником називають частину площини, обмежену трьома відрізками, які попарно сполучають три точки, що не лежать на одній прямій.

Два кути, у яких одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями, називають суміжними кутами.

Два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями до сторін іншого, називають вертикальними кутами.

Прямі, при перетині яких утворюється прямий кут, називають перпендикулярними.

Перпендикуляром до даної прямої називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної, один з кінців якого лежить на даній прямій.

АКСІОМИ

Для будь-якої прямої є точки, які належать прямій, і точки, які їй не належать.

Через дві точки можна провести тільки одну пряму.

Із трьох точок на прямій тільки одна лежить між двома іншими.

Кожен відрізок має певну довжину, більшу від нуля.

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка.

На даному промені від його початку завжди можна відкласти відрізок заданої довжини, і до того ж лише один.

Пряма розбиває площину на дві півплощини.

Кожен кут має певну градусну міру.

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які його розбиває будь-який промінь, що проходить між його сторонами.

У задану півплощину від даного променя завжди можна відкласти лише один кут заданої градусної міри.

ТЕОРЕМИ

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Вертикальні кути рівні.

Через кожну точку прямої можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до неї.

НАСЛІДКИ

Дві прямі можуть перетинатися лише в одній точці.

Якщо суміжні кути рівні, то вони обидва прямі.

Як багато означень та аксіом ми вже знаємо! А ось теорем і наслідків — ще мало...

Це тому, що ми тільки почали вивчати геометрію. Попереду нас чекає вивчення ще багатьох означень, теорем і наслідків, а нових аксіом уже майже не буде.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Термін «*аксіома*» походить від грецького «*аксіос*» — «*цінний, беззаперечний, такий, що не викликає сумніву*». Термін увів давньогрецький учений Арістотель.
- Термін «*теорема*» походить від грецького «*теоремос*» — «*розглядати, обмірковувати*».

АРІСТОТЕЛЬ
(384 р. – 322 р. до н. е.)
Давньогрецький учений

- Термін «*планіметрія*» походить від латинського «*планум*» — «*площина*» і грецького «*метрео*» — «*міряти*», що означає вимірювання на площині.
- Славнозвісна праця Евкліда «Начала» стала найпопулярнішим підручником, за яким вивчали геометрію протягом близько 2000 років. З 1482 року він перевидавався багатьма мовами світу понад 500 разів.
- Сучасний переклад книги «Начала» був зроблений українським ученим та істориком геометрії, професором Київського університету Михайлом Єгоровичем Ващенком-Захарченком (1825 – 1912).
- Видатний український учений, професор Харківського університету Олексій Васильович Погорєлов (1919 – 2002) збагатив сучасну геометрію новітніми дослідженнями, створив підручник «Геометрія» для шкіл.
- Повну систему аксіом евклідової геометрії дав Давід Гільберт (1862 – 1943).

О. В. ПОГОРЄЛОВ
(1919 – 2002)
Український учений,
автор підручника «Геометрія»

ДАВІД ГІЛЬБЕРТ
(1862 – 1943)
Німецький математик

КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 1 – § 6

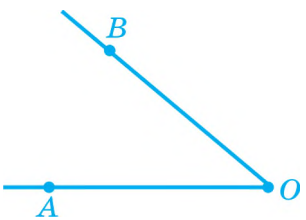
ПОЧАТКОВИЙ РІВЕНЬ

1. Зображена на рисунку фігура є...

а) променем; **б)** прямою; **в)** відрізком.

2. Градусна міра зображеного на рисунку кута AOB дорівнює...

а) 40°; **б)** 140°; **в)** 50°.

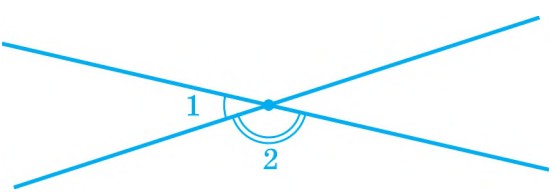


3. $\Delta ABC = \Delta MNP$, $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 9$ см. Периметр трикутника MNP дорівнює...

а) 18 см; **б)** 27 см; **в)** 72 см.

4. Кути 1 і 2, зображені на рисунку, ...

а) суміжні; **б)** вертикальні; **в)** рівні.



5. Визначте градусну міру кута, якщо суміжний з ним кут дорівнює 82°.

а) 8°; **б)** 98°; **в)** 164°.

СЕРЕДНІЙ РІВЕНЬ

6. На відрізку AB завдовжки 28 см узято точку C. Знайдіть довжини відрізків AC і BC, якщо відрізок AC утричі довший, ніж відрізок BC.
7. Проведіть промінь OA. За допомогою транспортира відкладіть у різні півплощини відносно прямої OA такі кути AOM і AON, що $\angle AOM = 50°$, $\angle AON = 65°$. Знайдіть градусну міру кута MON.
8. Градусна міра одного з кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 135°. Знайдіть градусну міру трьох інших кутів.

ДОСТАТНІЙ РІВЕНЬ

9. На відрізку MN завдовжки 34 см узято точку K. Знайдіть довжини відрізків MK і KN, якщо відрізок MK на 6 см довший, ніж відрізок KN.
10. На який кут повернеться годинна стрілка за 0,5 год?
11. Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 240°. Під яким кутом перетинаються прямі?

ВИСОКИЙ РІВЕНЬ

12. Точки A, B, C і D належать прямій a. Якою може бути відстань між точками A і D, якщо $AB = 17$ см, $BC = 9$ см, $CD = 3$ см?
13. Кут, що дорівнює 144°, ділиться променем на два кути, один з яких становить 20% іншого. Знайдіть ці кути.
14. Дано два кути, один з яких на 130° менший від іншого. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них, дорівнює 40°.

§7 КУТИ, ЯКІ УТВОРЮЮТЬСЯ ПРИ ПЕРЕТИНІ ДВОХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

1. Різносторонні, односторонні та відповідні кути
2. Властивості кутів, які утворюються при перетині двох прямих січною
3. Обернена теорема

1. РІЗНОСТОРОННІ, ОДНОСТОРОННІ ТА ВІДПОВІДНІ КУТИ

Означення. Пряма, яка перетинає дві інші прямі в різних точках, називають ***січною*** відносно цих прямих.

На рис. 72 зображено січну c відносно прямих a і b.

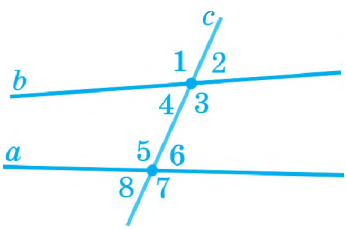


Рис. 72

При перетині прямих січною утворюється 8 кутів, менших від розгорнутого, які на рис. 72 позначені числами. Градусні міри деяких з цих кутів пов'язані між собою. Наприклад, $\angle 1 = \angle 3$, оскільки ці кути є вертикальними, а $\angle 3 + \angle 4 = 180°$, оскільки ці кути є суміжними.

Деякі ***пари*** розглянутих кутів мають спеціальні назви:

кути 4 і 6, а також кути 3 і 5 називають ***внутрішніми різносторонніми***. Надалі для спрощення формулювань замість терміна «внутрішні різносторонні» вживатимемо термін «різносторонні».

Кути 4 і 5, а також кути 3 і 6 називають ***внутрішніми односторонніми***. Надалі для спрощення формулювань замість терміна «внутрішні односторонні» вживатимемо термін «односторонні».

Кути 1 і 5; 4 і 8; 2 і 6; 3 і 7 називають ***відповідними***.

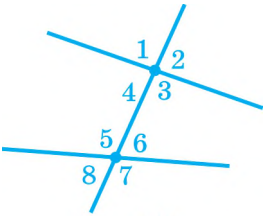


Рис. 73

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

161. На рисунку 73 $\angle 2 = 85°$, $\angle 6 = 70°$. Знайдіть градусні міри інших кутів.

162. Один з кутів, що утворився при перетині двох прямих січною, дорівнює 70°, а інший — 100°. Чи мають ці кути спільну вершину? Які градусні міри кутів при одній вершині і які — при іншій?

2. ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ, ЯКІ УТВОРЮЮТЬСЯ ПРИ ПЕРЕТИНІ ДВОХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

Теорема. Якщо різносторонні кути рівні, то сума односторонніх кутів дорівнює 180°.

Доведення. Нехай, наприклад, пряма c є січною відносно прямих a і b, до того ж $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 74). Доведемо, що $\angle 1 + \angle 3 = 180°$.

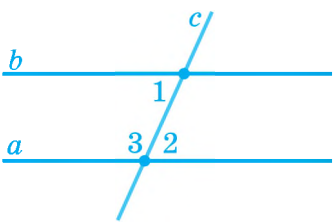


Рис. 74

Кути 2 і 3 суміжні, тому $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Підставляючи в цю рівність замість кута 2 рівний йому за умовою кут 1, одержуємо $\angle 1 + \angle 3 = 180$. Теорему доведено. ■

Теорема. Якщо сума односторонніх кутів дорівнює 180°, то різносторонні кути рівні.

Доведення. Нехай, наприклад, пряма c є січною відносно прямих a і b, до того ж $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (рис. 75). Доведемо, що $\angle 1 = \angle 3$.

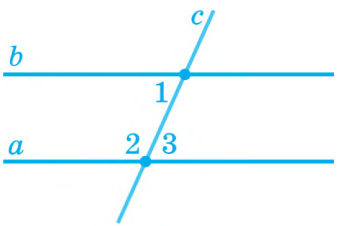


Рис. 75

Кути 2 і 3 суміжні, тому $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Отже, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$. Звідси випливає, що $\angle 1 = \angle 3$. Теорему доведено. ■

3. ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА

Зверніть увагу на дві теореми, доведені в попередньому пункті. Вони майже однакові! У цих теоремах умова і висновок «помінялися місцями»: умова першої теореми є висновком другої, а висновок першої — умовою другої. У такому випадку другу теорему називають ***оберненою*** до першої теореми.

У випадку з різносторонніми й односторонніми кутами обидві теореми існують, але це не завжди так. Для деяких теорем оберненої теореми не існує.

Згадаймо, наприклад, теорему про вертикальні кути. Умова цієї теореми — «кути вертикальні», а висновок — «кути рівні». Обернена теорема формулювалася б так: «якщо кути рівні, то вони вертикальні». А це неправильно: так, на рис. 75 кути 1 і 3 рівні, але не вертикальні.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

163. На рисунку 76 зображено кути 1–4. Чому дорівнює:

1) $\angle 1 + \angle 2$;

2) $\angle 3 + \angle 4$;

3) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$?

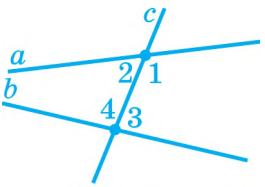


Рис. 76

164. Чому дорівнює сума односторонніх кутів однієї пари, якщо сума односторонніх кутів іншої пари дорівнює: **а)** 140°; **б)** 180°?

165. На рисунку 77 $\angle 1 = \angle 2$. Якими є кути 3 і 4?

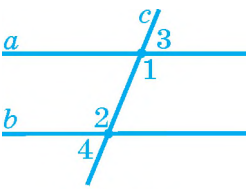
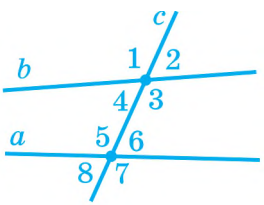
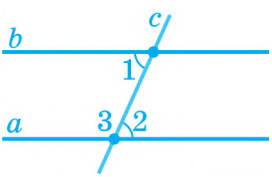


Рис. 77

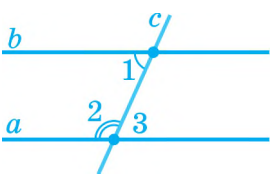
ОСНОВНЕ В § 7



Пари кутів, утворених при перетинанні двох прямих січною, називають:
різносторонніми: 4 і 6; 3 і 5;
односторонніми: 4 і 5; 3 і 6;
відповідними: 1 і 5; 4 і 8; 2 і 6; 3 і 7.



Якщо при перетині двох прямих січною різносторонні кути рівні, то сума односторонніх кутів дорівнює 180°.



Якщо при перетині двох прямих січною сума односторонніх кутів дорівнює 180°, то різносторонні кути рівні.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. При перетині прямих a і b січною c утворилося 8 кутів. Один з цих кутів дорівнює 60°, а інший — 30°. Знайдіть градусні міри решти кутів.

Розв'язання. Зазначені кути 30° і 60° не могли утворитися при перетині прямої c з ***однією*** із прямих a або b, оскільки кути, що утворюються при перетині двох прямих, або суміжні (тоді їх сума дорівнює 180°, але $30° + 60° \neq 180°$), або вертикальні (тоді вони рівні, але $30° \neq 60°$). Нехай, наприклад, кут 60° утворився при перетині прямих c і a (див. рис. 78). Тоді інші кути при перетині цих прямих дорівнюють 60° і 120°. Кут 30° утвориться тоді при перетині прямих c і b. Інші кути при перетині цих прямих дорівнюватимуть 30° і 150°.

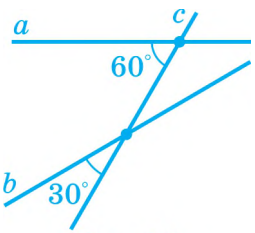
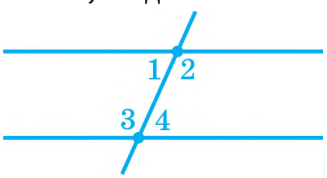


Рис. 78

Відповідь. 60°, 120°, 120° і 30°, 150°, 150°. ■

Вправа 2. Доведіть: якщо різносторонні кути однієї пари рівні, то різносторонні кути іншої пари теж рівні.

Розв'язання. Нехай, наприклад, $\angle 1 = \angle 4$ (див. рис. 79). Доведемо, що $\angle 2 = \angle 3$. Кути 1 і 2 суміжні, тому $\angle 2 = 180° - \angle 1$. Аналогічно $\angle 3 = 180° - \angle 4$. Оскільки $\angle 1 = \angle 4$, то $180° - \angle 1 = 180° - \angle 4$, звідки випливає, що $\angle 2 = \angle 3$.



■

Рис. 79

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 7

1. Яку пряму називають січною для двох прямих?
2. На рисунку 80 назвіть:
   а) дві пари односторонніх кутів;
   б) дві пари різносторонніх кутів;
   в) кут, відповідний куту 1; куту 4.
3. Сформулюйте теореми про залежність між властивістю різносторонніх кутів і сумою односторонніх кутів.
4. Якщо різносторонні кути однієї пари рівні, то й різносторонні кути іншої пари теж рівні. Доведіть.
5. Доведіть, що коли сума односторонніх кутів однієї пари дорівнює 180°, то сума односторонніх кутів іншої пари теж дорівнює 180°.
6. На рисунку 81 $\angle 1 = \angle 2$. Чому дорівнює $\angle 2 + \angle 3$?
7. На рисунку 81 $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Якими є кути 1 і 2?

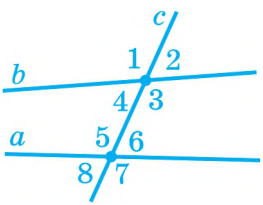


Рис. 80

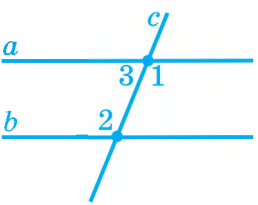


Рис. 81

ЗАДАЧІ ДО § 7

РІВЕНЬ А

166. Січна перетинає дві прямі відповідно під кутами 30° і 65°. Знайдіть градусні міри решти з восьми утворених кутів.

167. Січна перетинає дві прямі під кутами 25° і 74°. Знайдіть градусні міри решти утворених кутів.

168. Градусна міра кожного з чотирьох кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 45°. Якими є чотири інші утворені кути? Які їх градусні міри?

169. Один із двох односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 75°. Знайдіть інший кут, якщо різносторонні кути рівні.

170. Сума односторонніх кутів однієї пари дорівнює сумі односторонніх кутів іншої пари. Якими є два різносторонні кути?

171. Відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, дорівнюють 50° і 65°. Знайдіть градусні міри решти з восьми утворених кутів.

РІВЕНЬ Б

172. Один із двох різносторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 38°. Знайдіть інший із цих кутів, якщо сума односторонніх кутів дорівнює 180°.

173. Сума двох односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 162°, а їх різниця дорівнює 32°. Знайдіть градусні міри всіх восьми утворених кутів.

174. Сума двох різносторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 210°, а їх градусні міри відносяться як 3 : 4. Знайдіть градусні міри усіх утворених кутів.

РІВЕНЬ В

175. Знайдіть кути, утворені при перетині двох прямих січною, якщо різносторонні кути рівні, а різниця односторонніх кутів дорівнює 30°.

176. Знайдіть кути, утворені при перетині двох прямих січною, якщо градусні міри односторонніх кутів відносяться як 2 : 3, а різносторонні кути рівні.

177. Побудуйте за допомогою лінійки і транспортира дві прямі й січну, яка перетинає кожну з них під кутом 40° так, що: **а)** різносторонні кути рівні; **б)** односторонні кути рівні.

178. Побудуйте прямі a і b та січну c так, щоб пряма c перетинала кожну з прямих під кутом 50°, а сума односторонніх кутів була відмінна від 180°. Обчисліть суму кожної пари односторонніх кутів.

179. Січна перетинає одну з двох прямих під кутом 80°. Сума однієї пари односторонніх кутів дорівнює 170°. Знайдіть градусні міри кожного із цих двох односторонніх кутів. Скільки розв'язків має задача?

180. На рисунку 82 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

181. На рисунку 83 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.

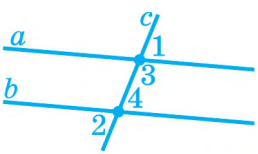


Рис. 82

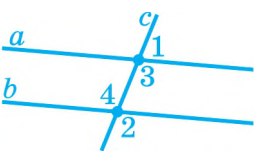


Рис. 83

§8 ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

1. Ознаки паралельності прямих
2. Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною
3. Скорочений запис тверджень

1. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Означення. Прямі, які лежать в одній площині та не перетинаються, називають ***паралельними*** (рис. 84).

Рис. 84

Відрізки і промені, які лежать на паралельних прямих, теж називають паралельними.

Паралельність прямих, відрізків і променів позначають значком «$\parallel$». Наприклад, $b \parallel a$, $AB \parallel CD$.

Аксіома. Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить не більше однієї прямої, паралельної даній прямій.

Цю аксіому називають аксіомою паралельних прямих.

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ, ЯКІ ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ СІЧНОЮ

Теорема. Якщо при перетині двох прямих січною сума односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні (рис. 85).

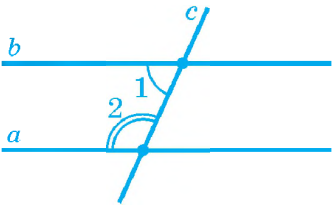


Рис. 85

Доведення. Нехай січна c перетинає прямі a та b, і сума односторонніх кутів, позначених цифрами 1 і 2 на рис. 85, дорівнює 180°.

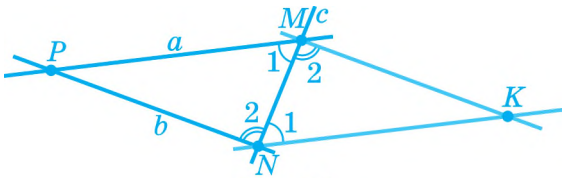


Рис. 86

Припустимо, що прямі a і b не паралельні (рис. 86). Тоді вони перетинаються в деякій точці P. При цьому утворюється трикутник NMP, який лежить в одній із півплощин, на які ділить площину пряма c. Відкладемо в іншу півплощину трикутник MNK, рівний трикутникові NMP (рис. 86). Рівні кути в цих трикутниках позначено однаковими цифрами.

За умовою, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, звідки:

1) $\angle PMK = \angle PMN + \angle NMK = \angle 1 + \angle 2 = 180°$;

2) $\angle PNK = \angle PNM + \angle MNK = \angle 2 + \angle 1 = 180°$.

Отже, обидва кути PMK і PNK є розгорнутими. Тому точки P, M і K лежать на одній прямій, якою є пряма a, а точки, P, N і K теж лежать на одній прямій — прямій b. Отже, прямі a та b мають ***дві*** спільні точки: P і K. А це неможливо, бо суперечить тому, що через дві точки можна провести тільки одну пряму. Теорему доведено. ■

Наслідок 1. Якщо при перетині двох прямих січною різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.

Доведення. Якщо різносторонні кути рівні, то сума односторонніх кутів дорівнює 180°. А в цьому випадку прямі паралельні. Наслідок доведено. ■

Наслідок 2. Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

Доведення. Якщо відповідні кути рівні, то різносторонні кути теж рівні. А в цьому випадку прямі паралельні. Наслідок доведено. ■

Доведену вище теорему та наслідки з неї називають ***ознаками паралельності прямих***.

ІСНУВАННЯ ПРЯМОЇ, ПАРАЛЕЛЬНОЇ ДАНІЙ

Ознаки паралельності прямих використовують для проведення прямої, що проходить через дану точку й паралельна даній прямій.

Нехай дано пряму a й точку P, яка не належить цій прямій (рис. 87). Щоб провести через точку P пряму, паралельну прямій a, потрібно:

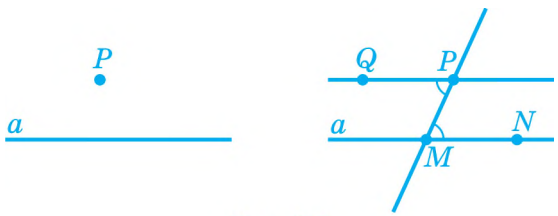


Рис. 87

а) відзначити на прямій a довільні точки M і N;

б) провести пряму PM;

в) відкласти від променя PM кут MPQ, який дорівнює кутові PMN так, щоб точки Q і N лежали в різних півплощинах відносно прямої PM;

в) провести пряму PQ.

Пряма PQ паралельна прямій a відповідно до ознаки паралельності прямих, оскільки різносторонні кути MPQ і PMN рівні.

Наведений спосіб проведення прямої, яка проходить через дану точку паралельно даній прямій, означає, що така пряма ***існує***. А згідно з аксіомою про паралельні прямі через точку, що не належить даній прямій, можна провести ***не більше однієї*** прямої, паралельної даній.

Із цих двох тверджень випливає

Теорема. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести одну й тільки одну пряму, паралельну даній.

ДОВЕДЕННЯ ВІД СУПРОТИВНОГО

Доводячи ознаку паралельності прямих, ми припустили, що дані в умові прямі можуть перетинатися (тобто що висновок теореми є хибним (неправильним)), і довели, що таке припущення веде до суперечності з аксіомою, що через дві точки проходить лише одна пряма.

Такий метод доведення називають ***методом доведення від супротивного***. Користуються цим методом так:

1) припускають, що висновок теореми є хибним, і формулюють твердження, протилежне до цього висновку;

2) доводять, що це твердження або його наслідки суперечать умові теореми або якійсь аксіомі чи вже доведеній теоремі;

3) роблять висновок, що зроблене припущення про те, що висновок теореми є хибним, само є хибним. А із цього випливає, що висновок теореми є істинним.

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ДВОХ ПРЯМИХ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ АБО ПАРАЛЕЛЬНИХ ТРЕТІЙ

Теорема. Дві прямі, перпендикулярні третій, паралельні (рис. 88).

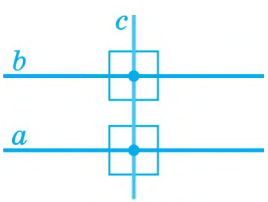


Рис. 88

Доведення. Нехай прямі a і b перпендикулярні прямій c. Тоді пряма c є січною відносно прямих a і b, до того ж різносторонні кути рівні. Отже, прямі a і b паралельні. Теорему доведено. ■

Цю ознаку паралельності прямих часто використовують для проведення паралельних прямих за допомогою косинця й лінійки (див. рис. 89).

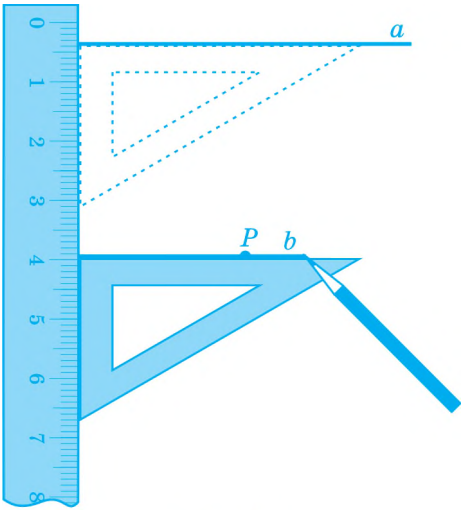


Рис. 89

Теорема. Дві прямі, паралельні третій, паралельні.

Доведення. Скористаймося методом доведення від супротивного. Нехай прямі b і c паралельні прямій a, але не паралельні одна одній. Тоді вони перетинаються в деякій точці P (рис. 90). Отже, через точку P проходять ***дві*** прямі, паралельні прямій a, а це суперечить аксіомі паралельних прямих. Теорему доведено. ■

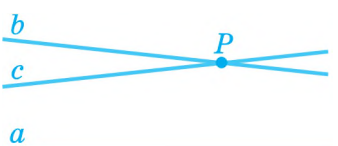


Рис. 90

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

182. Які ознаки паралельних прямих ви знаєте?

183. За якими ознаками прямі, зображені на рисунку 91, є паралельними?

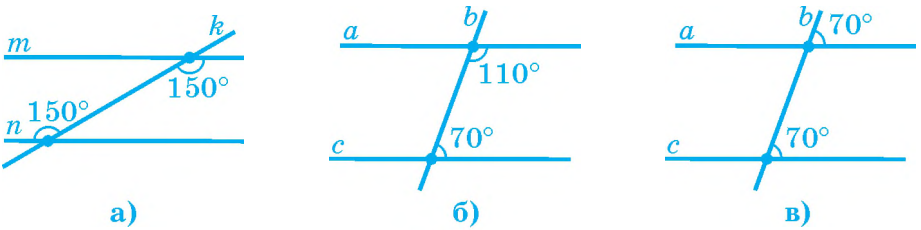


Рис. 91

184. За якими ознаками паралельності прямих виконані побудови на рисунку 92?

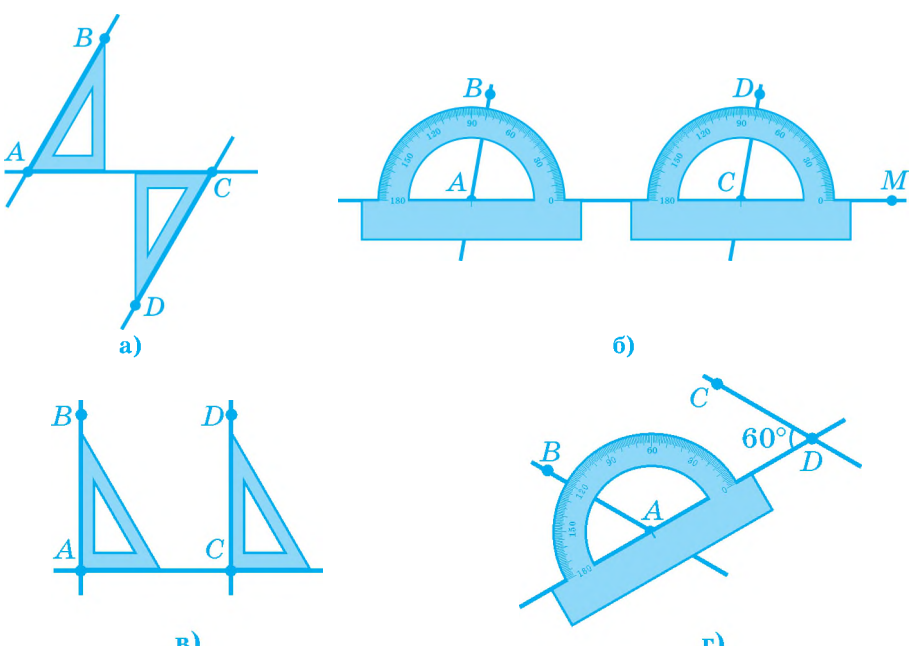


Рис. 92

185. Чи мають спільну точку прямі m і n, якщо при перетині їх січною c утворюються односторонні кути, які дорівнюють: **а)** 50° і 130°; **б)** 62° і 118°?

186. На рисунку 93 рівні кути виділені однаковою кількістю дужок, а кути, сума яких дорівнює 180°, — один — дужкою, а інший — двома дужками. Обґрунтуйте паралельність зображених прямих.

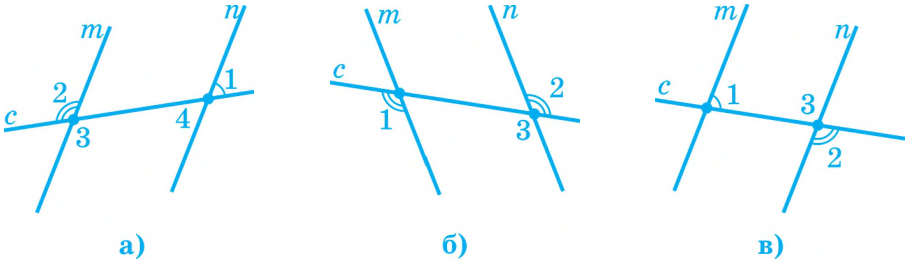


Рис. 93

2. ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ, УТВОРЕНИХ ПРИ ПЕРЕТИНІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

Теорема. Якщо прямі паралельні, то при їх перетині січною різносторонні кути рівні.

Доведення. Скористаємось методом доведення від супротивного. Нехай січна c перетинає паралельні прямі a й b, але різносторонні кути не рівні (рис. 94).

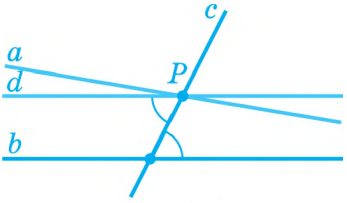


Рис. 94

Проведемо через точку P перетину прямих a і c пряму d так, щоб різносторонні кути, утворені січною c і прямими b і d, були рівними. Тоді, за ознакою паралельності прямих, прямі b і d паралельні. Одержуємо, що через точку P проходять дві прямі (a і d), паралельні прямій b. А це суперечить аксіомі паралельних прямих. Теорему доведено. ■

Сформулюємо ще дві теореми, довести які ви зможете самі.

Теорема. Якщо прямі паралельні, то при їх перетині січною сума односторонніх кутів дорівнює 180° (рис. 95).

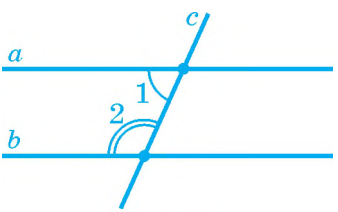


Рис. 95

Теорема. Якщо прямі паралельні, то при їх перетині січною відповідні кути рівні (рис. 96).

Наслідок. Якщо пряма перпендикулярна одній із двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й іншій (рис. 97).

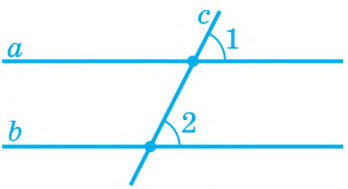


Рис. 96

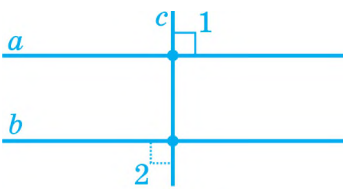


Рис. 97

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА ДО ПРЯМОЇ

Теорема. З точки, що не лежить на даній прямій, можна провести до цієї прямої лише один перпендикуляр.

Доведення. Нехай дано пряму a і точку P, яка їй не належить. Щоб провести з точки P перпендикуляр до прямої a, потрібно:

а) позначити на прямій a довільну точку M і провести через неї пряму b, перпендикулярну прямій a (рис. 98 а);

б) якщо пряма b пройде через точку P, то PM — шуканий перпендикуляр до прямої a, проведений з точки P (рис. 98 б);

в) якщо ж пряма b не пройде через точку P (рис. 98 в), то провести через точку P пряму c, паралельну прямій b. Оскільки пряма a перпендикулярна прямій b, то вона перпендикулярна і прямій c, тому що прямі b і c паралельні. Позначимо через N точку перетину перпендикулярних прямих a і c. Тоді PN — перпендикуляр до прямої a, проведений з точки P.

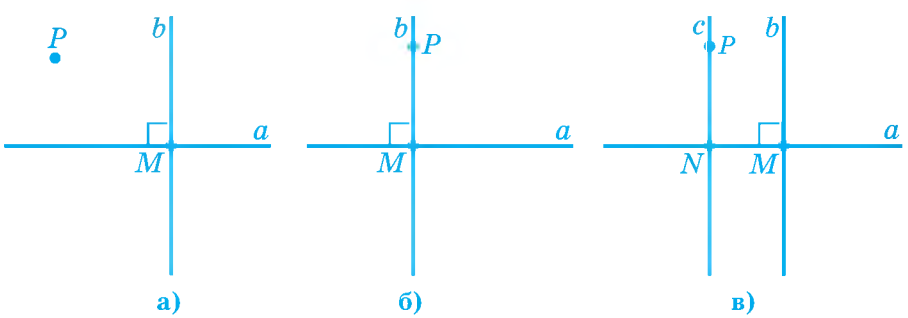


Рис. 98

Таким чином, доведено, що з точки P можна провести перпендикуляр до прямої a. Доведемо тепер, що він — єдиний.

Використаємо метод доведення від супротивного. Нехай з точки P проведено до прямої a два перпендикуляри: PN і PQ (рис. 99).

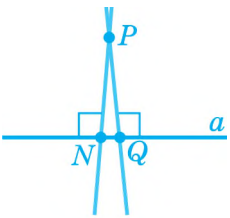


Рис. 99

Оскільки обидві прямі PN і PQ перпендикулярні прямій a, то згідно з ознакою паралельності прямих вони паралельні одна одній, тобто не можуть перетинатися. А це суперечить тому, що обидві ці прямі проходять через одну точку P. Теорему доведено. ■

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ

Означення. ***Відстанню від точки до прямої*** називають довжину перпендикуляра, проведеного із цієї точки, до прямої.

Так, відстанню від точки A до прямої c на рис. 100 є довжина відрізка AB.

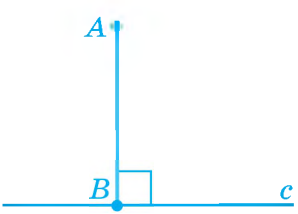


Рис. 100

Якщо точка належить прямій, то вважатимемо, що відстань від точки до прямої дорівнює нулю.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

187. На рисунку 101 прямі a і b паралельні. Знайдіть градусні міри позначених кутів, якщо: **а)** $\angle 1 = 70°$; **б)** $\angle 2 = 65°$; **в)** $\angle 3 = 105°$; **г)** $\angle 4 = 118°$.

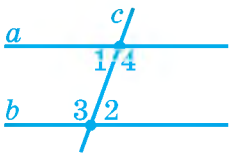


Рис. 101

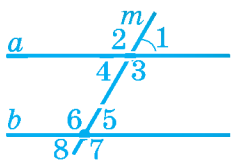


Рис. 102

188. На рисунку 102 прямі a та b паралельні. $\angle 1 = 60°$. Запишіть: **а)** три інші кути з такою ж градусною мірою; **б)** чотири кути з іншою градусною мірою та знайдіть її.

189. Один з кутів, утворених у результаті перетину двох паралельних прямих січною, є гострим. **а)** Скільки всього утворилося гострих кутів? **б)** Скільки всього утворилося тупих кутів?

190. Січна перетинає одну з двох паралельних прямих під кутом 75°. Знайдіть градусні міри всіх восьми кутів, утворених при перетині прямих січною.

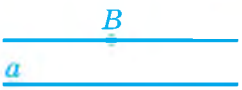
3. СКОРОЧЕНИЙ ЗАПИС ТВЕРДЖЕНЬ

Чи розпізнаєте ви, що «зашифровано» у формулах $a = b$, $\Delta ABC = \Delta MNP$, $m > n$? У математиці формула є скороченим записом деякого твердження.

Часто скорочений запис використовують і для того, щоб показати, що з одного твердження випливає інше. У цьому випадку застосовують знак «$\Rightarrow$», який замінює словесні конструкції «якщо ..., то ...», «звідси випливає ...».

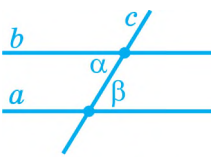
Наприклад, твердження «якщо $a = b$ і $b = c$, то $a = c$» можна записати у вигляді «$(a = b$ і $b = c) \Rightarrow a = c$».

Паралельні прямі — це прямі, що лежать в одній площині й не перетинаються. Позначення: $a \parallel b$.

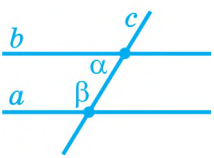


Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести одну й тільки одну пряму, паралельну даній.

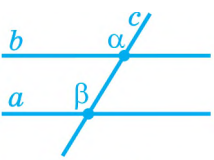
ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ



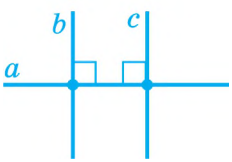
Якщо різносторонні кути рівні, то прямі паралельні: $\angle\alpha = \angle\beta \Rightarrow a \parallel b$.



Якщо сума односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні: $\angle\alpha + \angle\beta = 180° \Rightarrow a \parallel b$.



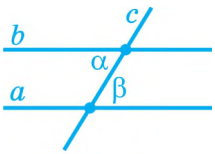
Якщо відповідні кути рівні, то прямі паралельні: $\angle\alpha = \angle\beta \Rightarrow a \parallel b$.



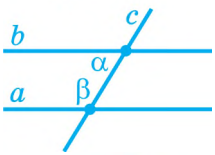
Дві прямі, перпендикулярні третій, паралельні: $(b \perp a$ і $c \perp a) \Rightarrow b \parallel c$.

Дві прямі, паралельні третій, паралельні: $(b \parallel a$ і $c \parallel a) \Rightarrow b \parallel c$.

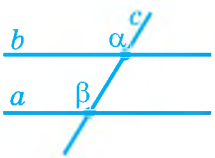
ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ, УТВОРЕНИХ ПРИ ПЕРЕТИНІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ



$a \parallel b \Rightarrow \angle\alpha = \angle\beta.$

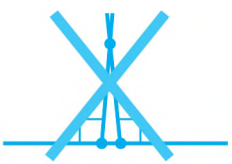


$a \parallel b \Rightarrow \angle\alpha + \angle\beta = 180°.$

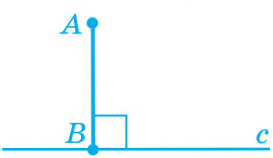


$a \parallel b \Rightarrow \angle\alpha = \angle\beta.$

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ



З точки, що не лежить на даній прямій, можна провести лише один перпендикуляр до цієї прямої.



Відстанню від даної точки до прямої називають довжину перпендикуляра, проведеного з точки до прямої.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Якщо деяка пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й іншу. Доведіть.

Розв'язання. Використаємо доведення від супротивного. Нехай пряма c перетинає пряму a, але не перетинає па-

ралельну їй пряму b (див. рис. 103). Тоді $c \parallel b$. У такому випадку через точку P перетину прямих a і c проходять дві прямі, паралельні прямій b. А це суперечить аксіомі паралельних прямих.

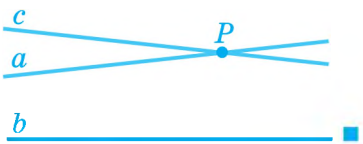


Рис. 103

Вправа 2. Один з кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 35°. Знайдіть градусні міри решти кутів.

Розв'язання. Нехай, наприклад, $\angle 1 = 35°$ (див. рис. 104). Таку ж градусну міру мають кути 4, 5 і 8: $\angle 4 = \angle 1$, тому що це вертикальні кути, $\angle 4 = \angle 5$, б це різносторонні кути, а у випадку паралельних прямих різносторонні кути рівні, $\angle 5 = \angle 8$, тому що це — вертикальні кути.

Кути 1 і 2 — суміжні, тому $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 35° = 145°$. Таку ж градусну міру мають кути 3, 6 і 7: $\angle 3 = \angle 2$, тому що це вертикальні кути, $\angle 3 = \angle 6$, бо це різносторонні кути, а у випадку паралельних прямих різносторонні кути рівні, $\angle 6 = \angle 7$, тому що це — вертикальні кути.

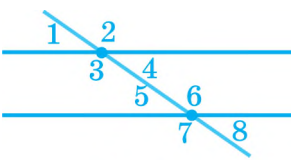


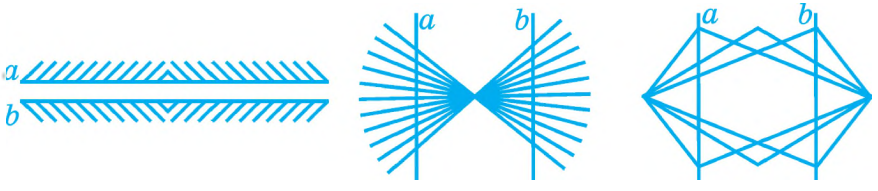
Рис. 104

Відповідь. Чотири кути мають градусну міру по 35° і чотири кути — по 145°. ■

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Укажіть об'єкти, які можуть бути моделями паралельних прямих.

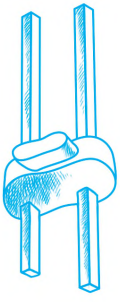
2. Згинаючи аркуш паперу, утворіть моделі паралельних прямих.
3. Визначте на око, чи паралельні прямі, зображені на рисунку. Як перевірити правильність вашого висновку?

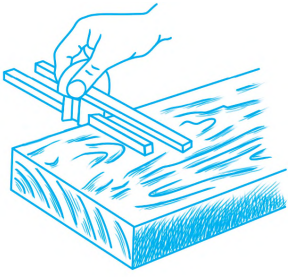


4. Рейсшина — креслярська лінійка з поперечною головкою, яка переміщується по площині. Користуючись рисунком, поясніть, як можна побудувати паралельні прямі за допомогою рейсшини.

5. Малка — це дві планки, скріплені шарніром. Малку використовують столяри для розмітки паралельних прямих. Користуючись рисунком, поясніть, як можна побудувати паралельні прямі за допомогою малки.

6. Рейсмус — колодка з прямокутним отвором, у який за допомогою гвинта закріпляють дві рейки. На одному з кінців рейок установлені загострені металеві штирі. Рейсмус використовують у столярній справі для розмітки на поверхні дерев'яного бруска (дошки) прямих, паралельних до краю бруска. Користуючись рисунком, поясніть, як можна побудувати паралельні прямі за допомогою рейсмуса.





БЕСІДА ПІСЛЯ УРОКУ

Аксіома паралельних прямих має цікаву історію. Це справді так?

Це насправді так. Чимало математиків намагалися довести твердження аксіоми паралельних прямих як теорему, опираючись на інші аксіоми й теореми. Однак протягом багатьох століть усі такі спроби були марними.

І тільки в першій половині XIX століття з'ясувалося, чому ця аксіома не може бути теоремою. Російський математик Микола Лобачевский та угорський математик Янош Бояї незалежно один від одного побудували так звану «неевклідову геометрію», у якій замість аксіоми паралельності прийняли за аксіому твердження, що через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести більше ніж одну пряму, яка не перетинає дану пряму! Ці математики довели, що побудована ними таким чином геометрія є настільки ж несуперечливою і послідовною, як і евклідова геометрія (яку ви зараз вивчаєте). З цього випливало, що аксіому паралельних прямих принципово не можна вивести з інших аксіом геометрії.

Чим відрізняються ознаки від властивостей?

Цю відмінність яскраво ілюструє матеріал про паралельні прямі. За допомогою ознак паралельних прямих установлюють, що дані прямі — паралельні. А встановивши, що прямі паралельні, можна вже використовувати їхні властивості.

Розглянемо приклад (рис. 105).

Дано: $\angle 1 = 120°$, $\angle 2 = 60°$, $\angle 3 = 100°$. Чому дорівнює кут 4?

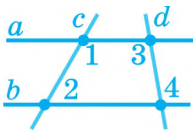


Рис. 105

Прямі c і d є січними відносно прямих a і b. Згідно з умовою $\angle 1 + \angle 2 = 120° + 60° = 180°$, отже, з ознаки паралельності прямих випливає, що прямі a і b паралельні. Тоді ми можемо використати властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною: кути 3 і 4 є різносторонніми і тому мають бути рівними. Отже, $\angle 4 = 100°$.

Ознаки та властивості використовують не тільки в геометрії, але й у фізиці, хімії, біології, економіці, медицині тощо. Наприклад, за такою ж схемою, яку ми використали, діє і лікар: спочатку за симптомами захворювання (ознаками!) він ставить діагноз, тобто визначає, яке саме захворювання в пацієнта, а потім, знаючи особливості цього захворювання (властивості!), призначає лікування.

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 8

1. Які прямі називають паралельними?
2. Сформулюйте аксіому паралельних прямих.
3. Сформулюйте ознаки паралельності прямих за кутами.
4. Доведіть теорему — ознаку паралельності прямих за сумою односторонніх кутів.

а) Яким методом доводять теорему?

б) Який допоміжний трикутник утворюємо для доведення теореми?

5. Сформулюйте й обґрунтуйте ознаки паралельності, які є наслідками ознаки за сумою односторонніх кутів.

а) Яким методом доводять теорему?

б) Суперечність з яким твердженням отримуємо?

6. Доведіть теорему про дві прямі, паралельні третій.

7. Сформулюйте властивості кутів, що утворюються при перетині двох паралельних прямих січною.

8. Доведіть теорему про властивість різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній. Виділіть кроки доведення.

9. Сформулюйте наслідки з теорем про властивість різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній.

10. На рисунку 106 $a \parallel b$, $\angle 1 = 130°$. Чому дорівнює: а) $\angle 2$; б) $\angle 3$?

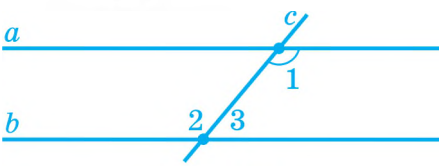


Рис. 106

ЗАДАЧІ ДО § 8

РІВЕНЬ А

191. Проведіть довільну пряму. Побудуйте за допомогою лінійки і транспортира дві паралельні прямі, що перетинають її під кутом 30°. Виділіть дужкою кути, з рівності яких випливає паралельність прямих.

192. Проведіть пряму c. Побудуйте дві паралельні прямі, що перетинають її під гострим кутом, який дорівнює одному з кутів косинця.

193. На рисунку 107 прямі a та c паралельні, $\angle 1 = 116°$. Знайдіть градусні міри всіх утворених гострих кутів.

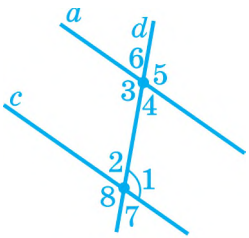


Рис. 107

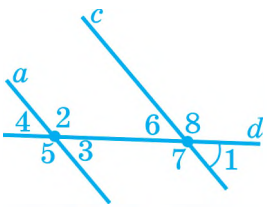


Рис. 108

194. На рисунку 108 прямі a та c паралельні, $\angle 1 = 48°$. Знайдіть градусні міри решти утворених кутів.

195. Знайдіть кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо сума двох різносторонніх кутів дорівнює 70°.

196. Який кут утворить січна з кожною з паралельних прямих, якщо сума двох відповідних кутів дорівнює 250°?

197. П'ять з восьми кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, є рівними. Які градусні міри кожного з кутів, утворених при перетині прямих січною?

198. Чи можуть бути паралельними прямі a та b, якщо в результаті їх перетину січною утворилися: **а)** два різносторонні кути, які дорівнюють 30° і 40°; **б)** два односторонні кути 50° і 120°; **в)** два гострих кути 30° і 50°; **г)** два відповідні кути 100° і 80°? Відповідь поясніть, опираючись на властивості паралельних прямих.

199. Установіть, чи мають спільну точку прямі a і b, якщо при перетині їх січною: **а)** односторонні кути дорівнюють: **1)** 30° і 110°; **2)** 100° і 80°; **3)** 40° і 40°; **б)** різносторонні кути дорівнюють: **1)** 70° і 110°; **2)** 70° і 70°; **3)** 100° і 90°; **в)** відповідні кути дорівнюють: **1)** 50° і 130°; **2)** 50° і 120°; **3)** 49° і 49°.

РІВЕНЬ Б

200. Знайдіть градусну міру кожного із двох односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них на 26° більший від іншого.

201. Один із двох односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, у 4 рази менший від іншого. Знайдіть ці кути.

202. На рисунку 109 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

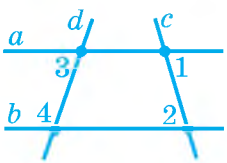


Рис. 109

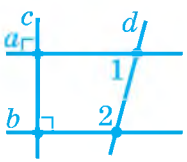


Рис. 110

203. На рисунку 110 $c \perp a$ і $c \perp b$. Доведіть, що $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

204. Пряма c перетинає кожну з прямих a і b під кутом 30°. Знайдіть суму односторонніх кутів кожної пари, якщо: **а)** прямі a і b паралельні; **б)** прямі a і b мають спільну точку. Виконайте відповідні рисунки.

205. Сума двох кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 60°. Знайдіть градусні міри усіх восьми утворених кутів.

206. Сума трьох кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 90°. Знайдіть градусні міри усіх восьми утворених кутів.

207. Доведіть: якщо пряма паралельна одній із двох прямих, що перетинаються, то іншу із цих прямих вона перетинає.

208. На рисунку 111 прямі a і b паралельні. За допомогою кутів 4 і 5 доведіть, що $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

209. На рисунку 112 прямі a і b паралельні. За допомогою кута 4 доведіть, що $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

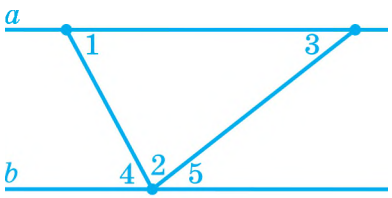


Рис. 111

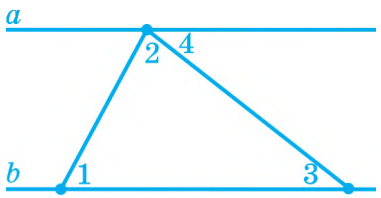


Рис. 112

РІВЕНЬ В

210. Сума трьох кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 240°. Знайдіть градусні міри усіх утворених кутів. Скільки розв'язків має задача?

211. Доведіть, що бісектриси різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, лежать на паралельних прямих.

212. Доведіть, що бісектриси відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, лежать на паралельних прямих.

213. Бісектриси відповідних кутів, утворених при перетині прямих m і n січною k, лежать на паралельних прямих. Доведіть, що прямі m і n паралельні.

214. Прямі AB і CD — паралельні (рис. 113). За даними градусними мірами кутів BAO і DCO знайдіть градусну міру кута AOC.

215. Прямі AB і CD — паралельні (рис. 114). За даними градусними мірами кутів BAM, AMO і OCD знайдіть градусну міру кута COM.

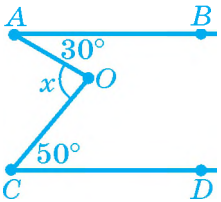


Рис. 113

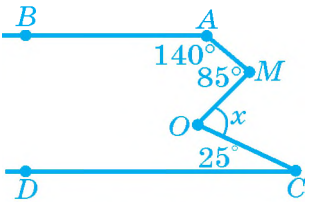


Рис. 114

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Знак паралельності «||» уперше використав у своїх працях англійський математик У. Оутред (1677 р.).
- Термін «*паралельний*» походить від грецького «*паралелос*», що в перекладі означає «*той, що йде поруч*».
- У геометрії М. Лобачевського через точку, що лежить поза прямою, проходить безліч прямих, які не перетинають дану пряму.
- У геометрії Г. Рімана (Георг Ріман — німецький математик) через точку, що лежить поза прямою, не проходить жодна пряма, яка не перетинає дану пряму.

М. І. ЛОБАЧЕВСЬКИЙ
(1792 – 1856)
Творець неевклідової геометрії

ГЕОРГ РІМАН
(1826 – 1866)
Німецький математик

3 ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

§9 СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

1. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

Теорема. Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Доведення. Позначимо кути трикутника ABC цифрами 1, 2, 3, як показано на рис. 115, і проведемо через вершину B пряму d, паралельну стороні AC.

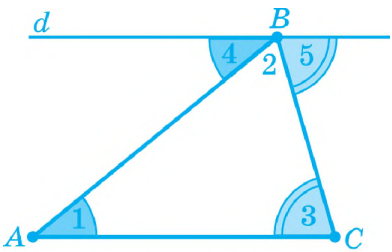


Рис. 115

Оскільки прямі d й AC паралельні, то $\angle 1 = \angle 4$ і $\angle 3 = \angle 5$ як різносторонні при паралельних прямих d і AC, що перетинаються січними AB та CB. Кути 4, 2 і 5 складають розгорнутий кут, тому: $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$. Підставляючи в цю рівність замість кута 4 рівний йому кут 1, а замість кута 5 рівний йому кут 3, одержуємо: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. ■

ГОСТРОКУТНІ, ПРЯМОКУТНІ ТА ТУПОКУТНІ ТРИКУТНИКИ

Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то ***лише один з кутів трикутника може бути прямим або тупим***.

Означення. Трикутник, у якого один кут прямий, називають ***прямокутним***. Трикутник, у якого один кут тупий, називають ***тупокутним***. Трикутник, у якого всі кути гострі, називають ***гострокутним***.

На рис. 116 зображено прямокутний, тупокутний і гострокутний трикутники.

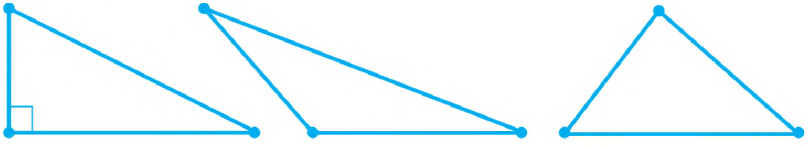


Рис. 116

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

216. Чи існує трикутник, кути якого дорівнюють: **а)** 30°, 50° і 90°; **б)** 40°, 50° і 100°; **в)** 20°, 70° і 90°?

217. Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо сума кутів B і C дорівнює: **а)** 70°; **б)** 125°.

218. Скільки гострих кутів може бути в будь-якому трикутнику? Поясніть, чому в трикутнику не може бути два тупих кути; два прямих кути; прямий і тупий кути.

2. ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА

Продовжимо сторону CB трикутника ABC за точку B і відзначимо на її продовженні точку D (рис. 117). Утворений кут ABD є суміжним з кутом B трикутника ABC.

Означення. Кут, суміжний з кутом трикутника при даній вершині, називають ***зовнішнім кутом трикутника*** при цій вершині.

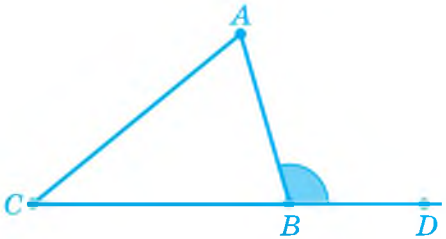


Рис. 117

Теорема. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Доведення. Позначимо кути трикутника 1, 2, 3, а зовнішній кут, суміжний з кутом 3, позначимо 4 (рис. 118).

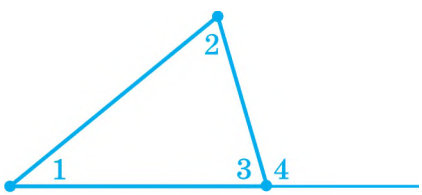


Рис. 118

Оскільки кут 4 є суміжним з кутом 3, то $\angle 4 = 180° - \angle 3$. З теореми про суму кутів трикутника $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ маємо: $\angle 1 + \angle 2 = 180° - \angle 3$. Отже, $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

Наслідок. Зовнішній кут трикутника більший від будь-якого кута трикутника, не суміжного з ним.

Так, на рисунку 118 кут 4 більший від кожного з кутів 1, 2.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

219. Накресліть довільний трикутник ABC, у якого $\angle C = 40°$. Побудуйте зовнішній кут при вершині C, у якого одна сторона є променем, доповняльним до променя: **а)** CA; **б)** CB. Обчисліть кожний із зовнішніх кутів при вершині C.

220. Обчисліть зовнішній кут трикутника ABC при вершині A, якщо кут A дорівнює: **а)** 130°; **б)** 70°; **в)** 90°.

221. Дано трикутник MNK. Сумі яких кутів трикутника дорівнює зовнішній кут при вершині: **а)** M; **б)** N; **в)** K?

222. У трикутнику ABC (рис. 119) кути 1, 2 і 3 — зовнішні при його вершинах відповідно A, B і C. Порівняйте: **а)** $\angle 1$ і $\angle B$; **б)** $\angle 3$ і $\angle A$; **в)** $\angle 2$ і $\angle C$.

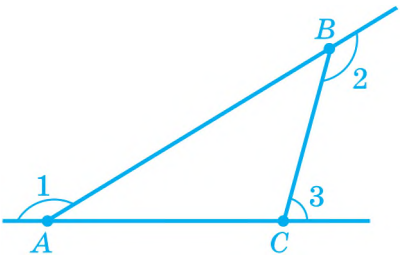


Рис. 119

3. МЕДІАНИ, БІСЕКТРИСИ ТА ВИСОТИ ТРИКУТНИКА

Чимало властивостей трикутника пов'язані з його так званими «чудовими лініями» — медіанами, бісектрисами та висотами.

Медіаною трикутника називають відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. На рис. 120 зображено медіану AM трикутника ABC.

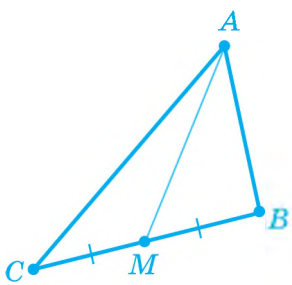


Рис. 120

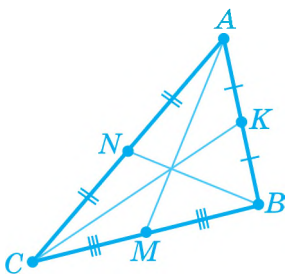


Рис. 121

Будь-який трикутник має три медіани (рис. 121).

Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає його вершину з точкою на стороні трикутника. На рис. 122 зображено бісектрису AD трикутника ABC.

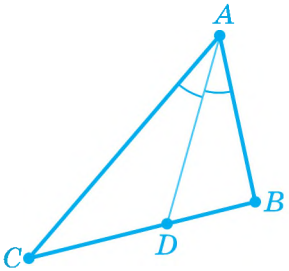


Рис. 122

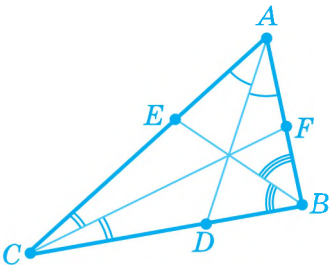


Рис. 123

Будь-який трикутник має три бісектриси (рис. 123).

Висотою трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, яка містить протилежну сторону. На рис. 124 зображено висоту *AH* трикутника *ABC*.

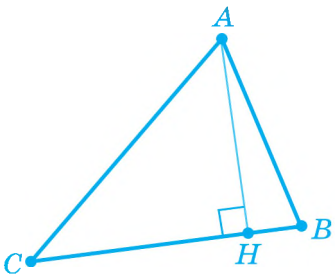


Рис. 124

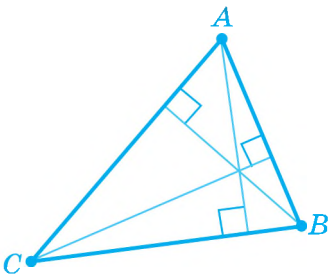


Рис. 125

Будь-який трикутник має три висоти (рис. 125).

Медіани й бісектриси будь-якого трикутника завжди належать трикутнику. А от деякі висоти трикутника можуть не належати трикутнику (рис. 126). Докладніше про це йдеться в розділі «Розв'язуємо разом».

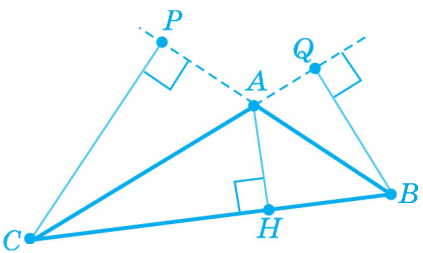


Рис. 126

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

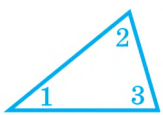
223. Накресліть відрізок $AC = 7$ см і знайдіть його середину — точку M. Побудуйте довільний трикутник ABC і проведіть відрізок BM. Чим є відрізок BM для трикутника ABC?

224. У трикутнику проведено три його медіани. Три із шести відрізків, на які медіани ділять сторони трикутника, дорівнюють 3 см, 4 см і 6 см. Знайдіть: **а)** довжину кожної сторони трикутника; **б)** периметр трикутника.

225. Накресліть довільний трикутник ABC, у якого $\angle A = 70°$. Проведіть бісектрису AD трикутника.

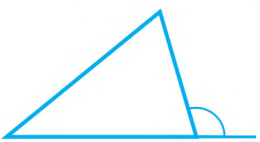
226. Виріжте з аркуша паперу довільний: **а)** тупокутний трикутник; **б)** прямокутний трикутник. Перегинаючи його відповідним чином, утворіть висоту, що виходить з вершини найбільшого кута.

ОСНОВНЕ В § 9

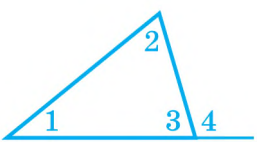


Сума кутів трикутника дорівнює 180°: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Трикутник може бути гострокутним, прямокутним або тупокутним.

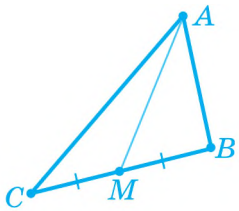


Кут, суміжний з кутом трикутника, називають **зовнішнім** кутом трикутника.

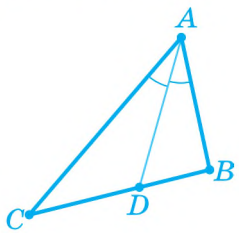


Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним: $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

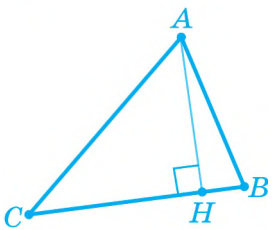
Зовнішній кут трикутника більший від будь-якого кута трикутника, не суміжного з ним: $\angle 4 > \angle 1$; $\angle 4 > \angle 2$.



Медіана трикутника — відрізок, який сполучає його вершину із серединою протилежної сторони.



Бісектриса трикутника — відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає його вершину з точкою на стороні трикутника.



Висота трикутника — перпендикуляр, проведений з його вершини до прямої, яка містить протилежну сторону.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. У трикутнику один з кутів дорівнює сумі двох інших кутів. Який це трикутник?

Розв'язання. Нехай α, β, γ — кути трикутника. За умовою, $\alpha + \beta = \gamma$. Оскільки $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, то одержуємо $\gamma + \gamma = 180°$. Звідси $\gamma = 90°$. Отже, умову задачі задовольняє будь-який прямокутний трикутник.

Відповідь. Прямокутний. ■

Вправа 2. Доведіть, що сума зовнішніх кутів трикутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

Розв'язання. Нехай кути 4, 5, 6 — зовнішні кути трикутника *ABC* (рис. 127). Оскільки кути 1 і 4, 2 і 5, 3 і 6 суміжні, то $\angle 1 + \angle 4 = 180°$, $\angle 2 + \angle 5 = 180°$, $\angle 3 + \angle 6 = 180°$.

Додавши почленно усі три рівності, одержимо: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 540°$. Оскільки сума кутів 1, 2, 3 дорівнює 180°, то одержуємо $180° + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 540°$. З останньої рівності випливає, що $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 540° - 180°$, звідки $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°$. ■

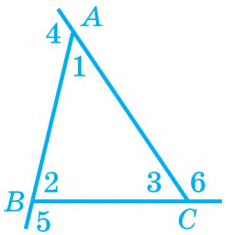


Рис. 127

Вправа 3. У трикутнику ABC проведено бісектриси BM і CN, які перетинаються в точці K.

Доведіть, що $\angle BKC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.

Розв'язання. Позначимо кути, як показано на рисунку 128. Доведемо, що $\angle 3 = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.

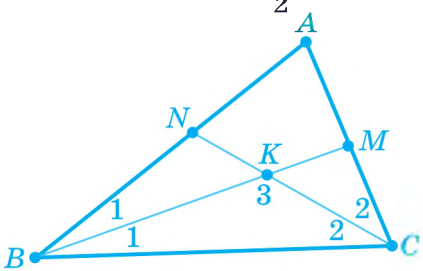


Рис. 128

Із трикутника BKC маємо: $\angle 3 = 180° - \angle 1 - \angle 2 = 180° - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$. Із трикутника ABC має-

мо: $\angle B + \angle C = 180° - \angle A$. Тому: $\angle 3 = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) =$

$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle A = 90° + \frac{1}{2}\angle A$. ■

Вправа 4. У трикутнику, периметр якого дорівнює 24 см, проведено медіану, яка ділить даний трикутник на два трикутники з периметрами відповідно 16 см і 18 см. Знайдіть довжину медіани.

Розв'язання. Нехай трикутник ABC — заданий, BD — його медіана, $P_{\Delta ABC} = 24$ см, $P_{\Delta ABD} = 16$ см, $P_{\Delta BDC} = 18$ см (рис. 129).

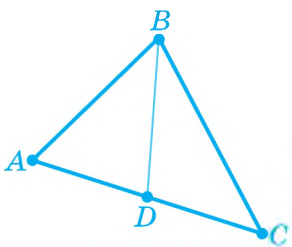


Рис. 129

Оскільки $P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BDC} = P_{\Delta ABC} + 2BD$, то $16 + 18 = 24 + 2BD$; $2BD = 10$; $BD = 5$ (см).

Відповідь. 5 см. ■

Вправа 5. Доведіть, що висота, проведена з вершини гострого кута тупокутного трикутника, не належить трикутнику.

Розв'язання. Скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо, що висота AH, проведена з вершини гострого кута A тупокутного трикутника ABC з тупим кутом B, належить трикутнику. Це означає, що вона або збігається зі стороною AB чи AC, або лежить «усередині» трикутника (рис. 130).

Збігатися зі стороною AB чи AC висота AH не може, тому що кут ABC — тупий, кут ACB — гострий, а висота AH перпендикулярна до прямої CB. Якщо ж висота AH лежить «усередині» трикутника ABC, то в трикутнику ABH є тупий кут B і прямий кут AHB, що суперечить теоремі про суму кутів трикутника. ■

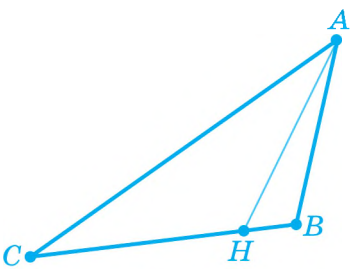


Рис. 130

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Прямолінійний тунель AB пробивають із двох боків гори, як показано на рисунку. Чи правильно вибрано напрямки AA_1 і BB_1, якщо $\angle A = 49°$, $\angle B = 48°$, $\angle C = 81°$?
2. Як визначити градусну міру кута, вершина якого недоступна (див. рис.)?

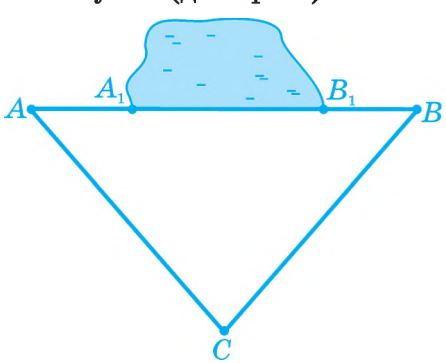


Рис. до завдання 1

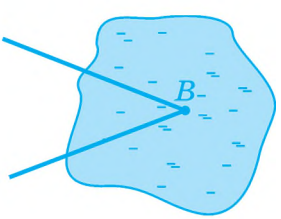


Рис. до завдання 2

БЕСІДА ПІСЛЯ УРОКУ

Я намалював п'ятикутну зірку і за допомогою транспортира знайшов суму кутів, показаних на рисунку 131. Виявилося, що ця сума, як і сума кутів трикутника, дорівнює 180°! Чи випадково це?

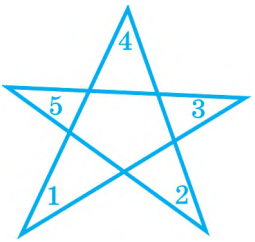


Рис. 131

Проведемо відрізок, який сполучає дві сусідні вершини зірки (зробимо це, наприклад, для вершин з кутами 1 і 2) і позначимо кути 6, 7, 8, як показано на рис. 132 (рівні вертикальні кути позначено цифрою 6). За теоремою про суму кутів трикутника маємо: $\angle 5 + \angle 3 + \angle 6 = \angle 7 + \angle 6 + \angle 8 = 180°$, звідки $\angle 5 + \angle 3 = \angle 7 + \angle 8$.

За цією ж теоремою $\angle 4 + (\angle 2 + \angle 8) + (\angle 1 + \angle 7) = (\angle 1 + \angle 4 + \angle 2) + (\angle 8 + \angle 7) = 180°$.

Оскільки $\angle 8 + \angle 7 = \angle 5 + \angle 3$, то $\angle 1 + \angle 4 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 3 = 180°$. Отже, знайдений «дослідним шляхом» збіг не є випадковим! Чимало відкриттів у математиці були підказані саме такими «дослідами». Але для того щоб припущення, підказане «дослідом», стало істинним, необхідно довести його, що ми й зробили.

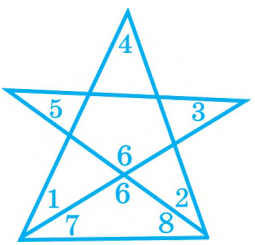


Рис. 132

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 9

1. Сформулюйте теорему про суму кутів трикутника.
2. Доведіть теорему про суму кутів трикутника.
   а) Яка додаткова побудова виконана для доведення теореми?
   б) Яка теорема є основою для доведення?
3. Які є види трикутників залежно від величин кутів? Сформулюйте означення кожного із цих видів трикутників.
4. Який кут називають зовнішнім кутом трикутника? Які його дві властивості?
5. Доведіть теорему про зовнішній кут трикутника.
6. Сформулюйте й обґрунтуйте наслідок з теореми про зовнішній кут трикутника.
7. Сумі яких двох кутів трикутника дорівнює кут 1, зображений на рисунку 133?

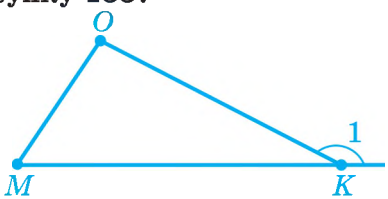


Рис. 133

8. Сформулюйте означення медіани, бісектриси та висоти трикутника.
9. Чим є відрізок *BM* (рис. 134) для трикутника *ABC*?

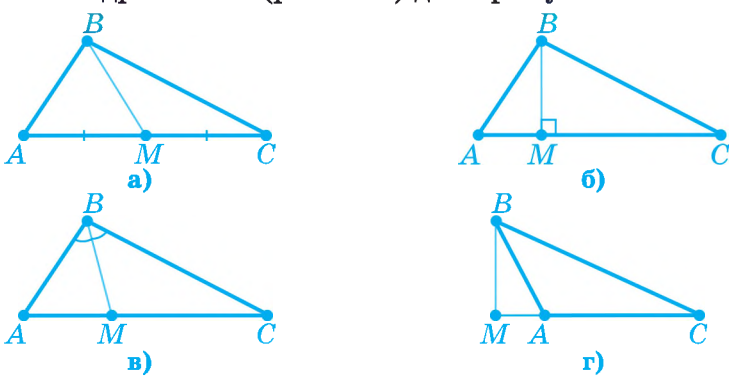


Рис. 134

ЗАДАЧІ ДО § 9

РІВЕНЬ А

227. Накресліть довільний трикутник, у якого два кути дорівнюють 25° і 55°. Обчисліть третій кут.

228. Установіть вид трикутника, якщо два його кути дорівнюють 23° і 57°.

229. Знайдіть третій кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють: **а)** 25° і 75°; **б)** 34° і 104°; **в)** $m°$ і $n°$.

230. Установіть вид трикутника, якщо два його кути дорівнюють: **а)** 30° і 70°; **б)** 25° і 35°; **в)** 20° і 70°.

231. Знайдіть кути трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як 2 : 3 : 4.

232. Градусні міри кутів трикутника відносяться як 3 : 2 : 10. Знайдіть кути трикутника і встановіть його вид.

233. Установіть вид трикутника за кутами, якщо: **а)** всі його зовнішні кути тупі; **б)** один з його зовнішніх кутів прямий; **в)** один з його зовнішніх кутів гострий.

234. Два кути трикутника дорівнюють 35° і 70°. Знайдіть зовнішні кути трикутника.

235. У трикутнику ABC $\angle A = 65°$. Знайдіть кут C, якщо бісектриса кута B утворює зі стороною AB кут 40°.

236. У трикутнику MOK $\angle M = 68°$, $\angle O = 34°$. Знайдіть кут між бісектрисою кута K і стороною KM.

237. У трикутнику проведено дві бісектриси. Два з чотирьох кутів, на які бісектриси ділять кути трикутника, дорівнюють 15° і 35°. Знайдіть усі кути трикутника.

РІВЕНЬ Б

238. Один з кутів трикутника дорівнює 80°. Знайдіть два інші його кути, якщо їх різниця дорівнює 44°.

239. Один з кутів трикутника дорівнює 40°. Знайдіть два інші його кути, якщо їх градусні міри відносяться як 3 : 4.

240. Якщо сума будь-яких двох кутів трикутника більша від 90°, то трикутник гострокутний. Доведіть.

241. Якщо сума двох кутів трикутника менша від 90°, то він тупокутний. Доведіть.

242. Якщо в трикутнику зовнішні кути при двох вершинах рівні, то кути тупі. Доведіть.

243. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють 70° і 150°. Знайдіть зовнішній кут при третій вершині.

244. BD — бісектриса трикутника ABC (рис. 135). Знайдіть кут C, якщо $\angle A = 44°$, $\angle ADB = 106°$.

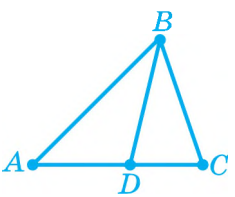


Рис. 135

РІВЕНЬ В

245. Знайдіть кут трикутника, якщо він на 30° менший від суми двох інших кутів.

246. Знайдіть кути трикутника, якщо градусні міри його зовнішніх кутів відносяться як 2 : 3 : 4.

247. Точка D належить стороні AC трикутника ABC із прямим кутом C. Доведіть, що кут ADB тупий.

248. Якщо кут трикутника більший від суми двох інших його кутів, то такий кут є тупим. Доведіть.

249. Виразіть градусну міру x кута через градусні міри n, m і k (рис. 136).

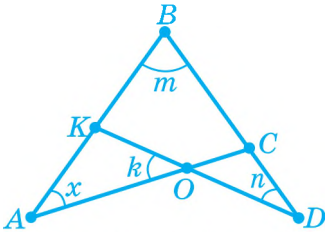


Рис. 136

250. Скориставшись теоремою про суму кутів трикутника, знайдіть суму кутів A, B, C і D (рис. 137).

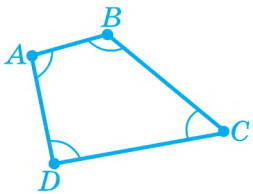


Рис. 137

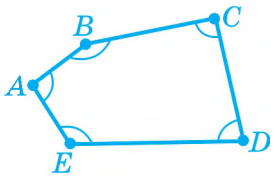


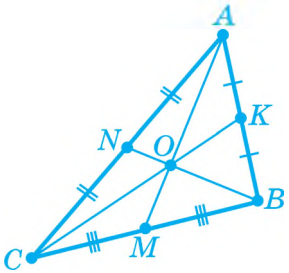
Рис. 138

251. Знайдіть $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ (рис. 138).

252. У трикутнику ABC проведені висоти AE і CD, що перетинаються в точці O. Знайдіть кут AOC, якщо $\angle A = 80°$, $\angle C = 40°$.

ЦІКАВО ЗНАТИ

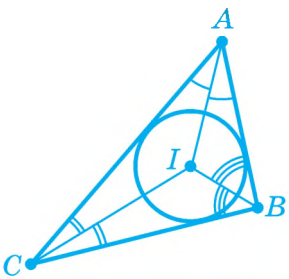
- Термін «*медіана*» походить від латинського «*медіум*» — «*середній, посередник*».
- Точку перетину медіан трикутника називають *центром мас*.
- Про те, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, знав ще Архімед.
- Точку перетину бісектрис трикутника називають *інцентром*.
- Про те, що три бісектриси кутів трикутника перетинаються в однієї точці, було відомо ще Евкліду.



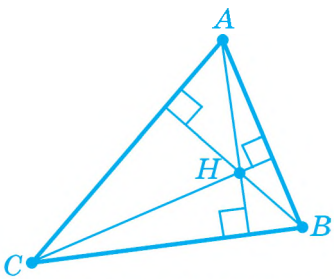
O* — центр мас трикутника *ABC

АРХІМЕД
(287 – 212 р. до н. е.)
Давньогрецький математик

- Точку перетину прямих, на яких лежать висоти трикутника, називають *ортоцентром*.

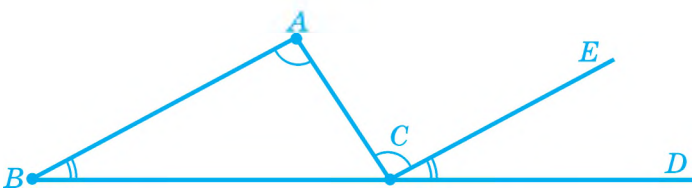


I* — інцентр трикутника *ABC



H* — ортоцентр трикутника *ABC

- Доведення теореми про суму кутів трикутника «Сума кутів трикутника дорівнює двом прямим кутам» приписують давньогрецькому математику Піфагору.
- У праці «Начала» Евклід наводить інше доведення теореми про суму кутів трикутника (див. рис., де $BA \parallel CE$).



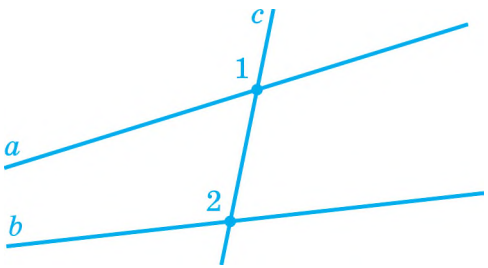
- У геометрії Лобачевського сума кутів трикутника менша від 180°.
- У геометрії Рімана сума кутів трикутника більша від 180°.

КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 7 – § 9

ПОЧАТКОВИЙ РІВЕНЬ

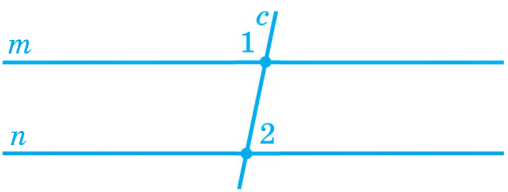
1. Кути 1 і 2, зображені на рисунку, ...

а) відповідні; **б)** односторонні; **в)** різносторонні.



2. Прямі m і n — паралельні, c — січна (див. рис.). $\angle 1 = 120°$. Чому дорівнює кут 2?

а) 120°; **б)** 60°; **в)** 180°.



3. Знайдіть кут C трикутника ABC, якщо $\angle A = 40°$, $\angle B = 95°$.

а) 55°; **б)** 40°; **в)** 45°.

4. Установіть вид трикутника, якщо два його кути дорівнюють 35° і 55°.

а) Гострокутний; **б)** тупокутний; **в)** прямокутний.

5. Обчисліть зовнішній кут трикутника MNK при вершині N, якщо $\angle N = 97°$.

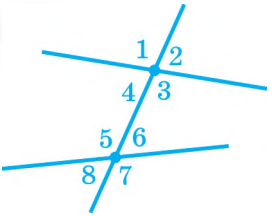
а) 83°; **б)** 97°; **в)** 3°.

6. Якщо у трикутнику ABC кут A дорівнює 80°, то зовнішній кут при вершині B...

а) більший ніж 80°; **б)** менший ніж 80°; **в)** дорівнює 80°.

СЕРЕДНІЙ РІВЕНЬ

7. На рисунку $\angle 2 = 75°$, $\angle 6 = 60°$. Знайдіть градусні міри інших кутів.



8. При перетині двох паралельних прямих січною утворилися кути 1 і 2. Відомо, що $\angle 1 = 75°$. Чому дорівнює градусна міра кута 2, якщо кути 1 і 2: **а)** різносторонні; **б)** односторонні?

9. Обчисліть зовнішній кут при вершині кута трикутника, якщо кути трикутника при двох інших його вершинах дорівнюють: **а)** 70° і 20°; **б)** 30° і 105°.

ДОСТАТНІЙ РІВЕНЬ

10. Градусні міри односторонніх кутів α й β, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, відносяться як 5 : 7. Чому дорівнюють ці кути?

11. Один з кутів трикутника дорівнює 30°. Знайдіть два інші кути трикутника, якщо їх різниця дорівнює 10°.

12. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника рівні й дорівнюють по 110°. Знайдіть зовнішній кут при третій вершині.

ВИСОКИЙ РІВЕНЬ

13. Бісектриси різносторонніх кутів, утворених при перетині прямих a і b січною c, лежать на паралельних прямих. Доведіть, що прямі a і b паралельні.

14. У тупокутному трикутнику ABC проведені висоти AE і CD. Прямі AE та CD перетинаються в точці O. Знайдіть кут AOC, якщо $\angle B = 60°$.

15. Градусні міри зовнішніх кутів трикутника відносяться як 3 : 4 : 5. Як відносяться градусні міри кутів трикутника?

§10 ПЕРША ТА ДРУГА ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

1. ПЕРША ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Рівність геометричних фігур не завжди можна встановити за допомогою накладання. Неможливо, наприклад, цим способом установити рівність двох земельних ділянок.

Тому важливо вміти встановлювати рівність геометричних фігур, не накладаючи їх одну на одну, а міркуючи та використовуючи вимірювальні інструменти.

Так, рівність двох відрізків можна встановити доволі просто — потрібно лише виміряти їхні довжини й порівняти отримані результати. А ось установити рівність двох ***трикутників*** дещо складніше. Розглянемо, як це можна зробити.

Теорема. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. Розглянемо трикутники ABC й $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 139).

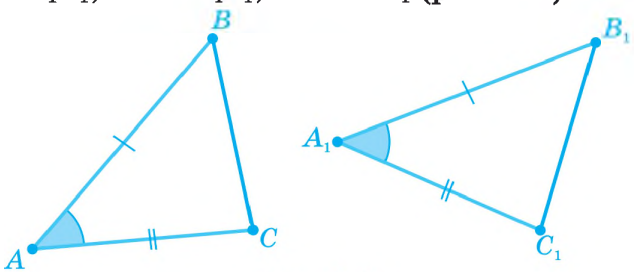


Рис. 139

Оскільки кути A й A_1 рівні, то дані трикутники можна накласти один на одного так, щоб збіглися промені AB й A_1B_1, а також промені AC й A_1C_1. При цьому оскільки $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то вершина B суміститься з вершиною B_1, а вершина C — з вершиною C_1. Отже, сторона BC суміститься зі стороною B_1C_1. ■

2. ДРУГА ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Теорема. Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні й прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 140).

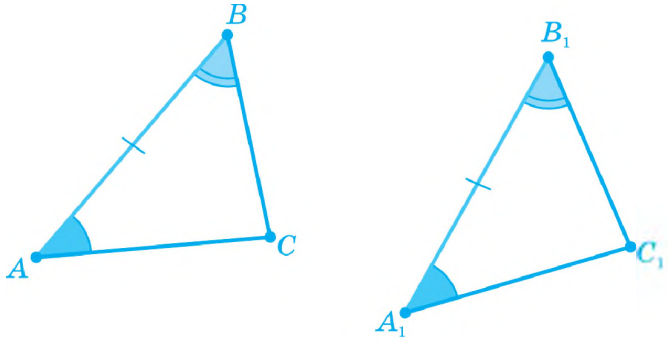


Рис. 140

Накладемо сторону A_1B_1 на сторону AB. Вони сумістяться, бо $A_1B_1 = AB$. Розмістимо вершину C_1 трикутника $A_1B_1C_1$ так, щоб точки C і C_1 лежали в одній півплощині відносно прямої AB. При цьому оскільки $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то промінь A_1C_1 суміститься з променем AC, а промінь B_1C_1 — з променем BC. Але тоді сумістяться і точки C_1 і C перетину цих променів. Таким чином, усі вершини і сторони трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC сумістилися. ■

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

253. Назвіть третій (не позначений) рівний елемент трикутників й ознаку, за якою зображені трикутники будуть рівними (рис. 141).

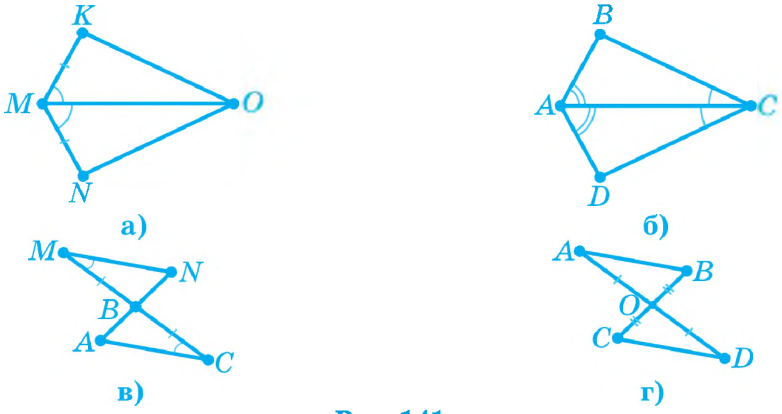


Рис. 141

254. Доведіть рівність трикутників (рис. 142).

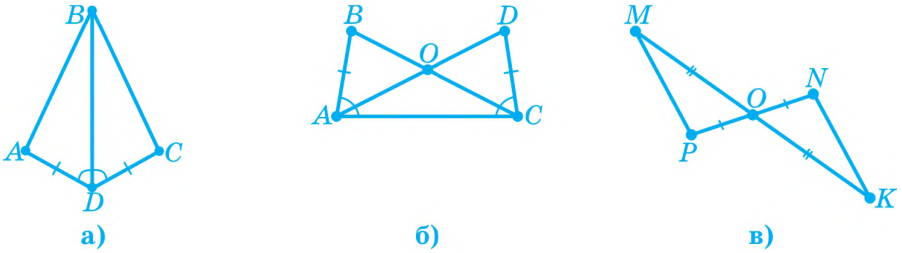


Рис. 142

255. Доведіть рівність трикутників (рис. 143).

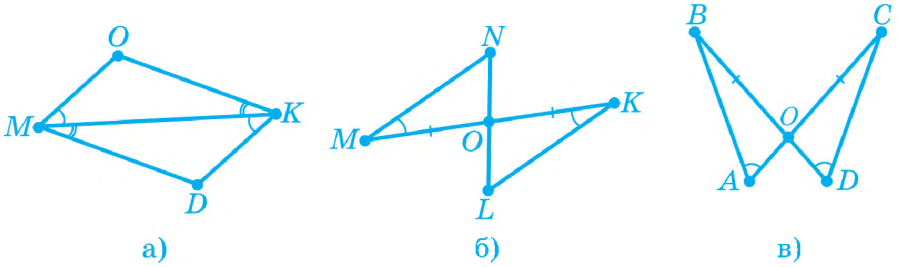
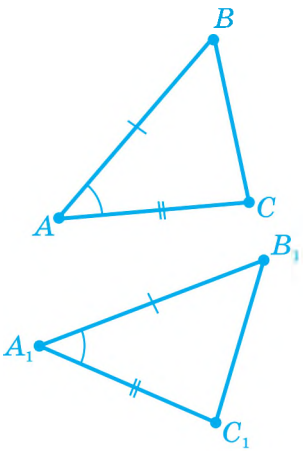


Рис. 143

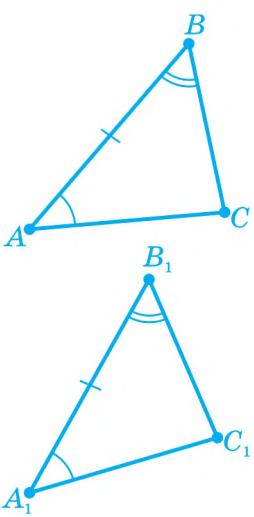
256. У трикутниках ABC і MOK $AB = MO$, $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle O$. Чи є рівними ці трикутники? Запишіть інші рівні елементи цих трикутників.

ОСНОВНЕ В § 10



Перша ознака рівності трикутників
(*за двома сторонами та кутом між ними*)

Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні: ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$) $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.



Друга ознака рівності трикутників
(*за стороною і прилеглими до неї кутами*)

Якщо сторона та прилеглі до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні та прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні: ($AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$) $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них (рис. 144). Доведіть, що трикутники AOC і BOD рівні та що $AC \parallel BD$.

Розв'язання. На рис. 144 $AO = OB$, $CO = OD$. Тоді $\Delta AOC = \Delta BOD$ — за двома сторонами і кутом між ними ($AO = OB$, $CO = OD$ за умовою, $\angle AOC = \angle BOC$ як вертикальні). З рівності трикутників випливає, що $\angle DBO = \angle CAO$, а ці кути є різносторонніми при прямих AC і BD та січній AB. Оскільки різносторонні кути рівні, то $AC \parallel BD$, що й потрібно довести. ■

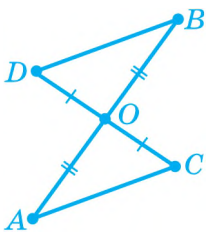


Рис. 144

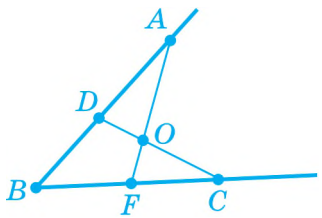


Рис. 145

Вправа 2. На рис. 145 $BD = BF$, $AB = CB$. Доведіть, що $\angle BAF = \angle BCD$.

Розв'язання. Розглянемо трикутники BAF і BCD. Оскільки кут B — спільний для цих трикутників, $BD = BF$, $BC = BA$ за умовою, то трикутники BCD і BAF рівні за першою ознакою рівності трикутників. З рівності цих трикутників випливає, що $\angle BAF = \angle BCD$. ■

Вправа 3. На рисунку 146 $AD = CF$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $AB = FE$.

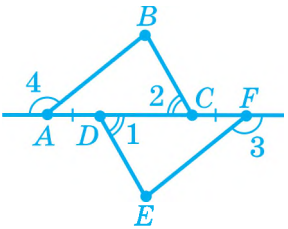


Рис. 146

Розв'язання. Розглянемо трикутники ABC і FED. $\angle 2 = \angle 1$ за умовою; $\angle BAC = \angle EFD$, оскільки вони є суміжними до рівних кутів 3 і 4; $AC = DF$, оскільки $AC = AD + DC = DC + CF = DF$. Отже, трикутники ABC і FED рівні за другою ознакою рівності трикутників. З рівності цих трикутників випливає, що $AB = FE$. ■

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Користуючись рисунком, поясніть, як можна виміряти ширину озера (відрізок AB).
2. Користуючись рисунком, поясніть, як можна виміряти ширину річки (відрізок AB), не переходячи її.

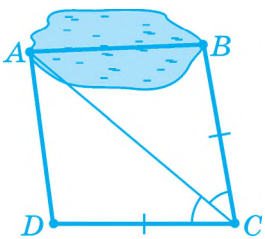


Рис. до завдання 1

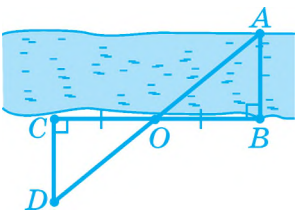
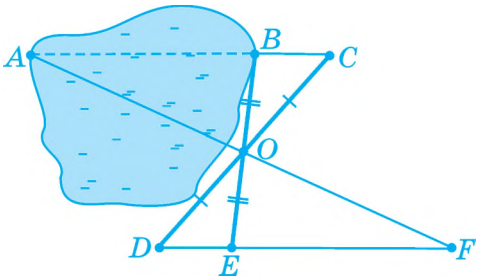


Рис. до завдання 2

3. Користуючись рисунком, поясніть, як можна виміряти ширину озера (відрізок AB).



САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 10

1. За якими трьома елементами трикутники ABC і KOM рівні (рис. 147)?

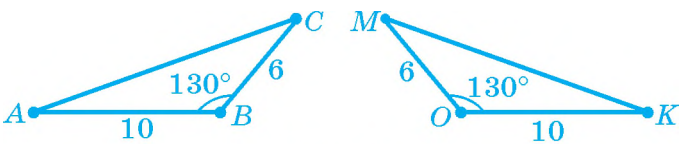


Рис. 147

2. За якими трьома елементами трикутники ABC і OMP рівні (рис. 148)?

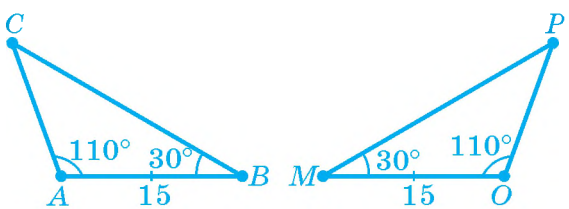


Рис. 148

3. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників.
4. Доведіть першу ознаку рівності трикутників.
5. Сформулюйте другу ознаку рівності трикутників.

ЗАДАЧІ ДО § 10

РІВЕНЬ А

257. Точка O — спільна середина відрізків MN і KL (рис. 149). Доведіть, що відрізки MK і LN рівні.

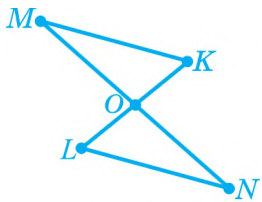


Рис. 149

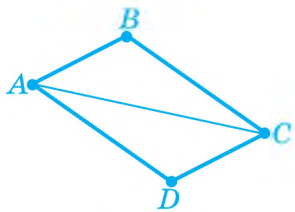


Рис. 150

258. Точки B і D лежать у різних півплощинах відносно прямої AC (рис. 150). Відомо, що $AB = CD$ і $\angle BAC = \angle DCA$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

259. На сторонах кута A (рис. 151) відкладено рівні відрізки AC і AD та проведено бісектрису AM. Доведіть рівність трикутників ACM і ADM.

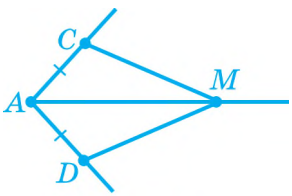


Рис. 151

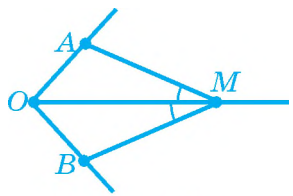


Рис. 152

260. На бісектрисі OM кута AOB (рис. 152) позначено точку M і проведено відрізки MA і MB так, що $\angle AMO = \angle BMO$. Доведіть, що $\Delta OAM = \Delta OBM$.

261. AC — бісектриса кута BAD, а CA — бісектриса кута BCD (рис. 153). Доведіть, що $AB = AD$ і $BC = CD$.

262. У трикутників ABC і CDA (рис. 154) $\angle BAC = \angle DCA$, $AB = CD$. Доведіть, що відрізки BC й AD рівні.

263. BD — бісектриса й висота трикутника ABC (рис. 155). Доведіть, що $AB = BC$.

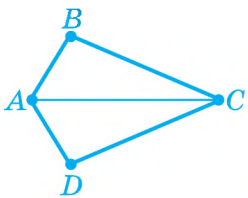


Рис. 153

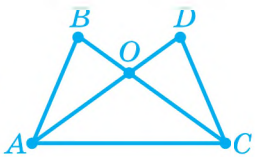


Рис. 154

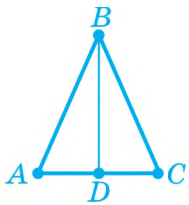


Рис. 155

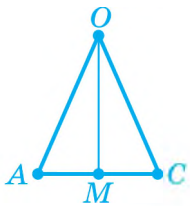


Рис. 156

264. OM — висота й медіана трикутника AOC (рис. 156). Доведіть, що відрізки AO й OC рівні.

265. Побудуйте за допомогою лінійки і транспортира трикутник ABC, у якого $\angle A = 30°$, $AB = 4$ см, $AC = 5$ см, та трикутник MNK, у якого $\angle M = 30°$, $MN = 4$ см, $MK = 5$ см. Доведіть, що відрізки BC і NK рівні.

266. Побудуйте за допомогою лінійки і транспортира трикутник ABC, у якого $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$, $AB = 4$ см, та трикутник MOK, у якого $\angle M = 30°$, $\angle O = 50°$, $MO = 4$ см. Доведіть, що $AC = MK$, $CB = KO$.

РІВЕНЬ Б

267. Пряма, що перпендикулярна до променя BL — бісектриси кута ABC, — перетинає сторони BA й BC кута ABC відповідно в точках M і K, а бісектрису BL — у точці O (рис. 157). Доведіть, що точка O ділить відрізок MK навпіл.

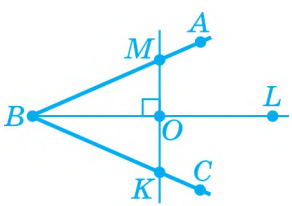


Рис. 157

268. BK — бісектриса трикутника ABC, у якого сторони AB і BC рівні. Доведіть, що BK є і медіаною цього трикутника.

269. На сторонах AC й A_1C_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ позначено відповідно такі точки N і N_1, що $\Delta ABN = \Delta A_1B_1N_1$ (рис. 158). Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, якщо $AC = A_1C_1$.

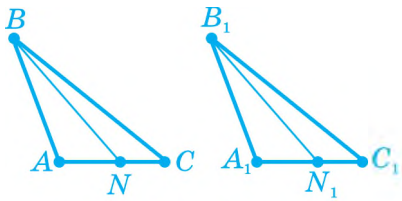


Рис. 158

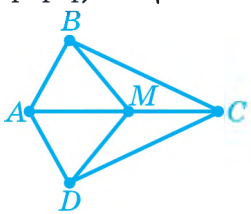


Рис. 159

270. У різних півплощинах відносно прямої AC взято такі точки B і D, що $\Delta ABC = \Delta ADC$ (рис. 159). Доведіть, що $\Delta ABM = \Delta ADM$, де M — точка відрізка AC.

271. На рисунку 160 прямі AB і CD паралельні, точка O — середина відрізка AC. Доведіть, що $\Delta AOB = \Delta COD$.

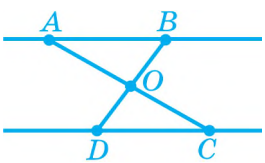


Рис. 160

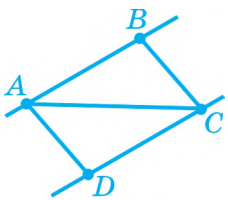


Рис. 161

272. На рисунку 161 відрізки AB і CD рівні й паралельні. Доведіть, що $\Delta ACB = \Delta CAD$.

273. Доведіть, що в рівних трикутників бісектриси, проведені з вершин рівних кутів, є рівними.

274. Дано рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що медіани AM і A_1M_1 цих трикутників рівні.

РІВЕНЬ В

275. На рисунку 162 прямі AB і CD паралельні, а відрізки AB і CD рівні. Доведіть рівність відрізків BC і AD.

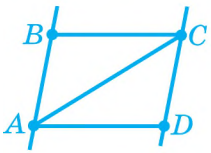


Рис. 162

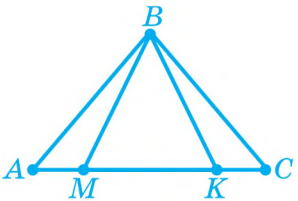


Рис. 163

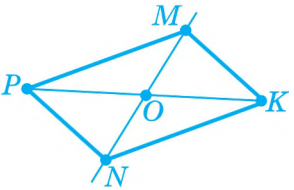


Рис. 164

276. На рисунку 163 $\Delta ABK = \Delta CBM$. Доведіть, що $\Delta ABM = \Delta CBK$.

277. У різних півплощинах відносно прямої PK позначено точки M і N такі, що $MP = NK$, $\angle MPK = \angle NKP$ (рис. 164). Доведіть, що пряма MN ділить відрізок PK навпіл.

278. O — спільна середина відрізків AB і CD (рис. 165). AM і BN — бісектриси кутів OAC і OBD. Доведіть, що прямі AM і BN паралельні.

279. У різних півплощинах відносно прямої AC взято точки B і D такі, що $\Delta ABC = \Delta CDA$. На відрізку AC позначено точки M і N, при цьому $AM = CN$ (рис. 166). Доведіть, що прямі BM і DN паралельні.

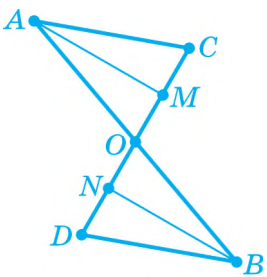


Рис. 165

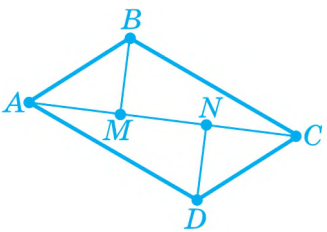


Рис. 166

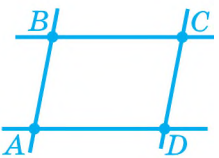


Рис. 167

280. На рисунку 167 $\angle B = \angle D$, $AB = CD$ і $AD = BC$. Доведіть, що $AB \parallel CD$ і $AD \parallel BC$.

§11 РІВНОБЕДРЕНИЙ І РІВНОСТОРОННІЙ ТРИКУТНИКИ

1. Рівнобедрений трикутник
2. Рівносторонній трикутник

1. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

Означення. Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають ***рівнобедреним***. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають ***бічними*** сторонами, а третю сторону — ***основою*** рівнобедреного трикутника. На рис. 168 зображено рівнобедрений трикутник ABC. AB і BC — його бічні сторони, AC — основа.

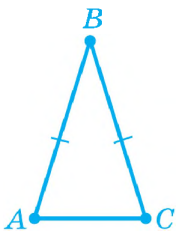


Рис. 168. Рівнобедрений трикутник

ВЛАСТИВОСТІ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

Теорема. Бісектриса, проведена до основи рівнобедреного трикутника, ділить його на два рівні трикутники.

Доведення. Проведемо в рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC бісектрису BD (рис. 169).

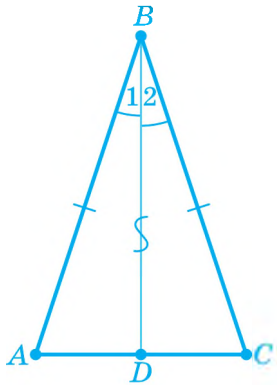


Рис. 169

Розглянемо трикутники ABD і CBD. У них є рівні сторони: $AB = CB$, тому що трикутник ABC рівнобедрений, а сторона BD у них спільна. Крім того, рівні й кути між цими сторонами: $\angle 1 = \angle 2$, оскільки BD — бісектриса. Отже, трикутники ABD і CBD рівні за першою ознакою рівності трикутників. ■

Із цієї теореми випливають корисні властивості, які ми сформулюємо теж у вигляді теорем.

Теорема. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

Доведення. Бісектриса BD, проведена до основи рівнобедреного трикутника ABC, ділить його на два рівні трикутники ABD і CBD, отже, $\angle A = \angle C$ як відповідні кути рівних трикутників. ■

Теорема. Бісектриса, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є його медіаною й висотою.

Доведення. Бісектриса BD, проведена до основи рівнобедреного трикутника ABC, ділить його на два рівні трикутники ABD і CBD. Тому $AD = CD$ як відповідні сторони рівних трикутників, тобто точка D є серединою сторони AC (рис. 170). Отже, BD — медіана.

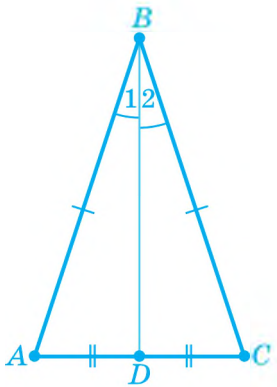


Рис. 170

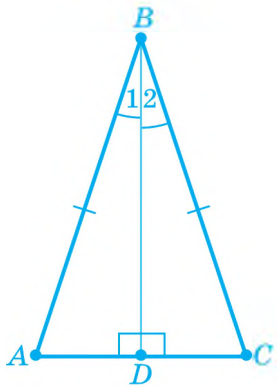


Рис. 171

З рівності трикутників ABD і CBD (рис. 171) випливає також, що $\angle ADB = \angle CDB$, тому що це відповідні кути рівних трикутників. Оскільки ці кути до того ж є суміжними, їх сума дорівнює 180°. Отже, кожний із цих кутів дорівнює $180° : 2 = 90°$, тобто BD — висота трикутника. ■

ОЗНАКА РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

Теорема. Якщо два кути трикутника рівні, то він рівнобедрений.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC кути A і C рівні. Проведемо бісектрису BD і розглянемо трикутники ABD і CBD (рис. 172).

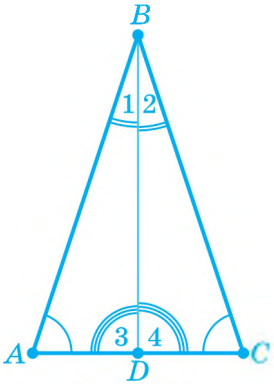


Рис. 172

У цих трикутників два кути рівні, оскільки $\angle A = \angle C$ за умовою, а $\angle 1 = \angle 2$, тому що BD — бісектриса кута ABC. А коли у двох трикутників по два кути відповідно рівні, то рівні й треті їхні кути, оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°. Отже, $\angle 3 = \angle 4$. Звідси випливає, що трикутники ABD і CBD рівні за другою ознакою: сторона BD у них спільна, а прилеглі до неї кути обох трикутників відповідно рівні. Отже, $AB = CB$, тобто трикутник ABC — рівнобедрений. ■

Доведену теорему часто називають ***ознакою рівнобедреного трикутника***. Рівність двох кутів — не єдина ознака рівнобедреного трикутника. Далі, у розділах «Розв'язуємо разом» і «Бесіди після уроку», ми розглянемо й інші ознаки рівнобедреного трикутника.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

281. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, у якого основа дорівнює 7 см, а бічна сторона — 11 см.

282. Накресліть довільну пряму a, позначте на ній точки A та B. Відкладіть від прямої a в одну півплощину кути MAB і KBA, кожний з яких дорівнює 50°. Точку перетину променів AM і BK позначте через C. Яким є трикутник ABC за сторонами?

283. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Обчисліть кут між бічними сторонами.

284. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 110°. Знайдіть кут при основі трикутника.

2. РІВНОСТОРОННІЙ ТРИКУТНИК

Означення. Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають ***рівностороннім*** (рис. 173).

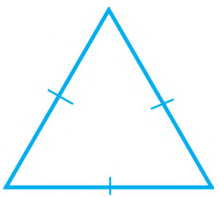


Рис. 173

Будь-яку пару сторін рівностороннього трикутника можна розглядати як бічні сторони рівнобедреного трикутника. З цього випливає низка важливих наслідків.

Наприклад, з рівності сторін AB і BC рівностороннього трикутника ABC (рис. 174) випливає, що $\angle 1 = \angle 3$, а з рівності сторін AB і AC випливає, що $\angle 2 = \angle 3$. Отже, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, тобто ***всі кути рівностороннього трикутника рівні.***

Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то кожен з кутів рівностороннього трикутника дорівнює 180° : 3 = 60° (рис. 175).

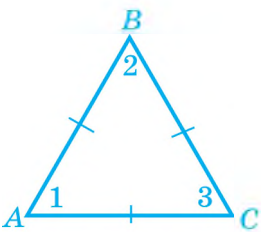


Рис. 174

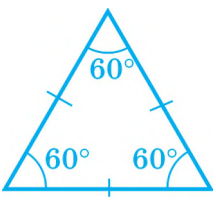


Рис. 175

З доведених теорем про рівнобедрений трикутник маємо:

1) ***властивість*** рівностороннього трикутника: ***будь-яка бісектриса рівностороннього трикутника є його медіаною й висотою***;

2) ***ознака*** рівностороннього трикутника: ***якщо всі кути трикутника рівні, то він рівносторонній.***

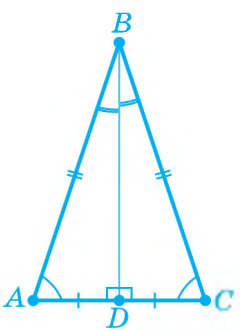
ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

285. Проведіть пряму a. Відкладіть на ній відрізок $AB = 4$ см. Опишіть кола із центрами в точках A та B і радіусом 4 см. Одну з точок перетину кіл позначте через C і сполучіть її з точками A і B. **а)** Як називають трикутник ABC і чому дорівнюють довжини його сторін? **б)** Обчисліть периметр трикутника ABC. **в)** Яка градусна міра кожного з кутів трикутника?

286. Знайдіть сторону рівностороннього трикутника, периметр якого дорівнює: **а)** 15 см; **б)** 7,8 см.

287. Якщо один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то цей трикутник є рівностороннім. Доведіть.

ОСНОВНЕ В § 11

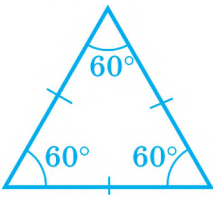


Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають **рівнобедреним.**

Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

Бісектриса, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є його медіаною й висотою.

Якщо два кути трикутника рівні, то він рівнобедрений.



Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають **рівностороннім.**
Кожен кут рівностороннього трикутника дорівнює 60°.
Якщо всі кути трикутника рівні, то він є рівностороннім.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Доведіть, що медіани рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC $AB = AC$, а BK, CL — медіани (рис. 176). $CK = BL$ як половини рівних сторін AC й AB. $\Delta BKC = \Delta CLB$ за двома сторонами і кутом між ними (BC — спільна, $CK = BL$, $\angle KCB = \angle LBC$ як кути при основі рівнобедреного трикутника). З рівності трикутників BKC і CLB випливає, що $BK = CL$. ■

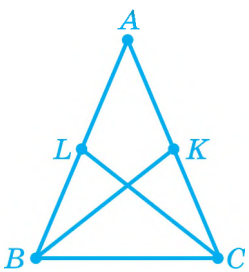


Рис. 176

Коментар. Доведена теорема — одна з ***властивостей*** рівнобедреного трикутника.

Вправа 2. Доведіть: якщо висота трикутника збігається з його медіаною, то цей трикутник — рівнобедрений.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC відрізок BD є одночасно медіаною і висотою (рис. 177).

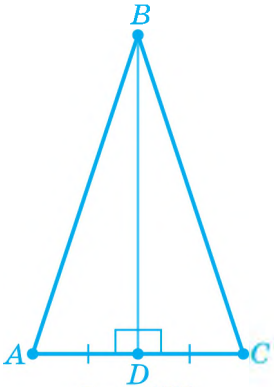


Рис. 177

Трикутники ABD і CBD рівні за першою ознакою рівності трикутників. Справді, $AD = CD$, тому що BD — медіана, сторона BD у трикутників ABD і CBD спільна, а кути BDA і BDC рівні (обидва прямі, тому що BD — висота). З рівності трикутників ABD і CBD випливає, що $AB = BC$, тобто трикутник ABC — рівнобедрений. ■

Коментар. Доведена теорема — ще одна з ***ознак*** рівнобедреного трикутника.

Вправа 3. Доведіть: якщо висота трикутника збігається з його бісектрисою, то цей трикутник — рівнобедрений.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC відрізок BD є одночасно бісектрисою й висотою (рис. 178).

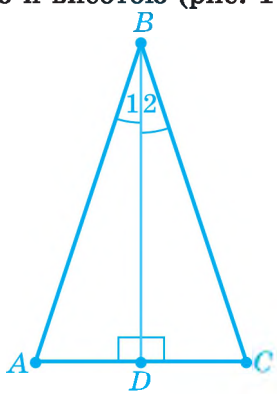


Рис. 178

Трикутники ABD і CBD рівні за другою ознакою рівності трикутників. Так, сторона BD у трикутниках ABD і CBD спільна, кути 1 і 2 рівні, тому що BD — бісектриса, а кути BDA і BDC рівні (обидва прямі, тому що BD — висота). З рівності трикутників ABD і CBD випливає, що $AB = BC$, тобто трикутник ABC — рівнобедрений. ■

Коментар. Доведена теорема також є ***ознакою*** рівнобедреного трикутника.

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Як на місцевості поділити навпіл кут, не вимірюючи його?

БЕСІДА ПІСЛЯ УРОКУ

Ми довели: якщо висота трикутника збігається з його медіаною або бісектрисою, то цей трикутник — рівнобедрений. Проте здається, якщо медіана збігається з бісектрисою, то трикутник теж має бути рівнобедреним. Чи не так?

Так, але довести це дещо складніше, ніж попередні теореми.

Теорема. Якщо медіана трикутника збігається з його бісектрисою, то трикутник рівнобедрений.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC відрізок BD є одночасно бісектрисою й медіаною (рис. 179).

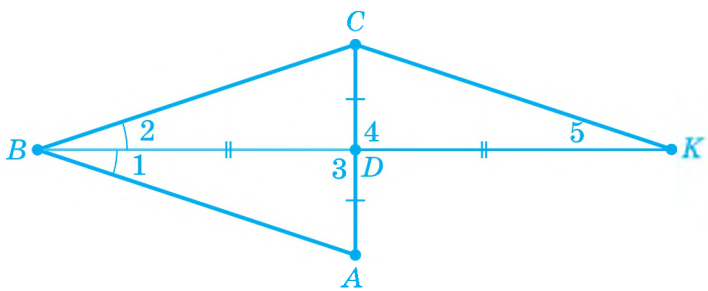


Рис. 179

Продовжимо відрізок BD до точки K так, що $DK = BD$ (цю корисну додаткову побудову називають «подвоєнням медіани»). Розглянемо трикутники ADB і CDK. У них по дві сторони відповідно рівні: $AD = CD$, оскільки BD — медіана, і $BD = DK$ за побудовою. Крім того, кути 3 й 4 рівні як вертикальні. Отже, трикутники ADB і CDK рівні за першою ознакою. З рівності трикутників ADB і CDK випливає рівність відповідних сторін і кутів: $CK = AB$ і $\angle 5 = \angle 1$.

Оскільки BD — бісектриса трикутника ABC, то $\angle 1 = \angle 2$. З цієї рівності й доведеної вище рівності $\angle 5 = \angle 1$ випливає, що $\angle 5 = \angle 2$, тобто в трикутнику BCK два кути рівні. За ознакою рівнобедреного трикутника трикутник BCK — рівнобедрений з основою BK, тобто $BC = CK$. А оскільки, як уже доведено, $CK = AB$, то одержуємо: $AB = BC$, тобто трикутник ABC — рівнобедрений. ■

Коментар. Зауважимо, що, доводячи теорему, ми виконали ***додаткову побудову*** й увели до розгляду геометричні фігури, яких не було в умові задачі. Це доволі поширений і корисний прийом для доведення теорем і розв'язування задач.

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 11

1. Як називають трикутник, зображений на рисунку 180? Укажіть його основу й бічні сторони.

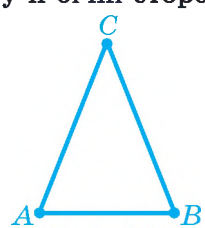


Рис. 180

2. Який трикутник називають рівнобедреним?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про бісектрису рівнобедреного трикутника та наслідки з неї.

4. При якій стороні рівнобедреного трикутника кути рівні? Укажіть їх на рисунку 180.
5. У трикутнику два кути рівні. Яким є цей трикутник?
6. Доведіть ознаку рівнобедреного трикутника за кутами.
7. Який трикутник називають рівностороннім?
8. Сформулюйте властивість кутів рівностороннього трикутника.

ЗАДАЧІ ДО § 11

РІВЕНЬ А

288. Знайдіть периметр трикутника ACD, у якого $\angle A = \angle D$, $AD = 8$ см і $AC = 13$ см.

289. Знайдіть периметр трикутника MOK, у якого $\angle M = \angle O$, $MO = 10{,}2$ см і $MK = 5{,}8$ см.

290. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його периметр і основа відповідно дорівнюють 34 см і 10 см.

291. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 28 см, а його основа — 8 см. Знайдіть бічну сторону.

292. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 79°. Знайдіть кути при основі трикутника.

293. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 35°. Знайдіть кут між бічними сторонами.

294. Чи може бути в рівнобедреному трикутнику кут при основі: **а)** тупим; **б)** прямим?

295. Зовнішній кут при вершині кута, утвореного бічними сторонами рівнобедреного трикутника, дорівнює 130°. Знайдіть кути при основі трикутника.

296. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 28°. Знайдіть зовнішній кут при вершині, утвореній бічними сторонами.

297. Якими є зовнішні кути рівностороннього трикутника? Яка градусна міра кожного з них?

298. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють по 120°. Укажіть вид трикутника за сторонами.

299. На основі AC рівнобедреного трикутника ABC узято відповідно точки P і K такі, що $AP = CK$ (рис. 181). Доведіть, що $\Delta ABP = \Delta CBK$.

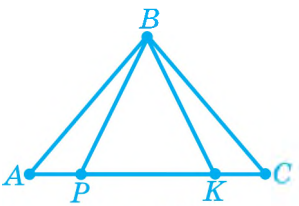


Рис. 181

300. На основі AC рівнобедреного трикутника ABC узято відповідно точки P і K такі, що $\angle ABP = \angle CBK$ (рис. 181). Доведіть, що $\Delta ABP = \Delta CBK$.

РІВЕНЬ Б

301. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 25 см. Знайдіть його сторони, якщо бічна сторона на 2 см більша від основи.

302. Знайдіть кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо його градусна міра відноситься до градусної міри кута при основі як 2 : 5.

303. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при його основі на 15° більший від кута між бічними сторонами.

304. Зовнішній кут при вершині, утвореній бічними сторонами рівнобедреного трикутника, дорівнює 70°. Знайдіть інші зовнішні кути трикутника.

305. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні.

306. Доведіть, що кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює половині зовнішнього кута при вершині, утвореній бічними сторонами.

307. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено висоту BD. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо BD дорівнює 5 см, а периметр трикутника ABD — 30 см.

РІВЕНЬ В

308. O — точка перетину бісектрис AL і CK рівнобедреного трикутника ABC з основою AC. Доведіть, що відрізки OK й OL рівні.

309. Дано два рівнобедрені трикутники зі спільною основою, вершини яких лежать у різних півплощинах відносно прямої, що містить основу. Доведіть, що їхні бісектриси, проведені до основи, лежать на одній прямій.

310. Якщо основа й висота, проведена до неї, одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі й висоті, проведеній до неї, другого рівнобедреного трикутника, то такі трикутники рівні. Доведіть.

311. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC відповідно позначені точки K і M такі, що $AK = CM$. O — точка перетину відрізків AM і CK. Доведіть, що точка O належить бісектрисі кута B.

312. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено висоту BK. Знайдіть довжину висоти BK, якщо периметр трикутника ABK дорівнює 24 см, а периметр трикутника ABC — 32 см.

313. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо градусні міри двох його зовнішніх кутів відносяться як 5 : 2.

§12 ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

1. Третя ознака рівності трикутників
2. Співвідношення між сторонами та кутами трикутника
3. Нерівність трикутника

1. ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Теорема. Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. Розглянемо трикутники ABC й $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 182).

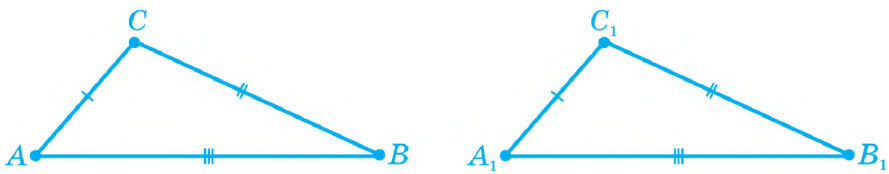


Рис. 182

Розмістимо ці трикутники так, щоб рівні сторони AB і A_1B_1 сумістилися, а вершини C і C_1 були в різних півплощинах відносно прямої AB. При цьому можливі три випадки (див. рис. 183):

1) точки A і B лежать у різних півплощинах відносно прямої CC_1;

2) точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої CC_1;

3) одна з точок (A чи B) лежить на прямій CC_1.

Ми розглянемо далі тільки перший випадок (рис. 183 а), а два інші пропонуємо розглянути самостійно.

Трикутники ACC_1 і BCC_1 — рівнобедрені, бо $AC = AC_1$ і $BC = BC_1$. Отже, $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$ і $\angle BCC_1 = \angle BC_1C$ як кути при основах рівнобедрених трикутників. Звідси випливає, що $\angle ACB = \angle AC_1B$, тому що ці кути є сумами відповідно рівних кутів. Тоді $\Delta ABC = \Delta ABC_1$ за першою ознакою рівності трикутників, а отже, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. ■

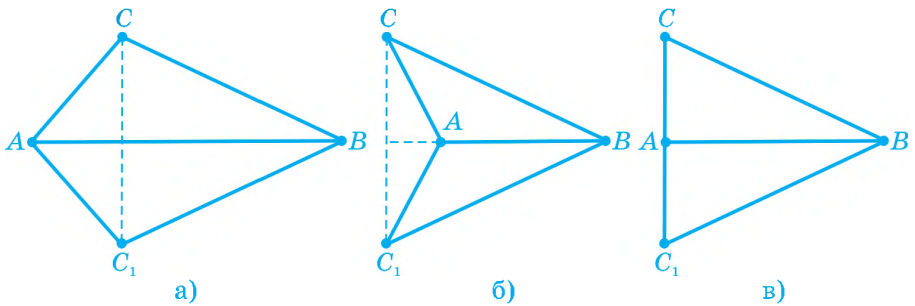


Рис. 183

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

314. Назвіть спільний елемент трикутників (рис. 184) й ознаку, за якою ці трикутники є рівними.

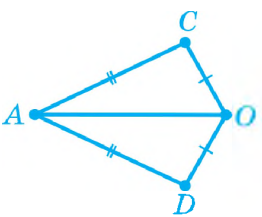


Рис. 184

315. Доведіть рівність трикутників (рис. 185):

а) MOK і MPK; б) ABC і CDA; в) MOK і KDM.

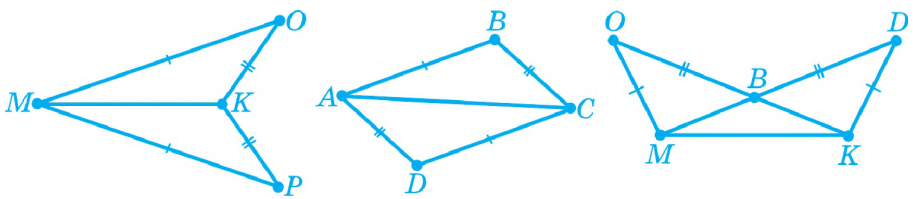


Рис. 185

316. У трикутниках ABC і MOK $AB = MO$, $AC = MK$, $BC = OK$. Якими є вказані трикутники? Запишіть інші рівні елементи цих трикутників.

317. Точки B і D лежать у різних півплощинах відносно прямої AC (рис. 186). Відомо, що $AB = AD$ і $BC = CD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

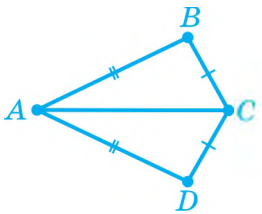


Рис. 186

2. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ ТА КУТАМИ ТРИКУТНИКА

Трикутник, у якого довжини всіх сторін різні, називають ***різностороннім*** (рис. 187).

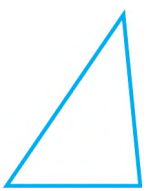


Рис. 187

Накресліть різносторонній трикутник, виміряйте його сторони і кути. Позначте на рисунку червоним кольором найбільшу сторону кожного трикутника і найбільший кут у цьому трикутнику. Зробіть це для двох-трьох різносторонніх трикутників.

Якщо ви зробили все правильно, то, напевно, помітили, що в усіх випадках проти найбільшої сторони лежить най-

більший кут, а проти найбільшого кута — найбільша сторона (рис. 188).

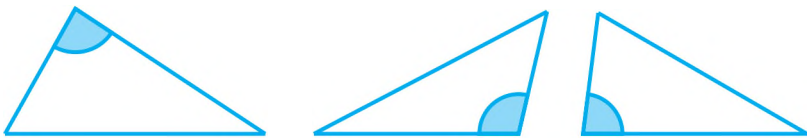


Рис. 188

Підтвердимо результати цього спостереження теоремами.

Теорема. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC сторона AB більша від сторони AC (рис. 189). Доведемо, що кут C більший від кута B.

Позначимо на промені AB точку D таку, що $AD = AC$ (рис. 190). Оскільки $AC < AB$, то D буде внутрішньою точкою сторони AB, а значить, і кута ACB.

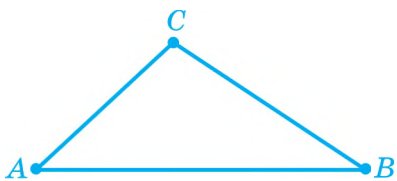


Рис. 189

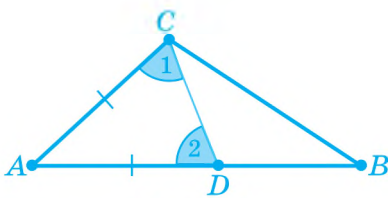


Рис. 190

Трикутник CAD — рівнобедрений з основою CD, тому $\angle 1 = \angle 2$. Кут 1 — частина кута ACB, тому $\angle ACB > \angle 1$. Кут 2 — зовнішній кут трикутника BDC і тому $\angle 2 > \angle B$. Зі співвідношень $\angle ACB > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle B$ випливає, що $\angle ACB > \angle B$. ■

Наступна теорема є оберненою до доведеної.

Теорема. У трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC кут C більший від кута B (рис. 191). Доведемо, що сторона AB більша від сторони AC.

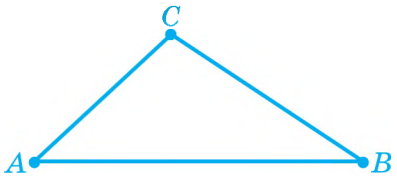


Рис. 191

Проведемо доведення методом від супротивного. Нехай нерівність $AB > AC$ не виконується. Тоді або $AB = AC$, або $AB < AC$. У першому випадку трикутник ABC — рівнобедрений з основою BC, і, отже, кути при його основі рівні, тобто $\angle C = \angle B$, що суперечить умові. Якщо ж $AB < AC$, то проти більшої сторони в трикутнику лежить більший кут і має виконуватися нерівність $\angle C < \angle B$, що теж суперечить умові. Отже, залишається одне: $AB > AC$. ■

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

318. У трикутнику ABC $AB = 17$ см, $BC = 13$ см і $AC = 21$ см. Який кут трикутника: **а)** найбільший; **б)** найменший?

319. Який кут у рівнобедреному трикутнику більший — при основі чи між бічними сторонами, якщо: **а)** основа дорівнює 8 см, а бічна сторона — 9 см; **б)** основа дорівнює 12 см, а сума бічних сторін — 18 см?

320. Порівняйте кути трикутника ABC, якщо $AB > BC > AC$. Які кути трикутника ABC не можуть бути прямими або тупими?

321. Кути трикутника дорівнюють 40°, 75° і 65°. Проти якого кута лежить: **а)** найбільша сторона; **б)** найменша сторона?

322. Порівняйте сторони трикутника MOK, якщо $\angle M > \angle O > \angle K$.

3. НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

Накресліть довільний трикутник і виміряйте його сторони. Порівняйте довжину будь-якої сторони із сумою довжин двох інших сторін. Чи помітили ви якусь закономірність?

Теорема. Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших сторін.

Доведення. Доведемо, наприклад, що сторона AB трикутника ABC менша від суми сторін AC і BC (рис. 192).

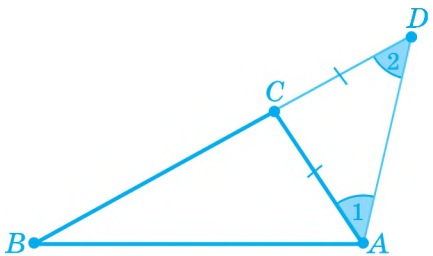


Рис. 192

Відкладемо на продовженні сторони BC відрізок $CD = AC$ і проведемо відрізок DA. Отримаємо трикутник ABD, сторона BD якого дорівнює $BC + AC$. Трикутник ACD рівнобедрений з основою AD, тому $\angle 1 = \angle 2$. Кут 1 є частиною кута BAD, а оскільки $\angle 1 = \angle 2$, то звідси випливає, що $\angle 2 < \angle BAD$. Тоді $AB < BD$, тому що в трикутнику ABD проти меншого кута лежить менша сторона. А оскільки $BD = BC + AC$, то $AB < BC + AC$. ■

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

323. Дано трикутник MNK. Порівняйте довжину кожної його сторони із сумою двох інших.

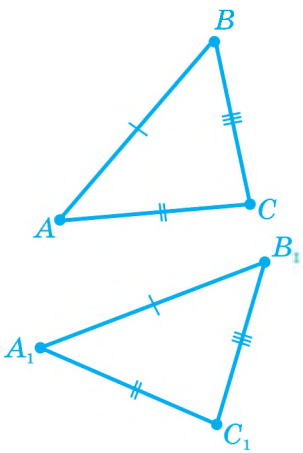
324. Установіть, чи існує трикутник зі сторонами: **а)** 5 см, 12 см, 8 см; **б)** 6 см, 11 см, 6 см.

325. Чи існує трикутник, у якого периметр дорівнює 16 см, а одна зі сторін — 9 см?

326. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 3 см і 7 см. Якою може бути його третя сторона? Відповідь обґрунтуйте.

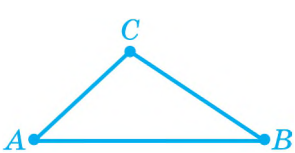
ОСНОВНЕ В § 12

ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні: ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$) $\Rightarrow$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

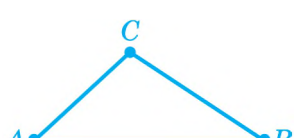
СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ТРИКУТНИКА



У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона:

$AB > AC \Rightarrow \angle C > \angle B$;

$\angle C > \angle B \Rightarrow AB > AC$.



Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших сторін: $AB < AC + CB$.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Якщо дві сторони й медіана, проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і медіані, проведеній до третьої сторони, іншого трикутника, то такі трикутники рівні. Доведіть це.

Розв'язання. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 193) $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, AD і A_1D_1 — медіани цих трикутників і $AD = A_1D_1$.

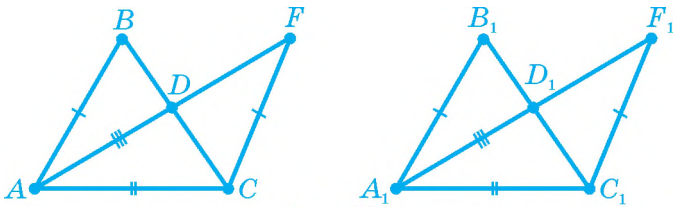


Рис. 193

Для доведення цієї теореми потрібно виконати додаткову побудову та розглянути низку висновків про рівність трикутників. Щоб доведення було зрозумілішим, пронумеруємо кроки міркувань.

1. Виконаємо для обох трикутників уже відоме вам «подвоєння медіани». На промені AD відкладемо відрізок DF, який дорівнює відрізкові AD, а на промені A_1D_1 — відрізок D_1F_1, який дорівнює відрізкові A_1D_1.

2. $\Delta ABD = \Delta FCD$ (за двома сторонами і кутом між ними: $AD = DF$, $BD = CD$, $\angle BDA = \angle CDF$). З рівності цих трикутників випливає, що $AB = CF$.

3. $\Delta A_1B_1D_1 = \Delta F_1C_1D_1$ (за двома сторонами і кутом між ними: $A_1D_1 = D_1F_1$, $B_1D_1 = C_1D_1$, $\angle B_1D_1A_1 = \angle C_1D_1F_1$). З рівності цих трикутників випливає, що $A_1B_1 = C_1F_1$.

4. $\Delta AFC = \Delta A_1F_1C_1$ (за трьома сторонами). З рівності цих трикутників одержуємо: $\angle FAC = \angle F_1A_1C_1$.

5. $\Delta ADC = \Delta A_1D_1C_1$ (за двома сторонами і кутом між ними: $AD = A_1D_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle FAC = \angle F_1A_1C_1$). З рівності цих трикутників маємо $DC = D_1C_1$, тоді $BC = B_1C_1$.

6. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (за трьома сторонами), що й потрібно було довести. ■

Вправа 2. Доведіть, що кожна сторона трикутника більша від модуля різниці двох інших його сторін.

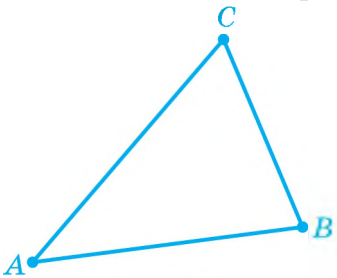


Рис. 194

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC. Доведемо, наприклад, що $AB > |AC - BC|$. Нехай у трикутнику ABC $AC \geq BC$ (рис. 194). Тоді $AC - BC \geq 0$ і достатньо довести, що $AB > AC - BC$. Відповідно до властивості нерівності трикутника, маємо $AB + BC > AC$. Звідки $AB > AC - BC$, що й потрібно було довести. ■

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Чи вистачить 12 см дроту, щоб зігнути з нього трикутник, одна зі сторін якого дорівнює: **а)** 7 см; **б)** 6 см; **в)** 5 см?

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 12

1. За якими трьома елементами рівні трикутники ABC і CDA (рис. 195)?

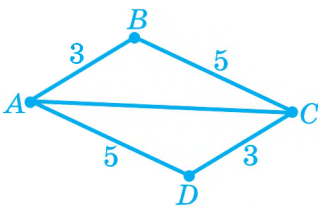


Рис. 195

2. Сформулюйте третю ознаку рівності трикутників.

а) Який перший крок доведення теореми?

б) Сформулюйте теореми, за допомогою яких доводять третю ознаку рівності трикутників.

3. Сформулюйте теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

4. Доведіть третю ознаку рівності трикутників.

ЗАДАЧІ ДО § 12

РІВЕНЬ А

327. На рисунку 196 $AB = CD$ і $BC = AD$. Доведіть, що $\angle BAC = \angle DCA$.

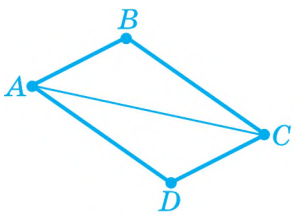


Рис. 196

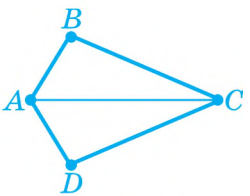


Рис. 197

328. На рисунку 197 $AB = AD$ і $BC = CD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

329. У трикутнику ABC $\angle A = 100°$, $\angle B = 50°$. Укажіть:

а) найбільшу сторону трикутника;

б) найменшу сторону трикутника.

330. У трикутнику OPK $\angle OPK = 70°$, $\angle POK = 30°$. Укажіть: а) найбільшу сторону трикутника; б) найменшу сторону трикутника.

331. Який кут у рівнобедреному трикутнику більший: кут при основі чи кут між бічними сторонами, якщо основа дорівнює 6,5 см, а сума бічних сторін — 14 см?

332. Порівняйте основу та бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо зовнішній кут при вершині кута, утвореного бічними сторонами, дорівнює 130°.

333. Чи існує трикутник, у якого периметр і одна сторона відповідно дорівнюють: **а)** 15 см і 7 см; **б)** 25 см і 12 см?

334. Чи можна з дроту завдовжки 50 см виготовити трикутник, одна сторона якого дорівнює: **а)** 26 см; **б)** 24 см?

РІВЕНЬ Б

335. Дано трикутник ACD, у якого $AC = DC$ (рис. 198). Через вершину C проведено пряму, яка перетинає сторону AD у точці M, що є її серединою. Доведіть, що пряма CM перпендикулярна до прямої AD.

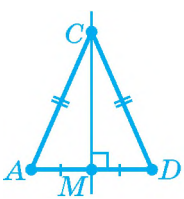


Рис. 198

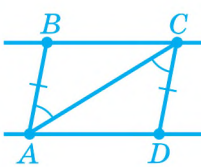


Рис. 199

336. На рисунку 199 $AB = CD$ і $\angle BAC = \angle DCA$. Доведіть, що прямі AD і BC паралельні.

337. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють: **а)** 6 см і 2 см; **б)** 5 см і 3 см.

338. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 23 см, а одна з його сторін — 7 см. Знайдіть довжини двох інших його сторін.

РІВЕНЬ В

339. У різних півплощинах відносно прямої AD позначено точки B і C такі, що $BA = CA$ і $BD = CD$ (рис. 200). Доведіть, що будь-яка точка M відрізка AD розміщена на однаковій відстані від точок B і C.

340. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ і $AC = A_1C_1$. Доведіть, що бісектриси трикутників BL і B_1L_1 рівні.

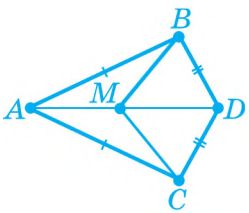


Рис. 200

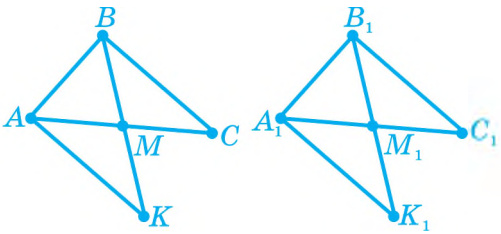


Рис. 201

341. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 201) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ і $BM = B_1M_1$, де BM і B_1M_1 — медіани. Точки M і M_1 — середини відповідно відрізків BK і B_1K_1. Доведіть, що $\Delta ABK = \Delta A_1B_1K_1$.

342. Доведіть, що будь-яка сторона трикутника менша від його півпериметра.

343. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки трикутника до його вершин більша від його півпериметра.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Трикутник — жорстка фігура (не можна змінити жодного кута трикутника, не змінюючи його сторони). Цю властивість використовують у проектуванні мостових арок, конструюванні підйомних кранів тощо.

§13 ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

1. Властивості прямокутного трикутника
2. Ознаки рівності прямокутних трикутників

1. ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

ГІПОТЕНУЗА І КАТЕТИ

Сторони прямокутного трикутника, які утворюють прямий кут, називають ***катетами***, а сторону, протилежну прямому кутові, називають ***гіпотенузою*** (рис. 202).

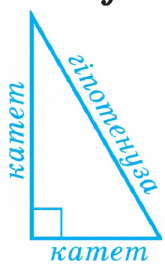


Рис. 202

Установимо співвідношення між довжинами гіпотенузи та катетів.

По-перше, з теореми про нерівність трикутника випливає, що ***довжина гіпотенузи менша від суми довжин катетів***.

По-друге, прямий кут більший від кожного з гострих кутів, тому з теореми про співвідношення між сторонами та кутами трикутника випливає, що

у прямокутному трикутнику гіпотенуза більша від будь-якого з катетів.

З цього випливає такий наслідок:

довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до прямої, менша від довжини будь-якого іншого відрізка, який сполучає дану точку з точкою тієї ж прямої.

Так, нехай MN — перпендикуляр до прямої a (рис. 203). Нехай точка K, що лежить на цій прямій, не збігається з точкою N. У прямокутному трикутнику MNK сторона MK є гіпотенузою і, отже, більша від катета MN.

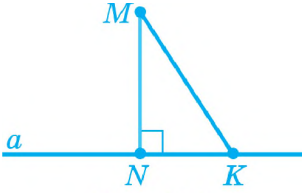


Рис. 203

СУМА ГОСТРИХ КУТІВ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, а у прямокутному трикутнику один кут дорівнює 90°, то

сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 180° − 90° = 90°.

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК З ГОСТРИМ КУТОМ 30° АБО 60°

Теорема. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Доведення. Нехай у прямокутному трикутнику ABC (рис. 204) із прямим кутом C кут B дорівнює 30°. Доведемо, що $AC = \frac{1}{2}AB$.

Прикладемо до трикутника ABC рівний йому трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб катети BC і B_1C_1 сумістилися (точки B і B_1, що збіглися, позначимо B, точки C і C_1, що збіглися, позначимо C), а вершини A й A_1 розмістилися в різних півплощинах відносно прямої BC.

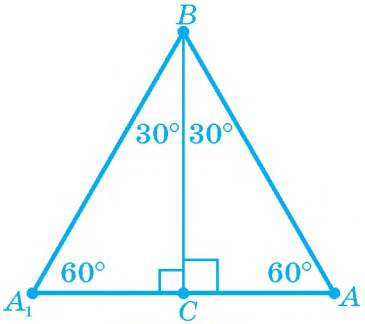


Рис. 204

Кут A_1CA є розгорнутим, оскільки дорівнює сумі двох прямих кутів, тому точки A_1, C й A лежать на одній прямій. Розглянемо трикутник A_1BA. Усі кути цього трикутника рівні: кожний з них дорівнює 60°. Тоді за ознакою рівностороннього трикутника трикутник A_1BA рівносторонній, тобто $A_1A = AB$.

Оскільки $AC = \frac{1}{2}A_1A$, то $AC = \frac{1}{2}AB$. ■

Справедлива й обернена теорема.

Теорема. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то протилежний йому кут дорівнює 30°.

Доведення цієї теореми наведено в розділі «Розв'язуємо разом».

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

344. Побудуйте пряму PK і точку A на ній. Відкладіть довільний гострий кут MAK. Позначте на промені AM точку B й опустіть з неї перпендикуляр до прямої PK. Точку перетину перпендикуляра і прямої позначте через C. Як називають утворений трикутник ABC і його сторони? Чому дорівнює сума кутів A і B?

345. Один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює: **а)** 30°; **б)** 52°. Обчисли градусну міру іншого гострого кута цього трикутника.

346. Накресліть прямокутний трикутник, у якого катет дорівнює 4 см, а прилеглий до нього кут — 40°.

347. Накресліть довільний прямокутний трикутник з гострим кутом 30°. Чому дорівнює відношення: **а)** меншого катета до гіпотенузи; **б)** гіпотенузи до меншого катета?

2. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Установлюючи рівність прямокутних трикутників, ураховуватимемо, що в них є по одному рівному (прямому) куту.

Ознаки рівності прямокутних трикутників є наслідками загальних ознак рівності трикутників і властивості суми гострих кутів прямокутного трикутника. Тому ми тільки сформулюємо ці ознаки, навівши рисунки, які пояснюють їх.

1. ***Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 205).***

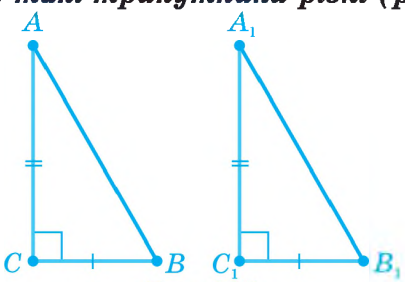


Рис. 205

2. ***Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 206).***

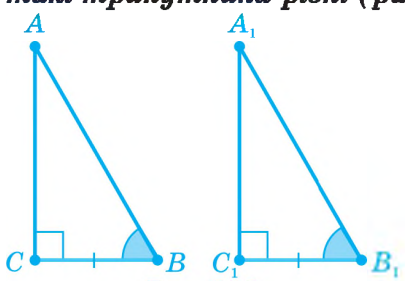


Рис. 206

3. ***Якщо катет і протилежний до нього кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному до нього куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 207).***

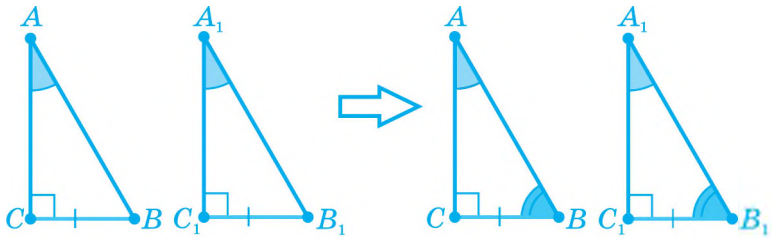


Рис. 207

4. ***Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 208).***

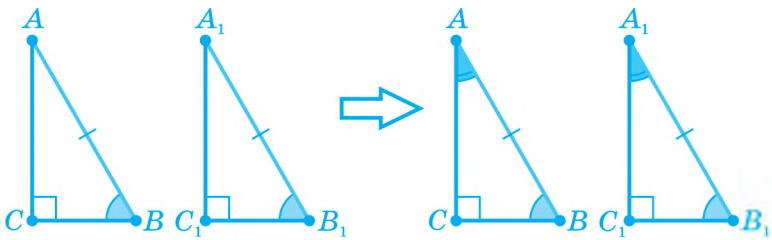


Рис. 208

Наступна ознака рівності прямокутних трикутників потребує окремого доведення.

5. ***Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Розглянемо прямокутні трикутники ABC й $A_1B_1C_1$, у яких кути C і C_1 — прямі, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Розмістимо ці трикутники так, щоб їхні рівні катети AC і A_1C_1 сумістилися (точки A й A_1, що збіглися, позначимо A, точки C і

C_1, що збіглися, позначимо C), а вершини B й B_1 розмістилися в різних півплощинах відносно прямої AC (рис. 209).

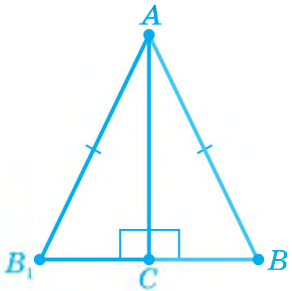
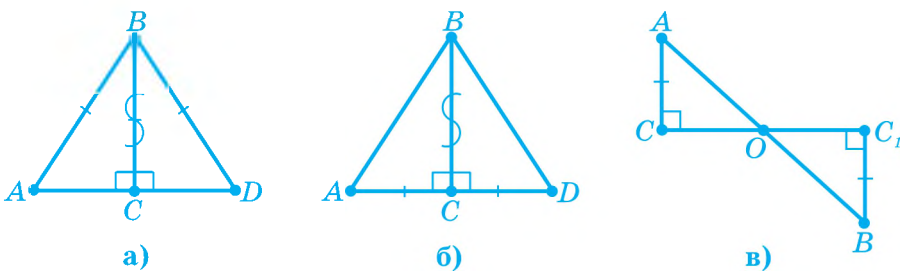


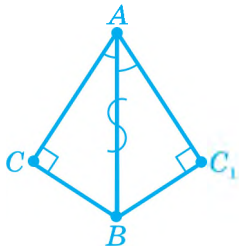
Рис. 209

Оскільки трикутники ABC й AB_1C прямокутні, то кут B_1CB є розгорнутим, і тому точка B_1 належить прямій BC. Трикутник BAB_1 є рівнобедреним, тому що $AB = AB_1$. Тоді висота AC цього трикутника є також і медіаною. Звідси $BC = B_1C$. Отже, три сторони трикутника ABC відповідно дорівнюють трьом сторонам трикутника AB_1C, а, отже, і трьом сторонам трикутника $A_1B_1C_1$. За третьою ознакою рівності трикутників ці трикутники рівні. ■

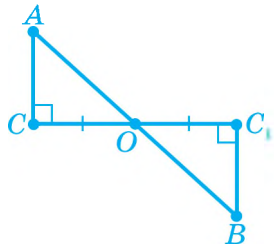
ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

348. Укажіть елементи, за якими рівні прямокутні трикутники, і сформулюйте відповідну ознаку рівності (рис. 210).





г)



д)

Рис. 210

349. Доведіть, що $\angle A = \angle D$ (рис. 211).

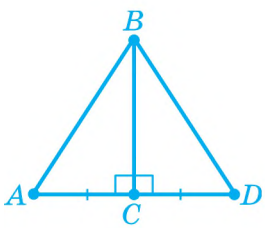


Рис. 211

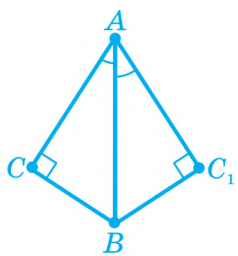
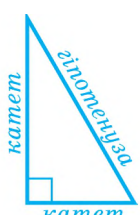


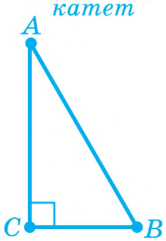
Рис. 212

350. Доведіть, що $AC = AC_1$ і $CB = C_1B$ (рис. 212).

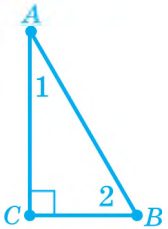
ОСНОВНЕ В § 13



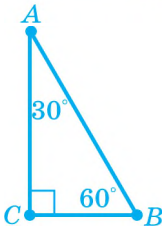
Сторони прямокутного трикутника, які утворюють прямий кут, називають **катетами**, а сторону, протилежну прямому кутові, називають **гіпотенузою**.



У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша від кожного з катетів і менша від суми катетів: $AB > AC$; $AB > BC$; $AB < AC + BC$.



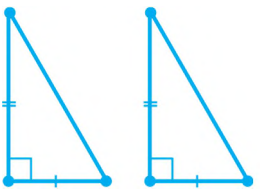
Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°: $\angle 1 + \angle 2 = 90°$.



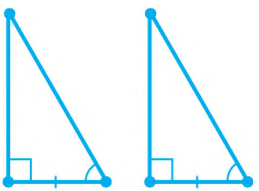
Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то протилежний йому кут дорівнює 30°.

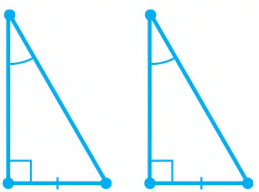
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ



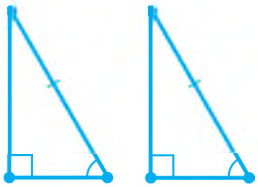
За двома катетами.



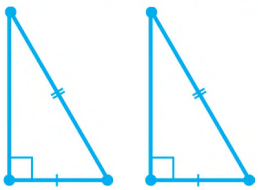
За катетом і прилеглим гострим кутом.



За катетом і протилежним гострим кутом.



За гіпотенузою і гострим кутом.



За гіпотенузою і катетом.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Доведіть, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

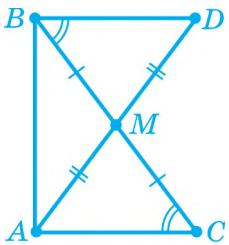


Рис. 213

Розв'язання. Нехай у прямокутному трикутнику ABC ($\angle A = 90°$) AM — медіана. Тоді $BM = CM$ (рис. 213). На промені AM відкладемо відрізок MD, що дорівнює відрізкові AM (подвоєння медіани), і сполучимо точки B і D. Отримаємо рівні трикутники BMD і CMA (за двома сторонами і кутом між ними). Звідки $\angle DBM = \angle C$. У прямокутному трикутнику ABC $\angle ABC + \angle C = 90°$ і оскільки $\angle C = \angle DBM$, то $\angle ABC + \angle DBM = 90°$, звідки $\angle DBA = 90°$. Тепер $\Delta ADB = \Delta BCA$ (за двома катетами), звідки $AD = BC$ або $2AM = BC$, $AM = \frac{1}{2}BC$. ■

Вправа 2. Якщо в трикутнику медіана дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то цей трикутник прямокутний. Доведіть. (Ця теорема є оберненою до теореми, доведеної вище.)

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC проведена медіана AM така, що $AM = \frac{1}{2}BC$. Тоді $AM = BM = CM$ (рис. 214). Отже, трикутники AMB і AMC — рівнобедрені.

Позначимо рівні кути при основах зазначених рівнобедрених трикутників однаковими цифрами. Для трикутника ABC одержуємо $2\angle 1 + 2\angle 2 = 180°$, звідки $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, а, отже, $\angle BAC = 90°$. ■

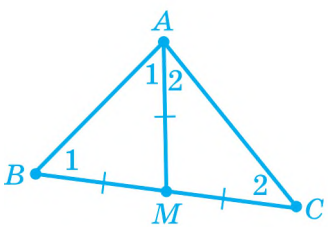


Рис. 214

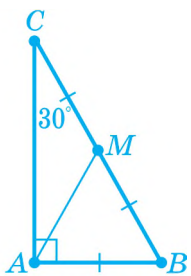


Рис. 215

Вправа 3. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то протилежний йому кут дорівнює 30°. Доведіть це.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC ($\angle A = 90°$) $AB = \frac{1}{2}CB$ (рис. 215). Побудуємо медіану AM трикутника. Трикутник AMB — рівносторонній (тому що $AB = BM = AM$). Отже, $\angle B = 60°$. Тоді з трикутника ABC маємо: $\angle C = 90° - \angle B = 90° - 60° = 30°$. ■

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Стародавні єгиптяни знали: якщо сторони трикутника містять 3, 4 і 5 однакових частини, то такий трикутник прямокутний. Користуючись рисунком, поясніть, як стародавні єгиптяни будували на місцевості прямий кут.
2. Користуючись рисунком, поясніть, як можна знайти висоту дерева.

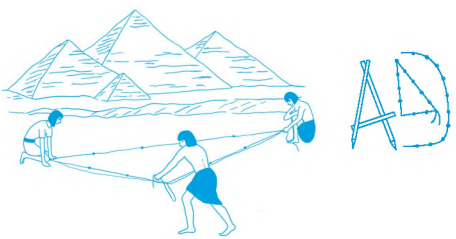


Рис. до завдання 1

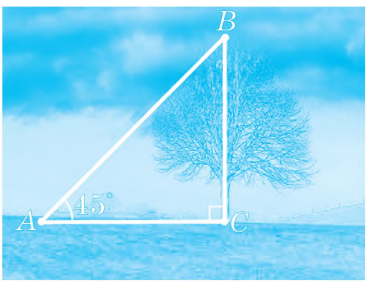


Рис. до завдання 2

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 13

1. Який трикутник називають прямокутним? Що називають гіпотенузою; катетом?
2. Сформулюйте властивість гострих кутів прямокутного трикутника.
3. Сформулюйте властивість катета прямокутного трикутника, що лежить навпроти кута 30°.
4. Чому дорівнює катет BC (рис. 216)?

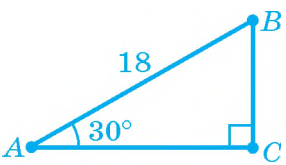


Рис. 216

5. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.
6. Обґрунтуйте ознаки рівності прямокутних трикутників за: **а)** двома катетами; **б)** катетом і прилеглим (протилежним) кутом.
7. Доведіть ознаку рівності прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою.

ЗАДАЧІ ДО § 13

РІВЕНЬ А

351. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо їх різниця дорівнює 10°.

352. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо один з них на 12° більший від іншого.

353. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо їх градусні міри відносяться як 3 : 7.

354. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо один з його зовнішніх кутів дорівнює 100°.

355. На рисунку 217 BK — висота трикутника ABC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle ABK = 28°$ і $\angle CBK = 34°$.

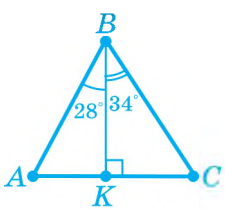


Рис. 217

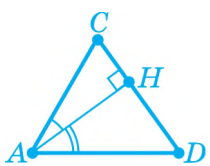


Рис. 218

356. AH — висота трикутника ACD (рис. 218). Знайдіть кути трикутника ACD, якщо $\angle CAH = 24°$ і $\angle DAH = 48°$.

357. Доведіть, що точка O — спільна середина відрізків CC_1 і AB (рис. 219).

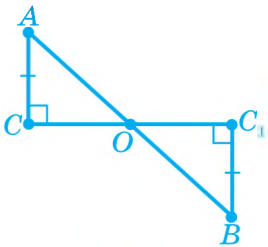


Рис. 219

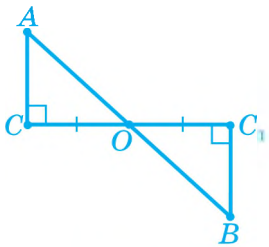


Рис. 220

358. Доведіть, що точка O — середина відрізка AB (рис. 220).

359. На рисунку 221 $CA \perp AB$ і $DB \perp AB$, $CA = DB$. Доведіть, що $BC = AD$.

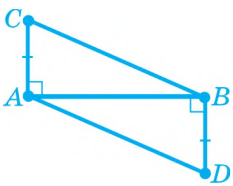


Рис. 221

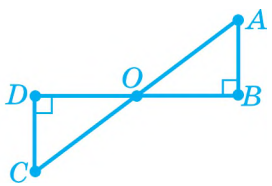


Рис. 222

360. На рисунку 222 AB і CD — перпендикуляри до прямої BD, точка O — середина відрізка BD. Доведіть, що точки A і C рівновіддалені від прямої BD.

361. На рисунку 223 $AB \perp BC$ і $AD \perp DC$, AC — бісектриса кута BAD. Доведіть, що $AB = AD$ і $BC = CD$.

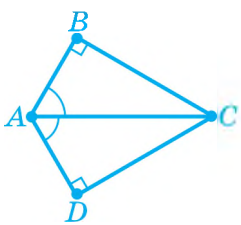


Рис. 223

РІВЕНЬ Б

362. Доведіть, що висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить цей кут на кути, що дорівнюють гострим кутам прямокутного трикутника.

363. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до цього катета.

364. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до іншого катета.

365. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 60°, а різниця гіпотенузи і катета, прилеглого до цього кута, дорівнює 15 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

366. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а сума гіпотенузи і катета, протилежного до цього кута, дорівнює 21 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

РІВЕНЬ В

367. Під яким кутом перетинаються прямі, що містять бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника?

368. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо бісектриси двох його кутів перетинаються під кутом 50°.

369. Знайдіть кут, під яким перетинаються продовження висот, проведених з вершин гострих кутів трикутника, якщо його тупий кут дорівнює 108°.

370. Якщо медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, утворює з нею кут 30°, то гіпотенуза трикутника в 4 рази більша від висоти, проведеної до неї. Доведіть.

371. Доведіть рівність гострокутних трикутників за стороною, медіаною і висотою, проведеними до неї.

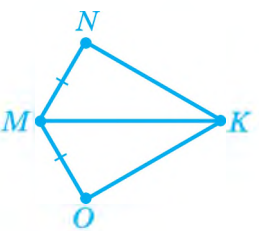
ЦІКАВО ЗНАТИ

- Термін «*гіпотенуза*» походить від грецького «*гіпотено*» — «*натягнути*». Назва пов'язана зі способом побудови прямокутних трикутників натягуванням мотузки.
- Термін «*катет*» походить від грецького «*катет*» — «*висок*». Термін поширився лише з XVIII ст.
- Прямокутні трикутники, сторони яких виражаються натуральними числами, називають *піфагоровими трикутниками*. Їх безліч, наприклад, 5, 12, 13; 6, 8, 10 тощо.
- Прямокутний трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 називають *єгипетським*.

КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 10 – § 13

ПОЧАТКОВИЙ РІВЕНЬ

1. Назвіть третій (не позначений) рівний елемент трикутників (див. рис.), щоб трикутники були рівними за першою ознакою (за двома сторонами і кутом між ними).



а) $\angle NMK = \angle OMK$;

б) $\angle NMK = \angle OKM$;

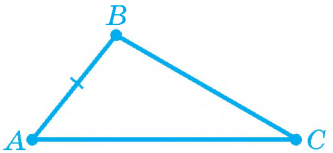
в) $\angle MNK = \angle MOK$.

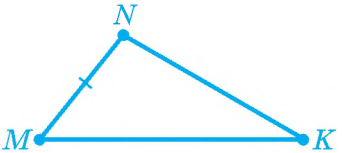
2. У трикутниках ABC і MNK $AB = MN$ (див. рис.). Які ще елементи цих трикутників мають бути рівними, щоб трикутники були рівними за другою ознакою (за стороною і двома прилеглими кутами)?

а) $\angle A = \angle M$, $\angle C = \angle K$;

б) $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$;

в) $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle K$.





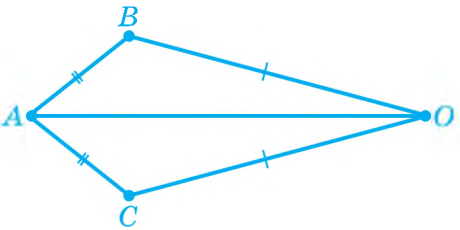
3. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, у якого основа дорівнює 9 см, а бічна сторона — 12 см.

а) 30 см; **б)** 33 см; **в)** 35 см.

4. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть кут при основі трикутника.

а) 70°; **б)** 55°; **в)** 110°.

5. Назвіть спільний елемент трикутників і ознаку, за якою ці трикутники рівні (див. рис.).



а) $\angle A$, за першою ознакою;

б) $\angle A$ і $\angle O$, за другою ознакою;

в) сторона AO, за третьою ознакою.

6. Чи існує трикутник, сторони якого дорівнюють...

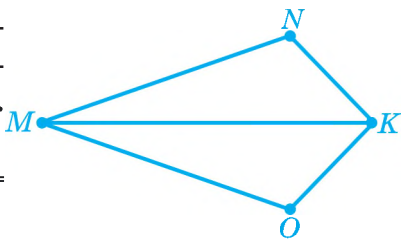
а) 5 см, 5 см, 4 см; **б)** 8 см, 4 см, 3 см; **в)** 2 дм, 6 см, 5 см?

СЕРЕДНІЙ РІВЕНЬ

7. У трикутниках ABC і PON $AB = PO$, $AC = PN$, $\angle A = \angle P$. Чи є рівними ці трикутники? Якщо вони рівні, то запишіть інші рівні елементи цих трикутників.

8. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 55 см, а його бічна сторона — 20 см. Знайдіть основу трикутника.

9. На рисунку $MN = MO$, $NK = OK$. Доведіть, що $\angle N = \angle O$.

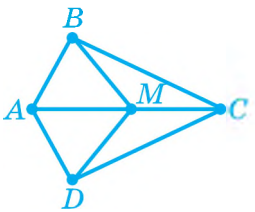


ДОСТАТНІЙ РІВЕНЬ

10. У трикутнику MOK його бісектриса OL є перпендикуляром до сторони MK. Доведіть, що в трикутнику MOK сторони OM і OK рівні.

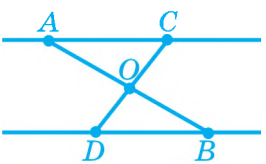
11. Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть два інші кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

12. На відрізку AC позначено точку M, а в різних півплощинах відносно прямої AC — точки B і D такі, що $BA = DA$ і $BM = DM$ (див. рис.). Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta ADC$.



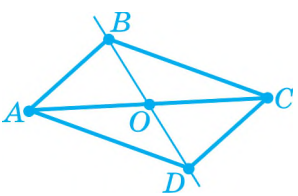
ВИСОКИЙ РІВЕНЬ

13. Точка O — середина відрізка AB, прямі AC і BD паралельні (див. рис.). Доведіть, що точка O — середина відрізка CD.



14. Доведіть рівність двох рівнобедрених трикутників за висотою, проведеною до основи, й кутом між бічними сторонами.

15. У різних півплощинах відносно прямої AC позначено точки B і D такі, що $AB = CD$, $CB = AD$ (див. рис.). Пряма BD перетинає відрізок AC у точці O. Доведіть, що $\Delta AOB = \Delta COD$.



4 КОЛО І КРУГ

§14 КОЛО

1. Коло та його елементи
2. Круг

1. КОЛО ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

З колом ви вже ознайомилися в курсі математики попередніх класів. Для проведення кола використовують циркуль. Оскільки під час побудови кола розхил циркуля залишається постійним, то всі відзначені грифелем точки розміщені на однаковій відстані від точки, у яку встановлено голку циркуля (рис. 224).

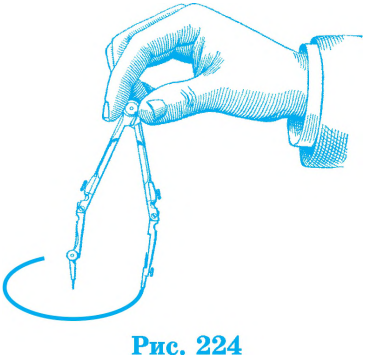


Рис. 224

Означення. ***Коло*** — це геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, розміщених на однаковій відстані від даної точки — ***центра кола***.

Сполучимо відрізками центр кола з кількома точками кола. Ці відрізки ***рівні***: $OA = OB = OC$ (рис. 225).

Означення. ***Радіусом*** кола називають будь-який відрізок, який сполучає точку кола з його центром.

Наприклад, відрізки OA, OB і OC на рис. 225 є радіусами зображеного кола.

Відстань від точки кола до її центра теж називають радіусом кола. Радіус кола зазвичай позначають через r (або R).

Означення. Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають ***хордою***.

На рис. 226 зображено коло і дві його хорди — AB і CD.

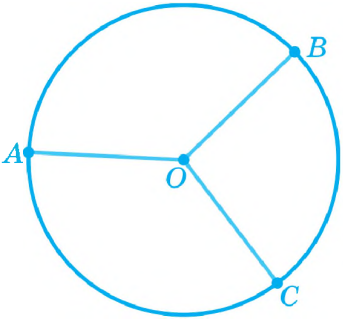


Рис. 225

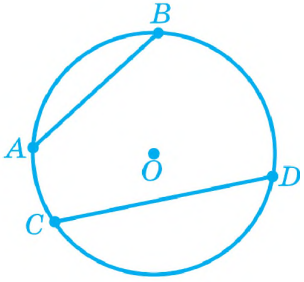


Рис. 226

Означення. Хорду, що проходить через центр кола, називають ***діаметром*** кола.

На рис. 227 зображено коло і його діаметр AB.

Діаметр і його довжину зазвичай позначають через d (або D). Очевидно, що $d = 2r$.

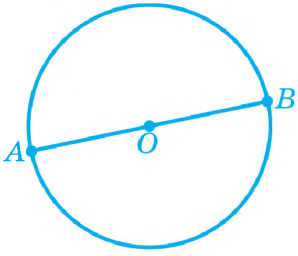


Рис. 227

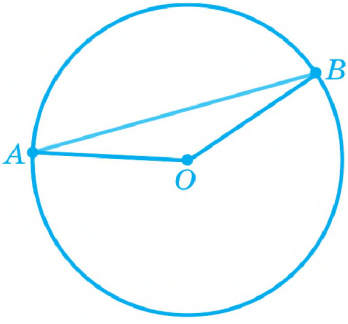


Рис. 228

Теорема. Діаметр кола більший від будь-якої хорди, яка не є діаметром.

Доведення. Нехай AB — хорда, яка не є діаметром. Сполучимо відрізками кінці хорди із центром кола O (рис. 228). Отримаємо трикутник AOB. З нерівності трикутника випливає, що $AO + BO > AB$. Оскільки $AO = BO = r$, а $2r = d$, то одержуємо, що $d > AB$. ■

2. КРУГ

Означення. ***Кругом*** називають геометричну фігуру, що складається з усіх точок площини, відстань від яких до даної точки не більша від заданої.

Дану точку називають ***центром круга***, а задану відстань — ***радіусом круга***.

Таким чином, круг є частиною площини, обмеженої колом (рис. 229).

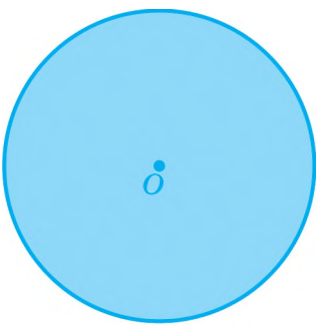


Рис. 229

Центр круга збігається із центром кола, який його обмежує, а радіус і діаметр круга дорівнюють відповідно радіусу та діаметру кола. Коло, яке обмежує круг, належить кругові. Усі точки круга, крім точок кола, яке його обмежує, називають ***внутрішніми***.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

372. Накресліть коло із центром O, радіус якого дорівнює 3 см. Позначте на колі точку A і проведіть хорду AC, яка не проходить через центр кола, і хорду AB, що проходить через центр кола. Як по-іншому називають хорду AB? Як називають відрізки, на які точка O ділить хорду AB?

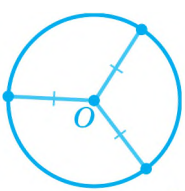
373. Чи належить колу його центр? Скільки точок хорди, діаметра, радіуса належать колу?

374. Скільки хорд, діаметрів можна провести з точки, яка лежить на колі? Кінцем скількох радіусів є точка кола?

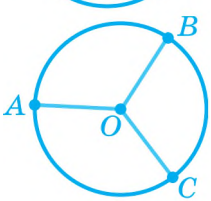
375. Чому дорівнює діаметр кола, якщо його радіус дорівнює: **а)** 3 см; **б)** 2,5 мм? Як обчислити діаметр кола за його радіусом?

376. Чи належить кругу його: **а)** центр; **б)** радіус; **в)** діаметр; **г)** будь-яка хорда?

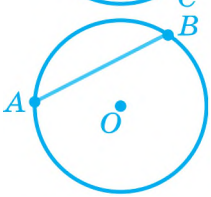
ОСНОВНЕ В § 14



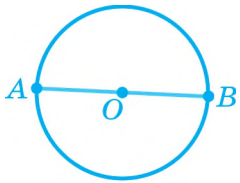
Коло — геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, розміщених на однаковій відстані від даної точки — центра кола.



Радіусом кола називають будь-який відрізок, який сполучає точку кола з його центром.



Хордою кола називають відрізок, який сполучає дві точки кола.



Діаметром кола називають хорду, яка проходить через центр кола.

Кругом називають геометричну фігуру, що складається з усіх точок площини, відстань від яких до даної точки не більша від заданої.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Якщо діаметр кола проходить через середину хорди, яка не є діаметром, то цей діаметр перпендикулярний до даної хорди. Доведіть це.

Розв'язання. Нехай діаметр AB кола із центром O проходить через середину M хорди CD (рис. 230).

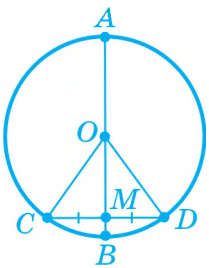


Рис. 230

Проведемо радіуси OC й OD. Трикутник COD — рівнобедрений з основою CD. Згідно з умовою, OM — медіана цього трикутника, а в рівнобедреному трикутнику медіана збігається з висотою. Отже, $OM \perp CD$, звідки випливає, що $AB \perp CD$. ■

Коментар. Застереження в умові задачі про те, що хорда не є діаметром, дуже суттєве: адже два діаметри при перетині діляться навпіл, незалежно від кута між ними! Тому без цього застереження розглянута теорема стає хибною.

Вправа 2. Якщо діаметр кола перпендикулярний до хорди, то він проходить через її середину. Доведіть це.

Розв'язання. Можливі два випадки: 1) дана хорда є діаметром; 2) дана хорда не є діаметром.

Якщо дана хорда є діаметром, то даний діаметр проходить через її середину просто завдяки тому, що будь-які діаметри перетинаються в центрі кола і діляться ним навпіл.

Розглянемо тепер випадок, коли дана хорда не є діаметром. Нехай діаметр AB кола із центром O перпендикулярний до хорди CD (рис. 231). Позначимо точку їх перетину H.

COD — рівнобедрений з основою CD. За умовою $AB \perp CD$, отже, OH — висота трикутника COD. Оскільки в рівнобедреному трикутнику висота збігається з медіаною, то $CH = HD$. ■

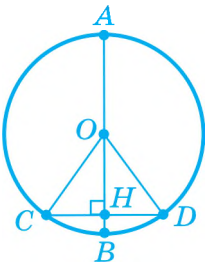
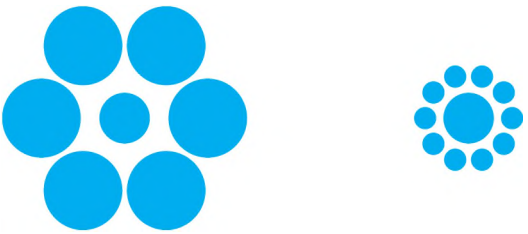


Рис. 231

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Користуючись рисунком, порівняйте на око радіуси кругів, які лежать усередині. Правильність висновку перевірте вимірюванням.



2. Укажіть об'єкти, які можуть бути моделями кола; круга (див. рис.).
3. Користуючись рисунком, поясніть, як можна побудувати на місцевості коло за допомогою мотузки і двох кілочків.

Рис. до завдання 2

Рис. до завдання 3

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 14

1. На площині задано точку O. Як називають фігуру, яку утворюють усі точки, розміщені від точки O на відстані: **а)** що дорівнює 3 см; **б)** не більшій ніж 3 см?
2. Сформулюйте означення кола.
3. Що називають центром кола; радіусом кола; діаметром кола; хордою?
4. Яка властивість діаметра та хорди?
5. Сформулюйте і доведіть властивість діаметра, перпендикулярного до хорди.
6. Сформулюйте і доведіть властивість діаметра, що проходить через середину хорди.
7. Сформулюйте означення круга.

ЗАДАЧІ ДО § 14

РІВЕНЬ А

377. На рисунку 232 точка O — центр кола, AB і CD — діаметри. Доведіть, що $\Delta AOC = \Delta BOD$.

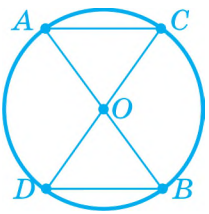


Рис. 232

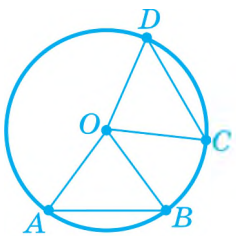


Рис. 233

378. На рисунку 233 точка O — центр кола, $\angle AOB = \angle COD$. Доведіть, що $\Delta AOB = \Delta COD$.

379. На рисунку 234 точка O — центр кола, A і C — його точки. Знайдіть кут O, якщо $\angle A = 75°$.

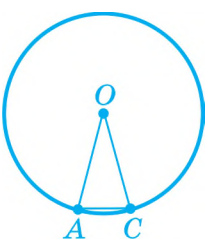


Рис. 234

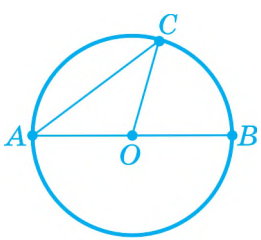


Рис. 235

380. У колі з центром у точці O проведено діаметр AB і хорду AC (рис. 235). Знайдіть кут CAO, якщо $\angle COB = 74°$.

381. У колі з центром у точці O проведено діаметр AB і хорду AC (рис. 235). Знайдіть кут COB, якщо $\angle CAO = 25°$.

382. У колі проведено хорду, яка дорівнює радіусу кола. Знайдіть периметр трикутника, сторонами якого є ця хорда та два радіуси, якщо діаметр кола дорівнює 10 см.

РІВЕНЬ Б

383. Якщо з точки кола проведені дві рівні хорди й діаметр, то ці хорди утворюють з діаметром рівні кути. Доведіть.

384. Діаметр кола і хорда, проведені з однієї точки кола, утворюють кут, що дорівнює 60°. Доведіть, що хорда дорівнює радіусу кола.

385. Доведіть, що хорда, яка сполучає кінці двох діаметрів кола, паралельна хорді, яка сполучає два інші кінці цих діаметрів.

386. У колі проведено два радіуси, кут між якими дорівнює 120°. Знайдіть відстань від центра кола до хорди, що сполучає кінці цих радіусів, якщо радіус кола дорівнює 12 см.

387. Хорда кола, що міститься від його центра на відстані 4 см, утворює з радіусом, проведеним в один з її кінців кут, що дорівнює 30°. Знайдіть діаметр кола.

РІВЕНЬ В

388. Вершинами якого трикутника є три точки кола, дві з яких є кінцями одного діаметра?

389. Доведіть, що хорда, яка перпендикулярна до іншої хорди і проходить через її середину, є діаметром кола.

390. Доведіть: якщо дві хорди паралельні, то пряма, яка проходить через їх середини, проходить і через центр кола.

391. На рисунку 236 точка O — центр кола, точки B й O лежать з одного боку від прямої AC. Доведіть, що кут AOC удвічі більший від кута ABC.

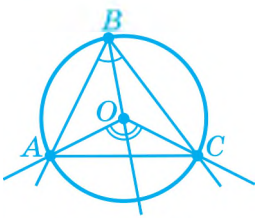


Рис. 236

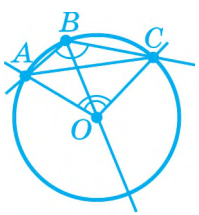


Рис. 237

392. На рисунку 237 точка O — центр кола, точки B й O лежать з різних боків від прямої AC. Доведіть, що $\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC$.

393. Внутрішня точка M круга з діаметром AB не належить цьому діаметрові. Доведіть, що кут AMB — тупий.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Термін «*радіус*» походить від латинського «*радіус*», що означає «*промінь, спиця*».
- Термін «*діаметр*» походить від латинського «*діа*» — «*наскрізь*» і грецького «*метрео*» — «*міряти*» — «*той, що міряє наскрізь*»; інше значення цього слова — «*поперечник*».
- Термін «*хорда*» походить від грецького «*хорда*» — «*струна, тятива*».
- Термін «*циркуль*» латинського походження. Латинське «*ціркулус*» означає «*коло, круг, обвід*».
- Циркуль уперше з'явився в Китаї.
- Слово «*коло*» було відоме ще в Київській Русі.
- За свідченням зоологів, пуголовки, медузи, краби рухаються по траєкторіях, які нагадують кола.
- За часів Піфагора коло вважали найдосконалішою фігурою.

§15 ДОТИЧНА ДО КОЛА

1. Взаємне розміщення кола і прямої
2. Дотична

1. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ КОЛА І ПРЯМОЇ

Розглянемо, яким може бути взаємне розміщення кола і прямої.

Нехай дано коло з центром O радіуса r і пряма a. Проведемо з точки O перпендикуляр до прямої a і позначимо його основу P.

Можливі три випадки:

1) $OP > r$ (рис. 238 а);

2) $OP < r$ (рис. 238 б);

3) $OP = r$ (рис. 238 в).

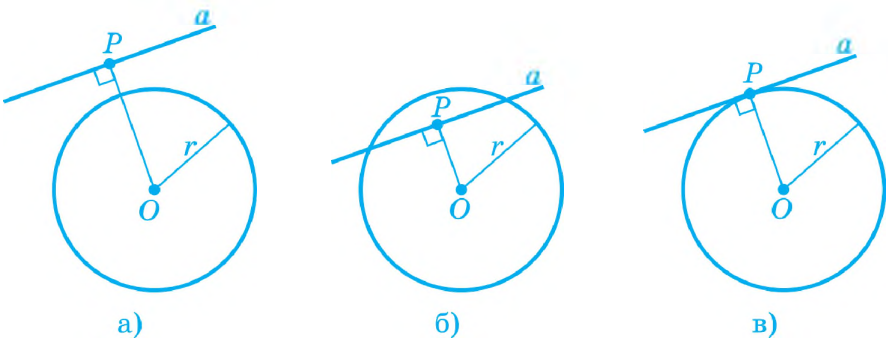


Рис. 238

Доведіть самостійно, що в першому випадку пряма й коло не мають спільних точок (для цього досить довести, що будь-яка точка прямої розміщена від центра кола на відстані, більшій від радіуса кола і, отже, міститься поза кругом, обмеженим цим колом).

Очевидно, що у другому випадку пряма й коло мають дві спільні точки.

Означення. Пряму, що перетинає коло у двох точках, називають ***січною***.

2. ДОТИЧНА

Розглянемо третій випадок, коли $OP = r$ (рис. 238 в). У цьому випадку пряма проходить через точку кола й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку.

Теорема. Якщо пряма проходить через точку кола й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона має із цим колом тільки одну спільну точку.

Доведення. Нехай дані в умові пряма a і коло з центром O мають спільну точку P (рис. 239).

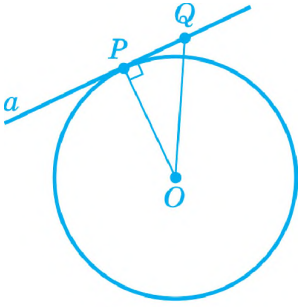


Рис. 239

Розглянемо будь-яку точку Q прямої a, відмінну від точки P. Згідно з умовою, пряма a перпендикулярна до радіуса OP, тому трикутник OPQ прямокутний із прямим кутом P. У

прямокутному трикутнику гіпотенуза OQ більша від катета OP, тому точка Q лежить на більшій відстані від центра кола, ніж радіус OP цього кола, отже, точка Q не належить колу. Звідси випливає, що точка P — єдина спільна точка даних прямої та кола. ■

Означення. ***Дотичною*** до кола називають пряму, яка має з колом лише одну спільну точку. Цю спільну точку називають точкою дотику прямої й кола (рис. 240).

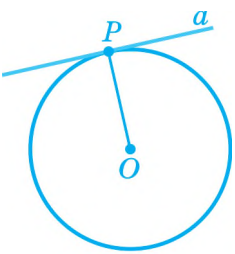


Рис. 240

Доведена вище теорема є ***ознакою*** дотичної. Її можна сформулювати так: ***якщо пряма проходить через точку кола й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона є дотичною до цього кола.***

Цю ознаку можна використати для того, щоб провести дотичну через точку P, яка лежить на колі із центром O:

1) проводимо радіус OP (рис. 240);

2) проводимо пряму a, яка перпендикулярна до цього радіуса й проходить через точку P.

Доведемо тепер ***властивість*** дотичної.

Теорема. Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Доведення. Скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо, що дотична a не перпендикулярна до радіуса OM, проведеного в точку дотику M. Тоді проведемо

з точки O перпендикуляр OP до прямої a й позначимо на ній точку Q таку, що $PQ = PM$, до того ж точки Q і M лежать з різних боків від точки P (рис. 241).

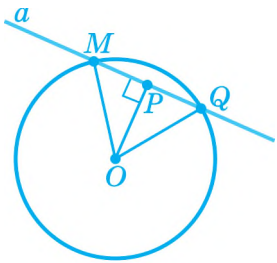


Рис. 241

Прямокутні трикутники OPQ і OPM рівні за двома катетами, звідки $OQ = OM$, тобто OQ є радіусом, і, отже, точка Q лежить на колі. Оскільки вона лежить також і на прямій a, то з цього випливає, що точка Q, як і точка M, є спільною точкою прямої a і даного кола. А це суперечить тому, що пряма a є дотичною, бо, згідно з означенням, дотична має тільки ***одну*** спільну точку з колом. ■

Теорема (***про властивості дотичних, проведених до кола з однієї точки***). Нехай з точки A проведено дві прямі, які дотикаються до кола з центром O в точках B і C. Тоді відрізки AB й AC дотичних рівні та утворюють рівні кути з прямою AO.

Доведення. Проведемо відрізки OA, OB й OC. Доведемо, що трикутники ABO й ACO рівні (рис. 242). Вони обидва прямокутні, тому що дотичні перпендикулярні до радіусів, проведених у точки дотику. Ці трикутники мають спільну гіпотенузу OA й рівні катети: $OB = OC$ як радіуси того самого кола. З рівності трикутників випливає, що $AB = AC$ і $\angle BAO = \angle CAO$. ■

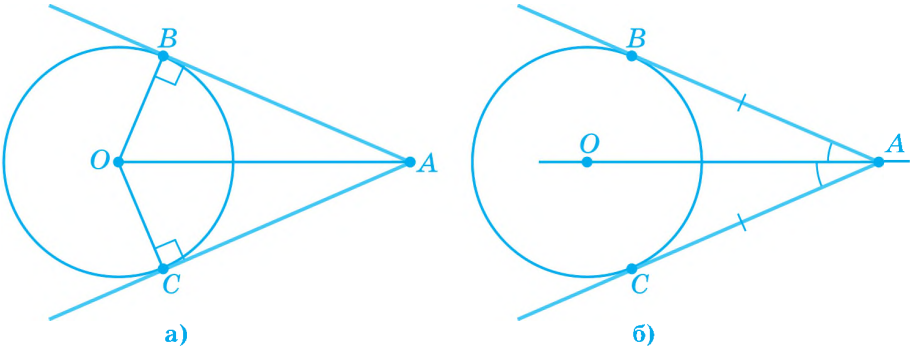


Рис. 242

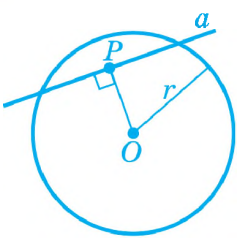
ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

394. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3 см. Побудуйте пряму, розміщену від центра кола на відстані: **а)** 3 см; **б)** 4 см; **в)** 2 см. Скільки спільних точок має з колом кожна із цих прямих?

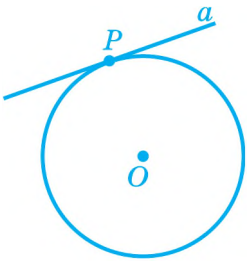
395. Дано коло із центром *O*, радіус якого дорівнює 10 см. На якій відстані від центра кола розміщені: **а)** усі дотичні до кола; **б)** усі його січні; **в)** прямі, які не мають з ним спільних точок?

396. Накресліть довільне коло. Проведіть його діаметр і через його кінці — дотичні до кола. Як розміщені дотичні?

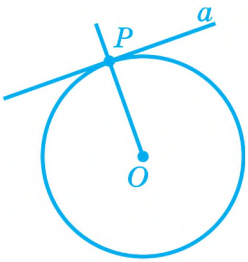
ОСНОВНЕ В § 15



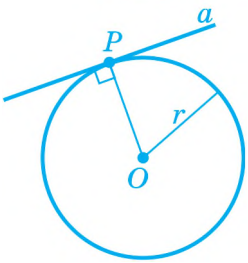
Січною називають пряму, яка перетинає коло у двох точках.



Дотичною до кола називають пряму, яка має з колом лише одну спільну точку.



Ознака дотичної: якщо пряма проходить через точку кола і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона є дотичною до цього кола.



Властивість дотичної: дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 15

1. На якій відстані від центра кола (порівняно з радіусом) розміщена: **а)** дотична до кола; **б)** січна; **в)** пряма, яка не має з колом спільних точок?
2. Яку пряму називають дотичною до кола? Що називають точкою дотику прямої й кола?
3. Сформулюйте й доведіть ознаку дотичної до кола.
4. Сформулюйте й доведіть властивість дотичної до кола.
5. Сформулюйте й доведіть властивість відрізків двох дотичних, проведених з однієї точки.

ЗАДАЧІ ДО § 15

РІВЕНЬ А

397. Доведіть, що центр кола, яке дотикається до двох сторін кута, належить бісектрисі цього кута (рис. 243).

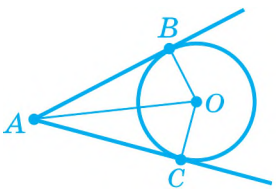


Рис. 243

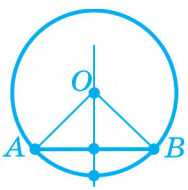


Рис. 244

398. Доведіть, що центр кола, яке проходить через кінці відрізка, належить перпендикуляру, проведеному до цього відрізка через його середину (рис. 244).

399. B — точка дотику дотичної AB і кола з центром O. $\angle OAB = 30°$. Знайдіть діаметр кола, якщо відстань від точки A до центра кола дорівнює 10 см.

400. M — точка дотику дотичної MN до кола радіуса 4 см із центром O. $\angle MON = 60°$. Знайдіть відстань від точки N до центра кола.

401. M — точка дотику дотичної MK до кола із центром O. $\angle MKO = 45°$ і $MK = 5$ см. Знайдіть діаметр кола.

402. A — точка дотику дотичної AB і кола з центром O. Діаметр кола дорівнює 16 см, а відстань між точками A й B дорівнює 8 см. Знайдіть кут ABO.

403. Накресліть кут O, що дорівнює 80°. Опишіть коло із центром у точці O. Через точки перетину сторін кута й кола проведіть за допомогою косинця дотичні до кола. Чому дорівнює кут між дотичними?

РІВЕНЬ Б

404. Доведіть, що дві дотичні до кола, які проходять через кінці того самого діаметра, паралельні.

405. Через точку C, що лежить поза даним колом, проведено дотичні CA й CB. Доведіть, що центр кола належить бісектрисі кута ACB.

406. Якщо два кола мають спільний центр, то кожну хорду кола з більшим радіусом, яка дотикається до кола з меншим радіусом, точка дотику ділить навпіл. Доведіть.

407. Через точку P кола з центром у точці O проведено дотичну PK і пряму, що перетинає коло в точках M і P так, що хорда PM дорівнює 6 см, а кут MPK дорівнює 30°. Обчислити периметр трикутника OPM.

408. Радіуси OA й OB кола утворюють кут 60°. Дотичні до кола, проведені через кінці цих радіусів, перетинаються в точці C. Знайдіть відстань від точки C до центра кола, якщо сума відрізків AC і BC дорівнює 16,4 см.

РІВЕНЬ В

409. З точки A, що лежить поза колом, проведено дві дотичні. Відстань від точки A до центра кола дорівнює діаметру кола. Знайдіть градусну міру кута між дотичними.

410. Через один кінець хорди, що дорівнює радіусу кола, проведено дотичну до кола, а через інший — пряму, що проходить через центр кола. Доведіть, що відстань від точки перетину дотичної й даної прямої до центра кола дорівнює діаметру кола.

411. На рисунку 245 пряма PK — спільна дотична до двох кіл із центрами O й O_1, які дотикаються у точці K, MN — дотична до кола із центром O в точці M і до кола із центром O_1 у точці N. Доведіть, що кут OPO_1 прямий.

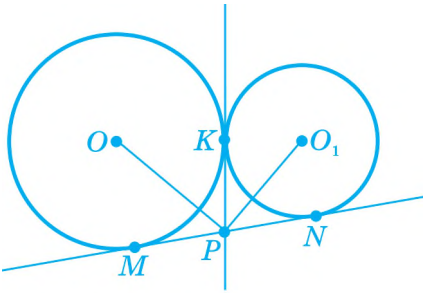


Рис. 245

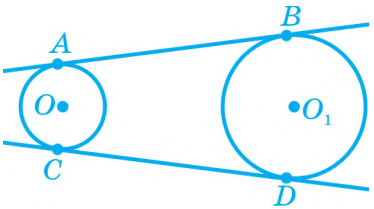


Рис. 246

412. На рисунку 246 AB і CD — спільні дотичні до кіл із центрами O й O_1; A, B, C і D — точки дотику. Доведіть, що відрізки AB і CD — рівні.

413. Якщо два кола дотикаються (мають лише одну спільну точку), то центри кіл і точка дотику лежать на одній прямій. Доведіть.

ЦІКАВО ЗНАТИ

- Про те, що дотична до кола перпендикулярна до радіуса цього кола, проведеного в точку дотику, знав ще давньогрецький астроном Архіт Таренський (бл. 440 – 360 рр. до н. е.).
- Доведення теореми про рівність відрізків дотичних, які проведені до кола з однієї токи, приписують давньогрецькому вченому Герону Александрійському (близько I ст. н. е.).
- Означення дотичної як прямої, що має з колом тільки одну спільну точку, трапляється вперше в підручнику французького математика Лежандра (1752–1833) «Елементи геометрії».

§16 ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК

1. ЩО ТАКЕ ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК

Усі точки кола мають одну ***спільну властивість***: вони розміщені на однаковій відстані від центра кола. До того ж ***усі точки площини***, що мають таку властивість, тобто розміщені на однаковій відстані від заданої точки, лежать на колі із центром у цій точці.

Означення. Фігуру, що складається ***лише з усіх тих*** точок, які мають певну властивість, називають ***геометричним місцем точок***.

Згідно з означенням геометричного місця точок тепер можна подати й таке означення кола: ***коло є геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра кола)***.

В означенні геометричного місця точок ми виділили слова «***лише з усіх тих***»: це дуже суттєво для розуміння цього поняття! Наведемо два приклади.

1. На рисунку 247 зображено ***частину*** кола із центром O. Усі точки частини кола розміщені на однаковій відстані від точки O. Але ***не всі*** точки площини, розміщені на однаковій відстані від точки O, належать цій частині кола: так, їй не на-

лежить точка A, розміщена на такій же відстані від точки O. Тому частина кола не є геометричним місцем точок, рівновіддалених від точки O.

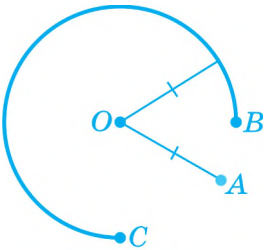


Рис. 247

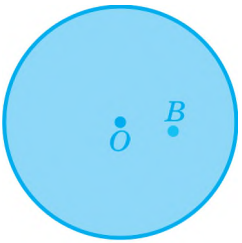


Рис. 248

2. На рисунку 248 зображено ***круг*** із центром O. Усі точки площини, розміщені на однаковій відстані від точки O, належать кругові, бо вони лежать на колі, що обмежує даний круг, а це коло належить кругові. Але кругу належать ***не лише*** точки, розміщені на однаковій відстані від точки O, а, наприклад, і точка B, розміщена від точки O на відстані, меншій ніж радіус кола. Тому круг не є геометричним місцем точок, рівновіддалених від точки O.

Круг є іншим геометричним місцем точок, а саме — геометричним місцем точок, відстань від яких до даної точки (центра круга) ***не більша*** від заданої.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

414. Геометричним місцем точок з даною властивістю є деяка фігура. Чи є на площині точки з цією властивістю, які не належать цій фігурі? Чи належать цій фігурі точки, що не мають даної властивості?

415. Позначте точку M і побудуйте геометричне місце точок, які містяться від точки M на відстані 2 см. Що є геометричним місцем точок, розміщених від точки M на відстані: **а)** 2 см; **б)** більшій, ніж 2 см; **в)** меншій ніж 2 см; **г)** не більшій ніж 2 см?

416. Проведіть довільну пряму a. Побудуйте точки A та B, що лежать в одній півплощині відносно прямої a на відстані 2 см від неї, та точки C і D, що лежать в іншій півплощині на відстані 2 см від прямої a. Що є геометричним місцем точок, розміщених від даної прямої a на відстані 2 см?

2. ПОБУДОВА ТРИКУТНИКА ЗА ТРЬОМА СТОРОНАМИ

Нехай потрібно побудувати трикутник, сторони якого дорівнюють даним відрізкам a, b і c (рис. 249).

Припустимо, що такий трикутник побудовано. Позначимо через A, B і C його вершини, які лежать відповідно проти сторін a, b і c (рис. 250).

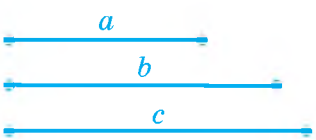


Рис. 249

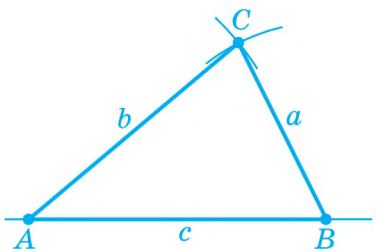


Рис. 250

Точка C розміщена на відстані b від точки A й на відстані a від точки B. Отже, точка C є точкою перетину двох кіл: одне радіуса b із центром у точці A й інше — радіусом a із центром у точці B.

Виходячи з цього, діятимемо в такий спосіб[1] (рис. 251):

1) через довільну точку A проведемо довільну пряму m. Проведемо коло із центром у точці A й радіусом c. Одну з двох точок перетину кола і прямої m позначимо B;

2) проведемо два кола: одне радіуса b із центром у точці A й інше — радіуса a із центром у точці B. Позначимо через C одну з двох точок перетину цих кіл;

[1] На рисунках цифрами в кружечках біля відповідних геометричних фігур позначені номери етапів побудови.

3) проведемо відрізки AC і BC.

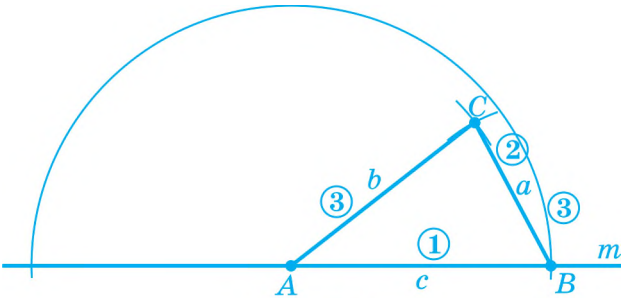


Рис. 251

Трикутник ABC — шуканий. Справді, його сторони за побудовою дорівнюють даним відрізкам a, b і c.

Коментар. Виконана побудова наочно пояснює зміст нерівності трикутника: будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін. Справді, якщо ця нерівність не виконується — наприклад, якщо $c > a + b$, — то кола радіусів a і b не перетнуться. А це означатиме, що в такому випадку побудувати трикутник неможливо.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

417. Накресліть довільний: **а)** гострокутний трикутник; **б)** тупокутний трикутник. Побудуйте трикутник, рівний накресленому.

418. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює відрізку a, а бічна сторона — відрізку b (рис. 252).

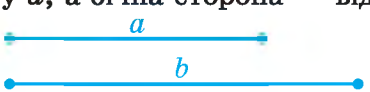


Рис. 252

419. Побудуйте довільний рівнобедрений трикутник і рівний йому трикутник.

420. Накресліть довільний відрізок a й побудуйте рівносторонній трикутник зі стороною a.

3. СЕРЕДИННИЙ ПЕРПЕНДИКУЛЯР

Означення. Пряму, яка проходить через середину відрізка й перпендикулярна до нього, називають ***серединним перпендикуляром*** до цього відрізка.

Теорема. Серединний перпендикуляр до відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

Доведення. Нехай a — серединний перпендикуляр до відрізка MN, точка O — середина цього відрізка (рис. 252).

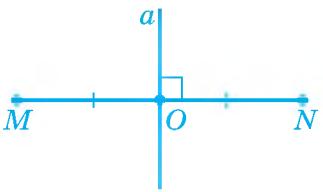


Рис. 252

Щоб довести, що серединний перпендикуляр a є вказаним геометричним місцем точок, потрібно довести ***дві*** взаємно обернені теореми:

1) якщо точка належить серединному перпендикуляру a, то вона розміщена на рівних відстанях від точок M і N;

2) якщо точка розміщена на рівних відстанях від точок M і N, то вона належить серединному перпендикуляру a.

1. Нехай точка K належить серединному перпендикуляру a до відрізка MN. Сполучимо точку K відрізками з точками M і N (рис. 253). Одержимо два прямокутні трикутники MOK і NOK. Оскільки точка O — середина відрізка MN, то катети цих трикутників OM і ON рівні. Відрізок OK є спільним катетом цих трикутників. Отже, прямокутні трикутники MOK і NOK рівні за двома катетами. З рівності цих трикутників ви-

пливає, що $KM = KN$, тобто що точка K лежить на однакових відстанях від точок M і N.

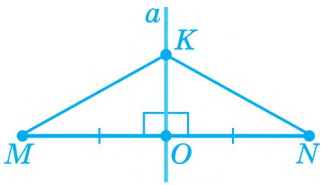


Рис. 253

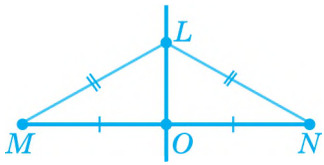


Рис. 254

2. Нехай точка L лежить на однакових відстанях від точок M і N (рис. 254).

З'єднаємо точку L відрізками з точками M і N. За умовою, $LM = LN$, тому трикутник MLN — рівнобедрений з основою MN. Проведемо в ньому медіану LO. У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, збігається з висотою, тому $LO \perp MN$. Отож пряма LO проходить через середину відрізка MN і до того ж перпендикулярна до нього, а отже, є серединним перпендикуляром до цього відрізка. Отже, точка L належить серединному перпендикуляру до відрізка MN. ■

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

421. Позначте точки A та B, відстань між якими дорівнює 4 см. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від точок A та B?

422. Позначте точки C і D, відстань між якими дорівнює 6 см. Проведіть серединний перпендикуляр до відрізка CD. Позначте точку M, відстань від якої до точки C менша, ніж відстань до точки D; точку P, відстань від якої до точки C більша, ніж відстань до точки D. Що є геометричним місцем точок M таких, що: **а)** $MC < MD$; **б)** $MC > MD$; **в)** $MC \leq MD$; **г)** $MC \geq MD$?

4. БІСЕКТРИСА КУТА

Теорема. Бісектриса кута є геометричним місцем точок кута, рівновіддалених від прямих, на яких лежать сторони цього кута.

Доведення. Нехай b — бісектриса кута POQ (рис. 255).

Знову потрібно довести дві взаємооберненi теореми:

1) якщо точка належить бісектрисі b кута, то вона розміщена на однакових відстанях від прямих OP і OQ;

2) якщо точка кута POQ рівновіддалена від прямих, на яких лежать сторони кута, то вона належить бісектрисі b цього кута.

1. Нехай точка D належить бісектрисі b. Проведемо з точки D перпендикуляри DK і DL до прямих OP й OQ (рис. 256). Одержимо два прямокутні трикутники OKD й OLD. Гіпотенуза OD у них спільна, а гострі кути KOD і LOD рівні. Отже, трикутники OKD й OLD рівні за гіпотенузою і гострим кутом. З рівності трикутників випливає, що $DK = DL$, тобто точка D лежить на однакових відстанях від прямих OP й OQ.

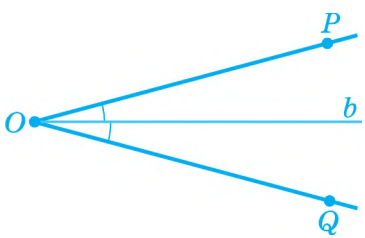


Рис. 255

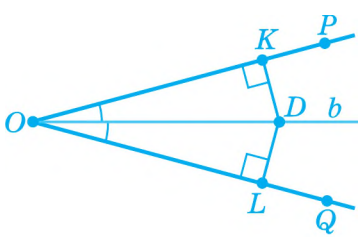


Рис. 256

2. Нехай точка F кута POQ рівновіддалена від прямих OP й OQ, тобто перпендикуляри FK і FL, проведені до цих прямих, рівні (рис. 257).

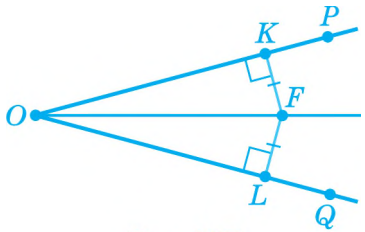


Рис. 257

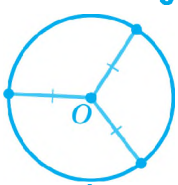
Сполучимо точку F відрізком з точкою O. Одержимо два прямокутні трикутники FKO й FLO. Гіпотенуза OF у них спільна, а катети FK і FL рівні за умовою. Отже, ці трикутники рівні за гіпотенузою і катетом. З рівності трикутників випливає, що $\angle KOF = \angle LOF$, тобто точка F лежить на бісектрисі кута POQ. ■

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

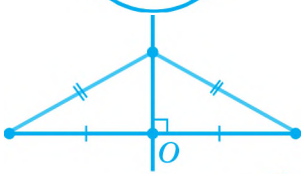
423. Накресліть кут A, градусна міра якого дорівнює 70°. Що є геометричним місцем точок кута, рівновіддалених від прямих, які містять сторони кута?

424. Накресліть дві прямі, що перетинаються під кутом 40°. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох прямих, які перетинаються?

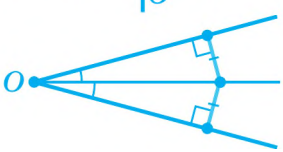
ОСНОВНЕ В § 16



Коло є геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра кола).



Серединний перпендикуляр до відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.



Бісектриса кута є геометричним місцем точок кута, рівновіддалених від прямих, що містять сторони цього кута.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Кола із центрами в точках O й O_1 перетинаються в точках A й B. Доведіть, що пряма OO_1 перпендикулярна до відрізка AB і ділить його навпіл.

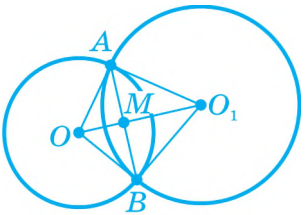
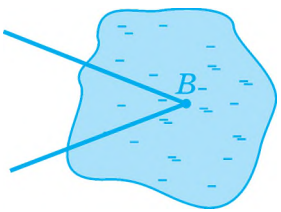


Рис. 258

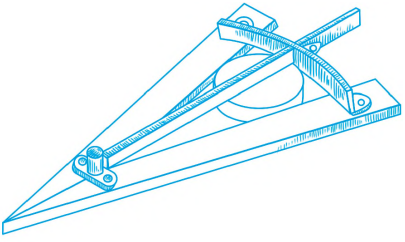
Розв'язання. Точка O (рис. 258) рівновіддалена від точок A і B. Точка O_1 теж рівновіддалена від точок A і B. Тоді обидві точки лежать на серединному перпендикулярі до відрізка AB. Отже, пряма OO_1 — серединний перпендикуляр до відрізка AB. Звідси випливає, що пряма OO_1 перпендикулярна до відрізка AB і ділить його навпіл. ■

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. Недалеко від залізниці з одного боку від неї розташовано два села. Знайдіть на лінії залізниці місце для станції, яка була б рівновіддалена від цих сіл. Виконайте рисунок.
2. На рисунку зображено кут, вершина якого недоступна. Як можна провести бісектрису цього кута?



3. Центрошукач — прилад для визначення центра кола, це модель довільного кута, виготовлена з двох планок, до яких прикріплена ще одна планка — бісектриса цього кута. Поясніть, як користуються цим приладом.



САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 16

1. Що є геометричним місцем точок, розміщених на однаковій відстані від даної точки?
2. Що є геометричним місцем точок, розміщених на однакових відстанях від двох даних точок?
3. Що є геометричним місцем точок кута, які розташовані на однаковій відстані від прямих, що містять його сторони?
4. Доведіть теорему про властивість серединного перпендикуляра до відрізка як геометричного місця точок.
5. Доведіть теорему про бісектрису кута як геометричного місця точок.

ЗАДАЧІ ДО § 16

РІВЕНЬ А

425. Позначте точку A. Побудуйте геометричне місце точок, віддалених від неї на відстань 4 см.

426. Накресліть відрізок CD завдовжки 6 см і побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

427. Накресліть кут A, градусна міра якого дорівнює 40°, і побудуйте геометричне місце точок, що належать куту та рівновіддалених від прямих, які містять його сторони.

428. Накресліть прямі, що перетинаються під кутом 70°, і побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від цих прямих. Чим відрізняється ця задача від попередньої?

429. Проведіть довільну пряму a. Позначте в одній півплощині точки A та B, відстань між якими дорівнює 4 см, так, щоб вони лежали на різних відстанях від прямої a. Знайдіть таку точку прямої a, яка рівновіддалена від точок A та B.

430. Проведіть довільну пряму m. Позначте в різних півплощинах точки C і D, відстань між якими дорівнює 6 см, так, щоб вони лежали на різних відстанях від прямої m і щоб прямі m і CD не були перпендикулярними. Знайдіть точку прямої m, рівновіддалену від точок C і D.

431. Накресліть кут A, градусна міра якого дорівнює 50°. Проведіть пряму m, яка перетинає сторони кута в точках, розміщених на різних відстанях від вершини A. Знайдіть точку прямої m, рівновіддалену від прямих, що містять сторони кута.

432. Накресліть кут A, градусна міра якого дорівнює 80°. На одній стороні кута позначте таку точку M, що $AM = 4$ см, а на іншій стороні — точку N таку, що $AN = 6$ см. Знайдіть точку відрізка MN, рівновіддалену від прямих, що містять сторони кута A.

РІВЕНЬ Б

433. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до сторін даного кута.

434. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які проходять через кінці даного відрізка.

435. Дано точки A та B. Знайдіть геометричне місце точок M, для яких: **а)** $AM = 2AB$; **б)** $AM < 2AB$.

436. Дано точки C і D. Знайдіть геометричне місце точок M, для яких: **а)** $DM = 3CD$; **б)** $DM \geq 3CD$.

437. Дано точки A та B. Знайдіть геометричне місце точок M, для яких $AM + MB = AB$.

438. Знайдіть геометричне місце вершин рівнобедрених трикутників, побудованих на даному відрізку як основі.

РІВЕНЬ В

439. Знайдіть геометричне місце середин хорд даного кола, які мають однакову довжину.

440. Дано коло та відрізок. Знайдіть геометричне місце точок, для яких довжини відрізків дотичних до даного кола дорівнюють довжині даного відрізка.

§17 КОЛО ТА ТРИКУТНИК

1. Коло, описане навколо трикутника
2. Коло, вписане в трикутник

1. КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА

Означення. Коло називають ***описаним навколо трикутника***, якщо всі вершини трикутника лежать на цьому колі. Трикутник у такому випадку називають ***вписаним у це коло***.

На рис. 259 зображено коло, описане навколо трикутника *ABC*. Центр описаного кола *O* ***рівновіддалений від усіх вершин трикутника***.

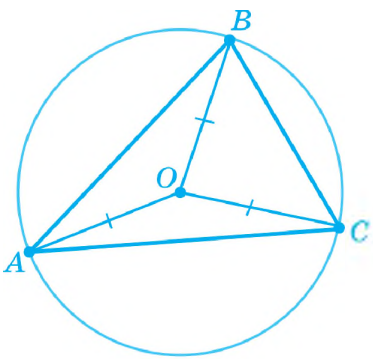


Рис. 259

Теорема. Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника (рис. 260).

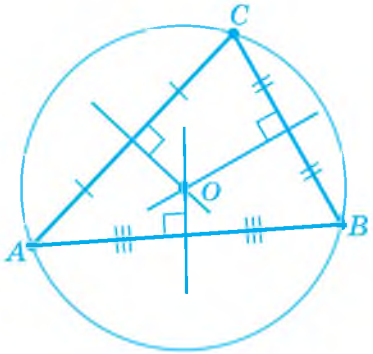


Рис. 260

Доведення. Центр описаного кола O рівновіддалений від вершин A та B трикутника ABC і, отже, лежить на серединному перпендикулярі до його сторони AB. Крім того, він рівновіддалений від вершин B і C, тому лежить на серединному перпендикулярі до BC. Через точку O проходить і серединний перпендикуляр до третьої сторони трикутника AC, оскільки з рівностей $OA = OB$ й $OB = OC$ випливає, що $OA = OC$, а всі точки, рівновіддалені від A й C, лежать на серединному перпендикулярі до AC. Отже, точка O належить усім трьом серединним перпендикулярам до сторін трикутника, а отже, є їх точкою перетину. ■

ПОБУДОВА КОЛА, ОПИСАНОГО НАВКОЛО ТРИКУТНИКА

Щоб побудувати коло, описане навколо трикутника ABC, діятимемо в такий спосіб (рис. 261):

1) побудуємо серединний перпендикуляр до сторони AB;

2) побудуємо серединний перпендикуляр до сторони BC;

3) позначимо літерою O точку перетину цих серединних перпендикулярів;

4) проведемо коло радіуса OA з центром O.

Побудоване коло є шуканим згідно з теоремою про центр кола, описаного навколо трикутника.

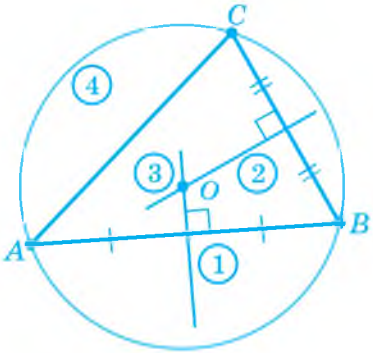


Рис. 261

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

441. Накресліть трикутник ABC, у якого $\angle A = 40°$, $AB = 4$ см, $AC = 5$ см і опишіть навколо нього коло.

442. Накресліть трикутник ABC, у якого $AB = 4$ см, $\angle A = 100°$, $\angle B = 30°$, й опишіть навколо нього коло.

2. КОЛО, ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК

Означення. Коло називають ***вписаним у трикутник***, якщо воно дотикається до всіх його сторін. Трикутник у такому випадку називають ***описаним навколо цього кола***.

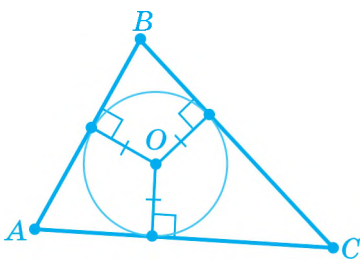


Рис. 262

На рис. 262 зображене коло, вписане в трикутник ABC. Оскільки дотична перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику, то довжини перпендикулярів, проведених із центра O вписаного кола до сторін трикутника, рівні між собою й дорівнюють радіусу вписаного кола.

Таким чином, центр вписаного кола O ***рівновіддалений від прямих, на яких лежать сторони трикутника.***

Теорема. Центр кола, вписаного у трикутник, є точкою перетину бісектрис трикутника (рис. 263).

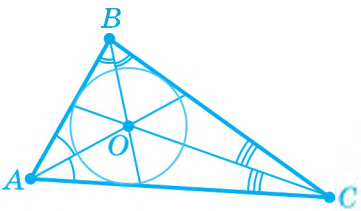


Рис. 263

Доведення. Центр вписаного кола O рівновіддалений від прямих, на яких лежать сторони AB й AC трикутника ABC і належить куту A. Отже, точка O лежить на бісектрисі кута A. Крім того, центр O рівновіддалений від прямих, на яких лежать сторони AB та BC і належить куту B, тому точка O лежить на бісектрисі кута B. Із цього випливає, що через точку O проходить бісектриса і третього кута C, оскільки точка O рівновіддалена також від прямих, на яких лежать сторони AC і BC, і належить куту C. ■

ПОБУДОВА КОЛА, ВПИСАНОГО В ТРИКУТНИК

Щоб побудувати коло, вписане у трикутник ABC, діятимемо в такий спосіб (рис. 264):

1) проведемо бісектрису кута A;

2) проведемо бісектрису кута B;

3) позначимо точку O перетину цих бісектрис;

4) проведемо перпендикуляр OP до прямої, що містить сторону AB трикутника;

5) проведемо коло радіуса OP з центром O.

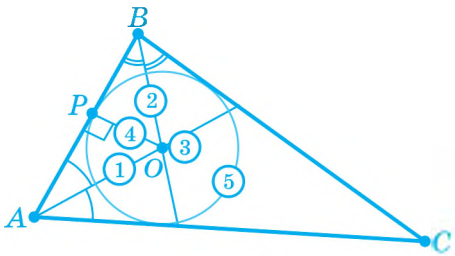


Рис. 264

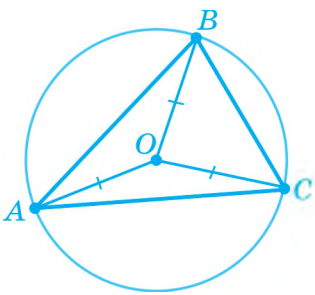
Побудоване коло є шуканим згідно з теоремою про центр кола, вписаного у трикутник.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

443. Побудуйте трикутник зі сторонами 2 см, 3 см і 4 см. Упишіть у нього коло.

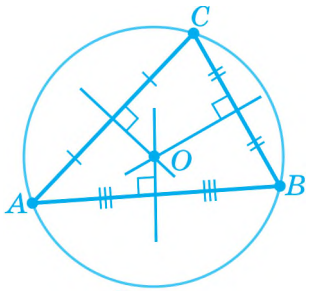
444. Накресліть трикутник ABC, у якого $\angle A = 70°$, $AB = 4$ см, $AC = 3$ см, і впишіть у нього коло.

ОСНОВНЕ В § 17

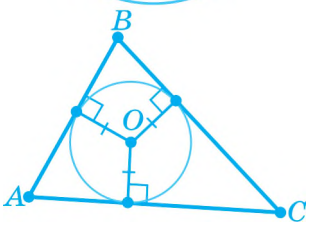


Коло називають **описаним** навколо трикутника, якщо всі вершини трикутника лежать на цьому колі.

Трикутник у такому випадку називають **вписаним** у це коло.

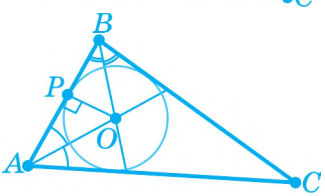


Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину **серединних перпендикулярів** до сторін трикутника.



Коло називають **вписаним** у трикутник, якщо воно дотикається до всіх сторін трикутника.

Трикутник у такому випадку називають **описаним** навколо цього кола.



Центр кола, вписаного у трикутник, є точкою перетину його **бісектрис**.

РОЗВ'ЯЗУЄМО РАЗОМ

Вправа 1. Якщо центр описаного кола лежить на стороні трикутника, то цей трикутник — прямокутний, до того ж центр описаного кола збігається із серединою гіпотенузи. Доведіть це.

Розв'язання. Нехай центр O кола, описаного навколо трикутника ABC, лежить на стороні AB (рис. 265).

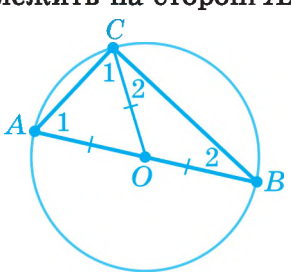


Рис. 265

Проведемо радіус OC. Ми одержимо $OA = OB = OC$, тобто точка O — середина сторони AB. Отож відрізок OC — медіана трикутника ABC, яка дорівнює половині сторони AB, до якої вона проведена. Тоді трикутник ABC — прямокутний із прямим кутом C і гіпотенузою AB (див. § 13). ■

Вправа 2. Доведіть, що центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині гіпотенузи (ця теорема є оберненою до теореми, доведеної вище).

Розв'язання. Нехай у прямокутному трикутнику ABC із прямим кутом C проведено медіану CD (рис. 266).

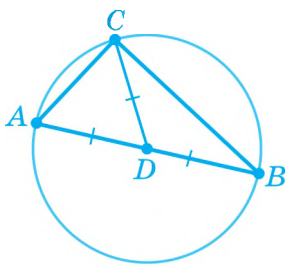


Рис. 266

Як відомо, медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи. Отже, $DA = DB = DC$, тобто точка D рівновіддалена від усіх вершин трикутника ABC і тому є центром описаного навколо нього кола. ■

Вправа 3. Проведіть до даного кола дотичну, яка проходить через задану точку, що лежить поза відповідним кругом.

Розв'язання. Нехай дано коло із центром O і точку A поза відповідним кругом. Припустимо, що через точку A проведено дотичну AP, де P — точка дотику. Тоді радіус OP перпендикулярний до цієї дотичної. Для побудови дотичної досить побудувати такий прямий кут OPA, щоб точка P належала колу.

Виходячи із цього, діятимемо в такий спосіб (рис. 267):

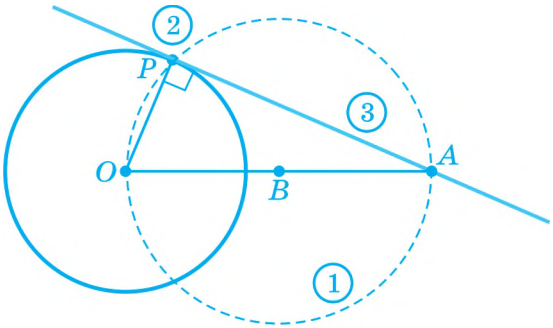


Рис. 267

1) побудуємо коло з діаметром OA. Позначимо центр цього кола через точку B;

2) позначимо через P яку-небудь з точок перетину побудованого кола з даним колом;

3) проведемо пряму AP.

Пряма AP — шукана дотична. Справді, вона:

1) проходить через дану точку A і точку P, яка лежить на даному колі;

2) є дотичною до заданого кола, тому що перпендикулярна радіусові OP, проведеному в точку дотику. Перпендикулярність AP й OP випливає з того, що трикутник APO — прямокутний із прямим кутом APO, оскільки центр описаного кола лежить на стороні трикутника. ■

БЕСІДА ПІСЛЯ УРОКУ

А чи навколо кожного трикутника можна описати коло? І якщо можна, то чи буде воно єдиним?

Відповіді на ці запитання дає наступна теорема (такі теореми математики називають «теоремами існування й єдиності»).

Теорема. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло, і до того ж лише одне.

Доведення. Як ми вже довели, центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін. Отже, щоб довести, що навколо будь-якого трикутника можна описати коло, досить довести, що серединні перпендикуляри до двох сторін трикутника перетинаються. Застосуємо метод доведення від супротивного. Припустимо, що серединні перпендикуляри k і m до сторін AB і BC трикутника ABC не перетинаються, тобто що вони паралельні (рис. 268).

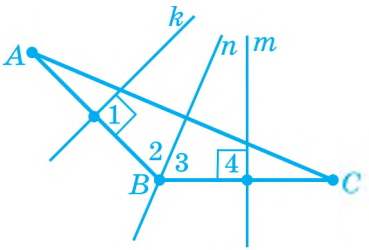


Рис. 268

Проведемо через точку B пряму n, паралельну прямій k. Тоді пряма n паралельна і прямій m, оскільки пряма, паралельна одній із двох паралельних прямих, паралельна й іншій прямій. AB — січна щодо паралельних прямих k і n, тому сума односторонніх кутів 1 і 2 дорівнює 180°. А оскільки кут 1 за умовою дорівнює 90°, то кут 2 теж повинен дорівнювати 90°. Аналогічно можна довести, що $\angle 3 + \angle 4 = 180°$, $\angle 3 = 90°$. Звідси випливає, що кут ABC є розгорнутим, тобто точки A, B і C лежать на одній прямій. А це суперечить тому, що вони є вершинами трикутника.

Доведемо тепер, що навколо трикутника можна описати тільки ***одне*** коло. Ми вже довели, що центр описаного кола збігається з точкою перетину серединних перпендикулярів до

сторін трикутника, а вони перетинаються в одній точці. Звідси випливає, що центр описаного кола визначений однозначно. Радіус описаного кола теж визначений однозначно: він дорівнює відстані від точки перетину серединних перпендикулярів до будь-якої вершини трикутника. Отже, навколо трикутника можна описати тільки одне коло. ■

А чи в будь-який трикутник можна вписати коло? І якщо можна, то чи буде воно єдиним?

У цьому випадку теж поставимо питання про існування і єдиність. Тільки тепер ітиметься про існування і єдиність кола, вписаного у трикутник.

Теорема. У будь-який трикутник можна вписати коло, і лише одне.

Доведення. Бісектриса кута трикутника перетинає будь-який відрізок (у т. ч. й іншу бісектрису трикутника), кінці якого лежать на сторонах цього кута. Тому будь-яка бісектриса трикутника перетинає іншу його бісектрису в точці, що належить трикутнику.

Точка перетину бісектрис трикутника, як було доведено, розміщена на рівних відстанях від усіх сторін трикутника, тобто є центром вписаного кола. Таким чином, у будь-який трикутник можна вписати коло.

Доведемо тепер, що в трикутник можна вписати тільки ***одне*** коло. Ми вже довели, що центр вписаного кола збігається з точкою перетину бісектрис трикутника, а вони перетинаються в одній точці. Отже, центр вписаного кола визначений однозначно. Радіус вписаного кола теж визначений однозначно: він дорівнює відстані від точки перетину бісектрис трикутника до будь-якої сторони трикутника. Отже, у трикутник можна вписати лише одне коло. ■

ЗАСТОСУЙТЕ ЗНАННЯ

1. У миші три виходи з нірки в точках A, B і C, які не лежать на одній прямій. Де має сидіти кішка, щоб вона однаково швидко могла спіймати мишу?
2. На трикутній ділянці лісу, обмеженій залізницями, живе ведмідь. У якій точці лісу він повинен побудувати свою барлогу, щоб поїзди, які проходять по цих дорогах, найменше його турбували під час зимової сплячки?

САМОПЕРЕВІРКА ТА ПОВТОРЕННЯ. ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДО § 17

1. Накресліть довільне коло. Позначте на ньому три точки і сполучіть їх відрізками. Як називають отриманий трикутник?
2. Накресліть довільне коло. Позначте на ньому три точки, жодні дві з яких не є кінцями діаметра. Проведіть через кожну точку дотичну до кола. Як називають утворений трикутник?
3. Яке коло називають описаним навколо трикутника?
4. Сформулюйте і доведіть терему про центр кола, описаного навколо трикутника.
5. Яке коло називають вписаним у трикутник?
6. Сформулюйте і доведіть терему про центр кола, вписаного в трикутник.

ЗАДАЧІ ДО § 17

РІВЕНЬ А

445. Побудуйте рівнобедрений трикутник з основою 5 см і бічною стороною 4 см. Опишіть навколо нього коло.

446. Побудуйте прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. Опишіть навколо нього коло.

447. Побудуйте прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4,5 см. Впишіть у нього коло.

448. Побудуйте рівносторонній трикутник зі стороною 3 см і впишіть у нього коло.

РІВЕНЬ Б

449. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$), лежить на бісектрисі, проведеній з вершини B.

450. Центр кола, описаного навколо трикутника, лежить на висоті трикутника. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

451. У рівносторонньому трикутнику проведено дві медіани. Чи можна вважати, що точка перетину медіан є центром кола, описаного навколо трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

452. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину двох медіан. Доведіть, що трикутник рівносторонній.

453. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і кутом при основі. Опишіть навколо трикутника коло.

454. Доведіть, що центри вписаного в рівносторонній трикутник й описаного навколо нього кіл збігаються.

РІВЕНЬ В

455. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 12 см і 8 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника.

456. У прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C вписане коло із центром O (рис. 269). M і K — точки дотику

кола відповідно з катетами AC і BC. Доведіть, що відрізки CM і CK дорівнюють радіусу кола.

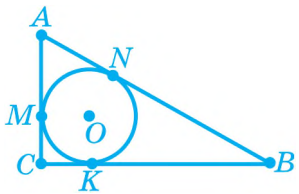


Рис. 269

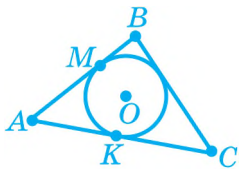


Рис. 270

457. У прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють a і b, вписане коло радіуса r. Доведіть, що гіпотенуза c трикутника дорівнює $a + b - 2r$.

458. Коло, вписане у трикутник ABC, дотикається до сторони AB у точці M, а до сторони AC — у точці K (рис. 270). Доведіть, що $AM = AK = \frac{AB + AC - BC}{2}$.

КОНТРОЛЬ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ ЗА МАТЕРІАЛОМ § 14 – § 17

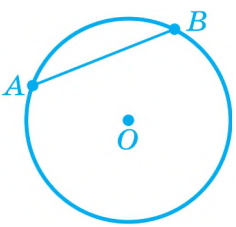
ПОЧАТКОВИЙ РІВЕНЬ

1. Для кола відрізок AB є...

а) діаметром;

б) хордою;

в) радіусом.



2. Дано коло з центром у точці O, радіус якого дорівнює 4 см. Довжина відрізка OA дорівнює 3 см. Точка A...

а) належить колу;

б) належить кругу;

в) не належить кругу.

3. Накреслено пряму і коло, радіус якого дорівнює 3 см. Відстань від центра кола до прямої дорівнює 2 см. Правильним є твердження...

а) пряма перетинає коло;

б) пряма дотикається до кола;

в) пряма не має з колом спільних точок.

4. Геометричним місцем точок, розміщених від точки O на відстані, меншій ніж 5 см, є...

а) коло;

б) круг;

в) внутрішні точки круга.

5. Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину його...

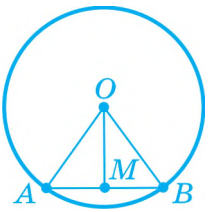
а) бісектрис;

б) медіан;

в) серединних перпендикулярів.

ДОСТАТНІЙ РІВЕНЬ

6. Точка O — центр кола, M — середина хорди AB (див. рис.). Доведіть, що кути AOM і BOM рівні.



7. Побудуйте довільний рівнобедрений трикутник і трикутник, рівний йому.

8. Накресліть гострокутний трикутник і опишіть навколо нього коло.

СЕРЕДНІЙ РІВЕНЬ

9. Через кінці того самого діаметра кола проведено дві паралельні прямі. Доведіть, що коли одна з цих прямих є дотичною до кола, то й інша пряма теж є дотичною до нього.

10. Дано точки A та B. Знайдіть геометричне місце точок M, для яких $AM = AB$.

ВИСОКИЙ РІВЕНЬ

11. Через кінець A хорди AC кола із центром O проведено дотичну AB. Кут BAC — гострий. Доведіть, що $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle AOC$.

12. Дано точки A та B. Знайдіть геометричне місце точок M, для яких кут AMB — гострий.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

РІВЕНЬ А

459. На який кут повернеться годинна стрілка за:
а) 3 години; **б)** 6 годин; **в)** 1 годину; **г)** 5 годин?

460. Знайдіть кути трикутника, якщо їх градусні міри відносяться як: **а)** 2 : 7 : 9; **б)** 2 : 3 : 4.

461. Накресліть довільний трикутник ABC, в якого $\angle A = 70°$. Побудуйте зовнішній кут при вершині кута A й обчисліть його градусну міру.

462. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, якщо його периметр і бічна сторона відповідно дорівнюють 23 см і 8 см.

463. На основі AC рівнобедреного трикутника ABC відкладено рівні відрізки AP і CK (рис. 271). Доведіть, що $\angle ABP = \angle CBK$.

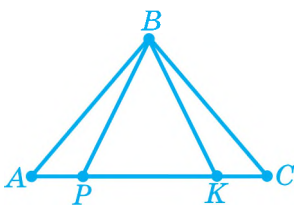


Рис. 271

464. Поясніть, чому не існує трикутника зі сторонами: **а)** 2 см, 5 см і 7 см; **б)** 3 см, 4 см і 9 см; **в)** 2 см, 11 см і 7 см.

465. Дано прямокутний трикутник з кутом 30°. Знайдіть гіпотенузу трикутника, якщо катет, протилежний до кута 30°, дорівнює 17 см.

466. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо один з них у 9 разів менший від іншого.

467. Дано коло, радіус якого дорівнює 4 см. Чи існують на колі точки, відстань між якими дорівнює: **а)** 3 см; **б)** 4 см; **в)** 7 см; **г)** 8 см; **д)** 10 см?

468. На рисунку 272 точка O — центр кола, A й C — його точки. Знайдіть кут A, якщо $\angle O = 20°$.

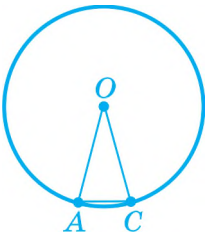


Рис. 272

469. Накресліть довільний тупокутний трикутник і побудуйте серединний перпендикуляр до найбільшої його сторони.

РІВЕНЬ Б

470. Сума двох кутів дорівнює 102°, а їх різниця дорівнює 22°. Знайдіть: **а)** більший з цих кутів; **б)** кут, удвічі більший від меншого з цих кутів.

471. Якими є дві прямі, якщо: **а)** два суміжні кути, утворені при перетині цих прямих, є рівними; **б)** сума двох вертикальних кутів, утворених при перетині цих прямих, дорівнює 180°; **в)** сума трьох кутів, утворених при перетині цих прямих, дорівнює 270°? Відповідь обґрунтуйте.

472. Прямі a і b перетнуті січною. Якщо сума градусних мір однієї пари односторонніх кутів дорівнює сумі градусних мір іншої пари односторонніх кутів, то прямі паралельні. Доведіть.

473. Відрізок BD є бісектрисою і висотою трикутника ABC. Доведіть, що відрізок BD є медіаною цього трикутника.

474. Доведіть, що не існує трикутника, у якого всі кути більші від 60°.

475. Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 110°. Знайдіть два інші кути трикутника. Поясніть, чому задача має єдиний розв'язок.

476. Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 130°. Знайдіть зовнішній кут при вершині, утвореній бічними сторонами трикутника.

477. Які градусні міри гострих кутів прямокутного трикутника, якщо бісектриса одного з них утворює з гіпотенузою кут: **а)** 38°; **б)** 24°?

478. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.

479. На рисунку 273 точка O — центр кола, що проходить через точки A та B. $OM \perp AB$. Доведіть, що точка M — середина відрізка AB.

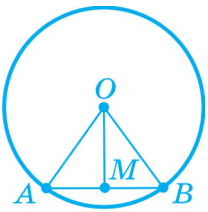


Рис. 273

480. Позначте точки A та B, відстань між якими дорівнює 4 см. Знайдіть точки, розміщені від кожної з точок на відстані 5 см.

РІВЕНЬ В

481. Дано два кути, один з яких на 130° менший від іншого. Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо кут, суміжний з одним з них дорівнює 40°.

482. Дано двадцять різних прямих, кожні дві з яких паралельні, й пряму b. Відомо, що пряма b паралельна до однієї із

цих двадцяти прямих. Доведіть, що пряма b паралельна кожній із цих прямих.

483. Два кути трикутника дорівнюють 70° і 38°. Знайдіть кут між бісектрисою і висотою, проведеними з вершини третього кута.

484. У різних півплощинах відносно прямої AD позначено такі точки B і C, що $AB = CD$, $\angle BAO = \angle CDO$ (рис. 274). Пряма BC перетинає відрізок AD в точці O. Доведіть, що $\Delta AOC = \Delta DOB$.

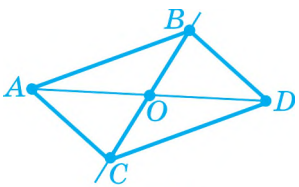


Рис. 274

485. Знайдіть відношення градусних мір кута при основі та кута між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо градусні міри зовнішніх кутів при цих вершинах відносяться як 4 : 1.

486. Дано точки C і D. Знайдіть геометричне місце точок M, для яких кут CMD — тупий.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

§ 1

11. *BM*, *CM*. **14.** Ні. **15.** Одній. **18.** Точки *M*, *N*, *K*, *P* лежать на одній прямій. **22.** Чотири, десять. **23.** 1, 4, 6. **24.** 1, 4, 6.

§ 2

39. 5,4 см. **40.** 1,8 см. **41.** 1,8 см. **42.** 7 см. **43.** 19 см. **44.** 20 см і 28 см. **45.** 16 см. **47.** 10 см і 25 см. **52.** 2 см або 8 см. **53.** 6 см або 12 см. **54.** 21 см. **55.** 6,8 см. **56.** Ні. **57.** 20 см. **58.** 47 см і 9 см. **59.** 5 см. **60.** $\frac{5a}{6}$. **61.** 10; $\frac{n(n-1)}{2}$. **62.** 5; 15.

§ 3

75. 80°. **76.** 65°. **77.** 55°. **78.** 35° і 55°. **79.** 72° і 108°. **80. а)** 180°; **б)** 90°; **в)** 30°; **г)** 120°. **81. а)** 90°; **б)** 90°; **в)** 120°; **г)** 30°. **82. а)** 180°; **б)** 90°; **в)** 30°; **г)** 120°. **83.** 45°. **84.** 150°. **85.** Ні. **86.** 22°. **88.** 162°. **89. а)** 6°; **б)** 36°; **в)** 108°; **г)** 144°. **90. а)** 60°; **б)** 120°. **91. а)** 165°; **б)** 135°; **в)** 75°; **г)** 15°. **92. а)** 12; **б)** 9. **94.** 75° і 105°. **95.** 36° і 54°. **96.** 25° і 125°. **97.** 66°. **98.** 20°. **99.** 10°. **100. а)** 110°; **б)** 50°; **в)** 40°.

§ 4

112. 9 см. **114.** 28 см.

§ 5

131. 280°. **132.** 78°. **133.** 108°. **135.** 70° і 110°. **138.** 54° і 126°. **143.** 65°. **144.** 35°. **145.** 140°. **146.** 70°. **148.** 60°. **149.** 30° і 140°. **150.** 70° і 105°. **151.** 25° і 120°. **152.** 90°. **153.** 250° або 290°. **154.** 45°.

§ 7

166. 150°, 30°, 150° і 115°, 65°, 115°. **167.** 155°, 25°, 155° і 106°, 74°, 106°. **169.** 105°. **172.** 38°. **173.** 97°, 83°, 97°, 83° і 65°, 115°, 65°, 115°. **174.** 90°, 90°, 90°, 90° і 120°, 60°, 120°, 60°. **175.** 75°, 105°. **176.** 72°, 108°. **178.** 100° і 260°. **179.** 100°, 70° або 80°, 90°.

§ 8

193. 64°. **194.** Три кути по 48° і чотири кути по 132°. **195.** Чотири кути по 35° і чотири кути по 145°. **196.** 55°. **200.** 77° і 103°. **201.** 36° і 144°. **205.** Чотири кути по 30° і чотири кути по 150°. **206.** Чотири кути по 30° і чотири кути по 150°. **210.** Чотири кути по 80° і чотири кути по 100° або чотири кути по 60° і чотири кути по 120°. **214.** 80°. **215.** 70°.

§ 9

227. 100°. **228.** Тупокутний. **231.** 40°, 60°, 80°. **232.** 36°, 24°, 120°; тупокутний. **234.** 145°, 110°, 105°. **235.** 35°. **236.** 39°. **238.** 28°, 72°. **239.** 60°, 80°. **243.** 140°. **244.** 76°. **245.** 75°. **246.** 100°, 60°, 20°. **247.** *Вказівка.* $\angle ADB$ — зовнішній кут трикутника BCD. **249.** $x = 180° - k - m - n$. **250.** 360°. **251.** 540°. **252.** 120°.

§ 10

261. *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta ADC$. **262.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta CDA$. **263.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ABD = \Delta CBD$. **264.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta AOM = \Delta COM$. **267.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta MBO = \Delta KBO$. **268.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ABK = \Delta CBK$. **271–272.** *Вказівка.* Скористайтеся властивістю різносторонніх кутів при паралельних прямих AB і CD та січній AC. **273.** *Вказівка.* Скористайтеся другою ознакою рівності трикутників. **274.** *Вказівка.* Скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **275–276.** *Вказівка.* Скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **277.** *Вказівка.* Розгляньте трикутники MPO і NKO. **278.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ACO = \Delta BDO$. **279.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ABM = \Delta CDN$. **280.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta CDA$.

§ 11

288. 34 см. **289.** 21,8 см. **290.** 12 см. **292.** 50° 30′ і 50° 30′. **293.** 110°. **295.** 65° і 65°. **296.** 56°. **301.** 7 см, 9 см, 9 см. **302.** 30°.

303. 50°, 65°, 65°. **304.** 145°; 145°. **307.** 50 см. **312.** 8 см. **313.** 30°, 30°, 120°.

§ 12

327. *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta CDA$. **328.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta ADC$. **329. а)** BC; **б)** AB. **330. а)** OP; **б)** PK. **331.** Кут при основі. **332.** Бічна сторона більша від основи. **333. а)** Так; **б)** так. **334. а)** Ні; **б)** так. **335.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ACM = \Delta DCM$. **337. а)** 14 см; **б)** 13 см або 11 см. **338.** 7 см і 9 см або 8 см і 8 см. **339.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta BMD = \Delta CMD$. **340.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta ABL = \Delta A_1B_1L_1$. **341.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta BCM = \Delta KAM$ і $\Delta B_1C_1M_1 = \Delta K_1A_1M_1$, а потім, що $AK = A_1K_1$.

§ 13

351. 40° і 50°. **352.** 39° і 51°. **353.** 27° і 63°. **355.** 62°, 56°, 62°. **356.** 72°, 66°, 42°. **365.** 30 см. **366.** 14 см. **367.** 45°. **368.** 10° і 80°. **369.** 72°.

§ 14

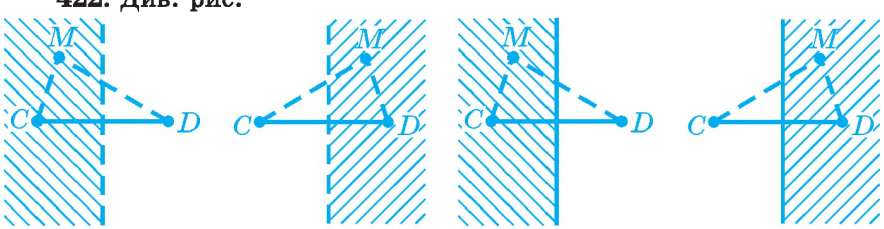
379. 30°. **380.** 37°. **381.** 50°. **382.** 15 см. **386.** 6 см. **387.** 16 см.

§ 15

399. 10 см. **400.** 8 см. **401.** 10 см. **402.** 45°. **407.** 18 см. **408.** 16,4 см. **409.** 60°.

§ 16

422. Див. рис.



$MC < MD$ $MC > MD$ $MC \leq MD$ $MC \geq MD$

433. Бісектриса кута без її початку. **434.** Серединний перпендикуляр до даного відрізка. **435. а)** Коло з центром в точці A радіуса $2AB$; **б)** внутрішні точки круга з центром в точці A і радіусом $2AB$. **436. а)** Коло з центром в точці D і радіуса $3CD$; **б)** точки, що лежать на колі з центром в точці D і радіуса $3CD$ і всі точки поза відповідним кругом. **437.** Відрізок AB без кінців. **438.** Серединний перпендикуляр до даного відрізка, без точки — середини даного відрізка. **439.** Якщо хорди відмінні від діаметрів, то шукане геометричне місце точок — коло з центром, яке збігається з центром даного кола, і радіусом, що дорівнює відстані від центра даного кола до середини хорди. Якщо хорди є діаметрами, то шукане геометричне місце точок — центр даного кола. **440.** Коло з центром, що збігається із центром даного кола, і радіусом, що дорівнює відстані від центра даного кола до кінця відрізка дотичної.

§ 17

451. Так. **456.** *Вказівка.* Розгляньте трикутники CMO і CKO, враховуючи, що CO — бісектриса кута C. **457–458.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що відрізки дотичних, проведені з даної точки до кола, рівні.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

459. а) 90°; **б)** 180°; **в)** 30°; **г)** 150°. **510.** 7 см. **466.** 9° і 81°. **468.** 80°. **474.** *Вказівка.* Скористайтеся методом доведення від супротивного. **481.** 140° і 10°. **483.** 16°. **484.** *Вказівка.* Розгляньте спочатку трикутники BAO і CDO. **485.** 1 : 7.

Навчальне видання

***Роганін** Олександр Миколайович*
***Капіносов** Анатолій Миколайович*

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Редактори: *Ярослав Гап'юк* — кандидат педагогічних наук;
Ярослав Гринчишин — кандидат фізико-математичних наук;
Сергій Мартинюк — кандидат фізико-математичних наук
Літературне редагування: *Людмила Олійник, Оксана Давидова*
Художнє оформлення: *Олена Соколюк, Світлана Демчак, Іванна Садова*

Відповідальний за випуск *Сергій Мартинюк*

Формат 60×84/16. 14 ум. др. арк., 12,25 обл.-вид. арк.
Тираж 344. Замовлення № 15-663.
Видавець і виготовлювач Редакція газети «Підручники і посібники».
46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-21.
Збут: zbut@pp-books.com.ua Редакція: red@pp-books.com.ua
Виробництво: print@pp-books.com.ua
www.pp-books.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 4678 від 21.01.2014 р.
Книга-поштою: а/с 376, Тернопіль, 46011.
Тел.: (0352) 42-43-76; 097-50-35-376
post@pp-books.com.ua