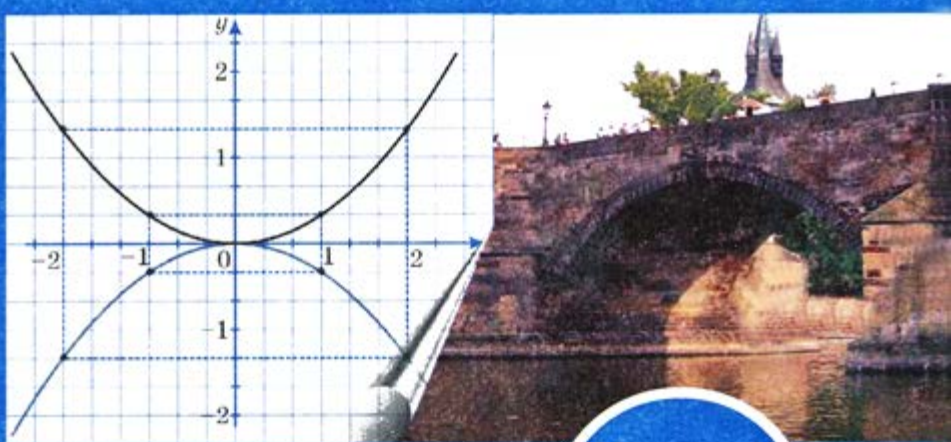
Ю.І. МАЛЬОВАНИЙ, Г.М. ЛИТВИНЕНКО, Г.М. ВОЗНЯК

АЛГЕБРА



клас 9

Ю.І. Мальований
Г.М. Литвиненко
Г.М. Возняк

АЛГЕБРА

9 клас

Підручник
для загальноосвітніх
навчальних закладів

За редакцією Ю.І. Мальованого

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

Слово до учнів

Людський розум не винайшов іншої машини, яка такою ж мірою вивільняла б від нудної роботи, як алгебра.

Дж. В. Гіббс,
американський фізик,
механік і математик

Юний друже!

Перед тобою новий підручник з алгебри, науки, яку ти продовжуватимеш вивчати в 9 класі. Мета цього підручника — допомогти тобі не тільки здобути певні знання, а й навчитися використовувати їх у процесі навчання і в практичній діяльності.

Матеріал підручника структуровано за розділами, які розбито на параграфи, а ті, у свою чергу, — на окремі пункти. Майже перед кожним з пунктів у рубриці «Пригадайте» акцентується увага на тих відомостях, які слід відновити в пам'яті для полегшення розуміння нового матеріалу.

Кожен пункт складається з двох частин. У першій частині викладено теоретичний матеріал, у другій — вміщено запитання для самоперевірки, а також задачі та вправи, які допоможуть тобі його усвідомити і навчитися застосовувати. Не починай виконувати вправи, не прочитавши викладене у теоретичній частині. Там ти знайдеш, зокрема, і зразки розв'язання окремих завдань.

Щоб привернути твою увагу до особливо важливих положень, їх виділено відмінним від звичайного шрифтом і кольором. Наприклад, кольором виділено означення та властивості, які потрібно запам'ятати. Послідовність виконання певних дій, перетворень, розв'язування задач надруковано курсивом.

Зорієнтуватися у рівні засвоєння змісту розділу ти зможеш за допомогою вміщених у його кінці додаткових задач та вправ, а також різнорівневих завдань для самоперевірки.

Щиро бажаємо тобі успіху!

Позначення:

° — завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

* — завдання високого рівня навчальних досягнень;

відсутність біля номера завдання будь-якого позначення вказує на те, що воно відповідає достатньому рівню навчальних досягнень. Для додаткових задач і вправ до кожного розділу та на повторення курсу алгебри рівні їх складності не вказано;

▽ — початок доведення твердження або розв'язання вправи;

▲ — кінець доведення твердження або розв'язання вправи.

Розділ I

НЕРІВНОСТІ


УКРАЇНА
ГОТЕЛЬ
HOTEL

§1. Числові нерівності

1.1. Поняття числової нерівності

Пригадайте

1. Що означають знаки > і <?
2. Який запис правильний: а) $3 < 5$; б) $6 > 8$; в) $0 < 1$?
3. Як записати за допомогою математичних символів твердження: а) число a — додатне; б) число b — від'ємне?

① **Як порівняти два числа.** Вам уже не раз доводилося порівнювати числа. В результаті порівняння встановлюють одне з трьох можливих відношень між двома числами a і b: a більше від b ($a > b$); a менше від b ($a < b$); a дорівнює b ($a = b$).

Ви знаєте, що будь-яке додатне число більше від 0, а будь-яке від'ємне число менше від 0. Тому запис $a > 0$ означає, що a — число додатне, а запис $a < 0$ — що a — число від'ємне.

На координатній прямій додатні числа розміщені справа від нуля, а від'ємні — зліва. Взагалі, якщо $a > b$, то число a на координатній прямій розміщене правіше від b (рис. 1).

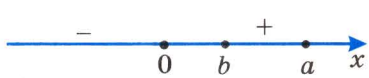


Рис. 1

Досі строгих означень відношень «більше», «менше», «дорівнює» між двома числами не давалося, хоча вони досить прості і побудовані на використанні значення різниці даних чисел.

Як відомо, така різниця може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю. Відповідно,

! **число a більше від числа b, якщо різниця чисел a і b додатна:**
$a > b$, якщо $a - b > 0$;
число a менше від числа b, якщо різниця чисел a і b від'ємна:
$a < b$, *якщо* $a - b < 0$;
число a дорівнює числу b, якщо різниця чисел a і b дорівнює нулю:
$a = b$, *якщо* $a - b = 0$.

Враховуючи ці означення, *для порівняння будь-яких двох чисел потрібно утворити їх різницю і визначити її знак.*

Розглянувши приклади, спробуємо визначити, що більше:

а) $\frac{5}{8}$ чи $\frac{4}{7}$?

$\frac{5}{8} - \frac{4}{7} = \frac{35-32}{56} = \frac{3}{56} > 0$. Отже, $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$.

б) -15 чи -17?

$-15 - (-17) = -15 + 17 = 2 > 0$. Отже, $-15 > -17$.

в) $0{,}333$ чи $\frac{1}{3}$?

$$0{,}333 - \frac{1}{3} = \frac{333}{1000} - \frac{1}{3} = \frac{999-1000}{3000} = -\frac{1}{3000} < 0.$$

Отже, $0{,}333 < \frac{1}{3}$.

г) 7 чи $4\sqrt{3}$?

Для визначення знака різниці $7 - 4\sqrt{3}$ перетворимо її, записавши 7 як 4 + 3. Маємо:

$$7 - 4\sqrt{3} = 4 + 3 - 4\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 =$$

$$= \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 > 0.$$ Отже, $7 > 4\sqrt{3}$.

② **Що таке числова нерівність?** Два числа, сполучені знаком > (більше) або < (менше), утворюють ***числову нерівність***.

Приклади: $3 < 5$; $-1 > -9$; $0 < 4{,}5$.

Знаки нерівності < та < (або > та >) є ***однаковими***. Тому нерівності виду $a > b$ і $c > d$ (або $a < b$ і $c < d$) називають нерівностями ***однакового смислу***.

Наприклад, $\sqrt{5} > 2$ і $\pi > 3{,}1$ — нерівності однакового смислу.

Знаки нерівності > і < є ***протилежними***. Тому нерівності виду $a > b$ і $c < d$ (або $a < b$ і $c > d$) називають нерівностями ***протилежного смислу***.

Наприклад, $\sqrt{5} > 2$ і $0{,}3 < \frac{1}{3}$ є нерівностями протилежного смислу; нерівності $4 < 6{,}5$ і $8 > 0$ — так само.

Як і числові рівності, числові нерівності можуть бути ***правильними*** і ***неправильними***. Наприклад, нерівності $2 < 7$; $0{,}5 > \frac{1}{3}$ є правильними, а нерівності $1 > 2$; $3 < -0{,}8$; $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ — неправильними.

③ **Очевидні властивості.** У процесі розв'язування задач та доведення тверджень користуються такими очевидними властивостями.

№	Символічний запис	Словесне формулювання
1.	Якщо $a > 0$ і $b > 0$, то $a + b > 0$, $ab > 0$, $\frac{a}{b} > 0$.	Сума, добуток і частка двох додатних чисел — завжди додатні.
2.	Якщо $a < 0$ і $b < 0$, то $a + b < 0$, $ab > 0$, $\frac{a}{b} > 0$.	Сума двох від'ємних чисел — від'ємна, а їх добуток і частка — додатні.
3.	Якщо $a > 0$ і $b < 0$, то $ab < 0$, $\frac{a}{b} < 0$.	Добуток і частка додатного та від'ємного чисел є від'ємними числами.

№	Символічний запис	Словесне формулювання
4.	Якщо $ab > 0$ або $\frac{a}{b} > 0$, то $a > 0$ і $b > 0$ або $a < 0$ і $b < 0$.	Якщо добуток або частка двох чисел є додатним числом, то ці числа або додатні, або від'ємні.
5.	Якщо $ab < 0$ або $\frac{a}{b} < 0$, то $a > 0$ і $b < 0$ або $a < 0$ і $b > 0$.	Якщо добуток або частка двох чисел є від'ємні, то одне з них — додатне число, а друге — від'ємне.
6.	Якщо $ab = 0$, то $a = 0$ і $b \neq 0$, або $a \neq 0$ і $b = 0$, або $a = b = 0$.	Якщо добуток двох чисел дорівнює нулю, то принаймні одне з них (тобто одне з двох або обидва одночасно) дорівнює нулю.
7.	Якщо $a \neq 0$, то $a^{2n} > 0$; $a^{2n+1} > 0$, коли $a > 0$; $a^{2n+1} < 0$, коли $a < 0$.	1) Степінь будь-якого, відмінного від нуля, числа з парним показником є додатним числом; 2) степінь додатного числа з непарним показником є додатним числом, а степінь від'ємного числа з непарним показником — від'ємним.

Проілюструйте кожне твердження прикладом.

? Запитання для самоперевірки

1. Як порівняти між собою два числа?
2. У якому випадку число a більше від числа b?
3. У якому випадку число m менше від числа n?
4. Яке з чисел a, b, c лежить на координатній прямій між двома іншими, якщо $a > c$ та $c > b$?

Задачі та вправи

1°. Використовуючи означення понять $a > b$ і $a < b$, покажіть, що:

а) $\frac{7}{15} > 0,45$; **б)** $\frac{11}{12} < \frac{12}{13}$; **в)** $\frac{13}{40} < 0,35$;

г) $-\frac{5}{8} > -0,7$; **ґ)** $(-0,2)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^4$; **д)** $-3\frac{1}{5} > -3,22$.

2°. Порівняйте числа:

а) $\frac{2}{3}$ і $\frac{7}{9}$; **б)** $\frac{3}{5}$ і $\frac{5}{7}$;

в) $-\frac{3}{4}$ і $-0,77$; **г)** $-\frac{35}{8}$ і $-4\frac{3}{8}$.

3°. Замість крапок поставте знак $>$ або $<$ так, щоб утворена нерівність була правильною:

а) $\frac{9}{7} \ldots \frac{43}{35}$; **б)** $\frac{6}{13} \ldots \frac{23}{52}$;

в) $0,003 \ldots 0,008$; **г)** $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \ldots \left(\frac{1}{7}\right)^2$;

ґ) $-4\frac{1}{15} \ldots -4\frac{1}{20}$; **д)** $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \ldots 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2$.

Порівняйте числа c і p, якщо (**4–6**):

4°. **а)** $c - p = -0,3$; **б)** $c - p = 1,002$; **в)** $c - p = 0,0001$;

5. **а)** $c - p = \sqrt{3}$; **б)** $p - c = \sqrt{5}$; **в)** $p - c = \sqrt{3} - 2$.

6. **а)** $c - p = 3 - \pi$; **б)** $p - c = \left(1 - \sqrt{2}\right)^2$; **в)** $c - p = (-0,2)^2$.

7°. Розмістіть числа у порядку зростання:

а) $p + 3$; $p + 0,1$; $p - 0,1$; $p - 2$; $p + 0,01$;

б) $p - 0,2$; $p + 0,2$; $p + 2$; $p - 2$; $p - 3$.

8. Відомо, що $b < 3$. Чи правильні твердження:

а) $b - 3$ — від'ємне число;

б) $b + 5$ — додатне число;

в) $4 - b$ — додатне число;

г) $b - 5$ — від'ємне число?

9°. Як розміщені на координатній прямій точки, що зображають числа a і b, якщо:

а) $a - b = 3$; **б)** $a - b = -4$; **в)** $a - b = (-2)^4$;
г) $b - a = -4^2$; **ґ)** $b - a = (-4)^2$; **д)** $a - b = 0$?

10*. Знайдіть чисельник нескоротного звичайного дробу зі знаменником 30, якщо дріб більший від $\frac{1}{3}$, але менший від $\frac{2}{5}$.

11*. Знайдіть чисельник нескоротного звичайного дробу зі знаменником 30, якщо дріб більший від $\frac{2}{5}$, але менший від $\frac{4}{9}$.

12. Покажіть, що $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 > \left(\sqrt{3}+2\right)^2$.

1.2. Властивості числових нерівностей

Пригадайте

1. Чи правильні твердження:
   а) якщо $c > d$, то $c - d > 0$;
   б) якщо $c - d > 0$, то $c > d$?
2. У якому випадку добуток двох чисел додатний?
3. Який знак має частка додатного і від'ємного чисел?

Властивість 1. ***Якщо $a > b$, то $b < a$.***

▽ *Доведення.* Для того, щоб довести, що $b < a$, треба показати, що $b - a < 0$.

З умови $a > b$ випливає, що $a - b > 0$, тобто $a - b$ — додатне число.

Звідси: $-(a - b) = -a + b = b - a$ — число від'ємне, тобто $b - a < 0$. Отже, $b < a$, за означенням. ▲

Цю властивість називають властивістю *оборотності*.

Властивість 2. ***Якщо $a > b$, $b > c$, то $a > c$.***

▽ *Доведення.* Якщо $a > b$, то $a - b > 0$; якщо $b > c$, то $b - c > 0$. Сума двох додатних чисел $a - b$ і $b - c$ є додатним числом: $(a - b) + (b - c) = a - b + b - c = a - c > 0$. Звідси випливає, що $a > c$. ▲

Розглянуту властивість називають властивістю *транзитивності*.

Властивість 3. ***Якщо $a > b$ та c — будь-яке число, то $a + c > b + c$.***

Якщо до обох частин правильної нерівності додати одне і те саме число, то отримаємо правильну нерівність *того самого* смислу.

▽ *Доведення.* Для доведення утворимо різницю чисел $a + c$ та $b + c$ і покажемо, що вона є додатним числом:

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b.$$

Оскільки, за умовою, $a > b$, то $a - b > 0$. Отже, $a + c > b + c$. ▲

Властивість 4. ***Якщо $a > b$ та $c > 0$, то $ac > bc$.***

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне і те саме додатне число, то отримаємо правильну нерівність *того самого* смислу.

▽ *Доведення.* Для доведення досить показати, що $ac - bc > 0$.

$ac - bc = c(a - b)$; $c > 0$, за умовою, $a - b > 0$, бо $a > b$. Добуток двох додатних множників (c та $a - b$) є додатним числом: $c(a - b) = ac - bc > 0$. Отже, $ac > bc$. ▲

Властивість 5. ***Якщо $a > b$ та $c < 0$, то $ac < bc$.***

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити на одне і те саме від'ємне число, то отримаємо правильну нерівність *протилежного* смислу.

▽ *Доведення.* Покажемо, що $ac - bc < 0$.

$ac - bc = c(a - b)$; $c < 0$, за умовою, $a - b > 0$, бо $a > b$. Добуток від'ємного (c) і додатного ($a - b$) чисел є від'ємним числом. Отже, $c(a - b) = ac - bc < 0$. Звідси: $ac < bc$. ▲

Зауваження. Відомо, що ділення на число c рівнозначне множенню на число $\frac{1}{c}$. Тому дві попередні властивості нерівностей поширюються і на ділення обох частин нерівності на відповідне число.

Властивість 6. ***Якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.***

▽ *Доведення.* Оскільки $a > 0$, $b > 0$, то $ab > 0$ і обернене число $\frac{1}{ab} > 0$.

Якщо $a > b$ і $\frac{1}{ab} > 0$, то з властивості 4 (с. 13) випливає, що $a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab}$, тобто $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, або $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ▲

Запитання для самоперевірки

1. Чи існує число, при додаванні якого до обох частин правильної нерівності отримаємо правильну нерівність протилежного смислу?
2. На яке число треба поділити обидві частини правильної нерівності, щоб отримати правильну нерівність протилежного смислу?

Задачі та вправи

13°. Порівняйте числа x і y, якщо $x > c$ та $y < c$. Які властивості числових нерівностей використані при цьому?

14°. Застосовуючи властивість 2 (с. 13), доведіть, що будь-яке додатне число більше від будь-якого від'ємного числа, тобто, якщо $a > 0$, $b < 0$, то $a > b$.

15°. До обох частин нерівності додайте вказане в дужках число і запишіть утворену правильну нерівність:

а) $-7 < 2$ (-3);

б) $-0{,}5 > -1{,}2$ $(-0{,}6)$;

в) $3{,}4 < 4{,}1$ $(-0{,}7)$;

г) $-3\frac{3}{4} > -5\frac{5}{6}$ $(0{,}8)$.

16°. Від обох частин нерівності відніміть указане в дужках число і запишіть утворену правильну нерівність:

а) $-7 > -17$ (5,1); **б)** $9 > -10$ (–4,5);

в) $2{,}4 < 4{,}3$ (–2); **г)** $5 < 7$ (–4,5).

17°. Помножте обидві частини нерівності на вказане в дужках число і запишіть утворену правильну нерівність:

а) $7 < 9$ (–4); **б)** $-5 < -3$ $\left(-\frac{2}{3}\right)$;

в) $4{,}4 > -6{,}4$ (–2); **г)** $5\frac{1}{4} > 3{,}2$ (2).

18. Поділіть обидві частини нерівності на вказане в дужках число і запишіть утворену правильну нерівність:

а) $-8 < -0{,}4$ (–0,2); **б)** $10{,}5 > -7{,}5$ (0,5);

в) $-7{,}5 < 20$ (–2,5); **г)** $3\frac{1}{3} < 4\frac{2}{3}$ $\left(-\frac{1}{3}\right)$.

19. Якщо $a > b$ і $c = d$, то чи завжди $ac > bd$? Чому? Наведіть відповідні приклади.

20. Відомо, що $a < b$. Порівняйте (якщо це можливо):

а) a і $b + 1$; **б)** $a - 1$ і b; **в)** $a - 1$ і $b + 1$;

г) $a + 2$ і b; **ґ)** $a + 1$ і $b + 1{,}1$; **д)** $a + 1$ і $b + 0{,}6$.

21*. Відомо, що $a > 5$. Чи можна стверджувати, що:

а) $\frac{a}{5} > 1$; **б)** $ab > 5b$;

в) $a + b > 5 + b$, якщо b — дійсне число?

22. Відомо, що $a > b$. Чи можна стверджувати, що:

а) $2a > 2b$; **б)** $\frac{a+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} > \frac{b+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

в) $\frac{\sqrt{3}a}{-\sqrt{2}} > \frac{\sqrt{3}b}{-\sqrt{2}}$?

23*. Якими числами (додатними, від'ємними) є a і b, коли відомо, що дані нерівності — правильні:

а) $a - 3 > b - 3$ і $b > 4$; **б)** $a - 8 > b - 8$ і $a < 6$;

в) $7a > 7b$ і $b > 0{,}4$; **г)** $-2a > -2b$ і $b < -\frac{1}{4}$?

Яким числом (додатним, від'ємним) є x, коли відомо, що (**24; 25**):

24°. **а)** $3x < 2x$; **б)** $2x > 1{,}2x$; **в)** $-4x < 4x$;
г) $-7x < -5x$; **ґ)** $1{,}1x > 2x$; **д)** $3x < -2x$?

25. **а)** $4\sqrt{x^2} < 3x$; **б)** $\pi x > 4x$; **в)** $4\sqrt{x^2} > 5x$;
г) $0{,}5x > \sqrt{2}x$; **ґ)** $3\sqrt{x^2} < 2x$; **д)** $3\sqrt{x^2} < -2x$?

Відомо, що $p < c$. Поясніть, на підставі яких властивостей можна стверджувати, що наступні нерівності — правильні (**26; 27**):

26°. **а)** $-3p > -3c$; **б)** $0{,}01p < 0{,}01c$; **в)** $\frac{p}{3} < \frac{c}{3}$;
г) $p + 3 < c + 3$; **ґ)** $2 + p < 2 + c$; **д)** $-\frac{p}{2} > -\frac{c}{2}$.

27. **а)** $3 - \frac{p}{3} > 3 - \frac{c}{3}$; **б)** $2c + 7 > 2p + 7$; **в)** $-2p + 1 > -2c + 1$;
г) $1 - p > 1 - c$; **ґ)** $2 - \frac{p}{2} > 2 - \frac{c}{2}$; **д)** $\frac{p}{3} + 4 < \frac{c}{3} + 4$.

1.3. Почленне додавання і множення числових нерівностей

Пригадайте

1. У чому достатньо пересвідчитись, аби стверджувати, що $m > n$?
2. Які перетворення обох частин нерівності приводять до нерівності того самого смислу?

① Почленне додавання нерівностей.

Теорема 1. ***Нерівності однакового смислу можна почленно додавати, внаслідок чого отримують нерівність того самого смислу.***

Нехай $a > b$ і $c > d$.

Доведемо, що $a + c > b + d$.

▽ *Доведення.* $a > b$ і $c > d$ (за умовою).

Тому $a - b > 0$ і $c - d > 0$ (за означенням).

$(a - b) + (c - d) > 0$, оскільки сума двох додатних чисел є додатним числом. Перетворимо ліву частину цієї нерівності. Маємо:

$$(a - b) + (c - d) = a - b + c - d = (a + c) - (b + d).$$

Отже, $(a + c) - (b + d) > 0$, звідки випливає, що $a + c > b + d$ (за означенням). ▲

Теорема справджується й у випадку почленного додавання більше двох нерівностей.

Наприклад:

а) $\begin{array}{r} \sqrt{10} > 3, \\ + \quad 2 > \sqrt{3} \\ \hline \sqrt{10} + 2 > 3 + \sqrt{3}. \end{array}$ б) $\begin{array}{r} 14 < 15, \\ + \quad -16 < -15 \\ \hline -2 < 0. \end{array}$ в) $\begin{array}{r} 2\sqrt{2} < 3, \\ + \quad \sqrt{2} < 1{,}5, \\ -\sqrt{2} < -1 \\ \hline 2\sqrt{2} < 3{,}5. \end{array}$

З'ясуємо, чи можна нерівності однакового смислу почленно віднімати.

Наприклад: 1) $\begin{array}{r} 15 > 10, \\ - \quad 7 > 6 \\ \hline 8 > 4. \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 2\sqrt{3} < 4, \\ - \quad \sqrt{3} < 3 \\ \hline \sqrt{3} < 1. \end{array}$

Бачимо, що такі нерівності віднімати не можна, оскільки в результаті не завжди отримаємо правильну нерівність (як у прикладі 2)).

② Почленне множення нерівностей.

Теорема 2. ***Нерівності однакового смислу можна почленно множити, якщо всі частини нерівностей — додатні. При цьому отримують нерівність того самого смислу.***

Нехай $a > b$ і $c > d$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$. Доведемо, що $ac > bd$.

Доведення.

Перший спосіб

▽Оскільки $a > b$ і $c > 0$, то $ac > bc$ (за властивістю 4 (с. 13)).
Оскільки $c > d$ і $b > 0$, то $bc > bd$ (за властивістю 4).
Якщо $ac > bc$ і $bc > bd$, то $ac > bd$ (за властивістю 2 (с. 13)). ▲

Другий спосіб

▽ Для доведення теореми досить показати, що $ac - bd > 0$.

Перетворимо вираз $ac - bd$, додавши і віднявши від нього bc. Маємо:

$$ac - bd + bc - bc = (ac - bc) + (bc - bd) = c(a - b) + b(c - d).$$

Визначимо знак отриманого виразу. Маємо: $c > 0$ (за умовою), $a - b > 0$, бо $a > b$; $b > 0$ (за умовою), $c - d > 0$, бо $c > d$.

Отже, $c(a - b) + b(c - d) = ac - bd > 0$. Звідси: $ac > bd$. ▲

Наприклад: **а)** $\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 0{,}7 > \frac{2}{3}, \\ 4 > 3 \end{array} \\ \hline 2{,}8 > 2. \end{array}$ **б)** $\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 2 < \sqrt{5}, \\ 4{,}2 < \sqrt{20} \end{array} \\ \hline 8{,}4 < 10. \end{array}$

? Запитання для самоперевірки

1. На основі якого твердження зроблено остаточний висновок про те, що $ac > bd$ у доведенні теореми 2 другим способом?
2. $\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 4 > -2 \\ 6 > -4 \end{array} \\ \hline 24 > 8 \end{array}$. Остання нерівність правильна. Отже, застереження теореми 2 про те, що всі частини нерівностей мають бути додатні, виходить, зайве. Чи ви інакше думаєте?

Задачі та вправи

Додайте почленно нерівності (**28; 29**).

28°. **а)** $\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 7 > -5, \\ 6 > -6 \end{array} \\ \hline \end{array}$ **б)** $\begin{array}{r} +\begin{array}{r} -14 > -23, \\ -21 > -25 \end{array} \\ \hline \end{array}$ **в)** $\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 5{,}6 < 6{,}7, \\ -1{,}4 < 1{,}3 \end{array} \\ \hline \end{array}$

г) $+\begin{array}{l}-6,8<6,9,\\ \underline{0,7<7,1}\end{array}$ ґ) $+\begin{array}{l}7,3>-12,3,\\ \underline{8,5>-9,4}\end{array}$ д) $+\begin{array}{l}-5,6<-4,2,\\ \underline{12,7<15,6}\end{array}$.

29. а) $+\begin{array}{l}4\sqrt{3}<7,\\ \underline{3\sqrt{3}<6}\end{array}$ б) $+\begin{array}{l}3\sqrt{2}>2\sqrt{2},\\ \underline{5\sqrt{8}>7\sqrt{2}}\end{array}$ в) $+\begin{array}{l}\sqrt{45}>2\sqrt{5},\\ \underline{\sqrt{20}>1,5\sqrt{5}}\end{array}$

г) $+\begin{array}{l}-3\sqrt{2}<-2\sqrt{2},\\ \underline{3\sqrt{8}<7\sqrt{2}}\end{array}$ ґ) $+\begin{array}{l}2\sqrt{3}>2\sqrt{2},\\ \underline{\sqrt{27}>\sqrt{18}}\end{array}$ д) $+\begin{array}{l}-2\sqrt{2}>-2\sqrt{3},\\ \underline{-\sqrt{18}>-\sqrt{27}}\end{array}$.

30°. Виконайте почленне множення нерівностей:

а) $\times\begin{array}{l}23<27,\\ \underline{3<4}\end{array}$ б) $\times\begin{array}{l}15>14,\\ \underline{0,5>0,3}\end{array}$ в) $\times\begin{array}{l}7,5<8,3,\\ \underline{\sqrt{3}<2}\end{array}$

г) $\times\begin{array}{l}16<18,\\ \underline{0,4<0,5}\end{array}$ ґ) $\times\begin{array}{l}24>18,\\ \underline{0,4>0,3}\end{array}$ д) $\times\begin{array}{l}0,7<1,2,\\ \underline{1,2<1,5}\end{array}$.

31°. Виконайте почленне додавання і множення нерівностей:

а) $2<3^2$ і $2^3<3^2$; б) $5<4^2$ і $\frac{1}{5^2}<\frac{1}{4^2}$;

в) $7>3$ і $\frac{1}{7^2}>\frac{1}{3^4}$; г) $\frac{3}{8^2}>\frac{2}{9^2}$ і $4^2>3^2$.

32°. Там, де це можливо, виконайте почленне множення нерівностей:

а) $\times\begin{array}{l}3<\sqrt{10},\\ \underline{2\sqrt{2}<3}\end{array}$ б) $\times\begin{array}{l}2\sqrt{3}>14,\\ \underline{3\sqrt{2}<4}\end{array}$ в) $\times\begin{array}{l}5\sqrt{2}>7,\\ \underline{2\sqrt{5}>4,1}\end{array}$ г) $\times\begin{array}{l}3<5,\\ \underline{-2<-4}\end{array}$.

33. Доведіть, що якщо $a>2$ і $b>5$, то:

а) $3a+2b>16$; б) $ab-1>9$;

в) $a^2+b^2>29$; г) $a^3+b^3>133$.

Вкажіть, які теореми і які властивості нерівностей при цьому використано.

34. Дано нерівність: $a>b$. Чи завжди $a^2>b^2$? Наведіть приклади.

35*. Відомо, що $a>b>c>d$. Чи можна стверджувати, що:

а) $a+c>b+d$; б) $|a|+|c|>|b|+|d|$; в) $ac>bd$?

36*. Відомо, що $a > b > c > d$. Чи можна стверджувати, що:

а) $a - c > b - d$; **б)** $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$?

1.4. Застосування нерівностей для оцінювання значення виразу

Пригадайте

1. Відомо, що $7 > x$. Яка ще нерівність виражає це саме відношення між даними числами?
2. Що потрібно зробити зі знаком нерівності, якщо обидві її частини помножити на одне й те саме від'ємне число?

① **Що таке подвійна нерівність.** Зобразимо на координатній прямій числа 7, 8 і 9 (рис. 2). Число 8 розміщене між числами 7 і 9. Очевидно, що $8 > 7$ (або $7 < 8$) і $8 < 9$. Ці два відношення між числом 8 і числами 7 та 9 записують так: $7 < 8 < 9$. Останній запис називають ***подвійною нерівністю***.

Рис. 2

Взагалі, запис $3 < a < 4$ означає, що число a лежить у межах між числами 3 і 4, тобто одночасно виконуються дві нерівності: $3 < a$ (або $a > 3$) і $a < 4$.

Очевидно, таких значень a, що задовольняють дану умову, можна вказати безліч. Наприклад, $a = 3{,}2$; $a = 3{,}7$; $a = 3{,}124$; $a = 3{,}979$ і т.д.

Як відомо, число $\frac{2}{3}$ у вигляді десяткового дробу можна записати так: $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$.

Якщо округлити цей дріб до десятих з недостачею, то матимемо 0,6, а з надлишком — 0,7. Звідси можна записати, що $0{,}6 < \frac{2}{3} < 0{,}7$.

У цьому випадку числа 0,6 і 0,7 називають ***десятковими наближеннями*** числа $\frac{2}{3}$ з точністю до десятих відповідно з недостачею і надлишком.

Очевидно, що десятковими наближеннями числа $\frac{2}{3}$ з точністю до сотих є числа 0,66 і 0,67, тобто $0,66 < \frac{2}{3} < 0,67$, до тисячних — 0,666 і 0,667, тобто $0,666 < \frac{2}{3} < 0,667$, і т.д.

② **Як оцінити суму двох чисел.** Нехай число x знаходиться у межах між числами 2,3 і 2,4, тобто $2,3 < x < 2,4$, а число y — між числами 5,6 і 5,7, тобто $5,6 < y < 5,7$. Спробуємо встановити, в яких межах знаходиться сума $x + y$ або, інакше кажучи, оцінимо значення суми чисел x та y.

Оскільки $2,3 < x < 2,4$ і $5,6 < y < 5,7$, то це означає, що одночасно виконуються дві пари нерівностей:

$$\begin{matrix} 2,3 < x, \\ 5,6 < y \end{matrix} \quad \text{і} \quad \begin{matrix} x < 2,4, \\ y < 5,7. \end{matrix}$$

Відомо, що нерівності однакового смислу можна почленно додавати. Зробимо це з нерівностями кожної пари. Маємо:

$$2,3 + 5,6 < x + y \text{ та } x + y < 2,4 + 5,7.$$

За допомогою подвійної нерівності це можна записати так: $2,3 + 5,6 < x + y < 2,4 + 5,7$.

Виконавши додавання, маємо $7,9 < x + y < 8,1$.

Взагалі, якщо $a < x < b$ і $c < y < d$, то $a + c < x + y < b + d$.

Приклад. Оцінити суму $\pi + \sqrt{2}$ з точністю до сотих.

▽ *Розв'язання.* $\pi = 3,1415...$, $\sqrt{2} = 1,4142...$. Запишемо десяткові наближення цих чисел з точністю до сотих. Маємо:

$$3,14 < \pi < 3,15; \; 1,41 < \sqrt{2} < 1,42.$$

За встановленим вище правилом можна записати:

$3,14 + 1,41 < \pi + \sqrt{2} < 3,15 + 1,42$, тобто $4,55 < \pi + \sqrt{2} < 4,57$. ▲

③ **Як оцінити різницю двох чисел.** Оцінимо різницю чисел x і y, якщо $a < x < b$ і $c < y < d$. Для цього різницю $x - y$ запишемо у вигляді суми, яку ми вже вміємо оцінювати. Маємо: $x - y = x + (-y)$.

Знайдемо межі $-y$. Це можна зробити, помноживши всі частини подвійної нерівності $c < y < d$ на -1 і змінивши знаки нерівності на протилежні. Маємо:

$$-c > -y > -d \text{ або } -d < -y < -c.$$

За встановленим вище правилом оцінимо суму x і $-y$. Маємо:

$$a + (-d) < x + (-y) < b + (-c) \text{ або } a - d < x - y < b - c.$$

Отже, якщо $a < x < b$ і $c < y < d$, то $a - d < x - y < b - c$.

④ **Як оцінити добуток двох додатних чисел.** Щоб знайти межі добутку чисел x і y, якщо $a < x < b$, $c < x < d$ і a, b, c, d — додатні числа, скористаємось можливістю почленного множення нерівностей однакового смислу, всі частини яких — додатні.

Оскільки $a < x < b$, $c < y < d$, то

$$\begin{matrix} a < x, \\ c < y \end{matrix} \text{ і } \begin{matrix} x < b, \\ y < d. \end{matrix}$$

Тому $ac < xy$ і $xy < bd$, тобто $ac < xy < bd$.

Отже, якщо a, b, c, d — додатні числа і $a < x < b$, $c < y < d$, то $ac < xy < bd$.

⑤ **Як оцінити частку додатних чисел.** Оцінимо частку $\frac{x}{y}$, якщо $a < x < b$, $c < y < d$ і a, b, c, d — додатні числа.

Замінимо частку $\frac{x}{y}$ добутком $x \cdot \frac{1}{y}$, який ми вже оцінювати вміємо. Для цього треба знайти лише межі $\frac{1}{y}$. Зробимо це. Оскільки $c < y < d$, то $\frac{1}{d} < \frac{1}{y} < \frac{1}{c}$ (властивість 6, с. 14).

Отже, $a \cdot \frac{1}{d} < x \cdot \frac{1}{y} < b \cdot \frac{1}{c}$ або $\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c}$.

Взагалі, якщо $a < x < b$, $c < y < d$ та a, b, c, d — додатні числа, то $\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c}$.

Запитання для самоперевірки

1. Що означає оцінити значення виразу?
2. Як оцінити суму двох чисел?
3. Як знайти межі різниці двох чисел?
4. Як знайти межі добутку двох додатних чисел?
5. Як знайти нижню і верхню межі частки двох додатних чисел?
6. Чому у випадку оцінювання добутку і частки двох чисел йдеться лише про додатні числа?

Задачі та вправи

37. Користуючись тим, що $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ і $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, оцініть з точністю до десятих:

а°) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; **б°)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; **в°)** $\sqrt{6}$; **г)** $\sqrt{1,5}$.

38. Користуючись тим, що $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ і $2,4 < \sqrt{6} < 2,5$, оцініть з точністю до десятих:

а°) $\sqrt{5} + \sqrt{6}$; **б°)** $\sqrt{6} - \sqrt{5}$; **в°)** $\sqrt{30}$; **г)** $\sqrt{1,2}$.

39°. Відомі межі довжини основи a і бічної сторони b рівнобедреного трикутника (у мм):

$$20 < a < 21 \text{ і } 31 < b < 32.$$

Оцініть периметр цього трикутника.

40. Відомі межі довжини a і ширини b прямокутника (у см):

$$5,6 < a < 5,7 \text{ і } 4,8 < b < 4,9.$$

Оцініть з точністю до десятих: а) периметр прямокутника; б) площу прямокутника.

41°. Оцініть довжину середньої лінії трикутника ABC, паралельної стороні AB, якщо $20,7 < AB < 20,8$.

42°. Оцініть довжину середньої лінії трапеції з основами a і b, якщо $16{,}5 < a < 16{,}6$ та $7{,}3 < b < 7{,}4$.

43. Знайдіть межі значення виразу $5x - 3y$, якщо:

а) $3{,}13 < x < 3{,}14$ і $7{,}28 < y < 7{,}29$;

б) $5{,}07 < x < 5{,}09$ і $12{,}35 < y < 12{,}36$.

44. Відомі межі довжини сторони a прямокутника і його периметра P. Оцініть з точністю до сотих довжину його другої сторони b:

а) $7{,}28 < a < 7{,}29$, $34{,}65 < P < 34{,}66$;

б) $12{,}51 < a < 12{,}52$, $29{,}77 < P < 29{,}78$.

45*. Оцініть з точністю до десятих довжину сторони a прямокутника, якщо довжина його іншої сторони b і площа S знаходяться в межах:

а) $4{,}2 < b < 4{,}3$, $24{,}7 < S < 24{,}8$;

б) $10{,}5 < b < 10{,}6$, $54{,}8 < S < 54{,}9$.

46*. Оцініть з точністю до десятих значення виразу $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ двома способами: 1) не перетворюючи цього виразу; 2) попередньо позбувшись у ньому ірраціональності в знаменнику. Порівняйте здобуті результати. Необхідні значення коренів знайдіть за допомогою мікрокалькулятора.

§2. Нерівності зі змінними

2.1. Лінійна нерівність з однією змінною

Пригадайте

1. Як впливає на правильну числову нерівність: а) додавання до обох її частин одного і того самого числа; б) множення (ділення) обох її частин на одне і те саме додатне число?
2. Закінчіть фразу: щоб отримати правильну нерівність у результаті множення або ділення обох частин правильної нерівності на одне й те саме від'ємне число, потрібно ...

① **Нерівності зі змінними.** Крім числових нерівностей, існують нерівності, які містять змінні — одну або декілька. Наприклад: $x + 1 < 4$; $x - 4 > 2x + 5$; $x^2 - x < 3$; $2x + y > 10$. Далі розглядатимемо нерівності з однією змінною.

Серед наведених вище нерівностей одну змінну мають три: $x + 1 < 4$; $x - 4 > 2x + 5$; $x^2 - x < 3$. Найвищий показник степеня змінної у перших двох нерівностях дорівнює 1, в останній — 2. Тому перші дві нерівності є нерівностями першого степеня, а остання — нерівністю другого степеня.

Надаючи змінній у нерівності зі змінною певного числового значення, отримаємо числову нерівність. Надамо, наприклад, змінній x у нерівності $x + 4 < 4$ значень –1; 2; 3; 9. Отримаємо відповідні числові нерівності:

$$-1 + 1 < 4; \quad 2 + 1 < 4; \quad 3 + 1 < 4; \quad 9 + 1 < 4.$$

Очевидно, що перші дві нерівності — правильні, а дві останні — неправильні.

Часто доводиться з'ясовувати, при яких значеннях змінної нерівність є правильною. Це роблять у *процесі розв'язання* нерівності, яке належить виконувати за певними правилами. Окремі види нерівностей з однією змінною ви навчитеся розв'язувати далі. Спершу розглянемо лінійну нерівність з однією змінною.

② Лінійна нерівність з однією змінною та її розв'язок.

! ***Лінійною нерівністю з однією змінною*** **називають нерівність виду $ax + b > 0$ ($ax + b < 0$), де a і b дані числа, а x — змінна.**

Приклади: **а**) $2x + 4 > 0$ ($a = 2$, $b = 4$);
б) $3x - 2 < 0$ ($a = 3$, $b = -2$);
в) $6 - 5x < 0$, або $-5x + 6 < 0$ ($a = -5$, $b = 6$);
г) $-4x < 0$ ($a = -4$, $b = 0$);
ґ) $0 \cdot x > 0$ ($a = 0$, $b = 0$).

Розв'язком лінійної нерівності з однією змінною називають значення змінної, підставивши яке в дану нерівність, отримують правильну числову нерівність.

Кажуть, що це *значення змінної задовольняє дану нерівність*.

Наприклад, число 3 є розв'язком нерівності $2x + 4 > 0$, бо при $x = 3$ числова нерівність $2 \cdot 3 + 4 > 0$ — правильна. Число -1 також є розв'язком даної нерівності, бо $2 \cdot (-1) + 4 = -2 + 4 = 2 > 0$.

③ Як розв'язують лінійну нерівність. ***Розв'язати нерівність*** — означає знайти всі її розв'язки.

Дві нерівності, що мають одні й ті самі розв'язки, називають *рівносильними*.

Як і для рівнянь, процес розв'язання нерівності полягає у послідовній заміні даної нерівності рівносильними їй, доки не

отримаємо потрібний результат. Така заміна здійснюється на основі властивостей нерівностей зі змінними, які випливають із відповідних властивостей числових нерівностей.

1. *Якщо з однієї частини нерівності перенести в другу будь-який доданок з протилежним знаком, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.*

Ця властивість нерівностей зі змінною випливає з властивості 3 (с. 13) числових нерівностей.

Наприклад, перенісши у нерівності $2x + 4 > 0$ доданок 4 з протилежним знаком у праву частину, отримаємо нерівність $2x > -4$, яка рівносильна даній.

2. *Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.* (Випливає з властивості 4 (с. 13) числових нерівностей).

3. *Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число і змінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.* (Випливає з властивості 5 (с. 13) числових нерівностей).

Наприклад, поділивши обидві частини нерівності $2x > -4$ на 2, отримаємо нерівність $x > -2$, яка рівносильна попередній.

Якщо ж поділити обидві частини нерівності $-5x > 15$ на -5, то, щоб отримати рівносильну нерівність, потрібно знак нерівності змінити на протилежний: $x < -3$.

Ілюструючи застосування вищенаведених властивостей 1 і 2 в процесі перетворення нерівності $2x + 4 > 0$, ми, фактично, розв'язали її:

$$2x + 4 > 0; \quad (1)$$

$$2x > -4; \quad (2)$$

$$x > -2. \quad (3)$$

Оскільки ці три нерівності: (1), (2), (3) є рівносильними, то розв'язком нерівності $2x + 4 > 0$ є всі дійсні числа, більші від -2 ($x > -2$). Їх безліч. Якщо розв'язки даної нерівності зобразити

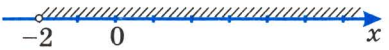


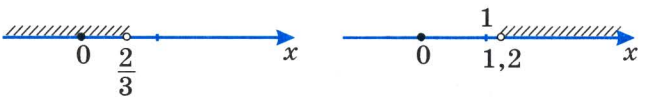
Рис. 3

на координатній прямій, то вони розмістяться праворуч від числа –2 (рис. 3).

Розв'яжемо решту з наведених вище лінійних нерівностей.

б) $3x - 2 < 0$; $3x < 2$; $x < \frac{2}{3}$ (рис. 4, а).

в) $6 - 5x < 0$; $-5x < -6$; $x > 1{,}2$ (рис. 4, б).



а) **б)**

Рис. 4

г) $-4x < 0$; $x > 0$ (рис. 5).

Рис. 5

ґ) $0 \cdot x > 0$. Нерівність не має розв'язків, бо при будь-якому значенні x у лівій частині маємо нуль.

④ **Числові проміжки**. Розв'язки нерівностей **а) – г)** є певними числовими множинами, які називають ***числовими проміжками*** і позначають так:

$x > -2$, або $(-2; \infty)$; читають: «Проміжок від –2 до нескінченності».

$x < \frac{2}{3}$, або $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; читають: «Проміжок від мінус нескінченності до $\frac{2}{3}$».

$x > 1{,}2$, або $(1{,}2; \infty)$; читають: «Проміжок від 1,2 до нескінченності».

$x > 0$, або $(0; \infty)$; читають: «Проміжок від 0 до нескінченності».

Числовий проміжок $(-\infty; \infty)$ називають ***числовою прямою***. Це множина всіх дійсних чисел.

Ви, мабуть, звернули увагу на те, що при зображенні вказаних числових проміжків на координатній прямій відповідне число, яке є межею проміжку, позначене незатушованим кружечком. Це означає, що це число не належить даному проміжкові.

Число, яке належить проміжку, зображають затушованим кружечком (рис. 6). Зображений числовий проміжок позначають так: $[-2; \infty)$ (читають: «Проміжок від –2, включаючи –2, до нескінченності») і записують у вигляді нерівності $x \geq -2$.

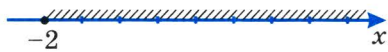


Рис. 6

Числовий проміжок, зображений на рис. 7, позначають так: $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$ (читають: «Проміжок від мінус нескінченності до $\frac{2}{3}$ включно»). Відповідна числова нерівність має такий вигляд: $x \leq \frac{2}{3}$.

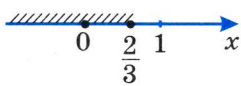


Рис. 7

Знаки $\geq$ і $\leq$ називають ***знаками нестрогої нерівності*** і читають так:

$\geq$ — більше або дорівнює (інакше — не менше);

$\leq$ — менше або дорівнює (інакше — не більше).

Усі розглянуті вище властивості строгих нерівностей поширюються і на нестрогі нерівності.

Якщо число x є одночасно розв'язком нерівностей $x > -2$ і $x < 1$, то воно задовольняє подвійну нерівність $-2 < x < 1$. Відповідний числовий проміжок, який утворюють усі числа, що задовольняють цю нерівність, зображено на рис. 8. Його позначають так: $(-2; 1)$.

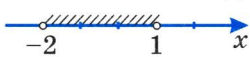


Рис. 8

Числовий проміжок, що відповідає подвійній нерівності $-2 \leq x \leq 1$, зображають так, як на рис. 9, і записують: $[-2; 1]$.

Рис. 9

Числовий проміжок, що відповідає нерівності $a < x < b$, тобто $(a; b)$, називають ***відкритим проміжком*** або ***інтервалом***.

Числовий проміжок, що відповідає нерівності $a \le x \le b$, тобто $[a; b]$, називають ***замкненим проміжком*** або ***відрізком***.

Нагадаємо, що належність числа певній числовій множині позначають знаком $\in$. Зокрема, запис $x \in [-2; 1]$ означає, що x є будь-яким числом з проміжку $[-2; 1]$. Відповідно, розв'язок нерівності, наприклад, $2x + 4 > 0$ можна записати так: $x > -2$ або $x \in (-2; \infty)$.

Запитання для самоперевірки

1. Який загальний вигляд має лінійна нерівність з однією змінною?
2. Що означає розв'язати лінійну нерівність з однією змінною?
3. На основі яких властивостей розв'язують нерівності?
4. Розв'язуючи лінійну нерівність у загальному вигляді, учень записав:

$$ax + b > 0, ax > -b, x > -\frac{b}{a}; x \in \left(\frac{-b}{a}; +\infty\right).$$

   Чи правильно це?
5. Скільки розв'язків може мати лінійна нерівність з однією змінною?
6. Запишіть кілька числових проміжків і позначте їх на числовій прямій.

Задачі та вправи

Запишіть проміжки, зображені на рис. 10 і рис. 11 **(47; 48)**:

47°.

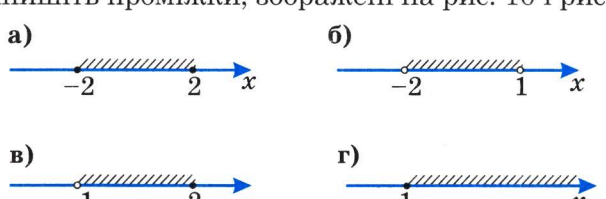
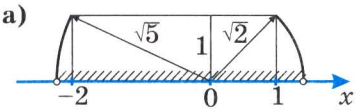
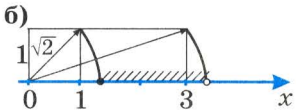


Рис. 10

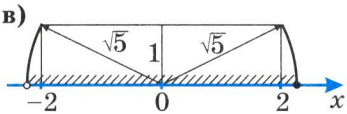
48*. а)



б)



в)



г)

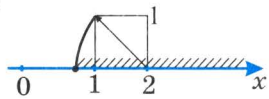


Рис. 11

Зобразіть на координатній прямій числові проміжки (**49 – 51**):

49°. **а)** (3; 8); **б)** [3; 8]; **в)** (3; 8); **г)** [3; 8); **ґ)** [–7; –4]; **д)** (–3; 2]; **е)** [–5; 0); **є)** (3; +∞).

50. **а)** (–∞; –2); **б)** (–∞; 1); **в)** [–2; +∞); **г)** (3,5; +∞).

51*. **а)** $\left(\sqrt{2};\sqrt{5}\right)$; **б)** $\left(-\sqrt{10};-\sqrt{2}\right)$; **в)** $\left[\sqrt{2};\sqrt{3}\right]$; **г)** $\left(\sqrt{10};+\infty\right)$.

Зобразіть на координатній прямій числа, що задовольняють подвійні нерівності (**52 – 55**):

52°. **а)** $2 < x < 5$; **б)** $2 \le x \le 5$; **в)** $2 \le x < 5$; **г)** $2 < x \le 5$.

53°. **а)** $-2 \le x \le 5$; **б)** $-2 < x < 5$; **в)** $-2 \le x < 5$; **г)** $-2 < x \le 5$.

54. **а)** $x < -5$; **б)** $x \ge -3$; **в)** $2 < x < \sqrt{5}$.

55*. **а)** $-2\sqrt{2} < x < \sqrt{5}$; **б)** $\sqrt{2} \le x \le \sqrt{5}$; **в)** $x > \sqrt{10}$.

Які цілі числа належать даним проміжкам (**56; 57**):

56°. **а)** (–4,7; 2,1); **б)** [–4,01; –0,1]; **в)** (0,9; 2)?

57*. **а)** $\left(\sqrt{2};\sqrt{7}\right)$; **б)** $\left(-\sqrt{2};\sqrt{5}\right)$; **в)** $\left(\pi;\sqrt{15}\right)$; **г)** $\left(-\pi;\sqrt{3}\right)$?

Знайдіть найбільші і найменші цілі числа, що належать даним проміжкам (**58 – 60**):

58°. **а)** (–12; –2); **б)** [–2; 3]; **в)** (3; 7); **г)** [3; 7).

59. **а)** (2,1; 7,01); **б)** (–2,1; 3,01); **в)** [–7,1; 0,9]; **г)** (0,9; 6,9).

60. **а)** $\left(\sqrt{2};\sqrt{17}\right)$; **б)** $[\pi;\sqrt{27})$;

в) $(-2\pi;-\sqrt{2})$; **г)** $\left(-\pi;\sqrt{10}\right)$.

Розв'яжіть нерівності та зобразіть їх розв'язки на координатній прямій (**61; 62**):

61°. **а)** $3x \le 51$; **б)** $5x \ge 65$; **в)** $\frac{1}{3}x < 1{,}7$; **г)** $0{,}5x > 1{,}9$.

62°. **а)** $12x - 3{,}6 < 38{,}4$; **б)** $0{,}7 - 5x > 2{,}2$;

в) $1{,}3 - 4x \le 4{,}3 - x$; **г)** $2\frac{3}{4} + 0{,}7x \ge 0{,}2x - 0{,}25$.

63°. При яких значеннях x набуває від'ємних значень вираз:

а) $7 - 21x$; **б)** $12x + 6$; **в)** $6 - \frac{2}{3}x$;

г) $\frac{3}{4} - 2x$; **ґ)** $\frac{x-2}{3} + \frac{1}{3}$; **д)** $\frac{4x-7}{2} - \frac{x}{2}$?

Розв'яжіть нерівності (**64 – 66**):

64. **а)** $\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3} \le 1$; **б)** $\frac{3y+1}{4} - \frac{y}{2} \ge \frac{1}{6}$;

в) $\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x + 3$; **г)** $\frac{2x-1}{3} + \frac{x-5}{6} > 0$;

ґ) $\frac{4-x}{3} - 5x \ge 0$; **д)** $\frac{3x-1}{2} - \frac{1+5x}{4} < 0$.

65. **а)** $\frac{2x-1}{2} + \frac{3x-3}{5} > x$; **б)** $\frac{y-2}{4} - \frac{y+6}{3} < 2y$;

в) $\frac{x+1}{6} + \frac{2-x}{8} < 4 - x$; **г)** $\frac{7x-4}{9} - \frac{3x+3}{4} > \frac{8-x}{6}$.

66. **а)** $(x-2)(2+x) \le x^2 + 8x$; **б)** $(3+x)(3-x) > 3x - x^2$;

в) $(x+5)(x-5) - x^2 < x - 20$; **г)** $4x^2 + (3-2x)(3+2x) < 9x$;

ґ) $(x-1)^2 + 7 > (x+4)^2$; **д)** $3x^2 + (1+x)^2 < (2x-1)^2 + 7$;

е) $5x - (x-2)^2 \le 3x - (x+2)^2$; **є)** $\frac{4x}{3} + (x+2)^2 > (x-3)^2 - \frac{2x}{3}$.

67. Знайдіть найбільший або найменший цілий розв'язок нерівності:

а) $(x-3)^2 \le (5+x)^2$;

б) $(6-x)^2 < x^2+36$;

в) $(x-5)^2 - x(x+3) \le 12$;

г) $(3x+1)^2 - 9x(x+6) \le -47$;

ґ) $(0,2y+3)^2 - (0,2y-3)^2 \le 0,8$;

д) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)^2 < \left(\frac{1}{3}x+1\right)\left(\frac{4}{3}x-1\right)$.

68°. Дано функцію: $y = kx + b$. Знайдіть усі значення x, при яких значення функції менші від m, якщо:

а) $y = 2x + 3$, $m = 0$; **б)** $y = -x + 1$, $m = -2$;

в) $y = \frac{1}{3}x - 2$, $m = \frac{1}{2}$; **г)** $y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$, $m = 3$.

69. При яких значеннях a має смисл вираз:

а°) $\sqrt{a-3}$; **б°)** $\sqrt{2a-1}$; **в°)** $\sqrt{3-5a}$;

г) $\frac{6}{\sqrt{a-3}}$; **ґ)** $\frac{a+4}{\sqrt{2-5a}}$; **д)** $\frac{2a-7}{\sqrt{a^2+1}}$?

70. При яких значеннях c має два різні корені рівняння:

а) $x^2 - 8x + 4c = 0$; **б)** $2x^2 + 6x - 3c = 0$;

в) $cx^2 + 4x - 2 = 0$; **г)** $2cx^2 - 4x + 5 = 0$?

71. При яких значеннях a не має розв'язків рівняння:

а) $ax^2 + 8x - 2 = 0$; **б)** $(a-2)x^2 - 2ax + a + 3 = 0$?

72*. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{x^2(2-x)}$; **б)** $y = \frac{2-5x}{\sqrt{(3+9x)(x^2+2)}}$.

73°. Селянська спілка повинна щонайбільше як за 7 днів засіяти 196 га. Визначте, яку площу має засівати селянська спілка щодня?

74*. Цифра одиниць двоцифрового числа на 2 більша за цифру десятків, а саме число більше від 30 і менше від 40. Знайдіть це число.

2.2. Система лінійних нерівностей з однією змінною

Пригадайте

1. В якому випадку кажуть, що два рівняння утворюють систему рівнянь?
2. Які розв'язки рівнянь системи є розв'язками самої системи рівнянь?

① **Як знайти розв'язок системи нерівностей.** Як і при розв'язуванні рівнянь, нерідко доводиться знаходити спільні розв'язки двох або більшої кількості нерівностей з однією і тією самою змінною. У такому випадку кажуть, що ці нерівності утворюють систему нерівностей. За аналогією із системою рівнянь, систему нерівностей позначають фігурною дужкою:

$$\begin{cases} 2x - 6 > 0, \\ 0,5x + 1 > 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи нерівностей — це значення змінної, яке задовольняє кожну нерівність системи.

Розв'язати систему нерівностей — означає знайти всі її розв'язки або показати, що вона їх не має.

Щоб розв'язати систему нерівностей, спочатку розв'язують кожну нерівність окремо, а потім серед знайдених розв'язків знаходять розв'язки, спільні для обох нерівностей.

Розв'яжемо, наприклад, наведену вище систему:

$$\begin{cases} 2x - 6 > 0, \\ 0,5x + 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > 6, \\ 0,5x > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ x > -2. \end{cases}$$

Розв'язок кожної з нерівностей системи є числовим проміжком, відповідно $(3; \infty)$ і $(-2; \infty)$. Розв'язок системи — це спільна частина цих двох числових проміжків, яку називають їх ***перерізом*** і позначають за допомогою знака $\cap$. Запис $(3;\infty) \cap (-2;\infty)$ означає переріз, тобто спільну частину даних проміжків. Щоб полегшити його пошук, зобразимо ці проміжки на координат-

ній прямій за допомогою штрихів (рис. 12). Очевидно, що спільна їх частина — це та частина координатної прямої, яка позначена подвійними штрихами. Отже, йдеться про числа, що задовольняють умову $x > 3$, тобто належать проміжку (3; ∞): $x \in (3; \infty)$.

Рис. 12

Твердження, що проміжок (3; ∞) є перерізом числових проміжків (–2; ∞) і (3; ∞), за допомогою математичних символів записують так: $(-2; \infty) \cap (3; \infty) = (3; \infty)$.

Зважаючи на це, розв'язок розглянутої системи нерівностей можна було б записати ще й так: $x \in (-2; \infty) \cap (3; \infty) = (3; \infty)$.

Розглянемо ще кілька прикладів розв'язування систем нерівностей.

Приклад 1. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ 2 - x \geq 0. \end{cases}$$

▽ *Розв'язання*: $\begin{cases} -x \geq -1, \\ -x \geq -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 1, \\ x \leq 2. \end{cases}$

Рис. 13

З рис. 13 видно, що розв'язком системи є $x \leq 1$, тобто $x \in (-\infty; 1]$. ▲

Приклад 2. Знайти область допустимих значень змінної у виразі $\sqrt{2x-2} + \sqrt{9-3x}$.

▽ *Розв'язання*. Аби вираз $\sqrt{2x-2} + \sqrt{9-3x}$ мав смисл, треба, щоб підкореневі вирази були невід'ємними: $2x - 2 \geq 0$ і $9 - 3x \geq 0$. Оскільки ця умова повинна виконуватись одночасно, то маємо систему:

$$\begin{cases} 2x - 2 \geq 0, \\ 9 - 3x \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо її.

$$\begin{cases} 2x \geq 2, \\ -3x \geq -9; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq 3. \end{cases}$$

Рис. 14

Бачимо, що спільні розв'язки нерівностей системи належать числовому проміжку [1; 3], який можна записати у вигляді подвійної нерівності $1 \le x \le 3$ (рис. 14). ▲

Приклад 3. Розв'язати систему нерівностей: $\begin{cases} 5x - 25 < 0, \\ 0,5x - 3 > 0. \end{cases}$

▽ *Розв'язання.* $\begin{cases} 5x < 25, \\ 0,5x > 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 5, \\ x > 6. \end{cases}$

Очевидно, що числові проміжки $(-\infty; 5)$ і $(6; \infty)$ не мають жодного спільного числа (рис. 15). Тому система нерівностей не має розв'язку. ▲

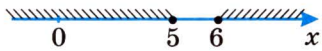


Рис. 15

У такому випадку кажуть, що переріз даних числових проміжків — порожня множина, яку позначають знаком ∅. Отже, $(-\infty; 5) \cap (6; \infty) = \varnothing$.

② **Приклади, що приводять до системи нерівностей.** До систем лінійних нерівностей з однією змінною може привести розв'язування деяких нерівностей, які не є лінійними. До них належать, зокрема, нерівності виду:

$$(ax+b)(cx+d) > 0, \frac{ax+b}{cx+d} > 0; (ax+b)(cx+d) < 0, \frac{ax+b}{cx+d} < 0.$$

Для їх розв'язання використовують твердження:

добуток або частка двох виразів додатні тоді і лише тоді, якщо обидва ці вирази мають однакові знаки;

добуток або частка двох виразів від'ємні тоді і лише тоді, якщо ці вирази мають протилежні знаки.

Отже, $(ax+b)(cx+d) > 0 \left(\frac{ax+b}{cx+d} > 0 \right)$, якщо

$$\begin{cases} ax+b > 0, \\ cx+d > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} ax+b < 0, \\ cx+d < 0. \end{cases}$$

Розв'язавши кожну з цих систем, отримаємо розв'язки даних нерівностей.

Приклад. Розв'язати нерівність: $\frac{3x-5}{4x+8}>0$.

▽ *Розв'язання.* Ця нерівність рівносильна сукупності таких двох систем:

$$\begin{cases}3x-5>0,\\4x+8>0\end{cases} \text{ і } \begin{cases}3x-5<0,\\4x+8<0.\end{cases}$$

Розв'яжемо кожну з них.

$$\begin{cases}3x>5,\\4x>-8;\end{cases}\begin{cases}x>\frac{5}{3},\\x>-2;\end{cases} \qquad x>\frac{5}{3}, \text{ тобто } x\in\left(\frac{5}{3};\infty\right).$$

$$\begin{cases}3x<5,\\4x<-8;\end{cases}\begin{cases}x<\frac{5}{3},\\x<-2;\end{cases} \qquad x<-2, \text{ тобто } x\in(-\infty;-2).$$

Розв'язком даної нерівності є числова множина, яка складається з чисел першого і другого отриманих числових проміжків. Така множина називається ***об'єднанням*** цих проміжків і позначається за допомогою знака $\cup$.

Отже, $x\in(-\infty;-2)\cup\left(\frac{5}{3};\infty\right)$. ▲

(Числові проміжки в їх об'єднанні розташовують, як правило, в порядку зростання чисел).

Аналогічно нерівність $(ax+b)(cx+d)<0\left(\frac{ax+b}{cx+d}<0\right)$ рівносильна сукупності таких двох систем:

$\begin{cases}ax+b>0,\\cx+d<0\end{cases}$ і $\begin{cases}ax+b<0,\\cx+d>0,\end{cases}$ а її розв'язок є об'єднанням розв'язків цих систем.

Увага! Розв'язуючи нерівність виду $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$, нерідко припускаються помилки у записі відповідних систем на зразок $\begin{cases} ax+b \geq 0, \\ cx+d \geq 0. \end{cases}$ Оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю, потрібно записати:

$$\begin{cases} ax+b \geq 0, \\ cx+d > 0. \end{cases}$$

③ **Як розв'язати подвійну нерівність.** Оскільки подвійна нерівність $a < x < b$ означає, що значення змінної x одночасно більші від a і менші від b, то цю умову можна записати і у вигляді системи: $\begin{cases} x > a, \\ x < b. \end{cases}$ Враховуючи це, з'ясуємо, як розв'язати подвійну нерівність. Зробимо це на прикладі нерівності $6 < 2x + 10 < 20$. Запишемо дану нерівність у вигляді системи $\begin{cases} 2x+10 > 6, \\ 2x+10 < 20 \end{cases}$ і будемо розв'язувати її, ілюструючи кожен крок відповідною подвійною нерівністю. Маємо:

$\begin{cases} 2x+10 > 6, \\ 2x+10 < 20; \end{cases}$ $\qquad 6 < 2x + 10 < 20;$

$\begin{cases} 2x > 6-10, \\ 2x < 20-10; \end{cases}$ $\qquad 6 - 10 < 2x < 20 - 10;$

$\begin{cases} 2x > -4, \\ 2x < 10; \end{cases}$ $\qquad -4 < 2x < 10;$

$\begin{cases} x > -2, \\ x < 5; \end{cases}$ $\qquad -2 < x < 5.$

Відповідь. $-2 < x < 5$ або $x \in (-2; 5)$.

Відтворимо процес розв'язання лише за допомогою подвійної нерівності. Маємо:

$$6 < 2x + 10 < 20; \quad 6 - 10 < 2x < 20 - 10; \quad -4 < 2x < 10;$$
$$-2 < x < 5.$$

Послідовність розв'язання — очевидна.

Відповідь. $-2 < x < 5$ або $x \in (-2; 5)$.

Проілюструємо встановлений спосіб розв'язання подвійної нерівності ще на одному прикладі.

Розв'яжемо нерівність: $5 \le 4 - x \le 8$. Маємо:

$$5 \le 4 - x \le 8;\quad 5 - 4 \le -x \le 8 - 4;\quad 1 \le -x \le 4;\quad -1 \ge x \ge -4$$

$$\text{або}\quad -4 \le x \le -1.$$

Відповідь. $-4 \le x \le -1$ або $x \in (-4; -1)$.

Запитання для самоперевірки

1. Коли дві лінійні нерівності з однією змінною утворюють систему?
2. Як знаходять розв'язок системи лінійних нерівностей з однією змінною?
3. Як називають спільну частину двох числових проміжків?
4. Як можна дати означення розв'язку системи лінійних нерівностей з однією змінною, використавши поняття перерізу числових проміжків?
5. Об'єднанням розв'язків яких двох систем лінійних нерівностей є числовий проміжок, що є розв'язком нерівності $\frac{ax+b}{cx+d} \le 0$?
6. Як розв'язати подвійну нерівність? Проілюструйте на прикладі.

Задачі та вправи

Розв'яжіть системи нерівностей (**75 – 77**):

75°. **а)** $\begin{cases} x < 7, \\ x < 3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x > 1, \\ x \ge 5; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x \le 4, \\ x < 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x < 5, \\ 5x > 6; \end{cases}$ **ґ)** $\begin{cases} 3x \le 21, \\ 5x \ge 15; \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} 0{,}5x > 3, \\ 2x < 5. \end{cases}$

76°. а) $\begin{cases} 2x - 0,8 \geq 1, \\ 1 - 3x < 1,6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 5 < 2x, \\ 4 - 3x \leq x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6 - 2x < 10, \\ 7 - 3x > 19; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0,6x - 1,2 < 2,4, \\ 0,5x - 0,5 > 3,5; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 17x - 2 > 12x - 1, \\ 3 - 9x < 1 - x. \end{cases}$

77. а) $\begin{cases} (x-3)^2 < (1-x)^2, \\ (2-x)^2 - (x+2)^2 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+4)^2 < (x-5)^2, \\ (x-4)^2 \geq (3+x)^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (7-3x)^2 < 12 + 9x^2, \\ (1-x)^2 > 15 + x^2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - (3+x)^2 < 12, \\ 1 + (2-x)^2 > x^2. \end{cases}$

78°. Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

а) $\begin{cases} 1,5x + 4,5 > 0, \\ \frac{1}{9}x < 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 6,5 < 0, \\ \frac{1}{3}x < -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 1 < 1,4 - x, \\ 3x - 2 > x - 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x + 6 \leq x - 4, \\ 3x + 12 \geq x + 17. \end{cases}$

79. Знайдіть суму всіх цілих розв'язків системи нерівностей:

а) $\begin{cases} 2(3x-4) < 3(4x-3) + 16, \\ 4(1+x) < 3x + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x > 2 - \frac{2x-13}{11}, \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x-7) < \frac{3x-20}{9}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \geq \frac{x-3}{4} - x; \\ 1 - 0,5x > x - 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - \frac{x-1}{2} - \frac{x+2}{3} \leq \frac{x-3}{4}, \\ 1,5x - 5,05 < x. \end{cases}$

80. Знайдіть допустимі значення змінної для кожного виразу:

а°) $\sqrt{5-2x} + \sqrt{1-x}$; б°) $\sqrt{7-x} - \sqrt{3x-12}$;

в°) $\sqrt{3x-1,5} - \sqrt{x}$; г°) $\sqrt{2x+4} + \sqrt{6x-3}$;

ґ) $\sqrt{\frac{x-2}{4-x}}$; д) $\sqrt{\frac{2x-5}{5x-3}}$; е) $\sqrt{\frac{2x-1}{3-x}}$.

81°. Розв'яжіть подвійну нерівність:

а) $-3 < 2x - 1 \le 3$; **б)** $2 \le 6 - 2x \le 5$;
в) $-12 \le 5 - x < 15$; **г)** $-1 < 5x + 4 < 17$;
ґ) $-1 < 15x + 14 < 44$; **д)** $-1{,}2 \le 1 - 2x \le 2{,}4$.

82. При яких значеннях x значення двочлена $3x - 5$ належить проміжку:

а) $(-2; 2)$; **б)** $[-3; 3]$; **в)** $[4; 7)$?

83. При яких значеннях x значення дробу $\frac{7-2x}{2}$ належить проміжку:

а) $(1; 2)$; **б)** $[1; 3)$; **в)** $[-2; 2]$?

84. Знайдіть додатні значення x, що задовольняють систему нерівностей:

а) $\begin{cases} \frac{5x-1}{6} - \frac{2x-1}{2} > 0, \\ 1 - \frac{x+4}{3} < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+6)(5-x) + x(x-1) > 0, \\ 0{,}3x(10x+20) - 3x^2 + 30 > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3(x-1) - 4(x+8) < 5(x+5), \\ 5(1-3x) - 3x > 1{,}2(1+5x) - 0{,}2. \end{cases}$

85*. Знайдіть добуток усіх натуральних чисел, що є розв'язками системи нерівностей:

а) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{4} < 7, \\ 1{,}5 - \frac{x}{6} < 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \frac{3x-1}{2} - x \le 2, \\ 2x - \frac{x}{3} \ge 1; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} y - \frac{y-1}{2} \ge 1, \\ \frac{y}{3} < 1. \end{cases}$

86. Знайдіть додатні значення x, що задовольняють систему нерівностей:

а) $\begin{cases} (x-3)^2 < x^2 + 30, \\ x^2 \le (x-4)^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2 > 4 + (x-3)^2, \\ (x+2)^2 < 25 + x^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-3)(x+3) < x^2 + 6x, \\ x^2 < (x-4)^2 + 9. \end{cases}$

87. При яких значеннях змінної дріб:

а) $\frac{x-3}{5-2x}$ — додатний; **б)** $\frac{4x+8}{3x+16,5}$ — від'ємний?

88. Яких значень має набувати змінна y, щоб нерівність була правильною:

а) $(5y-7)(y+3) \le 0$; **б)** $(15+y)(6-y) > 0$?

89. Електропоїзд вирушив з одного міста до іншого, розташованого за 220 км. Якщо швидкість електропоїзда збільшити на 6 км/год, то за 4 год він може подолати відстань, більшу від 220 км. Якщо ж він зменшить швидкість на 6 км/год, то навіть за 5 год не встигне доїхати до кінцевого пункту. Яка швидкість електропоїзда?

90. До 4 л сиропу ціною 1,8 грн. за літр треба долити таку кількість води, щоб ціна 1 л суміші була більшою від 1 грн. і меншою від 1,2 грн. Скільки літрів води треба долити до сиропу?

91. Скільки кілограмів цукерок ціною 7,8 грн. за 1 кг треба змішати з 2 кг цукерок ціною 5,4 грн. за 1 кг, щоб отримати суміш ціною не менше від 6 грн. і не більше від 6,8 грн. за 1 кг?

92. На відстані, не меншій ніж 20 км від пристані, за течією річки слід вибрати місце для міського пляжу, щоб проїзд туди й назад на катері тривав не більше 2 год 42 хв. На якій відстані від пристані потрібно вибрати місце для міського пляжу, якщо швидкість катера в стоячій воді становить 22,5 км/год, а швидкість течії річки — 2,5 км/год?

93. З двох сортів борошна ціною 2,4 грн. і 1,8 грн. за кілограм треба утворити 100 кг суміші ціною від 1,95 грн. до 2,1 грн. за кілограм. Скільки кілограмів кожного сорту борошна треба взяти для змішування?

94*. Щоб добратися до вокзалу, можна викликати таксі, на яке треба чекати не більше 24 хв і їхати ним зі швидкістю 40 км/год, а можна пройти пішки зі швидкістю не більшою 6 км/год, але не меншою 5 км/год. Як краще вчинити, якщо відстань від дому до вокзалу: **а)** 4 км; **б)** 2 км?

95*. До 2 т сталі, що містить 20% нікелю, треба додати таку кількість сталі, яка містить 40% нікелю, щоб отримати сплав, що містить не менше 25%, але не більше 30% нікелю. Скільки треба взяти сталі зі 40%-им вмістом нікелю?

2.3. Нерівності, що містять модуль

Пригадайте

1. Чому дорівнює модуль додатного числа?
2. Чому дорівнює модуль від'ємного числа?
3. Чому дорівнює модуль нуля?
4. Що означає модуль числа, яке позначене на координатній прямій?

① **Нерівність $|x| < a$ ($a > 0$).**

Як відомо, $|x| = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geq 0, \\ -x, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$

Крім того, зауважимо, що $|x - a|$ — відстань на координатній прямій між точками з координатами x і a.

Наприклад, якщо $x = 5$, $a = 3$, то $|5 - 3| = 2$ — відстань між точками 5 і 3 (рис. 16).

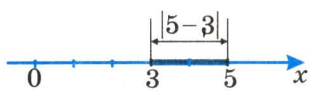


Рис. 16

Відстань між точками –3 і 2 дорівнює: $|-3 - 2| = |-5| = 5$ (рис. 17).

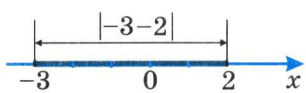


Рис. 17

Нерівність $|x| \leq 3$, або $|x - 0| \leq 3$, означає, що відстань від точки з координатою x до точки 0 не більша від 3, тобто не перевищує 3 (рис. 18).

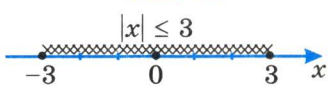


Рис. 18

Таку властивість мають усі точки x, що належать проміжку $[-3; 3]$.

Отже, нерівність $|x| \leq 3$ рівносильна подвійній нерівності: $-3 \leq x \leq 3$.

Взагалі, нерівність виду $|x| \leq a$ ($a > 0$) рівносильна подвійній нерівності: $-a \leq x \leq a$.

Аналогічно нерівність виду $|x| < a$ $(a > 0)$ рівносильна подвійній нерівності: $-a < x < a$.

② **Нерівність $|x| > a$ $(a > 0)$,** тобто $|x - 0| > a$, означає, що відстань від точки з координатою x до точки 0 на координатній прямій більша від a. Цю умову задовольняють точки, що розміщені на координатній прямій праворуч від точки з координатою a $(x > a)$ і ліворуч від точки з координатою $-a$ $(x < -a)$ (рис. 19).

Рис. 19

Отже, нерівність $|x| > a$ $(a > 0)$ рівносильна сукупності двох нерівностей: $x > a$ і $x < -a$.

Наприклад, розв'язки нерівності $|x| > 5$ можна записати так: $x < -5$ і $x > 5$ або $x \in (-\infty; -5) \cup (5; \infty)$.

③ **Окремі приклади.**

Приклад 1. Розв'язати нерівність: $|x - 1| \le 3$.

Розв'язання.

▽ $-3 \le x - 1 \le 3$,
$-2 \le x \le 4$ (рис. 20).

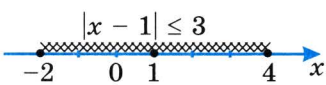


Рис. 20

Геометрична ілюстрація

Відстань від точки з координатою 1 до будь-якої точки цього проміжку не перевищує 3 (див. рис. 20).

Відповідь. $x \in [-2; 4]$. ▲

Приклад 2. Розв'язати нерівність: $|x - 2| > 3$.

▽ $x - 2 > 3$ і $x - 2 < -3$,
$x > 5$ і $x < -1$ (рис. 21).

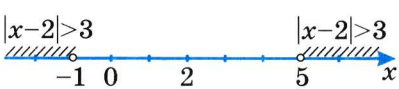


Рис. 21

Відстань від точки з координатою 2 до будь-якої з точок координатної прямої, що лежать справа від точки з координатою 5 $(x > 5)$ і зліва від точки з координатою -1 $(x < -1)$, більша від 3 (див. рис. 21).

Відповідь. $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$. ▲

Приклад 3. Розв'язати нерівність: $|2x-3|<5$.

▽ $-5<2x-3<5$,
$-5+3<2x<5+3$,
$-2<2x<8$,
$-1<x<4$ (рис. 22).

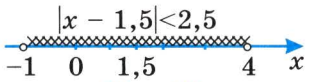


Рис. 22

Відстань від точки з координатою 1,5 до будь-якої точки цього проміжку буде меншою від 2,5 (див. рис. 22), бо нерівність $-5<2x-3<5$ рівносильна нерівності

$$-2{,}5<x-1{,}5<2{,}5,$$

Відповідь. $x\in(-1;\ 4)$. ▲

Приклад 4. Розв'язати нерівність: $|x-1|+2x<5$.

▽ *Розв'язання.* За означенням модуля числа,

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, \text{ якщо } x-1\ge 0, \text{ тобто } x\ge 1,\\ 1-x, \text{ якщо } x-1<0, \text{ тобто } x<1.\end{cases}$$

Тому дана нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} x-1+2x<5,\\ x\ge 1\end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 1-x+2x<5,\\ x<1.\end{cases}$$

Розв'яжемо кожну з них.

$$\begin{cases} 3x<6,\\ x\ge 1;\end{cases} \quad \begin{cases} x<2,\\ x\ge 1;\end{cases} \quad x\in[1;\ 2); \qquad \begin{cases} x<4,\\ x<1;\end{cases} \quad x\in(-\infty;\ 1).$$

Ці два проміжки можна об'єднати в один: $(-\infty;\ 2)$.

Відповідь. $x\in(-\infty;\ 2)$. ▲

? Запитання для самоперевірки

1. Якій нерівності рівносильна нерівність $|x|\le 6$?
2. Об'єднанням розв'язків яких нерівностей є розв'язок нерівності $|x|>10$?

Задачі та вправи

96°. Розв'яжіть нерівність і зобразіть множину розв'язків на координатній прямій:

а) $|x| \le 4$; **б)** $|x| > 4$; **в)** $|2x| < 6$;

г) $|x-2| \le 5$; **ґ)** $|2-x| > 3$; **д)** $|x-2,5| < 1,5$;

е) $|2x-5| \le 3$; **є)** $|5-2x| > 3$; **ж)** $|2x-5| < 1$;

з) $\sqrt{x^2} \le 3$; **и)** $\sqrt{(x-3)^2} \le 2$; **і)** $\sqrt{(2x-3)^2} > 3$.

Розв'яжіть нерівності (**97 – 100**):

97°. **а)** $|x| \le 3,5$; **б)** $2,4 \ge |x|$; **в)** $3,5 < |x|$;

г) $|x-1| \le 6$; **ґ)** $|4-5x| > \frac{1}{5}$; **д)** $|3x-5| < 9$.

98. **а)** $1 \le |3x-2|$; **б)** $|2x+0,5| < 1,5$;

в) $|x-2| < \frac{x}{2}$; **г)** $|x-1| > \frac{x+1}{2}$.

99. **а)** $\sqrt{x^2-6x+9} < 2$; **б)** $\sqrt{16-8x+x^2} > 3$;

в) $\sqrt{4-12x+9x^2} \le 7$; **г)** $\sqrt{9x^2+12x+4} \ge 4$.

100*. **а)** $\sqrt{25+20x+4x^2} < 3$; **б)** $\sqrt{64-112x+49x^2} \le 15$.

101. Знайдіть найменше ціле число, якщо воно існує, що є розв'язком нерівності:

а) $|x| \le 5$; **б)** $|x| > 5$; **в)** $|2x| < 9$;

г) $|4x-3| < 2$; **ґ)** $|2x-15| \ge 3$; **д)** $|15-2x| > 3$.

102. Знайдіть суму всіх цілих чисел, що є розв'язками нерівності:

а) $|x-3| < 4,5$; **б)** $|3-x| \le 4$;

в) $|2x-1| < 7$; **г)** $|2x-3| < 10$.

103. Знайдіть добуток усіх цілих чисел, що є розв'язками нерівності:

а) $|x-3| \le 1$; **б)** $|4-x| \le 1$;

в) $|x-0,5| \le 3,5$; **г)** $|0,5-x| < 2,5$.

104*. Знайдіть середину проміжку, що є розв'язком нерівності:

а) $|x-1| \le 8$; **б)** $|3-x| \le 5$;

в) $|x-3|-1 \le 4$; **г)** $|2x+5| \le 7$.

105*. Розв'яжіть нерівність:

а) $|2x-4|+x > 8$; **б)** $|3-x|-3x > 11$;

в) $|6+x|-3 < 2x$; **г)** $2-|5x+10| \le x$.

106*. Знайдіть найменше значення функції:

а) $y=|x-3|+4$; **б)** $y=|4-x|+3$.

107*. Знайдіть найбільше значення функції:

а) $y=4-|x-2|$; **б)** $y=3-|2x-1|$.

2.4. Доведення нерівностей

Пригадайте

1. У чому достатньо пересвідчитись, аби стверджувати, що: а) $m > n$; б) $m < n$?
2. Які нерівності можна почленно додавати?
3. Які нерівності можна почленно множити?

① **Доведення нерівностей на основі означення понять «більше» і «менше».** Щоб довести цим способом, що $A > B$, досить утворити різницю лівої і правої частин нерівності і показати, що вона додатна. Аналогічно, щоб довести, що $A < B$, досить показати, що $A - B < 0$.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Довести, що при будь-яких значеннях a і b нерівність $a^2+b^2 \ge 2ab$ — правильна.

▽ *Доведення.* Покажемо, що різниця a^2+b^2-2ab — невід'ємне число.

$a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$, бо квадрат будь-якого дійсного числа є невід'ємним числом.

Отже, $a^2 + b^2 \geq 2ab$. ▲

Приклад 2. Довести, що $a(a - 2) > 6(a - 3)$.

▽ *Доведення.* Покажемо, що $a(a - 2) - 6(a - 3) > 0$.

Для цього перетворимо вираз $a(a - 2) - 6(a - 3)$. Маємо:

$a(a - 2) - 6(a - 3) = a^2 - 2a - 6a + 18 = a^2 - 8a + 18$.

Виділимо з тричлена $a^2 - 8a + 18$ квадрат двочлена. Маємо:

$a^2 - 8a + 18 = a^2 - 2a \cdot 4 + 4^2 - 4^2 + 18 = (a - 4)^2 - 16 + 18 = (a - 4)^2 + 2$.

$(a - 4)^2 \geq 0$ при будь-якому a, тому $(a - 4)^2 + 2 > 0$.

Оскільки $a(a - 2) - 6(a - 3) = (a - 4)^2 + 2 > 0$, то $a(a - 2) > 6(a - 3)$. ▲

Приклад 3. Порівняти середнє арифметичне двох невід'ємних чисел $a \geq 0$ і $b \geq 0$ із середнім геометричним цих чисел.

▽ *Розв'язання.* $\frac{a+b}{2}$ — середнє арифметичне чисел a і b, $\sqrt{ab}$ — середнє геометричне чисел a і b.

Визначимо знак різниці виразів $\frac{a+b}{2}$ і $\sqrt{ab}$:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0.$$

Отже, середнє арифметичне двох невід'ємних чисел не менше від їхнього середнього геометричного:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. ▲

Ця нерівність надалі часто траплятиметься у розв'язуванні задач і вправ, тому її слід запам'ятати.

② **Інші способи доведення.** Нерідко у процесі доведення нерівностей використовують уже відомі нерівності та основні властивості нерівностей.

Приклад 4. Довести, що $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$, якщо a, b, c — невід'ємні числа.

▽ *Доведення.* На основі встановленої у процесі розв'язання прикладу 3 (с. 48) нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, a \geq 0, b \geq 0$, можемо стверджувати, що $a+b \geq 2\sqrt{ab}; b+c \geq 2\sqrt{bc}; a+c \geq 2\sqrt{ac}$.

Додамо почленно ці нерівності. Маємо:

$$a+b+b+c+a+c \geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}$$

$$\text{або } 2a+2b+2c \geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}.$$

Поділивши обидві частини цієї нерівності на 2, отримаємо: $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$. ▲

Приклад 5. Довести, що $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$, якщо a, b, c — невід'ємні числа.

▽ *Доведення.* $a+b \geq 2\sqrt{ab}; b+c \geq 2\sqrt{bc}; a+c \geq 2\sqrt{ac}$.

Помножимо почленно записані нерівності. Маємо:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ac}$$

$$\text{або } (a+b)(b+c)(a+c) \geq 8\sqrt{ab \cdot bc \cdot ac};$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}.$$

Враховуючи умову, що a, b, c — невід'ємні числа, можемо записати: $\sqrt{a^2b^2c^2} = abc$. Отже, $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$. ▲

Приклад 6. Довести, що $m^2 + 2n^2 + 2mn + 6n + 10 > 0$ для будь-яких m і n.

▽*Доведення.* Перетворимо вираз, що стоїть у лівій частині нерівності, виділивши в ньому квадрати двочленів:

$m^2 + 2n^2 + 2mn + 6n + 10 = m^2 + n^2 + n^2 + 2mn + 6n + 10 =$
$= (m^2 + 2mn + n^2) + n^2 + 6n + 10 = (m+n)^2 + (n^2 + 6n + 9) + 1 =$
$= (m+n)^2 + (n+3)^2 + 1.$

Оскільки $(m+n)^2 \geq 0, (n+3)^2 \geq 0$, то $(m+n)^2 + (n+3)^2 + 1 > 0$.

Отже, $m^2 + 2n^2 + 2mn + 6n + 10 > 0$. ▲

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає спосіб доведення нерівностей на основі означення понять «більше» і «менше»?
2. Як ще можна довести нерівність?

Задачі та вправи

Доведіть, що при будь-якому значенні змінної, нерівності є правильними (**108 – 117**):

108°. **а)** $(x-3)(x+3)^2 < x^2$; **б)** $(x-4)(x+4) < x^2$;
в) $(c-3)(c-5) < (c-4)^2$; **г)** $(c-1)(c-3) < (c-2)^2$.

109°. **а)** $3(p+1) + p < 4(2+p)$; **б)** $(p-2)^2 > p(p-4)$;
в) $(3p-1)(3p+1) < 9p^2$; **г)** $(0,3p-2)(0,3p+2) < 0,09p^2$.

110°. **а)** $3a^2 - 9a + 2 > 3a(a-3)$; **б)** $3a^2 - 9a - 1 < 3a(a-3)$;
в) $a(a+8) > 8a$; **г)** $a(a+8) > 8a - 2$;
ґ) $a(a-8) > a^2 - 8a - 3$; **д)** $a(a-8) < a^2 - 8a + 3$.

111°. **а)** $(x-y)^2 \geq 0$; **б)** $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$;
в) $(x-4)^2 \geq 0$; **г)** $x^2 - 8x + 16 \geq 0$;
ґ) $x^2 + 8x + 16 + 1 > 0$; **д)** $x^2 - 8x + 17 > 0$.

112. **а)** $x^2 - 12x + 40 \geq 4$; **б)** $x^2 - 12x + 38 > 0$;
в) $x^2 - 10x + 25 \geq 0$; **г)** $x^2 - 10x + 26 > 0$.

113°. **а)** $(a-b)^2 \geq 0$; **б)** $a^2 + b^2 \geq 2ab$;
в) $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$; **г)** $a^2 - ab + b^2 \geq ab$;
ґ) $\dfrac{a^2+b^2}{ab} \geq 2,\ a > 0,\ b > 0$; **д)** $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2,\ a > 0,\ b > 0$.

114. **а°)** $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0,\ a \geq 0,\ b \geq 0$; **б°)** $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0,\ a \geq 0,\ b \geq 0$;
в) $a + b \geq 2\sqrt{ab},\ a \geq 0,\ b \geq 0$; **г)** $x + 1 \geq 2\sqrt{x},\ x > 0$;
ґ) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2,\ x > 0$.

115. **а)** $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0,\ a>0;$ **б)** $a+\frac{1}{a} \geq 2,\ a>0;$

в) $a+\frac{4}{a} \geq 4,\ a>0;$ **г)** $a+\frac{9}{a} \geq 6,\ a>0.$

116. **а)** $(x+1)^2>2x;$ **б)** $(2x+1)^2>4x;$

в) $(3x+1)^2>6x;$ г) $(4x+1)^2>8x;$

ґ) $(10x+1)^2>20x;$ **д)** $(0,5x+1)^2>x.$

117*. **а)** $(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0;$

б) $a^2+b^2+2 \geq 2(a+b);$

в) $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geq 0;$

г) $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c).$

118*. Доведіть, що при $a>0$ і $b>0$ нерівність $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$ — правильна.

Вказівка. Скористайтеся нерівністю № 113, **д)**.

119*. Доведіть, що при $a>0$, $b>0$, $c>0$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

120*. Доведіть нерівність:

а) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$, якщо a, b, c — дійсні числа;

б) $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)>16abc$, якщо a, b, c — додатні числа;

в) $x^2+5y^2+2xy+4y+3>0$ для будь-яких x та y.

121*. Доведіть, що площа квадрата, сторона якого дорівнює 6 см, більша від площі довільного прямокутника, що має той самий периметр.

122*. Доведіть, що периметр квадрата, сторона якого дорівнює 6 см, менший від периметра довільного прямокутника, що має таку саму площу.

123*. Якщо сума двох додатних змінних є сталою ($x+y=P$), то їхній добуток має найбільше значення при $x=y=0,5P$. Доведіть це.

124*. Якщо добуток двох змінних додатних величин є сталим ($xy = c$), то їхня сума має найменше значення при $x = y = \sqrt{c}$. Доведіть це.

Додаткові задачі та вправи до розділу I

125. Порівняйте числа a і b, якщо:

а) $a - b = 4{,}5$; $b - a = -2$; $a - b = 0$; $b - a = 0{,}1$;

б) $a = 4 + b$; $b - 4 = a$; $a + 3 = b$; $b + \sqrt{3} = a$;

в) $4 + a = b - 5$; $a - 3{,}2 = -4{,}8 + b$; $2a = 3 + 2b$.

126. Замість крапок поставте знак нерівності так, щоб утворена нерівність була правильною:

а) $0{,}5 \ldots \frac{3}{15}$; **б)** $0{,}25 \ldots \left(\frac{1}{3}\right)^2$;

в) $2\sqrt{3} \ldots 3\sqrt{2}$; **г)** $\sqrt{2} + 1 \ldots 3 - \sqrt{2}$.

127. Яким числом (додатним чи від'ємним) є число x, коли відомо, що:

а) $3x > 4x$; $1{,}2x < 2x$; $-5x < 5x$; $6x < -4x$;

б) $0{,}5 < \sqrt{3}x$; $9x < \pi x$; $-3x > 2x$; $6x < 0{,}5x$;

в) $0{,}3 + x > 2x - 4$; $0{,}5x < 2 + 2{,}5$; $16x > -3x + 38$;

г) $2\sqrt{x^2} < 3x$; $2x > \pi x$; $2\sqrt{x^2} > 3x$; $\pi x < 2x$?

128. Доведіть:

а) якщо $x(x + 2) < (x - 2)(x + 3)$, то $x < -6$;

б) якщо $x(x + 6) > (x + 1)(x + 4)$, то $x > 4$;

в) якщо $(x - 3)^2 < x(x - 5)$, то $x > 9$;

г) якщо $x(x + 3) < (x + 2)^2$, то $x > -4$.

129. Виконайте додавання нерівностей:

а) $2 < 3$ і $-3 < 4$; $-2 > -4$ і $3 > -2$;

б) $3x + y < 2a + 1$ і $3y - 2x < 14 - 2a$;

в) $3a^2 < x + 1$ і $2a - a^2 < x^2 - 1$;

г) $2 < 3^2$ і $2^2 < 3^2$; $2^2 \cdot 3^2 > 5$ і $2^2 > 2$.

130. Виконайте множення нерівностей:

а) $0{,}6 > 0{,}5$ і $6 > 2$; $8{,}4 > 2{,}5$ і $5 > 4$;

б) $2 < x$ і $3 < y$; $x > 1$ і $y > 5$, де $x > 0$, $y > 0$;

в) $a + 1 > a$ і $a > 5$; $b < b + 2$ і $3 < b$, де $a > 0$, $b > 0$;

г) $4^2 > 5$ і $\frac{1}{42} < \frac{1}{25}$; $3 < 7$ і $\frac{1}{81} < \frac{1}{49}$.

131. Доведіть, що:

а) сума відстаней від будь-якої точки, що лежить всередині трикутника, до його вершин більша від півпериметра цього трикутника;

б) сума відстаней від будь-якої точки, що лежить всередині прямокутника, до його вершин більша від півпериметра цього прямокутника.

132. Оцініть:

а) довжину периметра рівностороннього трикутника, якщо довжина його сторони a знаходиться в межах $12{,}4 < a < 12{,}6$;

б) довжину периметра прямокутника зі сторонами a і b, якщо $4{,}5 < a < 4{,}6$ і $2{,}3 < b < 2{,}4$;

в) довжину середньої лінії трапеції з основами a і b, якщо $15{,}6 < a < 15{,}8$ і $10{,}2 < b < 10{,}6$;

г) площу трикутника з висотою h і стороною a, якщо $2{,}6 < h < 2{,}7$, а $3{,}4 < a < 3{,}5$.

133. Знайдіть межі значень виразу $4m - 5n$, якщо:

а) $2 < m < 3$ і $5 < n < 6$;

б) $2{,}5 < m < 3{,}5$ і $4{,}6 < n < 4{,}8$;

в) $3{,}48 < m < 3{,}50$ і $2{,}45 < n < 2{,}55$;

г) $14{,}35 < m < 14{,}36$ і $3 < n < 3{,}1$.

134. Зобразіть на координатній прямій числові проміжки:

а) $(2; 6)$; $[2; 6)$; $(2; 6]$; $[2; 6]$;

б) $(-3; 2)$; $[-3; -6)$; $(3; -2]$; $[2; \infty)$;

в) $(-\infty; -3)$; $(-\infty; 2]$; $[3; \infty)$; $(-2; \infty)$;

г) $\left(\sqrt{3}; \sqrt{5}\right)$; $\left(\sqrt{10}; -\sqrt{2}\right]$; $\left[\sqrt{10}; \infty\right)$; $(-\infty; \infty)$.

135. Зобразіть на координатній прямій числа, що задовольняють нерівності:

а) $3 < x < 6$; $4 \le x < 7$; $0 \le x < 4$; $3 \le x \le 6$;

б) $-3 < x \le 1$; $0 < x < 5$; $-5 < x < -7$; $-4 \le x \le 0$;

в) $x > 5$; $x < -2$; $x \ge 3$; $x \le 4$;

г) $-2\sqrt{2} \le x\sqrt{5}$; $\sqrt{3} < x < \sqrt{5}$; $x \ge \sqrt{10}$.

136. Знайдіть найбільше і найменше з цілих чисел, які належать проміжку:

а) $(14; 2]$; $[4; 5)$; $(4; 8)$; $(3; 5]$;

б) $(-12; 0)$; $[-3; 5)$; $(-1; 7]$; $[-5; 5]$;

в) $(3{,}2; 6{,}01)$; $[-2{,}1; 3{,}2)$; $[-6{,}1; 0{,}8)$; $(0{,}2; 2{,}2)$;

г) $\left(\sqrt{3}; \sqrt{15}\right)$; $\left(\pi; \sqrt{24}\right)$; $\left(-2\pi; -\sqrt{3}\right)$; $\left(-2\sqrt{2}; \pi\right]$.

137. Розв'яжіть нерівності:

а) $2x < 8$; $4x > 12$; $\frac{1}{3}x \le 2{,}3$; $0{,}5x > 2{,}5$;

б) $6x - 1{,}8 \le 19{,}2$; $0{,}35 - 2{,}5x > 1{,}1$;

в) $2{,}6 - 8x \ge 8{,}6 - 2x$; $0{,}65 + 0{,}5x \le 2x + 2{,}15$;

г) $3\frac{1}{2} + 1{,}4 \le 0{,}4x - 0{,}5$; $0{,}35x + 1\frac{7}{8} > 0{,}1x - \frac{1}{8}$.

138. При яких значеннях x набувають додатних значень вирази:

а) $5 - 15x$; $14x - 7$; $\frac{3}{8} - x$; $3 - \frac{1}{3}x$;

б) $\frac{1}{6} + \frac{x-2}{6}$; $\frac{2x - 3{,}5}{2} + \frac{x}{4}$;

в) $\frac{x-1}{4} + \frac{x-2}{6}$; $\frac{x - 0{,}5}{3} + \frac{x-5}{12}$;

г) $3x - 1 - \frac{1+5x}{2}$; $2x - 1 + \frac{3x+3}{3}$?

139. Знайдіть розв'язки нерівності:

а) $(x - 3)(x + 3) > x^2$; **б)** $x^2 - 3x < (3 + x)(3 - x)$;

в) $x - 20 > (x + 5)(x - 5) - x^2$; **г)** $3(x + 2)^2 + 4x > 3(x - 3)^2 - 2x$.

140. При яких значеннях m вираз має смисл:

а) $\sqrt{m-2}$; **б)** $\sqrt{5-4m}$;

в) $\dfrac{8-m}{\sqrt{2m^2+1}}$; **г)** $\dfrac{4m-1}{\sqrt{m^2(2-m)}}$?

Розв'яжіть системи нерівностей **(141–144)**.

141. **а)** $\begin{cases} x>5, \\ x>3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x>2, \\ x\le 5; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x<5, \\ x\le 6; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x\ge 3, \\ x<2. \end{cases}$

142. **а)** $\begin{cases} 4x<10, \\ 2x>8; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x\le 12, \\ 5x>10; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 2x>-12, \\ 3x<3; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 4x\ge 6, \\ 8x<16. \end{cases}$

143. **а)** $\begin{cases} 2x-6<x-4, \\ 3(1-2x)\ge 18-x; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5(x-4)+1\ge 7x+3, \\ 3(7+x)<43-(4x+1); \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{3y+1}{2}<-1, \\ \dfrac{x}{2}-1<x; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \dfrac{x-3}{3}<\dfrac{x-1}{2}-2, \\ \dfrac{1-13x}{5}<0. \end{cases}$

144. **а)** $\begin{cases} 0,5(8-x)-2,5x>-(x-16), \\ 2x-1,5(2x-1)<2,9-x; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 10-8x<2, \\ 2>x>-3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-\dfrac{1}{2}(1+x)>0,7(5x+1), \\ 2x>6\dfrac{3}{5}+(x-1,7); \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 10<4+3x, \\ -1<-3x<1. \end{cases}$

145. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\sqrt{x-2}$; **б)** $y=\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x-2}}{2}$;

в) $y=\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$; **г)** $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}-\dfrac{5+x}{\sqrt{2x-1}}$.

146. При яких значеннях змінної дріб:

а) $\dfrac{x}{x-1}$ — додатний; **б)** $\dfrac{2x-3}{4-x}$ — від'ємний;

в) $\dfrac{x+2}{\sqrt{3(x-2)}}$ — додатний; **г)** $\dfrac{\sqrt{4(x+2)}}{\sqrt{3(x-1)}}$ — від'ємний?

Розв'яжіть нерівності (**147–150**):

147. **а)** $|x| \le 2$; **б)** $|2x| < 4$; **в)** $|2-x| \ge 4$; **г)** $|2x-3| < 1$.

148. **а)** $\sqrt{x^2} \le 9$; **б)** $|x-3| < \dfrac{x}{2}$;

в) $|x+2| > \dfrac{x-2}{2}$; **г)** $\sqrt{(x-1)^2} < 1$.

149. **а)** $\sqrt{25x^2-10x+1} < 2$; **б)** $\sqrt{4x^2-4x+1} > 3$;

в) $|4x-3| \ge x+2$; **г)** $2x-3 \le |3x-1|$.

150. **а)** $\dfrac{|2x-3|}{x+2} \le 0$; **б)** $1 \le |3x-2| \le 4$;

в) $\dfrac{x-5}{|1+2x|} > 0$; **г)** $|2x+3|(3-2x) \ge 0$.

Зобразіть на координатній прямій множину розв'язків нерівностей (**151–154**):

151. **а)** $|x| < 2$; **б)** $|x| \le 3$;

в) $|x| > 4$; **г)** $|x| \ge 1$.

152. **а)** $|x-2| < 4$; **б)** $|2-x| > 4$;

в) $|x-1{,}5| \le 0{,}5$; **г)** $|x-1| \le 0$.

153. **а)** $|2x-5| \ge 3$; **б)** $|3x+1| \le 4$;

в) $|4x-2| > 2$; **г)** $|4x+1| < x$.

154. **а)** $\sqrt{(x-2)^2} \le x$; **б)** $2x \ge \sqrt{(x-2)^2}$;

в) $x-1 < \sqrt{(x-1)^2}$; **г)** $2x-3 \ge \sqrt{(x-1)^2}$.

155. Доведіть, що при будь-якому значенні x нерівність є правильною:

а) $(5-x)(7+2x) < (11-x)(8+x)$;

б) $(y+1)^2 \ge 4y$;

в) $(2x - 3)(x - 3) > (x - 1)(x - 8)$;

г) $x^2 + 82 > 18x$.

156. Доведіть нерівність:

а) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$, де $a \geq 0$; $b \geq 0$;

б) $a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 \geq 6a^2b^2$, де a і b одного знака;

в) $(a+2)(b+6)(c+3) \geq 48\sqrt{abc}$, де $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$;

г) $(m + n)(mn + 1) \geq 4mn$, якщо $m > 0$, $n > 0$.

157. Розв'яжіть задачі.

а) Яке ціле число задумав учень, якщо воно менше від 9, але більше від 7?

б) Задумане число більше від 2. Якщо його подвоїти, то отримаємо число менше від 8. Яке число задумали?

в) Якщо швидкість електрички збільшити на 6 км/год, то за 4 год вона подолає відстань більшу від 220 км. Якщо ж зменшити її швидкість на 6 км/год, то за 5 год вона проїде менше ніж 220 км. Якою може бути швидкість електрички?

г) Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, а периметр менший від 36 см. Якою може бути довжина бічної сторони трикутника?

158. Розв'яжіть задачі.

а) Кількість яблук у кошику більша від 24, але менша від 26. Скільки яблук у кошику?

б) Один із семикласників має вік, більший від 12 років, а його сестричка вдвічі молодша — її вік менший від 7 років. Скільки років семикласнику?

в) Якщо від $\frac{3}{2}$ цілого числа відняти його четверту частину, то отримаємо число, більше від 29. Якщо ж від $\frac{3}{2}$ цього самого числа відняти його третину, то матимемо число, менше від 29. Знайдіть це число.

г) 8 л розчину, що містить 60% кислоти, розведено розчином, що містить 20% кислоти. Скільки літрів другого

розчину треба влити в перший, щоб суміш містила не більше ніж 40% і не менше ніж 30% кислоти?

✓ Завдання для самоперевірки

I рівень

1. Яке з чисел x і y більше, якщо :

а) $x - y = 2$; **б)** $x - y = -3$;

в) $y - x = 0{,}01$; **г)** $y - x = -\frac{1}{2}$?

2. Зобразіть на координатній прямій числовий проміжок, заданий нерівністю:

а) $x > 4$; **б)** $x \le 2$;

в) $-3 < x < 2$; **г)** $3 \le x \le 5$.

3. Запишіть за допомогою нерівності числові проміжки:

а) $(2; 4)$; **б)** $(-2; 3]$;

в) $[6{,}5; \infty)$; **г)** $[-2; 2]$.

4. Розв'яжіть нерівність:

а) $11x - 7 < 4$; **б)** $12 - 3y < 9$;

в) $0{,}3x - 4 \ge 0{,}2$; **г)** $|x| < 4$.

5. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x \ge -1, \\ x < 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 4{,}5 > 7, \\ x - 2 \le 3{,}5; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 8 - x > 1, \\ 2x + 5 > 13. \end{cases}$

6. Виконайте почленне додавання і множення нерівностей:

а) $7 > 3$ і $3 > 2$; **б)** $1 < 4$ і $3 < 4$.

7. Оцініть дані вирази, якщо $2{,}1 < a < 2{,}2$ і $3{,}2 < b < 3{,}3$:

а) $a + b$; **б)** $a - b$;

в) ab; **г)** $\frac{a}{b}$.

8. При яких значеннях m вираз має смисл:

а) $\sqrt{m-1}$; **б)** $\sqrt{2m-3}$; **в)** $\sqrt{3-2m}$; **г)** $\sqrt{m^2+1}$?

9. Розв'яжіть подвійну нерівність:

а) $-5 \le 2x + 3 < 2$; **б)** $3 < 4 - 3x < 7$;

в) $-4 < 5x - 2 < -2$; **г)** $-1 < 2 - 10x < -8$.

10. Доведіть, що при будь-якому значенні змінних нерівність є правильною:

а) $(x-2)(x+2) < x^2$; **б)** $(x-y)^2 \ge 0$;

в) $(x-1)(x-3) < (x-2)^2$; **г)** $x^2 - 2xy + y^2 \ge 0$.

II рівень

1. Запишіть за допомогою нерівності числові проміжки, зображені на рис. 23:

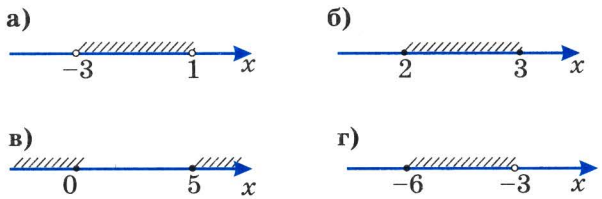


Рис. 23

2. Зобразіть на координатній прямій числові проміжки:

а) $(-\infty; -3)$; **б)** $[2; \infty)$; **в)** $[-2; 5]$; **г)** $(-\infty; \infty)$.

3. При яких значеннях змінної вираз:

а) $3 - 6x$ — від'ємний; **б)** $4x - 6$ — додатний;

в) $\frac{4}{5} - 2x$ — додатний; **г)** $3x - \frac{1}{3}$ — додатний?

4. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 0,2x - 0,4 < 0,8, \\ 0,1x - 0,1 > 0,7; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 8,5x - 1 > 6x - 0,5, \\ 3,5x - 1,5 > 9,5. \end{cases}$

5. При яких значеннях змінної x значення виразу $2x$ належить проміжку:

а) $(-3; 3]$; **б)** $[-2; 2]$; **в)** $[-6; 7)$; **г)** $(-5; 0)$?

6. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\frac{\sqrt{4+3x}}{2}-\sqrt{5x-12}$; **б)** $y=\sqrt{6x+12}-\frac{\sqrt{3x-2}}{2}$;

в) $y=\sqrt{3-2x}-\sqrt{x+4}$; **г)** $y=\sqrt{3x+3}+\sqrt{2x-2}$.

7. Оцініть довжину периметра прямокутника зі сторонами, що дорівнюють a см і b см, якщо $15{,}6<a<15{,}7$ і $8{,}7<b<8{,}8$.

III рівень

1. Знайдіть найбільше і найменше з цілих чисел, які належать числовому проміжку:

а) $(-3{,}3;\ 2)$; **б)** $[-4{,}5;\ 3]$;

в) $(-0{,}2;\ 5{,}2)$; **г)** $\left(-\pi;-\sqrt{2}\right)$.

2. Розв'яжіть нерівність:

а) $\frac{x+1}{2}-\frac{3x-1}{3}\geq 1-2x$; **б)** $\frac{x+1}{8}+\frac{3-x}{4}>2-2x$;

в) $-2\leq\frac{2x+1}{5}<6$; **г)** $-1\leq\frac{x-6}{3}\leq 1$.

3. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases}(x-2)^2>(1-x)^2,\\(3-x)^2<(x+2)^2;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}(x-4)^2>(x+5)^2,\\(x+4)^2\leq(3+x)^2;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-12<(3+x)^2,\\x^2<1+(2-x)^2;\end{cases}$ **г)** $\begin{cases}12+x^2>(3+x)^2,\\1-x^2<(x-2)^2.\end{cases}$

4. Знайдіть допустимі значення змінної для кожного з виразів:

а) $\sqrt{\frac{x-3}{2+x}}$; **б)** $\sqrt{\frac{3x-4}{2x-5}}$;

в) $\sqrt{\frac{1+2x}{x-3}}$; **г)** $\sqrt{\frac{3-5x}{2-x}}$.

5. Доведіть, що при будь-якому значенні a нерівність є правильною:

а) $a(a-10)-3 \geq 4(a-13)$; **б)** $a(a-2) > 6(a-3)$.

6. Розв'яжіть задачу.

Бак місткістю 2,4 м^3 треба наповнити водою. По скільки літрів води треба вливати в бак щохвилини, щоб через 8 хв він був наповнений не менше ніж наполовину, а через 15 хв вода з нього не виливалася?

IV рівень

1. Розв'яжіть нерівність:

а) $(2x-5)2-x > (2x-1)(2x+1)-16$;

б) $(12x-1)(3x+1) > 1+(6x+2)^2$;

в) $\frac{9(y-2)}{2}-3(2y-4) \geq 5(y-2)-3$;

г) $\frac{7(y-3)}{2} > \frac{3-y}{2}+5(6-2y)+14$.

2. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 5x-(8-x) < 2x+3,2, \\ 3(2x-1)-4x < 2x+5,8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-10 > -4, \\ -1 < -3x < 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7(5y+1)-(1+y) < 3y, \\ y-0,5(y-1,7) > 3,3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x+1 > 5, \\ -2 < -x < 3. \end{cases}$

3. Розв'яжіть нерівність:

а) $1 < |2x-4| \leq 2$; **б)** $1 \leq |3x-2| < 2$;

в) $-2 \leq |3x+2| < 1$; **г)** $5 < |4x-5| < 8$.

4. Доведіть, що при $0 < x < 13$ і $0 < y < 7$:

а) $6+2y < 23$; **б)** $xy+12 < 114$.

5. При яких значеннях a рівняння $\frac{1}{a}+\frac{1}{ax}=1$ має розв'язки:

а) більші від 2; **б)** менші від –3?

6. Розв'яжіть задачу.

За 8 рейсів автобус перевозить більше ніж 185 пасажирів, а за 15 рейсів — менше ніж 370 пасажирів. Скільки місць в автобусі, якщо кожного рейсу він перевозить стільки пасажирів, скільки місць в автобусі?

Розділ II

КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

§3. Квадратична функція та її графік

3.1. Поняття квадратичної функції

Пригадайте

1. Яку залежність між двома змінними називають функціональною?
2. Які два поняття позначає термін «функція»?
3. Наведіть кілька прикладів функцій, заданих формулою.

① **Як позначають функцію.** Вам відомо, що функціональною називають таку залежність між двома змінними (наприклад, x і y), при якій кожному значенню змінної x відповідає лише одне значення змінної y. Змінну x у цьому випадку називають аргументом, а змінну y — функцією. Функцією нерідко називають саму функціональну залежність між змінними.

Якщо хочуть записати, що змінна y є функцією від змінної x, то пишуть: $y = f(x)$. Читають: «*Ігрек дорівнює еф від ікс*». Якщо залежність між змінними x і y задано, наприклад, формулою $y = x^2$, то, користуючись введеним позначенням, це можна записати так: $f(x) = x^2$.

Значення функції в точці a (якщо $x = a$) позначають $f(a)$. Зокрема, якщо йдеться про функцію $f(x) = x^2$, то $f(3) = 3^2 = 9$, $f(-0,5) = (-0,5)^2 = 0,25$, $f(0) = 0^2 = 0$ і т.д.

Функціональну залежність позначають не лише літерою f, а й іншими латинськими та грецькими літерами : φ, g, h та ін. Наприклад, $\varphi(x) = 4x - 1$; $g(x) = x^2 - 3x$.

Функція $y = x^2$, з якою ви ознайомилися у восьмому класі, є окремим випадком квадратичної функції, яка і буде предметом наступного вивчення.

② Що таке квадратична функція.

! Функція, задана формулою $y = ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b, c — дані числа, причому $a \neq 0$, називається *квадратичною функцією*.

Наприклад: $y = 2x^2 - 3x + 5$, $y = x^2 + 4x - 7$, $f(x) = -x^2 - 7x - 1$.

Якщо у формулі, що задає квадратичну функцію, $b = 0$ або $c = 0$, або $b = c = 0$, то матимемо окремі види квадратичної функції, а саме:

1) $b = c = 0$, $y = ax^2$; наприклад, $y = 2x^2$, $y = -0{,}1x^2$;

2) $b = 0$, $c \neq 0$, $y = ax^2 + c$; наприклад, $y = -3x^2 + 5$;

3) $b \neq 0$, $c = 0$, $y = ax^2 + bx$; наприклад, $y = 4x^2 - 2x$.

За допомогою квадратичної функції можна описати низку різноманітних процесів, явищ у природі, в побуті, на виробництві. Наприклад, рух тіла, що вільно падає, описує функція виду $y = 4{,}9x^2$, яка дає, зокрема, можливість знайти відстань y (в метрах), яку пролетить тіло за x секунд.

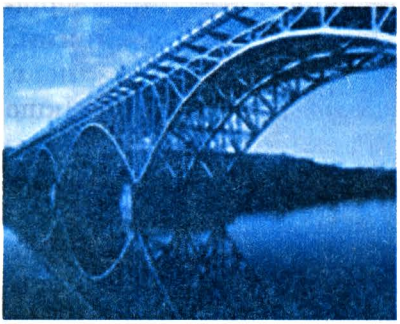


Рис. 24

Інженерні розрахунки і практика засвідчують, що споруди та конструкції (ферми мостів, арки), обриси яких нагадують параболу або гіперболу, мають підвищену міцність (рис. 24). Властивості квадратичної функції враховують при виготовленні параболічних дзеркал, прожекторів, шаблонів для виробництва деталей тощо.

Вам уже відомо, що багато чого про функцію може розповісти її графік. Далі ви дізнаєтесь, як будують графіки квадратичної функції.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке функція?
2. Як розуміти записи: $f(x) = x^2 - 4x$; $\varphi(x) = 3x + 2$?
3. Що означає запис $f(a)$ для функції f?
4. Як знайти $f(3)$, якщо $f(x) = 5x - 4$?
5. Яка функція називається квадратичною?

Задачі та вправи

159°. Дано функцію $f(x) = 0{,}5x^2 - x - 2$. Знайдіть:
а) $f(1)$; **б)** $f(0)$; **в)** $f(-2)$; **г)** $f(4)$.

160°. Дано функцію $f(x) = x^2 - 9x + 20$. Знайдіть значення x, при яких:
а) $f(x) = 0$; **б)** $f(x) = 20$; **в)** $f(x) = 12$; **г)** $f(x) = 30$.

161°. Дано функції $f(x) = 4x^2 + 6x + 7$ і $\varphi(x) = 5 - 3x$. Знайдіть значення x, при яких $f(x) = \varphi(x)$.

162. Дано функцію $f(x) = (x - 3)^2 + 1$. Знайдіть значення x, при яких:
а) $f(x) = 5$; **б)** $f(x) = 1{,}25$; **в)** $f(x) = 1{,}09$.

163. Задайте формулою квадратичну функцію, яка набуває нульового значення в точках:
а) $x = 5$ і $x = -3$; **б)** $x = 7$ і $x = 0$; **в)** $x = 10$.

164*. Задайте формулою квадратичну функцію, яка при жодному значенні x не набуває нульового значення.

3.2. Графік функції $y = x^2 + n$

Пригадайте

1. До якого виду функцій належить функція $y = x^2$?
2. Що є графіком функції $y = x^2$? Як він розміщений на координатній площині?

Відомо, що графіком функції $y = x^2$ є парабола (рис. 25), вершина якої збігається з початком координат, а віссю симетрії цієї параболи є вісь ординат.

Побудуємо графік функції $y = x^2 + 2$. Це можна зробити традиційним способом:

1) побудувати кілька точок графіка за їх координатами, які знаходять, надаючи змінній x певного значення і обчислюючи відповідне значення змінної y;

2) провести через побудовані точки криву.

Можна обрати дещо інший шлях, скориставшись побудованим уже графіком функції $y = x^2$.

Аналізуючи формули $y = x^2$ і $y = x^2 + 2$, зауважимо, що при одному і тому самому значенні x значення другої функції завжди на 2 більше від відповідного значення першої. Це означає, що кожна точка графіка функції $y = x^2 + 2$ лежить на 2 одиниці вище від точки графіка функції $y = x^2$ з тією самою абсцисою (рис. 26).

Звідси випливає, що графік функції $y = x^2 + 2$ можна отримати паралельним перенесенням графіка $y = x^2$ вздовж осі ординат угору на 2 одиниці (див. рис. 26).

Отже, графіком функції $y = x^2 + 2$ також є парабола, вершина якої має координати (0; 2), а віссю симетрії є вісь ординат.

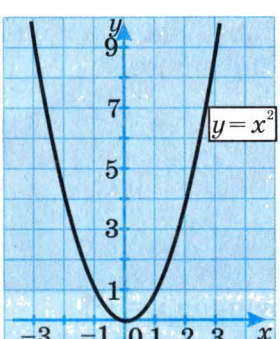


Рис. 25

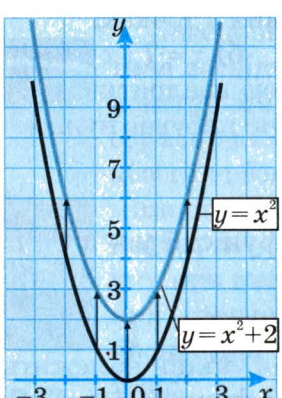


Рис. 26

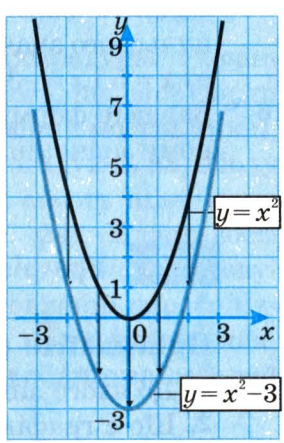


Рис. 27

Аналогічно графік функції $y = x^2 - 3$ можна отримати за допомогою паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ вздовж осі ординат (осі симетрії) вниз на 3 одиниці (рис. 27).

Взагалі, *графік функції $y = x^2 + n$ є параболою, яку отримують паралельним перенесенням графіка функції $y = x^2$ на $|n|$ одиниць вздовж осі $0y$ (осі симетрії) вгору, якщо $n > 0$, або вниз, якщо $n < 0$.*

Вершина цієї параболи має координати $(0; n)$, а віссю симетрії графіка є вісь ординат.

Задачі та вправи

165°. (*Усно*) Як із графіка функції $y = x^2$ одержати графік функції:

а) $y = x^2 + 1$; **б)** $y = x^2 - 6$; **в)** $y = -4\frac{1}{2} + x^2$?

166°. Запишіть координати вершини параболи, що є графіком функції:

а) $y = x^2 - 2{,}5$; **б)** $f(x) = x^2 + 3$;
в) $\varphi(x) = x^2 + 0{,}5$; **г)** $y = -5 + x^2$.

167. Задайте формулою функцію, графік якої одержали внаслідок паралельного перенесення параболи $y = x^2$ вздовж осі $0y$:

а°) на 2 одиниці вгору;
б°) на 1,5 одиниці вниз;
в) спочатку — на 3 одиниці вгору, а потім — на 5 одиниць вниз.

Побудуйте графіки функцій, отримані внаслідок зазначених паралельних перенесень.

168°. При якому значенні b графік функції $y = x^2 + b$ проходить через точку:

а) $B(0; -7)$; **б)** $C(0; 1{,}8)$; **в)** $D(0; 10)$; **г)** $E(0; 0)$?

169. Побудуйте графік функції, визначивши координати вершини відповідної параболи і знайшовши координати принаймні ще шести її точок:

а) $y = x^2 + 3$; **б)** $y = x^2 - 2$;
в) $f(x) = x^2 - 4$; **г)** $y = 1 + x^2$.

170. Виріжте з цупкого паперу або картону шаблон параболи $y = x^2$. Користуючись цим шаблоном, побудуйте графіки функцій, заданих у попередній вправі.

171. На рис. 28 зображено графіки функцій φ і f, кожен з яких є параболою виду $y = x^2$. Задайте функції φ і f формулами (аналітично). Знайдіть координати точок перетину графіка функції f з віссю $0x$.

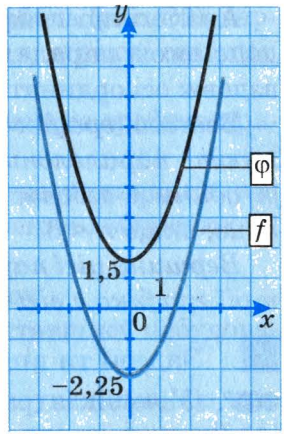


Рис. 28

172*. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

а) $y = x^2 - 3$ і $y = \dfrac{2}{|x|}$, якщо $-2 \le x \le 2$;

б) $y = x^2 - 2$, якщо $|x| < 2$; $y = 2x + 6$, якщо $-3 \le x < 0$; $y = -2x + 6$, якщо $0 \le x \le 3$.

3.3. Графік функції $y = (x + m)^2$

З'ясуємо вигляд і спосіб побудови графіка функції $y = (x + m)^2$, де m — будь-яке відмінне від нуля дійсне число.

① **Який вигляд має графік функції $y = (x + m)^2$.** Встановимо це на прикладі функції $y = (x - 3)^2$. У даному випадку $m = -3$. Як це було зроблено в попередньому пункті для функції $y = x^2 + n$, спробуємо визначити, чи не існує зв'язку між графіками функцій $y = (x - 3)^2$ і $y = x^2$.

Аналізуючи формули $y = x^2$ та $y = (x - 3)^2$, помічаємо, що друга функція набуває такого самого значення, як і перша, при значенні аргументу на 3 одиниці більшому, ніж відповідне значення аргументу для першої функції (рис. 29).

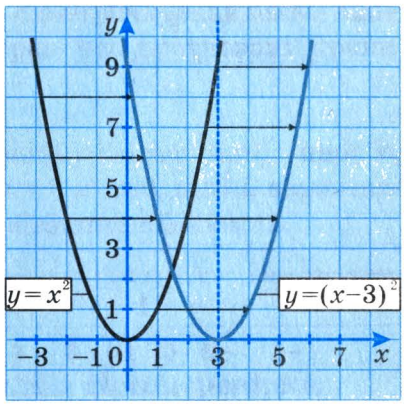


Рис. 29

Наприклад, функція $y = x^2$ при $x = 1$ має значення $y = 1$. Функція $y = (x - 3)^2$ набуває значення $y = 1$, якщо $x = 4$: $y = (4 - 3)^2 = 1$.

Аналогічно, якщо $x = 5$, значення першої функції $y = x^2 = 5^2 = 25$. Очевидно, що значення $y = 25$ функція $y = (x - 3)^2$ набуває при $x = 8$: $y = (8 - 3)^2 = 25$.

Тобто значення функції $y = x^2$ в точці $x = a$ дорівнює значенню функції $y = (x - 3)^2$ в точці $x = a + 3$. Справді, якщо $x = a$, то $y = x^2 = a^2$; якщо $x = a + 3$, то $y = (x - 3)^2 = (a + 3 - 3)^2 = a^2$.

Це означає, що кожна точка графіка функції $y = (x - 3)^2$ лежить на 3 одиниці правіше від точки графіка $y = x^2$ з тією самою ординатою.

Звідси маємо, що графік функції $y = (x - 3)^2$ є параболою, яку отримують внаслідок паралельного перенесення параболи $y = x^2$ вздовж осі абсцис вправо на 3 одиниці (див. рис. 29).

Отже, графіком функції $y = (x - 3)^2$ є парабола з координатами вершини (3; 0) і віссю симетрії $x = 3$, яка є прямою, що паралельна осі ординат і проходить через точку (3; 0).

Аналогічно графік функції $y = (x + 2)^2$ можна отримати за допомогою паралельного перенесення параболи $y = x^2$ вздовж осі абсцис вліво на 2 одиниці (рис. 30).

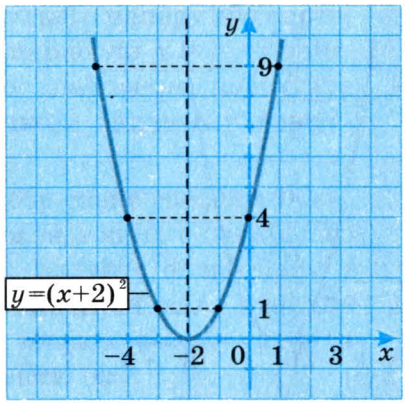


Рис. 30

Взагалі, *графік функції* $y = (x + m)^2$ *є параболою, яку отримують внаслідок паралельного перенесення графіка функції* $y = x^2$ *на* $|m|$ *одиниць уздовж осі* $0x$: *вліво, якщо* $m > 0$, *або вправо, якщо* $m < 0$.

Вершина цієї параболи має координати $(-m; 0)$, *а віссю її симетрії є пряма* $x = -m$.

② **Як побудувати графік функції $y = (x + m)^2$.** Таку побудову виконують на основі встановлених вище положень. Це можна зробити принаймні двома способами. Проілюструємо їх на прикладі побудови графіка функції $y = (x + 2)^2$.

I спосіб.

▽ Знаходимо координати вершини параболи, яка є графіком функції $y = (x + 2)^2$. Оскільки тут $m = 2$, то ці координати такі: $(-2; 0)$.

За знайденими координатами будуємо вершину параболи і через неї проводимо вісь симетрії — пряму, паралельну осі $0y$.

Знаходимо координати і будуємо кілька точок графіка, які лежать праворуч (або ліворуч) від осі симетрії.

$x = -1$, $\quad y = (x + 2)^2 = (-1 + 2)^2 = 1$; $\quad (-1; 1)$;

$x = 0$, $\quad y = (x + 2)^2 = (0 + 2)^2 = 4$; $\quad (0; 4)$;

$x = 1$, $\quad y = (x + 2)^2 = (1 + 2)^2 = 9$; $\quad (1; 9)$.

Будуємо точки, симетричні знайденим відносно осі симетрії.

Проводимо через усі побудовані точки параболу (див. рис. 30). ▲

II спосіб.

▽ Будуємо вершину і вісь симетрії параболи. Прикладаємо шаблон параболи $y = x^2$ так, щоб її вершина і вісь збігалися з побудованими, і обводимо шаблон. ▲

Увага! Одиничні відрізки на шаблоні і на рисунку мають бути однаковими.

Запитання для самоперевірки

1. Що є графіком функції виду $y = (x + m)^2$?
2. Як обґрунтувати, що графік функції $y = (x - 5)^2$ — парабола виду $y = x^2$?
3. В якій послідовності виконують побудову графіка функції виду $y = (x + m)^2$?

Задачі та вправи

173°. (*Усно*) Як із графіка функції $y = x^2$ отримати графік функції:

а) $y = (x - 1)^2$; **б)** $f(x) = (x + 3)^2$;
в) $y = (x - 5)^2$; **г)** $\varphi(x) = (4 + x)^2$?

174. Запишіть координати вершини параболи, яка є графіком функції:

а) $y = (x - 2{,}5)^2$; **б)** $y = x^2 - 2{,}5$; **в)** $y = (x + 5)^2$;
г) $y = x^2 + 1{,}5$; **ґ)** $y = (x + 1{,}5)^2$; **д)** $y = (-10 + x)^2$.

Побудуйте графіки даних функцій.

175. Запишіть рівняння осі симетрії параболи:

а) $y = (x - 1)^2$; **б)** $y = x^2 - 2$; **в)** $y = (x + 1)^2$;
г) $y = (x - 6)^2$; **ґ)** $y = x^2 - 6$; **д)** $y = (x + 11)^2$.

176°. Побудуйте графік функції:

а) $y = (x - 1)^2$; **б)** $y = (3 + x)^2$; **в)** $y = (x + 1{,}5)^2$;
г) $y = (x - 6)^2$; **ґ)** $y = (x + 3{,}5)^2$; **д)** $y = x^2 + 3{,}5$.

177. Задайте формулою функцію, графік якої отримали за допомогою паралельного перенесення параболи $y = x^2$ вздовж осі $0x$:

а°) на 4 одиниці вліво;

б°) на 2 одиниці вправо;

в°) на 7 одиниць вправо;

г) спочатку на 2 одиниці вліво, а потім — на 1 одиницю вправо.

Побудуйте графіки функцій, про які йдеться у пунктах **а) – г)**.

178. Задайте аналітично функцію, графіком якої є парабола виду $y = x^2$ з віссю симетрії:

а) $x = -4,7$; **б)** $x = 2,9$; **в)** $x = 0$.

Побудуйте графіки цих функцій.

179. Запишіть рівняння параболи, яку отримали паралельним перенесенням вздовж осі $0x$ параболи:

а) $y = (x - 2)^2$ на 3 одиниці вправо;

б) $y = (x + 1)^2$ на 2 одиниці вліво;

в) $y = (x - 4)^2$ на 5 одиниць вліво;

г) $y = (x + 7)^2$ на 7 одиниць вправо.

180*. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

$y = x^2$ при $|x| \le 1$; $y = (x - 2)^2$ при $1 < x \le 3$;

$y = (x + 2)^2$ при $-3 \le x < -1$; $y = 2x + 7$ при $-3,5 \le x < -3$;

$y = -2x + 7$ при $3 < x \le 3,5$.

3.4. Графік функції $y = (x + m)^2 + n$

Пригадайте

1. Що є графіком функції $y = (x + m)^2$?
2. Що є графіком функції $y = x^2 + n$?

① **Який вигляд має графік функції $y = (x + m)^2 + n$.** Побудуємо графік функції $y = (x + 2)^2 - 3$. Скористаємося для цього відомостями двох попередніх пунктів.

Помічаємо, що графік цієї функції можна отримати перетвореннями графіка функції $y = x^2$ у такій послідовності:

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{I}} y = (x + 2)^2 \xrightarrow{\text{II}} y = (x + 2)^2 - 3.$$

Перетворення (I) означає паралельне перенесення параболи $y = x^2$ вздовж осі $0x$ вліво на 2 одиниці, а перетворення (II) — паралельне перенесення одержаної параболи вздовж осі симетрії вниз на 3 одиниці. Відповідні побудови показані на рис. 31.

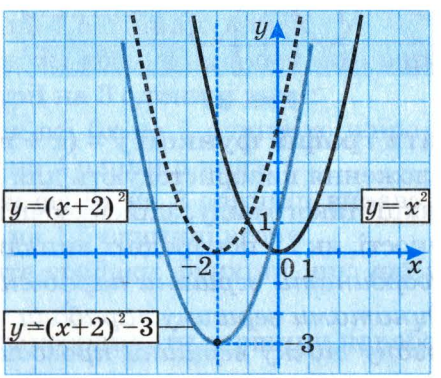


Рис. 31

Аналогічно можна побудувати графік функції $y = (x - 4)^2 + 3$, дотримуючись такої послідовності перетворень (рис. 32):

$$y = x^2 \longrightarrow y = (x - 4)^2 \longrightarrow y = (x - 4)^2 + 3.$$

Взагалі, *графік функції* $y = (x + m)^2 + n$ *є параболою, яку отримують за допомогою двох послідовних паралельних перенесень графіка функції* $y = x^2$: *спочатку — вздовж осі* $0x$ *на* $|m|$ *одиниць (вліво, якщо* $m > 0$, *або вправо, якщо* $m < 0$), *а потім — уздовж нової осі симетрії на* $|n|$ *одиниць (вгору, якщо* $n > 0$, *або вниз, якщо* $n < 0$).

Вершина цієї параболи має координати $(-m; n)$, *а її віссю симетрії є пряма* $x = -m$.

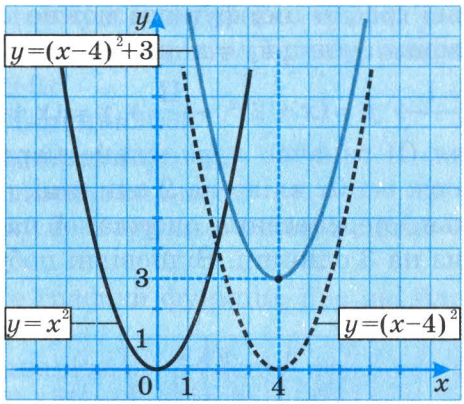


Рис. 32

② **Як побудувати графік функції $y = (x + m)^2 + n$.**

Встановлені положення використовують для побудови графіка будь-якої функції такого виду, здійснюючи побудову в такій самій послідовності, як і в попередніх випадках:

1. *Знаходимо координати вершини параболи і будуємо за знайденими координатами вершину параболи.*

2. *Через побудовану точку вершини проводимо вісь симетрії параболи.*

3. *Будуємо кілька точок графіка, що лежать зліва і справа від осі симетрії.*

4. *Через побудовані точки проводимо параболу.*

За наявності шаблона параболи $y = x^2$ після другого кроку побудови його відповідно прикладають до рисунка і обводять параболу.

Користуючись вказаним алгоритмом, побудуйте самостійно графік функції $y = (x - 1)^2 - 4$.

? Запитання для самоперевірки

1. Що є графіком функції $y = (x + 3{,}5)^2 - 1$?

2. Опишіть послідовність побудови цього графіка.

Задачі та вправи

181°. (*Усно*) Як за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції:

а) $y = (x - 2)^2 + 3$; **б)** $y = (x + 5)^2 + 2$;
в) $y = (x - 4)^2 - 1$; **г)** $y = (x + 2{,}5)^2 - 3$?

182°. Запишіть рівняння параболи, яку отримають за допомогою послідовного паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$:

а) вздовж осі абсцис на 3 одиниці вліво і вздовж нової осі симетрії на 1,5 одиниці вгору;

б) вздовж осі абсцис на 4 одиниці вправо і вздовж нової осі симетрії на 3 одиниці вниз;

в) вздовж осі $0x$ на 1 одиницю вліво і вздовж нової осі симетрії на 4 одиниці вниз;

г) вздовж осі $0x$ на 3 одиниці вправо і вздовж нової осі симетрії на 1,5 одиниці вгору.

Побудуйте графіки функцій, про які йдеться у пунктах **а) – г)**.

183°. Запишіть координати вершини параболи, що є графіком функції:

а) $y = (x - 2)^2 + 1$; **б)** $y = (x + 5)^2 + 2$;
в) $y = (x + 3)^2 - 3$; **г)** $y = (x - 4)^2 - 5$.

Побудуйте графіки даних функцій.

184°. Запишіть рівняння осі симетрії кожної з парабол попередньої вправи.

185. Побудуйте графік функції, використовуючи шаблон параболи $y = x^2$:

а°) $y = (x + 2)^2 - 5$; **б°)** $y = (x - 3)^2 - 2$;
в) $y = (x - 2{,}5)^2 + 4$; **г)** $y = (x + 4)^2 + 3{,}5$;
ґ) $y = (4 - x)^2 - 4$; **д)** $y = (5 + x)^2 + 1$.

186*. Як із графіка функції:

а) $y = (x + 1)^2$ отримати графік функції $y = (x + 1)^2 - 2$;
б) $y = (x + 1)^2 - 4$ отримати графік функції $y = (x + 1)^2 + 3$;
в) $y = (x - 2)^2 + 1$ отримати графік функції $y = (x + 3)^2 + 1$;
г) $y = (x - 4)^2 - 6$ отримати графік функції $y = (x + 2)^2 - 6$?

3.5. Графік функції $y = ax^2$

① **Випадок, якщо $a > 0$.** Розглянемо спочатку графік функції $y = ax^2$ у випадку, якщо $a > 0$.

Побудуємо графік функції $y = 2x^2$.

Для цього проаналізуємо формули, що задають функції $y = x^2$ та $y = 2x^2$. Бачимо, що при одному і тому самому значенні x значення функції $y = 2x^2$ вдвічі більше від значення функції $y = x^2$. Це означає, що кожну точку графіка функції $y = 2x^2$ можна отримати з точки графіка функції $y = x^2$ з тією самою абсцисою, вдвічі збільшивши її ординату (рис. 33).

Кажуть, що графік функції $y = 2x^2$ отримують внаслідок ***розтягнення*** графіка функції $y = x^2$ у 2 рази вздовж осі $0y$. Побудовану таким чином криву теж називають параболою. Вона відрізняється від параболи $y = x^2$ тим, що її гілки стрімкіше піднімаються вгору.

Аналогічно кожну точку графіка функції $y = \frac{1}{4}x^2$ можна отримати з точки графіка функції $y = x^2$ з такою самою абсцисою, зменшивши її ординату в 4 рази (рис. 34).

Кажуть, що графік функції $y = \frac{1}{4}x^2$ отримують внаслідок ***стиснення*** графіка функції $y = x^2$ вздовж осі $0y$ в 4 рази.

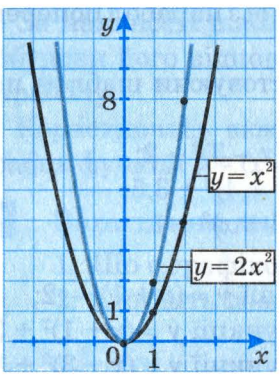


Рис. 33

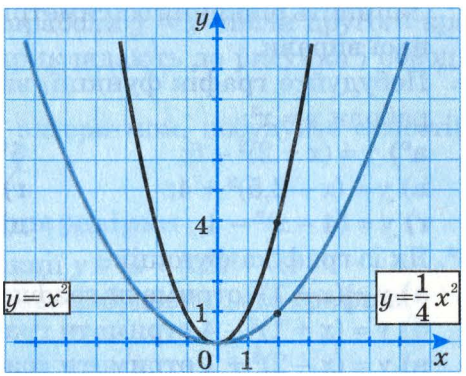


Рис. 34

Чим більший додатний множник a у формулі $y = ax^2$, тим стрімкіше гілки відповідної параболи піднімаються вгору (рис. 35).

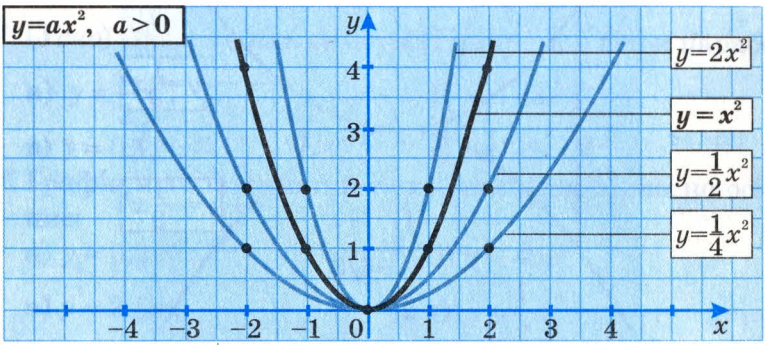


Рис. 35

② **Випадок, якщо $a < 0$.** Розглянемо графік функції $y = ax^2$, якщо $a < 0$.

Побудуємо графік функції $y = -2x^2$.

Проаналізувавши формули $y = 2x^2$ і $y = -2x^2$, помічаємо, що при одних і тих самих значеннях x відповідні значення функції (y) відрізняються лише знаком, тобто є протилежними числами. Відомо, що точки, у яких рівні абсциси і протилежні ординати, симетричні відносно осі $0x$.

Отже, графік функції $y = -2x^2$ симетричний графіку функції $y = 2x^2$ відносно осі абсцис і також є параболою (рис. 36).

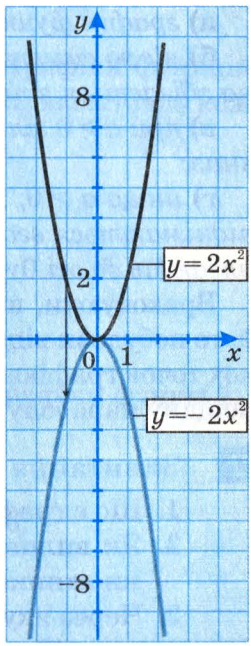


Рис. 36

Аналогічно графік функції $y = -\frac{1}{3}x^2$ симетричний графіку функції $y = \frac{1}{3}x^2$ відносно осі абсцис (рис. 37).

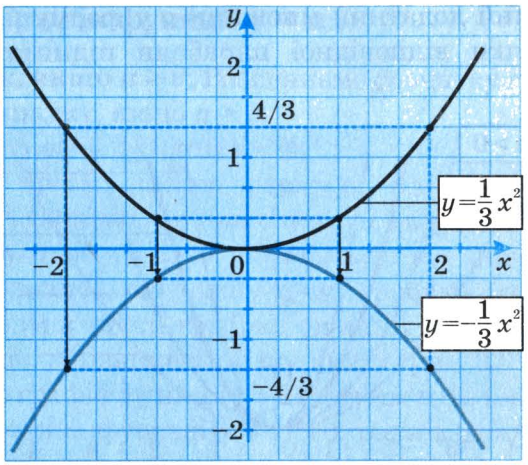


Рис. 37

Таким чином:

а) *графік функції* $y = ax^2$ *є параболою*;

б) *віссю симетрії цієї параболи є вісь ординат, а її вершина збігається з початком координат*;

в) *при* $a > 0$ *гілки параболи спрямовані вгору, а при* $a < 0$ — *вниз;*

г) *якщо* $a > 0$, *то чим більше значення* a, *тим стрімкіше піднімаються вгору гілки відповідної параболи (ближче прилягають до осі* $0y$*).*

Враховуючи, що графіком функції $y = ax^2$ є парабола, для його побудови відомим способом визначають координати кількох точок графіка, будують їх, а потім проводять через них відповідну параболу.

Запитання для самоперевірки

1. Що є графіком функції $y = ax^2$?
2. Як впливає на вигляд графіка функції $y = ax^2$ знак множника a?
3. Через яку точку проходять графіки всіх функцій виду $y = ax^2$?

4. Гілки якої з парабол ближче прилягають до осі ординат: $y = 2{,}5x^2$ чи $y = 4x^2$?

Задачі та вправи

187°. (*Усно*) Вкажіть вісь симетрії і напрямок гілок параболи:

а) $y = \frac{1}{2}x^2$; **б)** $y = -3x^2$;

в) $y = 0{,}1x^2$; **г)** $y = -2x^2$.

188°. Графік якої із функцій є симетричним відносно осі абсцис:

а) $y = 0{,}2x^2$; **б)** $y = -3x^2$;

в) $y = 2{,}5x^2$; **г)** $y = \frac{1}{3}x^2$;

ґ) $y = -\frac{5}{2}x^2$; **д)** $y = -\frac{1}{5}x^2$?

Побудуйте графіки даних функцій.

189°. В одній системі координат побудуйте графіки функцій, попередньо встановивши координати кількох точок кожного з них:

а) $y = \frac{1}{2}x^2$ і $y = 3x^2$;

б) $y = -1{,}5x^2$ і $y = -\frac{1}{4}x^2$;

в) $y = \frac{2}{3}x^2$ і $y = -\frac{2}{3}x^2$.

190. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

$y = \frac{1}{2}x^2$ і $y = -\frac{1}{2}x^2$ при $-2 \le x \le 2$;

$y = \frac{1}{2}(x-4)^2$ і $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2$ при $2 < x \le 6$;

$y = 2x + 6$ і $y = -2x - 6$ при $-3 < x < -2$;

$y = 2x - 14$ і $y = -2x + 14$ при $6 < x \le 7$.

191. Порівняйте між собою значення множників a_1, a_2, a_3, a_4 (рис. 38).

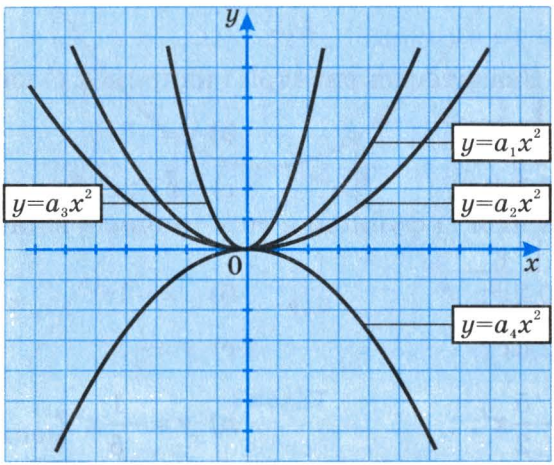


Рис. 38

3.6. Графік функції $y = a(x + m)^2 + n$

Пригадайте

Які перетворення графіка функції $y = x^2$ слід здійснити, щоб отримати графік функції:

а) $y = x^2 + n$; **б)** $y = (x + m)^2$;

в) $y = (x + m)^2 + n$; **г)** $y = ax^2$?

① **Який вигляд має графік функції $y = a(x + m)^2$.** З'ясуємо це спочатку на прикладі графіка функції $y = 2(x + 1)^2$. Спробуємо отримати його за допомогою перетворення графіка функції $y = x^2$. Природний шлях видається таким:

$$y = x^2 \longrightarrow y = (x + 1)^2 \longrightarrow y = 2(x + 1)^2.$$

Це означає паралельне перенесення графіка функції $y = x^2$ вздовж осі $0x$ вліво на 1 одиницю з наступним розтягненням його вздовж нової осі симетрії у 2 рази (рис. 39).

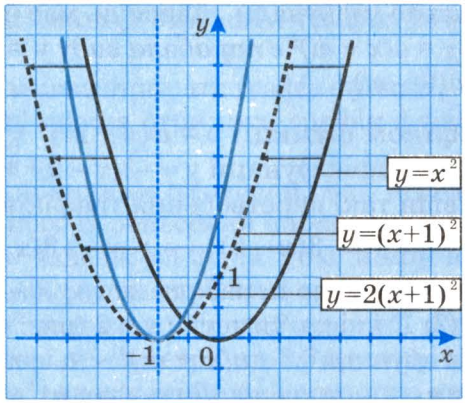


Рис. 39

До такого ж результату можна прийти, дотримуючись і такої послідовності перетворень (рис. 40):

$$y = x^2 \longrightarrow y = 2x^2 \longrightarrow y = 2(x + 1)^2.$$

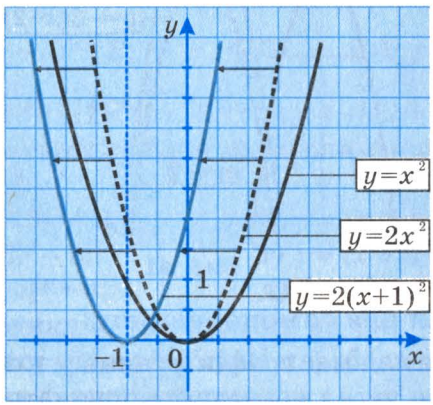


Рис. 40

Тобто, графіком функції $y = 2(x + 1)^2$ є парабола виду $y = 2x^2$, паралельно перенесена вздовж осі $0x$ вліво на 1 одиницю.

Аналогічно міркуючи, можна побудувати графік функції $y = -1{,}5(x - 2)^2$. Зробіть це самостійно.

На основі розглянутих прикладів спробуйте сформулювати висновок про форму і розміщення графіка функції $y = a(x + m)^2$.

Якщо ви правильно міркували, відповідь має бути такою: *графіком функції $y = a(x + m)^2$ є парабола виду $y = ax^2$ з координатами вершини* $(0; -m)$.

② **Що є графіком функції $y = a(x + m)^2 + n$.** Враховуючи викладене вище, графік функції $y = -3(x - 2)^2 + 1$ можна побудувати, виконавши такі перетворення графіків:

$$y = -3x^2 \longrightarrow y = -3(x - 2)^2 \longrightarrow y = -3(x - 2)^2 + 1.$$

У результаті отримаємо параболу виду $y = -3x^2$ з координатами вершини (2; 1) і віссю симетрії $x = 2$ (рис. 41).

Отже, *графік функції $y = a(x + m)^2 + n$ є параболою виду $y = ax^2$, вершина якої має координати $(-m; n)$, а віссю симетрії є пряма $x = -m$.*

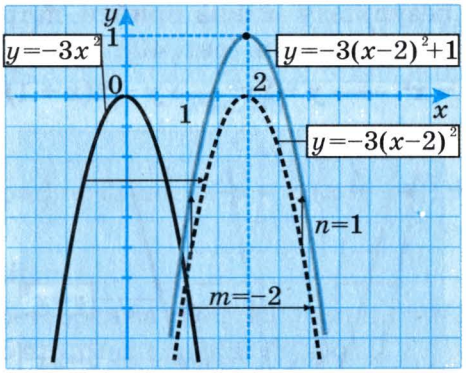


Рис. 41

Запитання для самоперевірки

1. Який вигляд має графік функції $y = a(x + m)^2 + n$?
2. Яка пара чисел позначає координати вершини параболи, що є графіком функції $y = a(x + m)^2 + n$:
   а) $(m; n)$; **б)** $(m; -n)$; **в)** $(-m; n)$; **г)** $(-m; -n)$?
3. Як побудувати графік функції $y = a(x + m)^2 + n$?

Задачі та вправи

192°. За допомогою яких перетворень графіка функції:
а) $y = 2x^2$ можна отримати графік функції $y = 2(x - 2)^2 - 1$;

б) $y = 0{,}5x^2$ можна отримати графік функції $y = 0{,}5(x + 5)^2 - 3$;

в) $y = -4x^2$ можна отримати графік функції $y = -4(x + 3)^2 + 2$;

г) $y = 3{,}5x^2$ можна отримати графік функції $y = -3{,}5(x - 0{,}5)^2 + 4$?

193°. Запишіть рівняння параболи, яку отримали внаслідок паралельного перенесення параболи:

а) $y = 0{,}7x^2$ вздовж осі $0x$ на 2,5 одиниці вліво, а потім — уздовж нової осі симетрії на 5 одиниць униз;

б) $y = 0{,}2x^2$ вздовж осі $0x$ на 3 одиниці вправо, а потім — уздовж нової осі симетрії на 3,5 одиниці вниз;

в) $y = -2{,}5x^2$ вздовж осі $0x$ на 1 одиницю вправо, а потім — уздовж нової осі симетрії на 4 одиниці вгору;

г) $y = -1{,}7x^2$ вздовж осі $0x$ на 6 одиниць вліво, а потім — уздовж нової осі симетрії на 0,5 одиниці вгору.

194°. Запишіть координати вершини та рівняння осі симетрії параболи:

а) $y = 1{,}6(x - 5)^2 + 2$;

б) $y = 2{,}4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - 4{,}8$;

в) $y = (x - 10)^2 - 15$;

г) $y = -3(x + 8)^2 + 2$.

195°. Використовуючи шаблон параболи $y = x^2$, побудуйте графік функції:

а) $y = (x - 2{,}5)^2 + 3$;

б) $y = (x + 4)^2 - 2$;

в) $y = (x - 2)^2 - 3$;

г) $y = (x + 3{,}5)^2 + 1$;

ґ) $y = -(x + 1)^2 + 4$;

д) $y = 2 - (x - 3)^2$.

196. Графіки функцій, зображених на рис. 42–46, побудовано з використанням шаблона параболи $y = 0{,}5x^2$. Задайте кожну з цих функцій формулою.

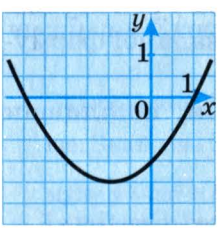


Рис. 42

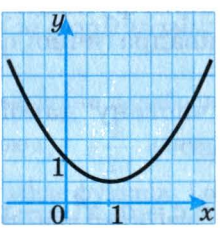


Рис. 43

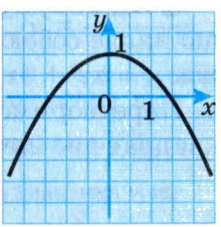


Рис. 44

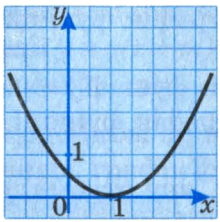


Рис. 45

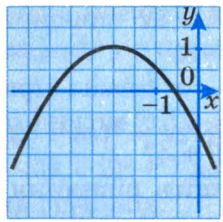


Рис. 46

197. Використовуючи шаблон параболи $y = \frac{1}{3}x^2$, побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 4$; **б)** $y = \frac{1}{3}(x-1)^2 + 2$;

в) $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 1$; **г)** $y = \frac{1}{3}(x+2,5)^2 - 1,5$.

3.7. Графік функції $y = ax^2 + bx + c$

Пригадайте

1. Які координати має вершина параболи, що є графіком функції $y = c\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - 5mn$?

2. Яка пряма є віссю симетрії параболи:

а) $x = \frac{b}{2}$; **б)** $x = 5mn$; **в)** $x = -5mn$; **г)** $x = -\frac{b}{2}$?

3. Як записати у вигляді квадрата двочлена тричлен:

а) $x^2 + 10x + 25$; **б)** $x^2 + 5x + 6,25$?

① **Як побудувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$.** З'ясуємо, що являє собою графік квадратичної функції, заданої формулою $y = ax^2 + bx + c$.

Перетворимо праву частину даної формули, виділивши квадрат двочлена. Маємо:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\underline{x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\underline{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Отже, *формули* $y = ax^2 + bx + c$ *та* $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ *задають одну і ту саму функцію.*

Порівнюючи останню формулу з формулою $y = (x + m)^2 + n$, бачимо, що це формули одного і того самого виду, де $m = \frac{b}{2a}$, а $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Оскільки графік функції $y = a(x + m)^2 + n$ є параболою виду $y = ax^2$ з координатами вершини $(-m; n)$ і віссю симетрії $x = -m$, то і графік функції $y = ax^2 + bx + c$ є параболою виду $y = ax^2$ з координатами вершини $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ і віссю симетрії $x = -\frac{b}{2a}$.

Узагальнюючи матеріал, розглянутий у цьому і в попередніх пунктах, можемо описати загальний спосіб побудови графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$.

1. *Будуємо вершину параболи, що є графіком цієї функції, обчисливши її координати за формулами:* $x_в = -\frac{b}{2a}$, $y_в = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Зауваження. Ординату вершини параболи можна обчислити й інакше. Знайдене за формулою $x_в = -\frac{b}{2a}$ значення x підставляють у формулу $y = ax^2 + bx + c$, яка задає функцію, і обчислюють значення y, що і є шуканою ординатою вершини параболи.

2. *Проводимо через побудовану вершину параболи вісь симетрії параболи — пряму, паралельну осі* $0y$.

3. *Будуємо кілька точок, що належать графіку даної функції. Для обчислення їх координат треба взяти кілька значень змінної* x, *розміщених на осі* $0x$ *справа або зліва від осі симетрії параболи, і знайти відповідні значення змінної* y. *Потім за знайденими координатами будуємо точки графіка функції, а також точки, симетричні їм відносно осі симетрії параболи.*

4. *Через побудовані точки проводимо параболу.*

② **Приклади побудови графіків квадратичних функцій.** Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = 2x^2 - 4x - 1$.

▽ *Побудова.* Знаходимо координати вершини параболи:

$$x_в = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1; \quad y_в = \frac{4 \cdot 2 \cdot (-1) - (-4)^2}{4 \cdot 2} = -3.$$

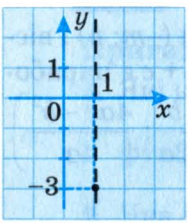


Рис. 47

Будуємо вершину параболи і через неї проводимо вісь симетрії параболи (рис. 47).

Надамо змінній x кількох значень, розміщених на осі абсцис зліва від осі симетрії (на рис. 47 видно, що саме ці значення зручніше брати для обчислень, а не ті, які розміщені справа від осі), і знайдемо відповідні значення y. Маємо:

$x = 0{,}5$; $\quad y = 2 \cdot (0{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}5 - 1 = 0{,}5 - 2 - 1 = -2{,}5$;
$x = 0$; $\quad y = 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 1 = -1$;
$x = -0{,}5$; $\quad y = 2 \cdot (-0{,}5)^2 - 4 \cdot (-0{,}5) - 1 = 0{,}5 + 2 - 1 = 1{,}5$;
$x = -1$; $\quad y = 2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$.

Будуємо точки за встановленими координатами (0,5; –2,5), (0; –1), (–0,5; 1,5), (–1; 5), а також точки, симетричні їм відносно осі параболи.

Через побудовані точки проводимо параболу (рис. 48). ▲

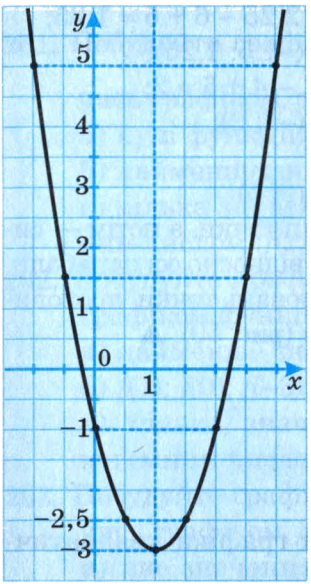


Рис. 48

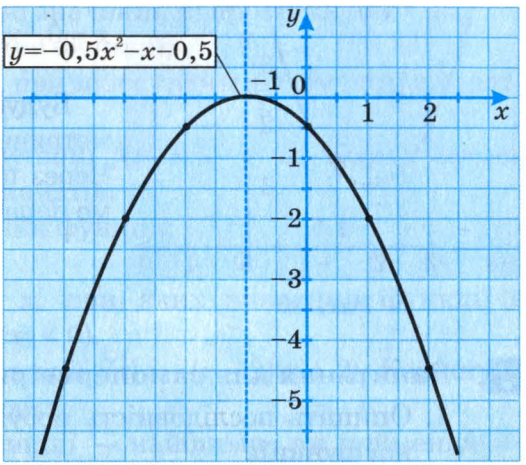


Рис. 49

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = -0{,}5x^2 - x - 0{,}5$.

▽ *Побудова.* Координати вершини параболи:

$x_в = -\frac{-1}{-1} = -1;$ $\quad y_в = -0{,}5 \cdot (-1)^2 + 1 - 0{,}5 = 0;$ $\quad (-1; 0).$

Вісь параболи: $x = -1$. Координати кількох точок справа від осі:

$x = 0,$ $\quad y = -0{,}5;$ $\quad (0; -0{,}5);$

$x = 1,$ $\quad y = -0{,}5 - 1 - 0{,}5 = -2;$ $\quad (1; -2);$

$x = 2,$ $\quad y = -0{,}5 \cdot 4 - 2 - 0{,}5 = -4{,}5;$ $\quad (2; -4{,}5).$

Будуємо ці точки, а також точки, симетричні їм відносно осі параболи, і через побудовані точки проводимо графік функції (рис. 49). ▲

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = x^2 + 4x + 5$.

▽ *Побудова.* Координати вершини параболи:

$x_в = \frac{-4}{2} = -2;$ $\quad y_в = 4 - 8 + 5 = 1;$ $\quad (-2; 1).$

Вісь параболи: $x = -2$.

Координати ще кількох точок параболи:

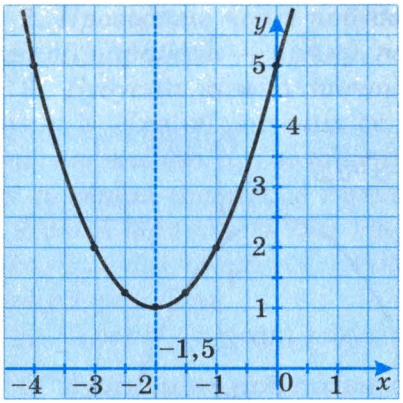


Рис. 50

$x = -1{,}5$, $y = 2{,}25 - 6 + 5 = 1{,}25$;
$(-1{,}5;\ 1{,}25)$;
$x = -1$, $y = 1 - 4 + 5 = 2$;
$(-1;\ 2)$;
$x = 0$, $y = 5$;
$(0;\ 5)$.

Будуємо ці точки, а потім — симетричні їм відносно осі параболи. Через побудовані точки проводимо параболу (рис. 50). ▲

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть послідовність побудови графіка квадратичної функції.
2. Як обчислюють координати вершини параболи, що є графіком функції $y = ax^2 + bx + c$?

Задачі та вправи

198°. Зобразіть схематично графік функції, обчисливши попередньо координати вершини відповідної параболи і з'ясувавши напрям її гілок:

а) $y = x^2 - 4x + 5$; **б)** $y = x^2 + 4x + 3$;
в) $y = -x^2 - 2x + 3$; **г)** $y = -x^2 + 5x - 3{,}25$;
ґ) $y = 3x^2 - 9x$; **д)** $y = 2(x - 1)(x + 2)$.

199. Побудуйте графік функції:

а°) $y = x^2 + 6x - 8$; **б°)** $y = x^2 - 4x + 4$;
в) $y = -x^2 + 5x - 4{,}25$; **г°)** $y = -x^2 - 4x - 5$;
ґ°) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 1$; **д°)** $y = 2(x - 3)^2 - 4$.

200. Побудуйте графік функції:

а) $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$; **б)** $y = 0{,}25x^2 - 2x + 4$;
в) $f(x) = (2x + 2)(x - 3)$; **г)** $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$.

201. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) нулі функції, тобто значення x, при яких $f(x) = 0$;

б) найменше значення функції;

в) кілька значень x, при яких значення функції є додатним числом ($f(x) > 0$).

202. Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 + 4x$. Користуючись графіком функції, знайдіть:

а) найменше значення функції;

б) $f(1)$; $f(0)$; $f(-3)$;

в) кілька значень x, при яких значення функції є від'ємним числом ($f(x) < 0$).

203. Побудуйте графік функції $f(x) = -(x - 2)(x + 2)$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) яке значення функції — найбільше чи найменше — можна вказати і запишіть його;

б) декілька значень x, при яких значення функції додатні, і запишіть їх.

204. При яких значеннях a і b графік функції $y = ax^2 + bx$ проходить через точки:

а) $A(2; 4)$ і $B(1; 1)$; **б)** $C(1; 3)$ і $D(-1; 2)$?

205*. Графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ — парабола, що проходить через точку $A(2; 1)$ і має вершину в точці $B(4; 3)$. Знайдіть значення a, b і c.

206*. Арка моста має форму параболи. Складіть рівняння цієї параболи, якщо висота арки дорівнює 8 м, а відстань між опорами — 24 м (рис. 51).

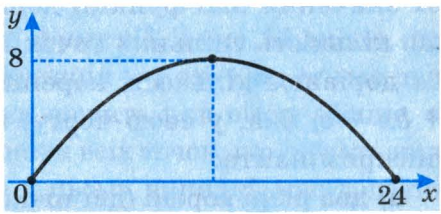


Рис. 51

§4. Дослідження квадратичної функції і перетворення графіків функцій

4.1. Властивості квадратичної функції

① **Нулі функції.** Ви, очевидно, помітили, що парабола, яка є графіком квадратичної функції, може по-різному розміщуватися відносно осі абсцис: перетинати її у двох точках, як, наприклад, на рис. 48, дотикатися до осі в одній точці (рис. 49), повністю знаходитися над віссю абсцис (рис. 50) або під нею. З'ясуємо, від чого залежить таке розміщення графіка.

Ви знаєте, що спрямування гілок параболи визначається знаком коефіцієнта a: якщо $a > 0$, то гілки параболи спрямовані вгору, а якщо $a < 0$, то — вниз.

Враховуючи, що в точці перетину графіка функції з віссю $0x$ значення цієї функції дорівнює нулю, робимо висновок, що кількість спільних точок параболи $y = ax^2 + bx + c$ й осі $0x$ дорівнює кількості коренів квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, яка, у свою чергу, визначається значенням його дискримінанта:

а) два різні корені (дві точки перетину), якщо $D > 0$;

б) один корінь (одна спільна точка — точка дотику), якщо $D = 0$;

в) жодного кореня (жодної спільної точки), якщо $D < 0$.

Усі можливі випадки розміщення графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі $0x$ зображені на рис. 52.

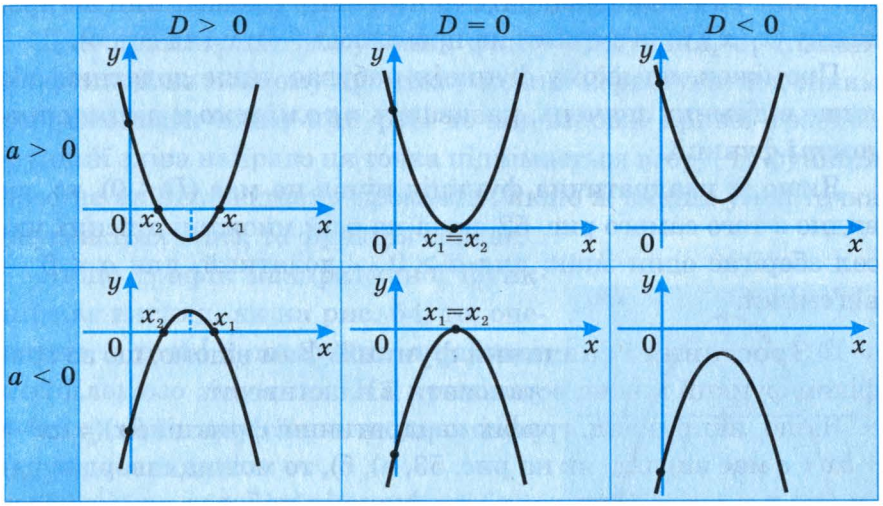


Рис. 52

Значення аргументу, при яких значення функції дорівнюють нулю, називають ***нулями функції***.

Наприклад, нулем функції $f(x) = 3x - 6$ є число 2 (кажуть ще, точка $x = 2$), бо $f(2) = 3 \cdot 2 - 6 = 0$.

Нулем функції $\varphi(x) = x^3$ є точка $x = 0$, бо $\varphi(0) = 0$.

З розглянутого вище випливає, що квадратична функція може мати два нулі, один або жодного.

② **Проміжки знакосталості функції.** З рис. 52 видно, що у випадку, коли квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ має два нулі, то одна частина її графіка лежить над віссю абсцис, а інша — під нею. Оскільки ординати всіх точок, що лежать над віссю $0x$, додатні, то функція y в цьому випадку має додатні значення.

Якщо ж точки графіка лежать під віссю абсцис, то відповідні значення функції — від'ємні. Очевидно, що для $a > 0$

значення квадратичної функції є додатними на проміжках $(-\infty; x_1)$ та $(x_2; \infty)$ і від'ємними на проміжку $(x_1; x_2)$. Для $a < 0$ — навпаки: значення квадратичної функції є додатними на проміжку $(x_1; x_2)$ і від'ємними на проміжках $(-\infty; x_1)$ та $(x_2; \infty)$.

Проміжок, на якому функція набуває лише додатних або лише від'ємних значень, називають ***проміжком знакосталості*** функції.

Якщо ж квадратична функція нулів не має ($D < 0$), то, як видно з того самого рис. 52, вона на всій множині дійсних чисел зберігає один знак: для $a > 0$ — додатний, для $a < 0$ — від'ємний.

② **Зростання і спадання функції.** Вам відомо, що за графіком функції можна встановити її властивості.

Якщо, наприклад, графік квадратичної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$ має вигляд, як на рис. 53, а), б), то можна стверджувати, що в точці x_0 (при $x = x_0$) ця функція набуває *найменшого значення*.

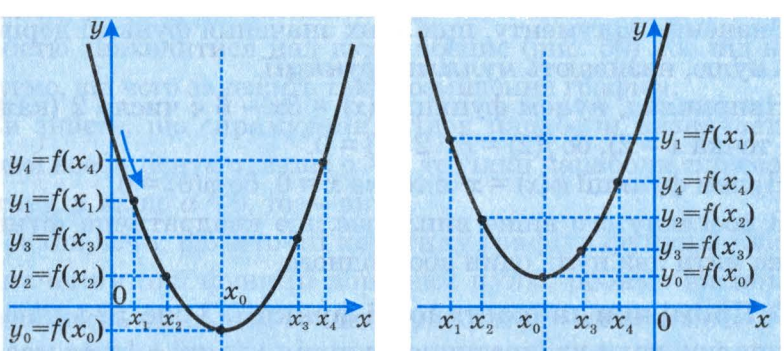


Рис. 53

Крім того, на проміжку $(-\infty; x_0)$ ***більшому значенню x*** $(x_2 > x_1)$ ***відповідає менше значення функції*** $(f(x_2) < f(x_1))$. У цьому випадку кажуть, що функція ***спадає*** на даному проміжку.

На проміжку $(x_0; \infty)$ ***більшому значенню x*** $(x_4 > x_3)$ ***відповідає більше значення функції*** $(f(x_4) > f(x_3))$. У цьому випадку кажуть, що функція ***зростає*** на даному проміжку.

Для практичного з'ясування факту зростання чи спадання функції на певному проміжку можна користуватися таким твердженням: якщо при русі точки вздовж кривої графіка функції зліва направо ця точка піднімається вгору, то функція зростає на відповідному проміжку; якщо ж за цих умов точка опускається вниз, то функція спадає.

Якщо графік квадратичної функції має вигляд, як на рис. 54, то, очевидно, в точці x_0 ця функція набуває *найбільшого значення*. На проміжку $(-\infty; x_0)$ вона зростає, а на проміжку $(x_0; \infty)$ — спадає.

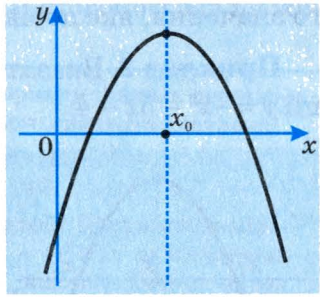


Рис. 54

Точку, в якій відбувається перехід від зростання функції до спадання, або навпаки — від спадання до зростання (в розглянутому випадку — це точка x_0) називають ***точкою екстремуму*** функції.

Очевидно, якщо гілки параболи, яка є графіком квадратичної функції, спрямовані вгору, то в точці екстремуму функція набуває найменшого значення; якщо ж гілки графіка квадратичної функції спрямовані вниз, то в точці екстремуму функція набуває найбільшого значення. Це значення дорівнює ординаті вершини параболи, яка є графіком даної квадратичної функції.

Процес встановлення властивостей функції називають ***дослідженням*** функції.

③ **Приклади дослідження функцій.** Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. З'ясувати, якого значення (найбільшого чи найменшого) набуває функція $y = 1{,}5x^2 - 6x + 1$ в точці екстремуму і обчислити це значення.

▽ *Розв'язання.* Оскільки $a = 1{,}5 > 0$, то гілки параболи, яка є графіком цієї функції, спрямовані вгору. Отже, в точці екстремуму функція набуває найменшого значення. Обчислимо його:

$$x_0 = -\frac{-6}{3} = 2; \qquad y_0 = 1{,}5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 1 = -5.$$

Відповідь. У точці екстремуму функція набуває найменшого значення, яке дорівнює –5. ▲

Приклад 2. Вказати інтервали зростання і спадання функції $y = -x^2 - 5x - 4$.

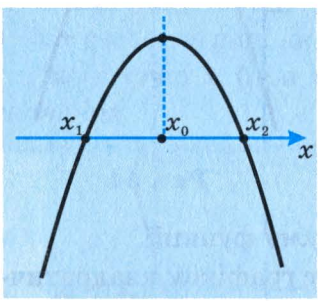


Рис. 55

▽ *Розв'язання.* Оскільки гілки параболи, що є графіком даної функції, спрямовані вниз (схематично його можна зобразити так, як на рис. 55), то на проміжку $(-\infty; x_0)$, де x_0 — абсциса вершини параболи, функція зростає, а на проміжку $(x_0; \infty)$ — спадає. Знайдемо x_0:

$$x_0 = -\frac{-5}{-2} = -2{,}5.$$

Відповідь. Функція $y = -x^2 - 5x - 4$ зростає на проміжку $(-\infty; -2{,}5)$ і спадає на проміжку $(-2{,}5; \infty)$. ▲

Приклад 3. Якої довжини мають бути сторони прямокутника з периметром 16 см, щоб його площа була найбільшою?

▽ *Розв'язання.* Позначимо одну зі сторін шуканого прямокутника через x. Тоді довжина другої сторони становитиме $8 - x$, а площа дорівнюватиме добутку $x(8 - x)$.

Математично задачу можна сформулювати так: при якому значенні x вираз $x(8 - x)$, або функція $y = x(8 - x)$, набуває най-

більшого значення, враховуючи, що $x > 0$ і $8 - x > 0$ (як довжини сторін прямокутника)?

Оскільки $x(8 - x) = 8x - x^2 = -x^2 + 8x$, то $y = -x^2 + 8x$. Гілки параболи, що є графіком цієї функції, спрямовані вниз, тому найбільшого значення вона набуває в точці x_0, що є абсцисою вершини параболи. Знайдемо її.

$$x_0 = -\frac{8}{-2} = 4; \quad 8 - x = 8 - 4 = 4.$$

Відповідь. Кожна зі сторін прямокутника дорівнює 4 см, тобто шуканий прямокутник є квадратом зі стороною завдовжки 4 см. ▲

Зауваження. Шуканий результат можна одержати інакше, перетворивши вираз $-x^2 + 8x$ шляхом виділення з нього квадрата двочлена:

$$-x^2 + 8x = -(x^2 - 8x) = -(x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 - 4^2) =$$
$$= -((x - 4)^2 - 16) = 16 - (x - 4)^2.$$

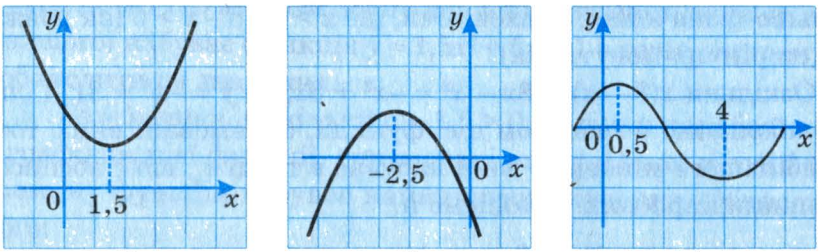
Одержаний вираз набуває найбільшого значення 16 при найменшому значенні від'ємника $(x - 4)^2$. Оскільки $(x - 4)^2 \geq 0$, то найменше значення цього виразу дорівнює нулю. Саме такого значення вираз набуває при $x = 4$.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке нулі функції?
2. Скільки нулів може мати квадратична функція?
3. Що називають проміжком знакосталості функції?
4. За яких умов стверджують, що функція на даному проміжку:
   а) зростає; **б)** спадає?

Задачі та вправи

207°. За графіками функцій, зображеними на рис. 56, а)–в), встановіть проміжки зростання і спадання відповідних функцій та проміжки знакосталості.



а) б) в)

Рис. 56

208°. Побудуйте графік функції $y = x^2 - x - 2$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) нулі функції;

б) проміжки зростання і спадання функції;

в) найбільше або найменше значення, якого може набувати дана функція.

Встановіть точність побудови графіка, порівнявши попередній результат з результатом, одержаним аналітичним способом, тобто шляхом розв'язання відповідного квадратного рівняння.

209. Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 2$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) координати точки його перетину з віссю ординат, перевіривши точність аналітичним способом;

б) проміжки зростання і спадання функції;

в) найменше (найбільше) значення функції.

210. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) найменше значення функції;

б) проміжок, на якому функція зростає;

в) значення x, при яких $f(x) < 0$;

г) $f(0)$; $f(-2)$; $f(1)$; $f(-4)$.

211. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) нулі функції;

б) проміжки зростання і спадання;

в) розв'язки нерівності $f(x) > 0$;

г) найбільше (найменше) значення цієї функції.

212. Не будуючи графіка функції $y = -x^2 - 4x + 8$, знайдіть:

а) проміжки її зростання і спадання;

б) найбільше або найменше значення функції.

213. Виконайте завдання попередньої вправи для функції:

а) $y = 2x^2 - 6x + 1$; **б)** $y = 3x^2 - 6x + 2$;

в) $y = -3x^2 + 12x + 1$; **г)** $f(x) = 18x - x^2$;

ґ) $y = x(30 - x)$; **д)** $f(x) = x(7 - 2x)$.

214°. Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = 50x - x^2$.

215. Знайдіть найбільше значення добутку двох додатних чисел, сума яких дорівнює 50. Чим ця задача подібна до попередньої?

216. Число 15 запишіть у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб їх добуток був найбільшим.

217*. Сума двох додатних чисел дорівнює 10. Знайдіть ці числа, щоб сума їх кубів була найменшою.

218. Якими мають бути розміри прямокутника, периметр якого дорівнює 24 см, аби площа його була найбільшою?

219. Ділянку прямокутної форми, що прилягає до стіни будинку (рис. 57), треба обгородити парканом завдовжки 20 м так, аби площа ділянки була найбільшою. Які розміри повинна мати ділянка?

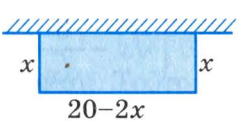


Рис. 57

220*. Чи може прямокутник, периметр якого дорівнює 44 м, мати площу:

а) 120 м^2; **б)** 125 м^2?

221*. Серед усіх прямокутників, площа кожного з яких дорівнює 64 см^2, знайдіть прямокутник з найменшим периметром.

▽ *Розв'язання.* Позначимо одну зі сторін шуканого прямокутника через x см, тоді друга сторона становитиме $\frac{64}{x}$ см. З'ясуємо, при якому додатному x сума $x+\frac{64}{x}$ набуватиме найменшого значення. Перетворимо цю суму, подавши її спочатку як суму квадратів двох виразів, а потім доповнивши її до квадрата двочлена:

$$x+\frac{64}{x}=\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\frac{8}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{8}{\sqrt{x}}+\left(\frac{8}{\sqrt{x}}\right)^2+2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{8}{\sqrt{x}}=$$

$$=\left(\sqrt{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}\right)^2+2\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{8}{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}\right)^2+16.$$

Вираз $\left(\sqrt{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}\right)^2+16$ набуває найменшого значення при тих самих значеннях x, що й доданок $\left(\sqrt{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}\right)^2$. Найменше значення виразу $\left(\sqrt{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}\right)^2$ дорівнює нулю.

З'ясуємо, при якому значенні x це досягається.

$$\left(\sqrt{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}\right)^2=0;\ \sqrt{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}=0;\ \frac{x-8}{\sqrt{x}}=0;\ x-8=0;\ x=8.$$

Отже, довжина однієї зі сторін шуканого прямокутника дорівнює 8 см; довжина другої — $\frac{64}{8}=8$ (см).

Відповідь. Шуканий прямокутник — це квадрат зі стороною завдовжки 8 см. ▲

222*. Добуток двох додатних чисел дорівнює 25. Якого найменшого значення і за яких умов може набувати їх сума?

223*. Добуток двох додатних чисел дорівнює 36. Чи може їх сума бути меншою від 12?

224*. Сума $2x + y$ дорівнює 20. Якого найбільшого значення може набувати добуток xy? Визначте відповідні значення x та y.

4.2. Перетворення графіків функцій

Пригадайте

1. Яке перетворення графіка функції $y = x^2$ слід здійснити, щоб отримати графік функції:
   а) $y = x^2 + 4$; **б)** $y = x^2 - 3$?
2. Яке перетворення графіка функції $y = x^2$ слід здійснити, щоб отримати графік функції:
   а) $y = (x - 6)^2$; **б)** $y = (x + 3)^2$?
3. Яке перетворення графіка функції $y = x^2$ слід здійснити, щоб отримати графік функції:
   а) $y = 2x^2$; **б)** $y = \frac{1}{3}x^2$?

① **Перетворення $y = f(x) \longrightarrow y = f(x) + n$.** У процесі розгляду окремих видів квадратичної функції було встановлено, що *додавання до значень функції* $y = x^2$ певного числа n приводить до утворення нової функції $y = x^2 + n$, графік якої отримують внаслідок паралельного перенесення графіка початкової функції вздовж осі ординат на $|n|$ одиниць вгору або вниз, залежно від знака n.

Це твердження правильне для будь-якої функції. Тобто:

графік функції $y = f(x) + n$ отримують унаслідок паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ вздовж осі $0y$ на $|n|$ одиниць: вгору, якщо $n > 0$, і вниз, якщо $n < 0$.

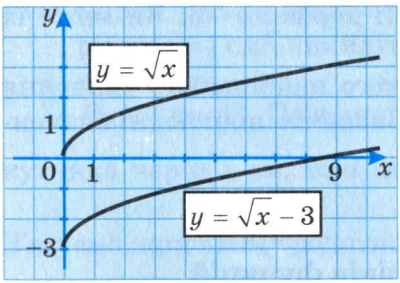


Рис. 58

З цього випливає, що графіком, наприклад, функції $y = \sqrt{x} - 3$ є крива, яку отримують унаслідок паралельного перенесення графіка функції $y = \sqrt{x}$ вздовж осі ординат на 3 одиниці вниз (рис. 58).

② **Перетворення $y = f(x) \longrightarrow y = f(x + m)$.** Відомо, що *додавання до значень аргументу функції* $y = x^2$ певного числа m приводить до утворення нової функції $y = (x + m)^2$, графік якої отримують унаслідок паралельного перенесення графіка першої функції вздовж осі абсцис на $|m|$ одиниць вліво чи вправо, залежно від знака m.

Таку ж властивість мають графіки всіх аналогічно утворених функцій. Тобто:

графік функції $y = f(x + m)$ отримують унаслідок паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ вздовж осі абсцис на $|m|$ одиниць: вліво, якщо $m > 0$, і вправо, якщо $m < 0$.

Отже, графік функції $y = \sqrt{x - 3}$ можна отримати внаслідок паралельного перенесення графіка функції $y = \sqrt{x}$ вздовж осі абсцис на 3 одиниці вправо (рис. 59).

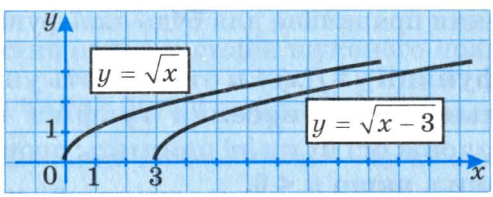


Рис. 59

③ **Перетворення $y = f(x) \longrightarrow y = kf(x)$.** На с. 78-80 було з'ясовано вплив значення коефіцієнта a на форму графіка функції $y = ax^2$. Аналогічно коефіцієнт k впливає на форму графіка функції $y = kf(x)$:

графік функції $y = kf(x)$ отримують унаслідок розтягнення графіка функції $y = f(x)$ вздовж осі ординат у k разів, якщо $k > 1$, або внаслідок відповідного його стиснення, якщо $0 < k < 1$.

Цю властивість ілюструє рис. 60.

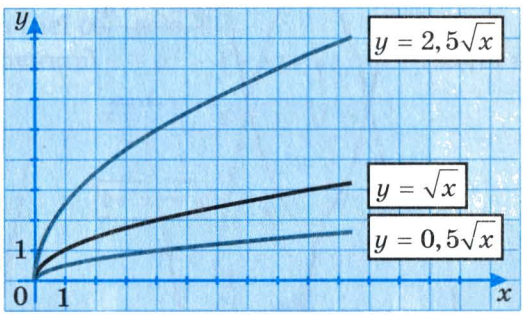


Рис. 60

④ **Перетворення $y = f(x) \longrightarrow y = -f(x)$.** У п. 3.5 (с. 78-80) було встановлено, що графіки функцій $y = 2x^2$ і $y = -2x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ і $y = -\frac{1}{3}x^2$ симетричні відносно осі абсцис, бо при одних і тих самих значеннях x значення відповідних функцій відрізняються лише знаком.

Точки, абсциси яких рівні між собою, а ординати — протилежні числа, симетричні відносно осі абсцис. Аналогічний висновок можна зробити стосовно усіх графіків функцій $y = f(x)$ та $y = -f(x)$.

Тобто:

графік функції $y = -f(x)$ отримують унаслідок симетрії графіка функції $y = f(x)$ відносно осі абсцис.

Отже, якщо маємо, наприклад, графік функції $y = x^2 - 4$, то для побудови графіка функції $y = -x^2 + 4$ досить виконати симетрію першого графіка відносно осі $0x$ (рис. 61).

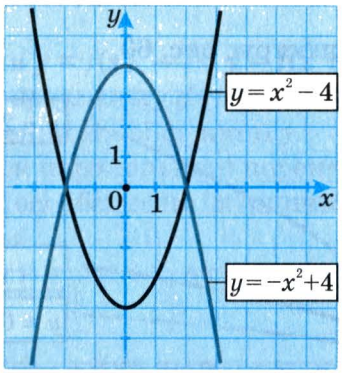


Рис. 61

⑤ **Перетворення $y = f(x) \longrightarrow y = |f(x)|$.** Це перетворення певною мірою пов'язано з попереднім. Адже, за означенням модуля числа, для всіх невід'ємних значень $f(x)$ виконується рівність $|f(x)| = f(x)$. Отже, в цьому випадку графіки функцій $y = |f(x)|$ і $y = f(x)$ збігаються.

Якщо $f(x) < 0$, то $|f(x)| = -f(x)$, тобто за цієї умови графік функції $y = |f(x)|$ збігається з графіком функції $y = -f(x)$. Яке перетворення графіка функції $y = f(x)$ слід здійснити, щоб отримати графік функції $y = -f(x)$, встановлено вище.

Отже,

щоб отримати графік функції $y = |f(x)|$, треба ту частину графіка функції $y = f(x)$, яка лежить над віссю абсцис або на ній, залишити без змін і доповнити її другою частиною, яку

отримують унаслідок симетрії відносно осі абсцис тієї частини графіка функції $y = f(x)$, яка лежить під цією віссю.

З цього випливає, що всі точки графіка функції $y = |f(x)|$ розміщені над віссю $0x$ або на цій осі.

Приклад. Побудувати графік функції $y = |x^2 - 4|$.

▽ *Побудова.* Будуємо графік функції $y = x^2 - 4$ (рис. 62).

Частину цього графіка, що розміщена над віссю $0x$, залишаємо без змін. Під віссю $0x$ розміщена частина графіка цієї функції, обмежена точками –2 і 2. Будуємо симетричну їй частину відносно цієї осі (рис. 63).

Графіком функції $y = |x^2 - 4|$ є крива, зображена на рис. 64. ▲

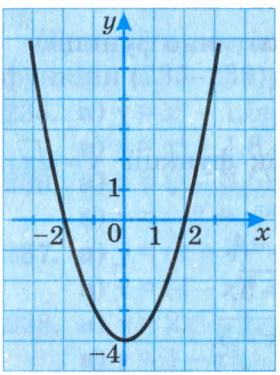


Рис. 62

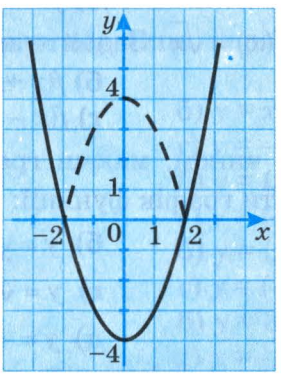


Рис. 63

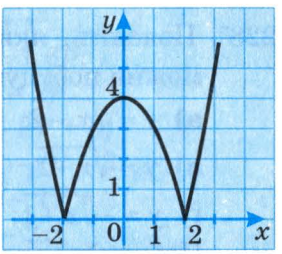


Рис. 64

Запитання для самоперевірки

1. Що потрібно зробити з графіком функції $y = 2(x + 5)$, щоб отримати графік функції $y = 2x$?
2. Яке перетворення графіка функції $f(x) = 4x - 1$ слід здійснити, щоб отримати графік функції $\varphi(x) = 4x + 2$?
3. Графіки яких функцій симетричні відносно осі абсцис:
   а) $y = (x - 3)^2 - 2$; **б)** $y = (3 - x)^2 + 2$;
   в) $y = -(x - 3)^2 + 2$; **г)** $y = (x + 3)^2 + 2$?
4. Як побудувати графік функції $y = |2x - 1|$?

Задачі та вправи

225°. Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}x$. Користуючись цим графіком, у тій самій системі координат побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{1}{2}x + 4$; **б)** $y = \frac{1}{2}(x + 4)$;

в) $y = -\frac{1}{2}x$; **г)** $y = -\frac{1}{2}(x - 4)$.

226°. Побудуйте графік функції $y = -1{,}5x$. Користуючись цим графіком, у тій самій системі координат побудуйте графік функції:

а) $y = -1{,}5(x - 3)$; **б)** $y = -1{,}5x - 3$.

227°. Дано функцію $f(x) = \sqrt{x}$. Задайте аналітично функцію:

а) $f(x) + 6$; **б)** $f(x + 6)$;

в) $f(x) - 3$; **г)** $f(x - 4)$.

228°. Поясніть, яким чином, маючи графік функції $y = \sqrt{x}$, можна побудувати графік функції:

а) $y = \sqrt{x} - 2$; **б)** $y = \sqrt{x} + 4$;

в) $y = \sqrt{x + 1}$; **г)** $y = \sqrt{x - 5}$;

ґ) $y = -\sqrt{x + 1}$; **д)** $y = -\sqrt{x - 5}$.

Побудуйте графіки цих функцій.

229. Побудуйте графік функції $y = |x|$. Виконайте паралельне перенесення цього графіка вздовж осі:

а) ординат на 4 одиниці вниз;

б) абсцис на 3,5 одиниці вліво.

Задайте аналітично функції, графіки яких ви побудували.

230*. Побудуйте графік функції:

а) $y = |3x - 2|$; **б)** $y = |x^2 - 3|$;

в) $y = |4 - x^2|$; **г)** $y = |x^2 - 5x + 6|$;

ґ) $y = -|x^2 - 4x + 4|$; **д)** $y = -|-3x^2 + 4x - 1|$.

Додаткові задачі та вправи до розділу II

Як із графіка функції $y = x^2$ отримати графіки функцій **(231–234)**:

231. **а)** $y = x^2 + 2$; **б)** $y = x^2 - 2$;
в) $y = 2{,}5 + x^2$; **г)** $y = -3{,}5 + x^2$?

232. **а)** $y = (x - 2)^2$; **б)** $y = (x + 2)^2$;
в) $y = (4 - x)^2$; **г)** $y = (-3 - x)^2$?

233. **а)** $y = (x - 1)^2 + 2$; **б)** $y = (x - 1)^2 - 2$;
в) $y = -3 + (x - 4)^2$; **г)** $y = -2 - (x + 4)^2$?

234. **а)** $y = 2x^2$; **б)** $y = -\frac{1}{2}x^2$;
в) $y = -3x^2$; **г)** $y = -\frac{1}{4}x^2$?

Запишіть координати вершини параболи, що є графіком функцій **(235–239)**:

235. **а)** $y = x^2 - 1{,}5$; **б)** $y = x^2 - 5$;
в) $y = x^2 + 1{,}8$; **г)** $y = -4 + x^2$.

236. **а)** $y = (x - 3{,}5)^2$; **б)** $y = (x + 1{,}6)^2$;
в) $y = (-2 + x)^2$; **г)** $y = (-2 - x)^2$.

237. **а)** $y = (x + 4)^2 - 2$; **б)** $y = (x - 3)^2 + 3$;
в) $y = (4 - x)^2 + 3$; **г)** $y = (-2 - x)^2 - 3$.

238. **а)** $y = 2x^2 - 1$; **б)** $y = 3(x - 1)^2 + 1$;
в) $y = 1 - x^2$; **г)** $y = -3 - 2x^2$.

239. Задайте формулою функцію, графік якої отримано за допомогою паралельного перенесення параболи $y = x^2$ вздовж осі $0x$:

а) на 3 одиниці вліво;

б) на 4 одиниці вправо;

в) спочатку на 2 одиниці вліво, а потім — на 3 одиниці вправо;

г) спочатку на 3 одиниці, а потім — ще на 2 одиниці вліво.

240. Задайте аналітично функцію, графік якої отримано:
а) розтягненням графіка функції $y = x^2$ вздовж осі $0y$ втричі;
б) стисненням графіка функції $y = x^2$ вздовж осі $0y$ вдвічі.

241. Графік функції проходить через точку $A(-2; 1)$. Знайдіть значення m, якщо:
а) $y = x^2 + m$; **б)** $y = (x - m)^2$;
в) $y = (x + m)^2 - 2$; **г)** $y = (x - 3)^2 + m$.

Запишіть рівняння осей симетрії і вкажіть напрям гілок парабол (**242–245**):

242. **а)** $y = (x - 2)^2$; **б)** $y = x^2 + 3$;
в) $y = (x + 10)^2$; **г)** $y = (x - 2)^2$.

243. **а)** $y = (x - 10)^2 + 1$; **б)** $y = (x - 8)^2 - 2$;
в) $y = (x + 3)^2 - 2$; **г)** $y = (x + 4)^2 - 1$.

244. **а)** $y = 1{,}8(x + 5)^2 - 2$; **б)** $y = 1{,}2(x + 0{,}75)^2 - 3{,}2$;
в) $y = -3(x - 5)^2 + 3$; **г)** $y = -0{,}1(x - 0{,}25)^2 + 2$.

245. **а)** $y = \frac{1}{3}x^2$; **б)** $y = -2x^2$;
в) $y = 0{,}1x^2$; **г)** $y = \frac{2}{3}x^2$.

246. Запишіть рівняння параболи, яку отримали внаслідок паралельного перенесення:
а) параболи $y = 0{,}5x^2$ вздовж осі $0x$ на 1,5 одиниці вправо, а потім на 4 одиниці вгору;
б) параболи $y = \frac{1}{3}x^2$ вздовж осі $0x$ на 2,3 одиниці вліво, а потім на 3 одиниці вниз;
в) параболи $y = -1{,}5x^2$ вздовж осі $0x$ на 2 одиниці вправо, а потім — уздовж нової осі симетрії на 3 одиниці вниз;
г) параболи $y = -4{,}6x^2$ вздовж осі $0x$ на 5 одиниць вправо, а потім — уздовж нової осі на 2 і на 3 одиниці вгору.

247. Графіки функцій, зображених на рис. 65, а)–г), побудовані за допомогою шаблона параболи $y = x^2$. Задайте кожну з цих функцій формулою.

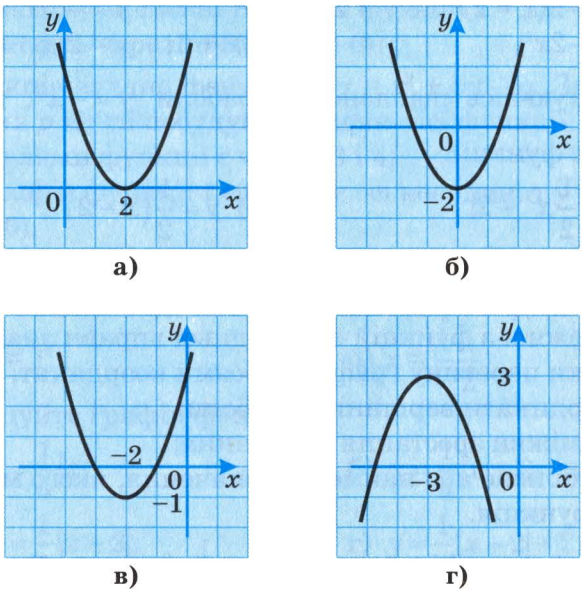


Рис. 65

248. Користуючись шаблоном параболи $y = 2x^2$, побудуйте графік функції:

а) $y = 2(x - 2)^2$; **б)** $y = 2x^2 + 2$;

в) $y = 2(x + 2)^2 - 1$; **г)** $y = 2(x + 3)^2 + 3$.

249. Побудуйте схематично графік функції, обчисливши попередньо координати вершини відповідної параболи і визначивши напрям її гілок:

а) $y = x^2 - 6x + 7$; **б)** $y = 3x^2 - x$;

в) $y = 2(x + 1)(x - 2)$; **г)** $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$.

250. Побудуйте схематично графік кожної функції:

а) $y = \frac{1}{3}x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$; $y = \frac{1}{3}x^2 - 3$;

б) $y = -\frac{1}{3}x^2$; $y = -\frac{1}{3}(x - 2)^2$; $y = -\frac{1}{3}(x + 3)^2$;

в) $y = -2(x + 2)^2$; $y = 2(x - 3)^2$; $y = -2(x + 3)^2$;
г) $y = -2x^2$; $y = -2(x - 3)^2 + 1$; $y = 2(x + 3)^2 + 4$;

251. Користуючись шаблоном параболи $y = \frac{1}{2}x^2$, побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$; **б)** $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$;

в) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$; **г)** $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$.

252. Для кожної з функцій попередньої вправи знайдіть:
а) точки перетину графіка з осями координат;
б) координати вершини параболи;
в) проміжки зростання і спадання;
г) найбільше або найменше значення, якого може набувати функція.

253. Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$. Вкажіть:
а) нулі функції;
б) координати точки перетину графіка з віссю $0y$;
в) проміжки зростання і спадання функції.

254. Не будуючи графік функції $y = 20 - x - x^2$, знайдіть:
а) нулі функції;
б) координати вершини параболи, що є її графіком;
в) проміжки зростання і спадання функції;
г) найбільше значення, якого може набувати функція;
ґ) рівняння осі симетрії графіка функцій.

255. При якому значенні a найбільше значення функції $y = ax^2 + 6x - 4$ дорівнює 0,5?

256. При якому значенні b найменше значення функції $y = 2x^2 - bx + 3$ дорівнює $-3\frac{1}{8}$?

257. При якому значенні c значення функції $y = 3x^2 + 5x + c$ в точці екстремуму дорівнює $-\frac{1}{12}$?

258. При якому значенні n графік функції $y = nx^2 + (n + 2)x + 2$ проходить через точку $A(-2; 6)$?

259. Функція задана формулою $y = x^2 + px - q$. Знайдіть значення p і q та побудуйте графік цієї функції, якщо:

а) нулями функції є числа 3 і 4;

б) графік функції перетинає осі координат у точках (0; 6) і (2; 0).

260. Функція задана формулою $y = ax^2 - (a + 2)x + 3$. Знайдіть значення a, якщо віссю симетрії графіка функції є пряма:

а) $x = 1$; **б)** $x = -\frac{1}{2}$.

261. Побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{1}{4}|x|$; **б)** $y = \frac{1}{4}|x| + 2$;

в) $y = \frac{1}{4}|x + 2|$; **г)** $y = \frac{1}{4}|x + 2| + 2$.

262. Побудуйте графік функції $y = |x^2 - 2x - 8|$. За графіком функції знайдіть:

а) нулі функції;

б) проміжки зростання і проміжки спадання функції;

в) найменше значення функції.

263. Розв'яжіть задачі.

а) Число 6 запишіть у вигляді суми двох доданків так, аби добуток їх був найбільшим.

б) Якими мають бути розміри сторін прямокутника з периметром 48 см, щоб його площа була найбільшою?

в) Знайдіть найбільше значення добутку двох додатних чисел, сума яких дорівнює 16.

г) Сума одного з двох чисел і подвоєного другого числа дорівнює 40. Якого найбільшого значення може набувати добуток цих чисел? Знайдіть відповідні значення кожного з цих чисел.

264. Тиск вітру на плоску стіну наближено обчислюється за формулою: $p = 0{,}1v^2$, де p — тиск вітру в Н/м^2, а v — швидкість вітру в м/с.

1) Побудуйте графік зміни тиску вітру на стіну залежно від зміни швидкості вітру.

2) Знайдіть за графіком тиск вітру на стіну при v, що дорівнює 2 м/с; 3 м/с; 5 м/с; 8 м/с.

3) Визначте за графіком, при якій швидкості вітру тиск на стіну дорівнюватиме 1 Н/м^2; 2 Н/м^2; 5 Н/м^2.

✓ Завдання для самоперевірки

І рівень

1. Запишіть, які з графіків, зображених на рис. 66, а)–г), є графіками квадратичної функції.

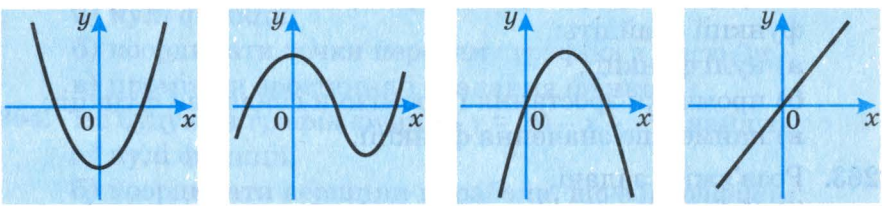


Рис. 66

2. Дано функцію $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$. Знайдіть:

а) $f(1)$; $f(-2)$;

б) $f(-3)$; $f(0)$.

3. Дано функцію $f(x) = x^2 - 8x + 9$. Знайдіть значення x, при яких:

а) $f(x) = -7$;

б) $f(x) = 2$.

4. Як із графіка функції $y = \frac{1}{3}x^2$ отримати графік функції:

а) $y = \frac{1}{3}x^2 + 3$;

б) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$;

в) $y = \frac{1}{3}(x-5)^2$;

г) $y = \frac{1}{3}(x+6)^2$?

5. Вкажіть вісь симетрії і напрям гілок параболи:
а) $y = 10x^2$; **б)** $y = -3x^2$.

6. За допомогою яких перетворень із графіка функції $y = x^2$ можна отримати графік функції:
а) $y = 2(x + 1)^2 - 3$;
б) $y = -3(x - 4)^2 + 5$?

7. Запишіть координати вершини та рівняння осі симетрії параболи:
а) $y = 4(x - 5)^2 + 2$;
б) $y = -3(x - 8)^2 - 3$.

8. За графіком квадратичної функції, зображеним на рис. 67, запишіть:
а) координати вершини параболи і проміжок, на якому функція зростає;
б) нулі функції і проміжок, на якому функція спадає.

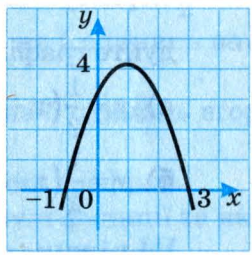


Рис. 67

9. За допомогою шаблона параболи $y = x^2$ побудуйте графік функції:
а) $y = x^2 - 6$;
б) $y = (x + 4)^2$.

II рівень

1. Задайте формулою функцію, графік якої отримано внаслідок паралельного перенесення параболи $y = x^2$ вздовж осі $0y$:

а) на 3 одиниці вниз;

б) на 5 одиниць вгору.

2. При якому значенні b графік функції $y = 2x^2 - bx + 3$ проходить через точку:

а) $(2; -6]$; **б)** $(-2; 4)$?

3. Запишіть координати вершини параболи, що є графіком функції:

а) $y = (x - 2)^2 + 2$;

б) $y = (x + 4)^2 - 5$.

4. За графіком функції, зображеним на рис. 67, запишіть числові проміжки, на яких значення функції:

а) від'ємні; **б)** додатні.

5. Знайдіть проміжки зростання й спадання функції:

а) $y = 2x^2 - 7x - 6$;

б) $y = 2x^2 + 7x - 6$.

6. Користуючись шаблоном графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2$, побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$;

б) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2$.

III рівень

1. Задайте формулою функцію, графік якої отримано внаслідок паралельного перенесення параболи $y = x^2$ вздовж осі $0x$:

а) на 7 одиниць вправо;

б) на 6 одиниць вліво.

2. Задайте формулою функцію, графіком якої є парабола $y = x^2$, а віссю симетрії — пряма:

а) $x = -3{,}6$; **б)** $x = 4{,}2$.

3. Як із графіка функції $y = (x - 2)^2 + 1$ отримати графік функції:

а) $y = 2(x - 5)^2 + 1$;

б) $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 3$?

4. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 3x - 4$ і за графіком знайдіть:

а) проміжки, на яких $y \geq 0$; $y < 0$;

б) проміжки, на яких функція: 1) зростає; 2) спадає.

5. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4x + 4$, якщо:

а) $0 \leq x \leq 4$; **б)** $-4 \leq x \leq 0$.

6. Знайдіть сторони прямокутника, що має найбільшу площу, якщо його периметр дорівнює:

а) 120 м; **б)** 50 м.

IV рівень

1. Задайте формулою функцію, графік якої отримано внаслідок паралельного перенесення параболи $y = -\frac{1}{2}x^2$:

а) вздовж осі $0x$ на 3 одиниці вправо і на 5 одиниць вниз уздовж осі $0y$;

б) вздовж осі $0x$ на 3 одиниці вліво і на 5 одиниць вгору вздовж осі $0y$.

Зробіть схематичні рисунки відповідних графіків.

2. Побудуйте графік функції, знайдіть нулі функції та вкажіть проміжки, на яких функція зростає (спадає):

а) $y = |-x^2 + x - 2|$;

б) $y = -|x^2 + 6x + 8|$.

3. Квадратична функція задана формулою $y = ax^2 - (a + 3)x + 2$. Знайдіть значення a, якщо віссю симетрії графіка є пряма:

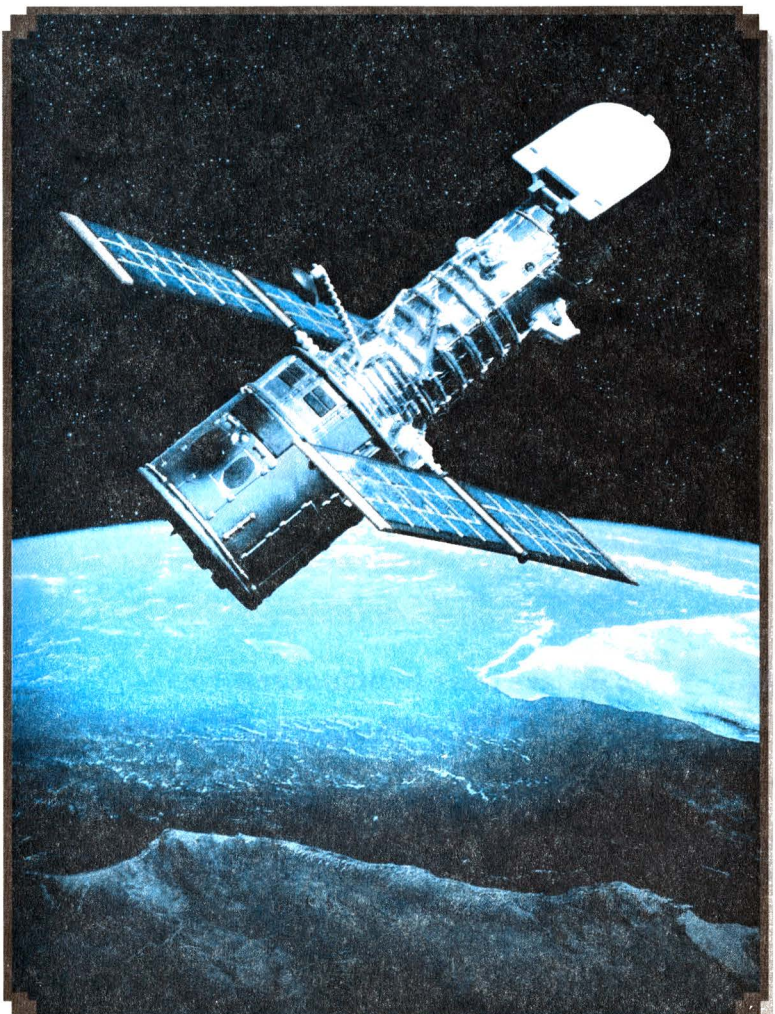
а) $x = -\frac{1}{3}$; **б)** $x = -2$.

4. З листа картону, що має форму прямокутного трикутника, потрібно вирізати прямокутник найбільшої площі так, щоб дві його сторони лежали на катетах трикутника, а одна з вершин — на гіпотенузі. Які розміри повинен мати такий прямокутник, якщо катети трикутника дорівнюють:

а) 12 см і 4 см; **б)** 4 дм і 3 дм?

Розділ III

КВАДРАТНІ НЕРІВНОСТІ ТА СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ



§5. Розв'язування нерівностей другого степеня з однією змінною

5.1. Графічний спосіб

Пригадайте

1. Що таке квадратний тричлен?
2. На проміжку $(a; b)$ значення функції є додатними. Як розміщені точки графіка цієї функції на даному проміжку відносно осі $0x$?
3. Як за графіком функції встановити числові проміжки, де вона набуває від'ємних значень?
4. Де розміщені точки графіка функції, в яких її значення дорівнюють нулю?

① **Розв'язування квадратної нерівності як дослідження квадратичної функції.**

! **Нерівність, ліва частина якої є квадратний тричлен, а права — нуль, називають *нерівністю другого степеня з однією змінною*, або *квадратною нерівністю*.**

Наприклад: $2x^2 - 5x - 6 > 0$, $3x^2 - 8 \leq 0$, $x^2 + 7x \geq 0$, $7 - 2x - 5x^2 > 0$.

Розв'язування таких нерівностей можна звести до з'ясування того, при яких значеннях змінної x відповідна квадратична функція набуває додатного (невід'ємного) або від'ємного (недодатного) значення.

Наприклад, щоб розв'язати нерівність $-x^2 + 5x - 6 > 0$, досить встановити, при яких значеннях x функція $y = -x^2 + 5x - 6$ набуває додатних значень. Це легко зробити за графіком цієї функції або навіть схематичним зображенням його розміщення відносно осі абсцис. Побудуємо таке зображення.

Для цього досить знати спрямування гілок відповідної параболи і наявність у неї спільних точок з віссю $0x$, тобто точок, у яких значення даної функції дорівнюють нулю (нулі функції). У даному випадку гілки параболи $y = -x^2 + 5x - 6$ спрямовані вниз. Для знаходження нулів цієї функції розв'яжемо рівняння $-x^2 + 5x - 6 = 0$. Маємо: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

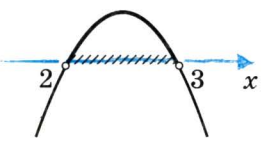


Рис. 68

Отже, графік функції $y = -x^2 + 5x - 6$ розміщений відносно осі $0x$ так, як зображено на рис. 68.

Додатні значення цієї функції — це значення ординат тих точок її графіка, що лежать над віссю $0x$ (відповідну частину графіка виділено на рисунку жирною лінією). Абсциси усіх цих точок належать проміжку (2; 3). Отже, розв'язком нерівності $-x^2 + 5x - 6 > 0$ є проміжок (2; 3): $x \in (2; 3)$.

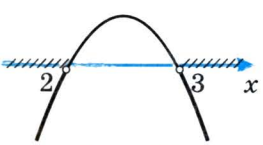


Рис. 69

Очевидно, що для розв'язання нерівності $-x^2 + 5x - 6 < 0$ слід знайти абсциси тих точок графіка функції $y = -x^2 + 5x - 6$, які розміщені під віссю $0x$. З рис. 69 бачимо, що графік розміщений під віссю $0x$ ліворуч від точки $x = 2$ — на координатній прямій це відповідає проміжку $(-\infty; 2)$ — і праворуч від точки $x = 3$, тобто на числовому проміжку $(3; \infty)$.

Отже, розв'язком нерівності $-x^2 + 5x - 6 < 0$ є об'єднання двох числових проміжків $(-\infty; 2)$ і $(3; \infty)$: $x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty)$.

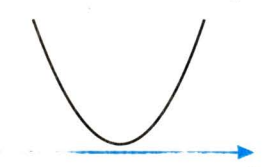


Рис. 70

② **Приклади розв'язування квадратних нерівностей.** Якщо схематичне зображення розміщення графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі $0x$ має вигляд, як на рис. 70, то очевидно, що при всіх дійсних значеннях x ця функція набуває

додатних значень. У такому випадку розв'язком нерівності $ax^2 + bx + c > 0$ буде множина всіх дійсних чисел, тобто числовий проміжок $(-\infty; \infty)$, а нерівність $ax^2 + bx + c < 0$ не матиме розв'язків.

Розглянемо ще кілька прикладів розв'язання квадратних нерівностей.

Приклад 1. Розв'язати нерівність: $-3x^2 - 5x - 2 < 0$.

▽ *Розв'язання.* Для спрощення розв'язання замінимо дану нерівність рівносильною нерівністю, помноживши обидві її частини на -1. Маємо: $3x^2 + 5x + 2 > 0$.

Знайдемо корені рівняння $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

$D = 25 - 24 = 1$;

$x_1 = \frac{-5+1}{6} = -\frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{-5-1}{6} = -1$.

Побудуємо схематичне зображення розміщення графіка функції $y = 3x^2 + 5x + 2$ відносно осі $0x$ (рис. 71).

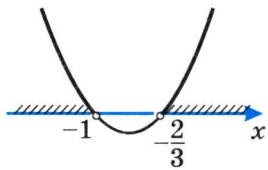


Рис. 71

Знайдемо значення x, при яких гілки параболи розміщені над віссю $0x$ ($3x^2 + 5x + 2 > 0$). З рисунка видно, що це ті значення, що знаходяться на координатній прямій ліворуч від точки $x = -1$ (числовий проміжок $(-\infty; -1)$), а також праворуч від точки $x = -\frac{2}{3}$ (числовий проміжок $\left(-\frac{2}{3}; \infty\right)$).

Відповідь. $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; \infty\right)$. ▲

Приклад 2. Розв'язати нерівність: $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

▽ *Розв'язання.* Знайдемо корені тричлена $4x^2 + 4x + 1$, тобто нулі функції $y = 4x^2 + 4x + 1$.

$4x^2 + 4x + 1 = 0$; $(2x + 1)^2 = 0$;

$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$.

Побудуємо схематичне зображення графіка цієї функції відносно осі $0x$ (рис. 72).

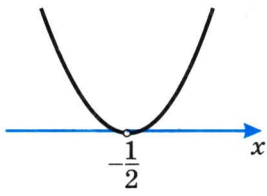


Рис. 72

Бачимо, що над віссю $0x$ ($4x^2 + 4x + 1 > 0$) розміщені всі точки параболи, крім однієї — з абсцисою $x = -\frac{1}{2}$. Отже, розв'язком даної нерівності є всі дійсні числа, крім $-\frac{1}{2}$.

Відповідь. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$. ▲

Приклад 3. Розв'язати нерівність: $4x^2 + 4x + 1 \le 0$.

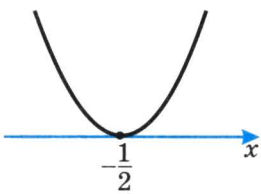


Рис. 73

▽ *Розв'язання.* З рис. 73 бачимо, що дану нерівність задовольняє лише одне значення $x = -\frac{1}{2}$. Тоді $4x^2 + 4x + 1 = 0$. При всіх інших значеннях x значення тричлена додатні, тобто $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

Відповідь. $x = -\frac{1}{2}$. ▲

Розглянутий спосіб розв'язування квадратних нерівностей називають *графічним* способом.

Запитання для самоперевірки

1. У чому суть графічного способу розв'язування нерівностей другого степеня з однією змінною?
2. Скільки розв'язків може мати квадратна нерівність? Наведіть відповідні графічні ілюстрації.

Задачі та вправи

Розв'яжіть нерівності (**265–267**):

265°. **а)** $x^2 < 16$; **б)** $x^2 - 16 \ge 0$; **в)** $x^2 - 1 \le 0$;
г) $4 - x^2 < 0$; **ґ)** $x^2 - 3x \ge 0$; **д)** $3x - x^2 \le 0$.

266°. **а)** $x^2 - 7x + 6 > 0$; **б)** $x^2 - 7x + 6 \le 0$;
в) $-x^2 + 7x - 6 < 0$; **г)** $4x^2 + 12x + 9 \le 0$;
ґ) $4x^2 + 4x + 9 > 0$; **д)** $-x^2 + 2x + 15 > 0$;
е) $-x^2 + 2x + 15 < 0$; **є)** $-5x^2 + 11x - 6 < 0$;
ж) $11x - 5x^2 - 6 \ge 0$.

267. **а°)** $-x^2 + x - 2 < 0$; **б°)** $-2x^2 + 4x - 5 \le 0$;
в) $(x + 5)^2 + 3 > 0$; **г)** $4x^2 - 20x + 25 > 0$;
ґ) $\frac{1}{3}x^2 + 2x \ge -3$; **д)** $-x^2 + x - \frac{1}{4} < 0$;
е) $\frac{x^2}{6} + 2 > \frac{7x}{6}$; **є)** $\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} < \frac{3x - 10}{4}$.

268. Знайдіть, при яких значеннях x тричлен:
а) $x^2 - 2x - 3$ набуває додатних значень;
б) $x - x^2 - 6$ набуває від'ємних значень.

269*. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної справджується нерівність:
а) $x^2 - 4x + 9 > 0$; **б)** $-x^2 + 4x - 9 < 0$;
в) $4x^2 - 4x + 2 > 0$; **г)** $-4x^2 + 4x - 3 < 0$.

270. Одна сторона прямокутника на 2 м більша від другої. Якою може бути довжина цієї сторони, якщо площа прямокутника менша від 80 м²?

271*. Знайдіть, при яких значеннях a рівняння:
а) $x^2 + (7a + 2)x + a^2 = 0$ має два різні дійсні корені;
б) $ax^2 - 8ax + 3a + 7 = 0$ не має коренів.

272*. Розв'яжіть нерівність:
а) $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 10} > 0$; **б)** $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4} < 0$;
в) $\frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 0,8} \le 0$; **г)** $\frac{x^2 + 0,01}{x^2 + 4x + 3} < 0$;
ґ) $\frac{x^2 - 6x + 13}{x^2 + 5x + 6} < 0$; **д)** $\frac{4x - 4x^2 + 3}{x^2 - 3x + 2,5} \ge 0$.

5.2. Аналітичні способи

Пригадайте

1. Як розкласти квадратний тричлен на лінійні множники? В якому випадку це можна зробити?
2. За якої умови добуток двох множників:
   а) додатне число; **б)** від'ємне число?

Квадратні нерівності можна розв'язувати і не вдаючись до відповідних графічних ілюстрацій, а скориставшись аналітичними способами. Розглянемо окремі з них.

① **Спосіб розкладання лівої частини нерівності на множники.** Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має два корені x_1 і x_2, то його можна розкласти на множники: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. У такому випадку розв'язування квадратної нерівності зводиться до розв'язання двох систем лінійних нерівностей.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розв'язати нерівність: $2x^2 - x - 1 < 0$.

▽ *Розв'язання.* $2x^2 - x - 1 = 0$; $D = 1 + 8 = 9$. $x_1 = \frac{1+3}{4} = 1$; $x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$.

Отже, $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$, тому дана нерівність набуває вигляду $2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0$, або $(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0$.

Добуток двох множників є від'ємним числом, якщо ці множники мають різні знаки. Відтак, можемо записати дві системи нерівностей:

$$\begin{cases} x - 1 < 0, \\ x + \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x - 1 > 0, \\ x + \frac{1}{2} < 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну з них:

$$\begin{cases} x < 1, \\ x > -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 1, \\ x < -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$-0{,}5 < x < 1.$ Розв'язків нема.

Відповідь. $x \in (-0{,}5;\ 1)$ ▲

Приклад 2. Розв'язати нерівність: $-x^2 + 5x - 6 \le 0$.

▽ *Розв'язання.* Дана нерівність рівносильна нерівності $x^2 - 5x + 6 \ge 0$.

Розв'яжемо її.

$x^2 - 5x + 6 \ge 0;$	$x^2 - 5x + 6 = 0;\ x_1 = 2,\ x_2 = 3;$
$(x - 2)(x - 3) \ge 0.$	$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$

Маємо дві системи нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2 \ge 0, \\ x - 3 \ge 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x - 2 \le 0, \\ x - 3 \le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 2, \\ x \ge 3 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x \le 2, \\ x \le 3. \end{cases}$$

$x \ge 3$, тобто $x \in [3;\ \infty)$; $x \le 2$, тобто $x \in (-\infty;\ 2]$.

Відповідь. $x \in (-\infty;\ 2] \cup [3;\ \infty)$. ▲

Приклад 3. Розв'язати нерівність: $x^2 - 8x + 16 < 0$.

▽ *Розв'язання.*

$x^2 - 8x + 16 < 0,$	$x^2 - 8x + 16 = 0,\ x_1 = x_2 = 4.$
$(x - 4)^2 < 0.$	

Дана нерівність не має розв'язку, бо $(x - 4)^2 \ge 0$ при будь-якому дійсному значенні x, тобто $x \in (-\infty;\ \infty)$. ▲

② **Спосіб виділення з лівої частини нерівності квадрата двочлена.** Якщо дискримінант квадратного тричлена, що стоїть у лівій частині нерівності $ax^2 + bx + c > 0$, є від'ємним числом, то вираз $ax^2 + bx + c$ на множники розкласти не можна.

У цьому випадку для розв'язання нерівності аналітичним способом вдаються до відомого перетворення — виділення квадрата двочлена з квадратного тричлена.

Приклад 4. Розв'язати нерівність: $x^2 - 6x + 10 < 0$.

▽ *Розв'язання.* $D = 36 - 40 < 0$.

Виділимо з тричлена $x^2 - 6x + 10$ квадрат двочлена. Маємо:

$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 + 10 = (x - 3)^2 - 3^2 + 10 = (x - 3)^2 + 1$.

Очевидно, що вираз $(x - 3)^2 + 1$ при будь-якому дійсному значенні x набуває додатного значення, тобто $(x - 3)^2 + 1 > 0$ при всіх дійсних значеннях x. Тому нерівність $x^2 - 6x + 10 < 0$ не має розв'язків. ▲

Приклад 5. Розв'язати нерівність: $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

▽ *Розв'язання.* Замінимо дану нерівність рівносильною, поділивши обидві її частини на -3. Маємо:

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} > 0.$$

$$D = \frac{4}{9} - \frac{4}{3} < 0.$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} =$$

$$= \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9} > 0$$

при будь-якому дійсному значенні x.

Відповідь. $x \in (-\infty; \infty)$. ▲

Запитання для самоперевірки

1. Які два випадки слід розрізняти, розв'язуючи квадратну нерівність аналітичним способом?
2. Як розв'язують квадратну нерівність, якщо її ліву частину можна розкласти на множники?
3. Як розв'язати квадратну нерівність, якщо її ліву частину не можна розкласти на множники?

Задачі та вправи

Розв'яжіть нерівності (**273–275**):

273°. **а)** $(x-3{,}5)\left(x+\frac{1}{4}\right)>0$; **б)** $(x-3{,}5)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$;

в) $(3{,}5-x)(x+0{,}5)\geq 0$; **г)** $(4-2x)(x-1)>0$.

274°. **а)** $(2x+3{,}4)(3x-1{,}2)\leq 0$; **б)** $(3{,}4-2x)(3x-1{,}5)\geq 0$;

в) $\left(2x-\sqrt{8}\right)(1{,}2-0{,}4x)>0$; **г)** $(1{,}8-3x)\left(2x+\frac{1}{4}\right)\geq 0$;

ґ) $x^2+12x+35>0$; **д)** $x^2-11x\leq 60$;

е) $x^2-4x\geq 45$; **є)** $x^2<x+20$.

275. **а)** $3x^2-5x>2$; **б)** $2x^2\leq 7x-6$;

в) $3x^2<8-2x$; **г)** $4x^2<17x+15$;

ґ) $x^2+10x+26>0$; **д*)** $3x^2+|x|-4>0$;

е*) $2x^2-5|x|+2<0$; **є*)** $4x^2-4|x|+1\leq 0$.

276. Знайдіть область визначення функції:

а°) $y=\sqrt{(x-4)x}$; **б°)** $y=\sqrt{x(5-x)}$;

в°) $y=\sqrt{(x-3)(x+1)}$; **г°)** $y=\sqrt{x^2-2x-3}$;

ґ°) $y=\sqrt{4x^2-3x}$; **д)** $y=\dfrac{4}{\sqrt{2x^2+3x-5}}$;

е) $y=\dfrac{1+x^2}{\sqrt{3x^2+40x+100}}$; **є)** $y=\dfrac{|x|+1}{\sqrt{2x^2-7x+6}}$.

277. Знайдіть суму всіх цілих розв'язків кожної нерівності:

а) $4x^2\leq 3-x$; **б)** $2x^2\leq 3x+20$;

в) $x^2<2{,}4x+13$; **г)** $x^2\leq 5{,}6x-6{,}4$.

278. Знайдіть парні значення x, які задовольняють нерівність:

а) $4x^2-19x+12\leq 0$; **б)** $17-15x-2x^2>0$;

в) $6-11x-2x^2>0$; **г)** $2{,}5x^2-11x+12\leq 0$.

279. Знайдіть добуток усіх цілих розв'язків кожної нерівності:

а) $x^2-2x-3<0$; **б)** $-x^2+4x+5>0$;

в) $x^2-6x+5<0$; **г)** $x^2-12x+35\leq 0$.

280. Виділивши квадрат двочлена, доведіть, що при будь-якому значенні x квадратний тричлен:

а) $x^2 - 8x + 17$ набуває додатних значень;

б) $x^2 - 4x + 4$ набуває невід'ємних значень;

в) $-x^2 + 8x - 17$ набуває від'ємних значень;

г) $4x^2 - 4x + 3$ набуває додатних значень;

ґ) $9x^2 + 6x + 2$ набуває додатних значень;

д) $-25x^2 + 20x - 7$ набуває від'ємних значень.

281*. Сума $2x + y$ дорівнює 20. Чи може добуток xy набувати значень, більших від 48? При яких значеннях x це можливо?

282*. При яких значеннях a функція $y = x^2 - ax + a + 3$ набуває лише додатних значень?

5.3. Метод інтервалів

① **Суть методу інтервалів.** Коли квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має два корені, то нерівність $ax^2 + bx + c > 0$ (чи $ax^2 + bx + c < 0$) можна розв'язати ще одним способом, який називають ***методом інтервалів***. Проілюструємо його суть на прикладі.

Приклад 1. Розв'язати нерівність: $x^2 - 7x + 12 < 0$.

▽ *Розв'язання.* Розкладемо на множники тричлен, що стоїть у лівій частині нерівності. Оскільки коренями тричлена є: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, то $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$. Отже, дана нерівність рівносильна нерівності $(x - 3)(x - 4) < 0$.

Далі міркуємо так.

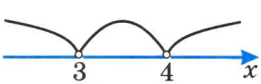


Рис. 74

Числа 3 і 4 розбивають числову пряму на три проміжки (інтервали): $(-\infty; 3)$, $(3; 4)$, $(4; \infty)$. Позначимо їх на координатній прямій (рис. 74).

Визначимо знак добутку на кожному з них.

1) Проміжок (інтервал) $(-\infty; 3)$, тобто $x < 3$.

За цієї умови обидва множники набувають від'ємних значень: $x - 3 < 0$ і $x - 4 < 0$. Отже, їх добуток є додатним числом: $(x - 3)(x - 4) > 0$.

2) Інтервал (3; 4), тобто $3 < x < 4$.

За цієї умови $x - 3 < 0$ і $x - 4 > 0$. Отже, $(x - 3)(x - 4) < 0$.

3) Інтервал $(4; \infty)$, тобто $x > 4$.

За цієї умови $x - 3 > 0$ і $x - 4 > 0$. Отже, $(x - 3)(x - 4) > 0$.

Те, як змінюється знак даного добутку показано на рис. 75.

Таким чином, $(x - 3)(x - 4) < 0$ при $3 < x < 4$, тобто на проміжку (3; 4). ▲

② **Послідовність розв'язання.** Для встановлення загального способу розв'язання аналогічних нерівностей розглянемо функцію $f(x) = x^2 - 7x + 12$, або $f(x) = (x - 3)(x - 4)$, задану за допомогою розглянутого вище тричлена. Проаналізуємо зміну знака функції на визначених у попередньому прикладі числових проміжках.

На інтервалі $(-\infty; 3)$ $(x < 3)$ функція набуває додатних значень. При переході через точку $x = 3$ вона змінює свій знак на протилежний, тобто на інтервалі (3; 4) значення функції — від'ємні. При переході через точку $x = 4$ функція знову змінює свій знак — на інтервалі $(4; \infty)$ її значення є додатними. Таким чином, при русі по координатній прямій зліва направо від одного інтервала до іншого знак функції $f(x) = (x - 3)(x - 4)$ почергово змінюється.

Тому нерівність $(x - 3)(x - 4) < 0$ можна розв'язати так:

1. *Знаходимо нулі функції* $f(x) = (x - 3)(x - 4)$, *а саме,* $x = 3$ *і* $x = 4$.

2. *Позначаємо отримані числа на координатній прямій і знаходимо відповідні інтервали.*

3. *Визначаємо знак функції, наприклад, на крайньому зліва інтервалі* (див. рис. 75).

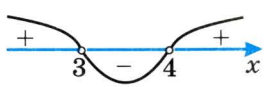


Рис. 75

Для цього можна взяти будь-яке значення x з цього інтервалу і, підставивши його

у формулу, що задає функцію, знайти знак кожного множника, а потім і добутку.

4. *Визначаємо знаки функцій на наступних інтервалах, розставляючи їх у порядку чергування* (див. рис. 75).

5. *З усіх інтервалів вибираємо ті, на яких значення функції мають вказаний в умові знак* (у нашому випадку — $f(x) < 0$).

② **Розв'язування нерівностей вищих степенів.** Цей підхід можна застосувати для розв'язання нерівностей з будь-якою кількістю множників.

Наприклад, розв'яжемо нерівність

$$(x - 2)(x + 5)(3 - x)(x + 8) > 0.$$

▽ *Розв'язання.* Очевидно, нульових значень відповідна функція набуває в точках: $x = 2$, $x = -5$, $x = 3$, $x = -8$. Покажемо їх на координатній прямій і позначимо відповідні інтервали (рис. 76).

Рис. 76

З'ясуємо знак добутку на крайньому зліва інтервалі $(-\infty; -8)$: $x < -8$. Для цього підставимо у нерівність замість x, наприклад, значення -9, що належить цьому інтервалу, і визначимо знак кожного множника. Якщо $x = -9$, то $x - 2 < 0$, $x + 5 < 0$, $3 - x > 0$, $x + 8 < 0$. Отже, в такому разі добуток є від'ємним числом. Позначимо це на координатній прямій (рис. 77).

Рис. 77

Знаки добутку на наступних інтервалах визначаємо в порядку їх чергування (див. рис. 77).

Отже, $(x - 2)(x + 5)(3 - x)(x + 8) > 0$, якщо x належить двом проміжкам: $(-8; -5)$ і $(2; 3)$.

Відповідь. $x \in (-8; -5) \cup (2; 3)$. ▲

Зі строгим обґрунтуванням методу інтервалів ви ознайомитеся у наступних класах.

Запитання для самоперевірки

1. Які квадратні нерівності можна розв'язати методом інтервалів?
2. У чому суть методу інтервалів?
3. Які ще нерівності, крім квадратних, можна розв'язати методом інтервалів?

Задачі та вправи

Розв'яжіть нерівності (**283; 284**):

283°. **а)** $(x-3)(x-5)(x-6)>0$; **б)** $(x+2)(x-2)(x+2)<0$;
в) $x(x-4)(x-5{,}4)\geq 0$; **г)** $x(x+3)(x-2)\leq 0$;
ґ) $\left(x+\sqrt{5}\right)(x-1)(x-2)\geq 0$; **д)** $x(x-3)(x+4)\leq 0$;
е) $(x-2)\left(x-\sqrt{30}\right)(x-15)<0$;
є) $\left(\sqrt{3}-x\right)(x+4)(5-x)<0$;
ж) $(x+1{,}2)\left(4-x\right)\sqrt{x-3}\geq 0$;
з) $(x-4)\left(x-\pi\right)\sqrt{3-x}>0$.

284. **а)** $x^3-16x<0$; **б)** $4x^2-x>0$;
в) $(x^2-1)(x+3)<0$; **г)** $(x-5)(x^2-4)>0$;
ґ) $(5x^2+x-4)(x-3)<0$; **д)** $(-x^2+5x-6)(x^2-25)<0$.

285. При яких значеннях x має зміст вираз:
а) $\sqrt{(2x-5)(x-3)(x-4)}$; **б)** $\sqrt{x(3x-6)(8-2x)}$;
в) $\sqrt{x(2x-7)(7-x)}$; **г)** $\sqrt{(x-2)(3-x)(x-5)}$?

286*. Розв'яжіть нерівність:
а) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x-7)(x-3)>0$; **б)** $(x-7)(x-1)(6-x)<0$;
в) $\left(x-\sqrt{5}\right)(3-x)\sqrt{1-x}<0$; **г)** $x(x-\pi)(x-2{,}9)\geq 0$;
ґ) $\left(x-\sqrt{2}\right)\sqrt{x-3}(x-5)\leq 0$; **д)** $\sqrt{(x-1)(x-2)}(x-3)\leq 0$.

§6. Системи рівнянь другого степеня з двома змінними

6.1. Степінь рівняння з двома змінними

Пригадайте

1. Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду?
2. Як визначити степінь многочлена?

Розглянемо рівняння з двома змінними:

а) $2x = 5y - 2$; **б)** $x^2 - 6xy = 4$;

в) $xy^2 + 7x^2 = 4xy^2 - 2$; **г)** $x(3y^2 - xy^3) + 4 = x^2 - 5x^2y^3$.

Кожне з них шляхом перетворень, що не порушують рівносильності, можна перетворити так, щоб у лівій їхній частині був многочлен стандартного вигляду, а в правій — нуль.

Для рівнянь **а)** і **б)** необхідне перетворення полягає у перенесенні всіх членів рівняння в одну частину:

а) $2x - 5y + 2 = 0$;

б) $x^2 - 6xy - 4 = 0$.

Для рівняння **в)** це перетворення доповнюється зведенням подібних членів:

в) $xy^2 + 7x^2 - 4xy^2 + 2 = 0$; $-3xy^2 + 7x^2 + 2 = 0$.

У рівнянні **г)**, крім уже названих перетворень, потрібно ще й розкрити дужки:

г) $x(3y^2 - xy^3) + 4 - x^2 + 5x^2y^3 = 0$; $4x^2y^3 + 3xy^2 - x^2 + 4 = 0$.

Якщо рівняння з двома змінними можна звести до зазначеного вигляду, то ***степенем*** цього ***рівняння*** називають *степінь многочлена у його лівій частині, тобто суму показників степенів змінних у тому члені, де вона найбільша.*

Отже, рівняння **а)** — першого степеня; рівняння **б)** — другого степеня; рівняння **в)** — третього степеня; рівняння **г)** — п'ятого степеня.

Зауважимо, що рівняння, всі члени якого мають однаковий степінь, а вільний член дорівнює нулю, називається ***однорідним***.

Наприклад, рівняння $2x^2 - 4y^2 + 3xy = 0$ є однорідним.

Загальний вигляд повного рівняння другого степеня з двома змінними є таким:

$$\boldsymbol{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + k = 0},$$

причому коефіцієнти a, b і c не можуть дорівнювати нулю одночасно, бо тоді рівняння буде не другого, а першого степеня. Нагадаємо, що розв'язком рівняння з двома змінними є пара значень змінних, що задовольняє це рівняння.

Запитання для самоперевірки

1. Як визначити степінь рівняння з двома змінними?
2. Які рівняння називають однорідними?
3. Що є розв'язком рівняння з двома змінними? Як його записують?

Задачі та вправи

287°. Визначте степінь рівняння:

а) $2x^2 - 3xy + 4y^2 = 4$; **б)** $x^3 + 3y^2 + 2xy = 0$;
в) $5x^2 - 4y^2 - 2x + 7y + 9 = 0$; **г)** $3xy^2 - 4y + 7 = 0$;
ґ) $6y^2 + xy - 5x^2 = 7$; **д)** $xy^2 - x^2 + 3y = 0$.

Знайдіть будь-які два розв'язки рівняння (**288; 289**):

288°. **а)** $xy = 12$; **б)** $x^2 - y^2 = 0$; **в)** $x^2 - y = 0$;
г) $x - xy = 0$; **ґ)** $x - xy = 2$; **д)** $x^2 + y^2 = 9$.

289. **а)** $x^2 - 2xy + y^2 = 0$; **б)** $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
в) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 0$; **г)** $4x^2 - 4xy + y^2 = 0$;

ґ) $x^2 - 2xy + y^2 + x - y = 0$; **д)** $(x^2 + y^2)(x - 1) = 0$;
е) $(x^2 + y^2)(y + 1) = 0$; **є)** $(x^2 + y^2)(2x - 1) = 0$.

290*. Складіть рівняння з двома змінними, яке:
а) не має розв'язків;
б) має один розв'язок;
в) має два розв'язки;
г) має більше двох розв'язків.

291. Яке з даних рівнянь є однорідним:
а) $x^2 - 3xy + y^2 = 0$; **б)** $x^2 - 3xy + y^2 = 1$;
в) $x^2 - 3xy + 4y^2 = 0$; **г)** $x^2 - 3xy + y = 0$;
ґ) $x^2 - 3xy + y^2 = 2x$; **д)** $x^2 - 3xy + 4y = 0$?

6.2. Розв'язування системи рівнянь другого степеня з двома змінними

Пригадайте

1. В якому випадку два лінійні рівняння з двома змінними утворюють систему рівнянь?
2. Що є розв'язком системи двох лінійних рівнянь з двома змінними?

① **Аналітичні способи.** Систему рівнянь другого степеня з двома змінними можуть утворювати два рівняння, кожне з яких є рівнянням другого степеня, або одне з яких є рівнянням другого, а інше — рівнянням першого степеня. Розв'язок такої системи — це пара значень змінних, яка задовольняє обидва рівняння системи.

Єдиного способу розв'язування таких систем не існує. Зазвичай застосовують різні способи розв'язування: підстановки, додавання, деякі штучні прийоми. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -16. \end{cases}$

I спосіб.

▽ *Розв'язання.* Таку систему зручно розв'язувати способом підстановки. Для цього з першого рівняння виразимо, наприклад, змінну y через x і підставимо отриманий вираз у друге рівняння. Маємо:

$y = 6 - x$;

$x(6 - x) = -16$; $x^2 - 6x - 16 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 8$;

$y_1 = 6 + 2 = 8$; $y_2 = 6 - 8 = -2$.

Відповідь. (–2; 8) і (8; –2). ▲

II спосіб.

▽ *Розв'язання.* Рівняння системи $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -16 \end{cases}$ є, по суті, сумою і добутком двох невідомих чисел. Тому, за теоремою, оберненою до теореми Вієта, можемо утворити квадратне рівняння, коренями якого є ці числа. Маємо: $z^2 - 6z - 16 = 0$. Знаходимо його корені: $z_1 = -2$; $z_2 = 8$.

Отже, або $x_1 = -2$ і $y_1 = 8$, або $x_2 = 8$ і $y_2 = -2$.

Відповідь. (–2; 8) і (8; –2). ▲

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$

▽ *Розв'язання.* Помножимо обидві частини другого рівняння на 2 і додамо почленно рівняння нової системи. Маємо:

$$+\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ 2xy = 16; \end{cases}$$

$x^2 + 2xy + y^2 = 36$; $(x + y)^2 = 36$.

Звідси $|x + y| = 6$.

Тоді $x + y = 6$, або $x + y = -6$.

Отже, дана система рівносильна сукупності таких двох систем:

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x + y = -6, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Розв'язуючи кожну з них одним із способів, розглянутих у прикладі 1 (с. 135), отримаємо розв'язки першої системи: (4; 2) і (2; 4); розв'язки другої системи: (–4; –2) і (–2; –4).

Відповідь. (–4; –2), (–2; –4), (4; 2), (2; 4). ▲

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ 3y^2 + xy = 6. \end{cases}$

▽ *Розв'язання.* Розкладемо ліві частини обох рівнянь на множники. Маємо:

$$\begin{cases} x(x + 3y) = 18, \\ y(3y + x) = 6. \end{cases}$$

Оскільки $x + 3y \neq 0$ (інакше праві частини обох рівнянь дорівнювали б нулю), то поділимо відповідні частини рівняння одна на одну. Маємо: $\frac{x}{y} = 3$, звідки $x = 3y$.

Підставимо це значення x у друге рівняння останньої системи: $y(3y + 3y) = 6$, $6y^2 = 6$, $y^2 = 1$; $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

Звідси $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Відповідь. (3; 1), (–3; –1). ▲

Приклад 4*. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2 - 7xy - 4y^2 = 0, \\ 9x^2 + 24y^2 = 42. \end{cases}$$

▽ *Розв'язання.* Перше рівняння цієї системи є однорідним. У подібних випадках можна використати такий прийом: оскільки $y \neq 0$ (бо якщо $y = 0$, то з першого рівняння випливає, що і $x = 0$, а розв'язок (0; 0) не задовольняє друге рівняння), то поділимо обидві частини першого рівняння на y^2. Маємо: $2\frac{x^2}{y^2} - 7\frac{x}{y} - 4 = 0$.

Позначимо $\frac{x}{y} = z$, тоді рівняння набуває вигляду:

$2z^2 - 7z - 4 = 0$; $D = 49 + 32 = 81$; $z_1 = 4$; $z_2 = -\frac{1}{2}$.

Повертаючись до введеного позначення, маємо:

$\frac{x}{y} = 4$, звідки $x = 4y$; $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$, $y = -2x$.

Підставимо по черзі ці значення x і y в друге рівняння системи і знайдемо її розв'язки:

$x = 4y$; $\quad 9 \cdot (4y)^2 + 24y^2 = 42$, $168y^2 = 42$, $y^2 = \frac{1}{4}$;

$y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{2}$;

Тоді $\quad x_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$, $x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$.

$y = -2x$; $\quad 9x^2 + 96x^2 = 42$, $105x^2 = 42$, $x^2 = 0{,}4$;

$x_3 = \sqrt{0{,}4}$, $x_4 = -\sqrt{0{,}4}$.

Тоді $\quad y_1 = -2x_1 = 2\sqrt{0{,}4}$; $\quad y_2 = -2x_2 = -2\sqrt{0{,}4}$.

Відповідь. $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$; $\left(\sqrt{0{,}4}; -\sqrt{0{,}4}\right)$; $\left(-\sqrt{0{,}4}; 2\sqrt{0{,}4}\right)$. ▲

② **Графічний спосіб.** Деякі системи рівнянь другого степеня з двома змінними можна розв'язувати і графічним способом. Розв'яжемо цим способом систему $\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5. \end{cases}$

▽ *Розв'язання.* Побудуємо графіки рівнянь системи, тобто графіки функцій $y = x^2 + 3$ і $y = -x + 5$ (рис. 78).

Координати точок прямої є розв'язками рівняння $x + y = 5$, а координати точок параболи $y = x^2 + 3$ — розв'язками рівняння $y - x^2 = 3$. Точки $A(-2; 7)$ і $B(1; 4)$ належать як прямій, так і параболі, тобто є спільними для них (див. рис. 78). Тому координати точок A і B є розв'язками даної системи.

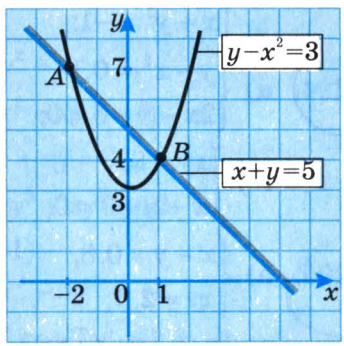


Рис. 78

Відповідь. (–2; 7), (1; 4). ▲

Зауваження. Взагалі, розв'язуючи систему рівнянь графічним способом, отримуємо наближені її розв'язки.

Запитання для самоперевірки

1. Які рівняння можуть утворювати систему двох рівнянь другого степеня з двома змінними?
2. Як встановити, чи є дана пара чисел розв'язком системи двох рівнянь другого степеня з двома змінними?
3. Які ви можете назвати способи розв'язування систем двох рівнянь другого степеня з двома змінними? Поясніть їх суть на прикладах.

Задачі та вправи

Розв'яжіть системи рівнянь способом підстановки (**292–295**):

292°. а) $\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} x + y = -2, \\ x^2 + y^2 = 100; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ y + x^2 = 8. \end{cases}$

293°. а) $\begin{cases} x^2 + y = 14, \\ y - x = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ y^2 - x = 39; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 4, \\ y + xy = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y - x - 1 = 0, \\ x + y^2 = -1; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 17; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = -2. \end{cases}$

294. а) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x - y + 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 6, \\ 2x - 3y = 0; \end{cases}$ в°) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y = 0; \end{cases}$

г°) $\begin{cases} xy = 8, \\ x + y + 3 = 0; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9, \\ x - y = 0. \end{cases}$

295. а) $\begin{cases} x - y = 0,8, \\ xy = 2,4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x + y = -3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y - 2x = 2, \\ 5x^2 - y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 11, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2, \\ 3x^2 - y = 5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 3x = 4y. \end{cases}$

Розв'яжіть системи рівнянь (**296–298**):

296. а°) $\begin{cases} x+y=-7, \\ xy=-18; \end{cases}$ б°) $\begin{cases} x+y=-6, \\ xy=-16; \end{cases}$ в°) $\begin{cases} xy=18, \\ x+y=-9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y^2=7, \\ xy^2=12; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x^2y^2=5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} xy+x+y=11, \\ xy(x+y)=30. \end{cases}$

297. а) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ xy=10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$

298. а) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0,3, \\ x+y=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=-1\frac{5}{12}, \\ x-y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x-1)(y+1)=-2, \\ x+y=1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2-5y^2=7, \\ 3x^2+5y^2=17; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=11, \\ x^2-2y^2=2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2+6xy+9y^2=4, \\ 2x^2+y^2=3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 4x^2-4xy+y^2=1, \\ xy=1. \end{cases}$

299*. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} xy+x^2=10, \\ xy+y^2=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y^2-xy=4, \\ x^2-xy=-3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-3xy=7, \\ 3y^2-xy=14; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+xy=3, \\ xy^2+xy^3=12. \end{cases}$

Розв'яжіть системи рівнянь (**300; 301**):

300*. а) $\begin{cases} 2x^2+5xy-18y^2=0, \\ xy+y^2-12=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-5y^2=-1, \\ 3xy+7y^2=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy = 12, \\ x^2 + 2y^2 = 34; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3, \\ 2x^2 - xy - y^2 = 5. \end{cases}$

301*. а) $\begin{cases} \dfrac{1 + x + x^2}{1 + y + y^2} = \dfrac{3}{7}, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1 - x + x^2}{1 - y + y^2} = 2\dfrac{1}{3}, \\ x + y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x + 2}{(2x - y)(2y - x)} = 1\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{x + y}{x - y} = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} |x| + y = 5, \\ |x|^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

302°. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x + 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = -2x - x^2, \\ x - y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y - 4 = 0, \\ x + y = 2; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -16; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 81, \\ xy = 12. \end{cases}$

6.3. Розв'язування задач

Пригадайте

Які основні етапи включає процес складання рівняння або системи рівнянь за умовою задачі?

До системи рівнянь другого степеня з двома змінними нерідко приходять як до математичної моделі ряду різноманітних задач. Загальні підходи до складання такої моделі (системи рівнянь) вам відомі, бо неодноразово використовувалися у процесі розв'язування задач за допомогою рівнянь. Розглянемо кілька задач, які можна розв'язати за допомогою системи рівнянь другого степеня з двома змінними.

Умова задачі	Математична модель задачі
1. Сума двох чисел дорівнює 50, а їх добуток — 600. Знайдіть ці числа.	$\begin{cases} x + y = 50, \\ xy = 600. \end{cases}$
2. Периметр прямокутника дорівнює 100 м, а його площа — 600 м^2. Знайдіть розміри прямокутника.	$\begin{cases} 2x + 2y = 100, \\ xy = 600. \end{cases}$
3. Дротом завдовжки 400 м треба 4 рази обгородити прямокутну ділянку площею 0,06 га. Які розміри повинна мати ділянка?	$\begin{cases} xy = 600, \\ 4(2x + 2y) = 400. \end{cases}$

Позначивши невідомі числа (перша задача), а також розміри прямокутників (друга і третя задачі), відповідно через x та y, складаємо системи рівнянь, які є математичними моделями даних задач.

Як бачимо, розв'язування різних за змістом задач приводить до однієї і тієї самої системи рівнянь: $\begin{cases} x + y = 50, \\ xy = 600. \end{cases}$

Розв'язавши її, отримаємо: $x_1 = 20$, $y_1 = 30$ і $x_2 = 30$, $y_2 = 20$.

Отже, шукані числа дорівнюють 30 і 20 — так само, як і розміри прямокутної ділянки (30 м і 20 м).

Розв'язування багатьох задач значно полегшується, якщо скористатися табличною формою запису.

Задача. По замкненій коловій доріжці завдовжки 400 м рухаються в одному напрямку два ковзанярі, які сходяться через кожні 4 хв. Визначте швидкість кожного ковзаняра, якщо перший з них пробігає коло на 12 с швидше від другого.

▽ *Розв'язання.* Позначимо швидкості руху першого і другого ковзанярів (у м/хв) відповідно через x і y та заповнимо таблицю:

Ковзанярі	Відстань, м	Швидкість, м/хв	Час проходження одного кола, хв
I	400	x	$\frac{400}{x}$
II	400	y	$\frac{400}{y}$

З умови задачі маємо:

$$\frac{400}{y} - \frac{400}{x} = \frac{1}{5} \ (12 \text{ с} = \frac{1}{5} \text{ хв}).$$

За 4 хв перший ковзаняр пробігає $4x$ метрів, а другий — $4y$ метрів. Перший ковзаняр за цей час, як відомо, пробігає на 400 м (одне коло) більше від другого.

Отже, маємо ще одне рівняння:

$4x - 4y = 400$, або $x - y = 100$.

Оскільки невідомі в обох рівняннях позначають одні й ті самі величини, складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{400}{y} - \frac{400}{x} = \frac{1}{5}, \\ x - y = 100; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2000(x - y) = xy, \\ x - y = 100. \end{cases}$$

Підставивши у перше рівняння системи замість $x - y$ число 100, отримаємо: $200 \cdot 100 = xy$, або $xy = 20000$. Отже, маємо систему $\begin{cases} xy = 20000, \\ x - y = 100. \end{cases}$

Розв'язавши її способом підстановки, отримаємо два розв'язки: (500; 400) і (–400; –500).

Умову задачі задовольняє тільки додатний розв'язок системи.

Відповідь. Швидкість першого ковзаняра становить 500 м/хв, а другого — 400 м/хв. ▲

Задачі та вправи

303°. **а)** Сума чисел дорівнює 20, а їх добуток — 96. Знайдіть ці числа.

б) Прямокутну ділянку землі площею 1600 м^2 оточено огорожею, довжина якої дорівнює 200 м. Знайдіть розміри цієї ділянки.

в) Площа прямокутної ділянки землі, що межує зі стіною, дорівнює 104 м^2, а довжина огорожі, якою обнесено цю ділянку з трьох боків, дорівнює 34 м. Знайдіть розміри ділянки.

304°. **а)** Різниця двох чисел дорівнює 6, а їх добуток — 216. Знайдіть ці числа.

б) Різниця довжин двох сторін прямокутника дорівнює 6 м, а його площа — 216 м^2. Визначте периметр прямокутника.

305°. **а)** Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а довжина його діагоналі — 10 см. Знайдіть довжини сторін прямокутника.

б) Периметр прямокутника дорівнює 70 см, а його діагональ на 10 см довша від однієї зі сторін. Знайдіть довжини сторін прямокутника.

306. Сума двох чисел у 7 раз більша від їх різниці, а різниця квадратів цих чисел дорівнює 252. Знайдіть ці числа.

307. Сума квадратів двох чисел дорівнює 261. Якщо кожне з чисел зменшити на 1, то сума їх квадратів дорівнюватиме 221. Знайдіть ці числа.

308. Площа прямокутника дорівнює 120 см^2, а його діагональ дорівнює 17 см. Знайдіть сторони прямокутника.

309. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 41 см, а його площа — 180 см^2. Знайдіть катети.

310. **а)** Гіпотенуза прямокутного трикутника довша від одного з катетів на 3 см, а від другого — на 6 см. Знайдіть довжини катетів.

б) Одна сторона прямокутника на 1 см довша від іншої і коротша від діагоналі на 8 см. Знайдіть площу прямокутника.

311. Спортивний майданчик прямокутної форми має площу 840 м^2. Якщо довжину майданчика зменшити на 5 м, а ширину — збільшити на 4 м, то отримаємо прямокутник, що має таку саму площу. Знайдіть розміри майданчика.

312. Довжина огорожі двох однакових суміжних ділянок, що мають форму прямокутника (рис. 79), дорівнює 120 м, а площа кожної з них — 0,03 га. Визначте розміри ділянок.

Рис. 79

313. Сума квадратів двох чисел дорівнює 208, а різниця квадратів цих чисел дорівнює 80. Знайдіть ці числа.

314. Якщо до добутку двох чисел додати більше з них, то отримаємо 48; якщо ж до цього добутку додати менше число, то отримаємо 45. Знайдіть ці числа.

315*. Знайдіть двоцифрове число, яке в 4 рази більше, ніж сума його цифр, і на 16 більше, ніж добуток його цифр.

316*. Двоцифрове число в 4 рази більше, ніж сума його цифр і вдвічі більше, ніж добуток його цифр. Знайдіть це число.

317°. Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати певну роботу за 6 год. Одна бригада, працюючи окремо, може виконати роботу на 5 год швидше від другої. За який час кожна бригада може виконати роботу самостійно?

318°. Один оператор набирає на комп'ютері за годину на 2 сторінки більше, ніж другий, а обидва мали набрати по 80 сторінок. Скільки сторінок набирав за годину кожен оператор, якщо разом на всю роботу вони витратили 18 год?

319*. У рівнобедрений трикутник з периметром 14 дм вписали ромб, одна сторона якого лежить на основі, а друга — на бічній стороні трикутника. Знайдіть довжину сторін трикутника, якщо довжина сторони ромба дорівнює 24 см (рис. 80).

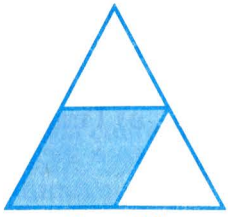


Рис. 80

320°. Відстань між двома залізничними станціями дорівнює 96 км. Швидкий

поїзд долає її на $\frac{2}{3}$ год швидше, ніж пасажирський. Знайдіть швидкість кожного поїзда, якщо відомо, що різниця швидкостей поїздів дорівнює 12 км/год.

321. **а)** Два велосипедисти вирушають одночасно назустріч один одному з населених пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 54 км, і через 2 год зустрічаються. Не зупиняючись, вони продовжують рухатися далі з такою самою швидкістю, і другий велосипедист прибуває в пункт A на 54 хв раніше, ніж перший — у пункт B. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

б) Два поїзди виходять одночасно назустріч один одному зі станцій M і N, відстань між якими дорівнює 45 км, і зустрічаються через 20 хв. Поїзд, який вийшов зі станції M, прибуває на станцію N на 9 хв раніше, ніж другий поїзд прибуває на станцію M. Яка швидкість кожного поїзда?

322. З двох міст, відстань між якими становить 280 км, одночасно виїхали назустріч один одному два мотоциклісти. Через 2 год вони зустрілися. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста, якщо один з них подолав відстань між містами на 1 год 10 хв швидше, ніж другий.

323. Мотоцикліст приїхав з міста A в місто B, віддалене від A на 120 км. Назад він вирушив з такою самою швидкістю, але через 1 год після від'їзду був змушений зупинитися на 15 хв. Після зупинки він продовжував рух до A, збільшивши швидкість на 20 км/год. Якою була початкова швидкість мотоцикліста, якщо на дорогу від B до A він витратив стільки ж часу, як і на дорогу від A до B?

324*. Для виконання певної роботи запросили двох робітників, причому перший з них самостійно міг виконати всю роботу на 15 год швидше від другого. Після того, як перший робітник відпрацював 10 год, його замінив другий робітник, який закінчив усю роботу за 30 год. За який час кожен робітник, працюючи окремо, може виконати всю роботу?

Додаткові задачі та вправи до розділу III

Розв'яжіть нерівності графічно **(325–328)**:

325. **а)** $x^2 < 4$; **б)** $x^2 - 25 \geq 0$;
в) $x^2 - 1 > 0$; **г)** $9 - x^2 \leq 0$;
ґ) $6x^2 - 2x \geq 0$; **д)** $2x - x^2 \leq 0$;
е) $7x + x^2 > 0$; **є)** $2x + 10x^2 \leq 0$.

326. **а)** $x^2 - 5x + 6 > 0$; **б)** $x^2 + 5x + 6 \geq 0$;
в) $x^2 + 10x + 21 \leq 0$; **г)** $x^2 - 10x + 21 > 0$;
ґ) $x^2 + 3x + 2 < 0$; **д)** $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

327. **а)** $-x^2 + 3x + 4 > 0$; **б)** $-x^2 - 3x - 4 \leq 0$;
в) $(x - 5)^2 + 3 \geq 0$; **г)** $2x^2 + 2x + 20 \leq 0$;
ґ) $2x^2 - 7x + 12 > 0$; **д)** $(x - 5)^2 - 3 \geq 0$.

328. **а)** $\frac{4}{3}x^2 + 4x \leq -3$; **б)** $-0{,}4x^2 \geq 1 - 0{,}8x$;
в) $x^2 + 10x < 13$; **г)** $\frac{x^2}{3} + 3 < \frac{4x}{3}$;
ґ) $\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x-2}{6}$; **д)** $\frac{x(4x-3)}{2} \leq -0{,}5$.

329. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної нерівність — правильна:
а) $(1 - x)(8 - x) < (2x - 3)(x - 3)$;
б) $(8 + x)(11 - x) > (2x + 7)(5 - x)$;
в) $(2x + 1)^2 > 4x$; г) $(3x + 1)^2 > 6x$.

Розв'яжіть нерівності аналітичним способом **(330–332)**:

330. **а)** $\left(x + 2\frac{1}{2}\right)(x - 4) > 0$; **б)** $(x - 2{,}5)(x + 4) \leq 0$;
в) $(2x - 4{,}4)(x + 0{,}5) \leq 0$; **г)** $(3x - 2{,}7)\left(x + \frac{1}{3}\right) > 0$;
ґ) $\left(\frac{1}{4}x - 2\right)(x - 7{,}3) > 0$; **д)** $x(x + 3{,}2) < 0$;
е) $(5 - 2x)(x + 3) \geq 0$; **є)** $x(4 - x) < 0$.

331. **а)** $x^2 + 7x + 15 > 0$; **б)** $x^2 - 2x - 15 \leq 0$;
в) $2x^2 - 5x + 4 \geq 0$; **г)** $3x^2 + 5x + 4 < 0$.

332. **а)** $2x^2 \le 20 - 3x$; **б)** $3 - x \ge 4x^2$;
в) $x^2 + 6{,}4 > 5{,}6x$; **г)** $17 < 15x + 2x^2$.

333. При яких значеннях параметра a рівняння:

а) $\frac{1}{4}x^2 + ax + a + 2 = 0$ — не має розв'язків;

б) $x^2 - ax + a + 3 = 0$ — має два різні корені?

Знайдіть область визначення функцій **(334–337)**:

334. **а)** $y = \sqrt{x(x-5)}$; **б)** $y = \sqrt{(x+3)(x-1)}$;
в) $y = \sqrt{(3-x)x}$; **г)** $y = \sqrt{(6+2x)(x-4)}$.

335. **а)** $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$; **б)** $y = \sqrt{x^2 - 3x - 5}$;
в) $y = \sqrt{3x^2 + 4x}$; **г)** $y = \sqrt{5x - 2x^2}$.

336. **а)** $y = \sqrt{-x^2 - 5x - 6}$; **б)** $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$;
в) $y = \sqrt{x(4-x) - 3}$; **г)** $y = \sqrt{3(4x+3) + 4x^2}$.

337. **а)** $y = \frac{x^2 + 9}{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}$; **б)** $y = \frac{|x| - 1}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}$;
в) $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}}{x}$; **г)** $y = \frac{\sqrt{5 - 4x - x^2}}{|x|}$.

Розв'яжіть нерівності методом інтервалів **(338–341)**:

338. **а)** $(x-4)(x-6)(x-8) > 0$; **б)** $(x+4)(x+5{,}6) < 0$;
в) $(x+3)(x-2)(x-3) \le 0$; **г)** $x(x-5)(x+5) \ge 0$.

339. **а)** $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)(x-3) < 0$;

б) $(x-1)\left(x-\sqrt{10}\right)(x-12) \ge 0$;

в) $(x+4)(x-1)\left(\sqrt{2}-2\right) \ge 0$;

г) $(x+2)\left(x+\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{7}\right) < 0$.

340. **а)** $x^3 - 16x > 0$; **б)** $12x^2 - 3 \le 0$;
в) $(x-2)(5x^2 - x - 4x) \ge 0$; **г)** $(4x^2 - 9)(x-2) < 0$.

341. **а)** $(2x-1)(3-x)\sqrt{3-x} > 0$;

б) $\sqrt{x-3}\left(2x^2 - 1\right) \le 0$;

в) $(9x^2-8)(x^2-2)\sqrt{x+2}\geq 0$;

г) $(16x^3-4x^2)\sqrt{1-x}<0$.

При яких значеннях змінної вирази мають смисл **(342–345)**:

342. **а)** $\sqrt{x-2}$; **б)** $\sqrt{4+x}$;

в) $\sqrt{2x-4}$; **г)** $\sqrt{x(x+1)(x-1)}$?

343. **а)** $\sqrt{(x+2)^2(x+3)}$; **б)** $\sqrt{(x-4)(x-5)x}$;

в) $\sqrt{x(x+2)(x+3)}$; **г)** $\sqrt{(x-1)(x+2)^2}$?

344. **а)** $\sqrt{(x^2-3)(x+1)}$; **б)** $\sqrt{(x^3-x^2)(x+2)}$;

в) $\sqrt{(4x^2-9)(x^2+1)}$; **г)** $\sqrt{(x-1)(8x^3-2x)}$?

345. **а)** $\sqrt{\left(\frac{4}{9}x^2-9\right)\sqrt{(x+1)}}$; **б)** $\sqrt{(0,25x^3-x)\left(2x+\frac{1}{2}\right)}$;

в) $\sqrt{(2x^2+6x-10)|x|}$; **г)** $\sqrt{(4x^2-9)(2x^2-5x+6)}$?

346. Розв'яжіть задачі.

а) Сума двох додатних чисел дорівнює 42. За яких умов добуток цих чисел буде менший від 41?

б) Добуток двох цілих чисел дорівнює –16. За яких умов сума цих чисел буде меншою від 24?

Розв'яжіть системи рівнянь **(347–350)**:

347. **а)** $\begin{cases} y+2x^2=9, \\ y+2x=0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2-2y=7, \\ x+y=4; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} y-x^2=-4, \\ 3y-x=0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2-y=20, \\ x-2y=5; \end{cases}$ **ґ)** $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ x-y=0; \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x-y=3. \end{cases}$

348. **а)** $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x-y=-5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x+y=3; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} xy=-2, \\ x-y=-3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2-xy=4, \\ x+2y=10; \end{cases}$ **ґ)** $\begin{cases} x^2+xy=4, \\ 2x-y=0; \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} 2x^2+y^2=1, \\ 3x+y=1. \end{cases}$

349. **а)** $\begin{cases} 6y - x^2 - y^2 = 0, \\ 2x + y = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} xy - x^2 - y^2 = -3, \\ y - x = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}, \\ x + y = 12; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 0,8, \\ x - y = 4; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} (1 - x)(y - 1) = -2, \\ x + y = 5; \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} (2 - x)(y + 1) = -1, \\ y - x = -3. \end{cases}$

350. **а)** $\begin{cases} \frac{4}{x-1} - \frac{5}{y+1} = 1, \\ \frac{3}{x+3} - \frac{2}{y} = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \frac{3}{x+5} - \frac{2}{y-3} = 2, \\ \frac{4}{x-2} - \frac{1}{y-6} = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1 + x + x^2}{1 + y + y^2} = 3, \\ x + y = 6; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \frac{x^2 + y + 1}{y^2 + x + 1} = 1,5, \\ y - x = -1; \end{cases}$

ґ) $\begin{cases} (2 - x)(y - 3) = 1, \\ -\frac{2 - x}{3 - y} - 1 = 0; \end{cases}$ **д)** $\begin{cases} y - x = -4, \\ \frac{y}{x} - \frac{2 - 3x}{y + 5} + \frac{y}{x} = 2. \end{cases}$

351. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

а) $\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ x + y = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y^2 + x^2 = 9, \\ x + y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y^2 + y = 2x - 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} y = -\left|x^2 - 8x + 12\right|, \\ x + y = 6. \end{cases}$

352. Знайдіть коефіцієнт:

а) b у рівнянні $5x^2 + bx - 28 = 0$, якщо його корені x_1 і x_2 задовольняють умову: $5x_1 + 2x_2 = 1$;

б) b у рівнянні $2x^2 + bx - 15 = 0$, якщо його корені x_1 і x_2 задовольняють умову: $(x_1 - 1)\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) = -12$;

в) c у рівнянні $3x^2 - 7x + c = 0$, якщо його корені x_1 і x_2 задовольняють умову: $\left(x_1 + \frac{2}{3}\right)(x_2 - 1) = 1$;

г) c у рівнянні $27x^2 + 6x - c = 0$, якщо один з його коренів дорівнює квадрату другого.

Розв'яжіть задачі за допомогою системи рівнянь, а потім, якщо це можливо, іншим способом **(353–356)**:

353. **а)** Сума двох чисел дорівнює 8, а їх добуток 15. Знайдіть ці числа.

б) Добуток двох чисел дорівнює 10, а їх різниця 3. Знайдіть ці числа.

в) Півпериметр прямокутника дорівнює 7 см, а його площа — 12 см^2. Знайдіть довжину і ширину цього прямокутника.

г) Площа прямокутного трикутника дорівнює 6 см^2. Знайдіть катети цього трикутника, якщо один із них на 1 см довший від другого.

354. **а)** Сума двох чисел дорівнює 7, а сума їх квадратів — 25. Знайдіть ці числа.

б) Відношення двох чисел дорівнює $\frac{3}{5}$, а різниця їх квадратів — 64. Знайдіть ці числа.

в) Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а його площа — 40 см^2. Знайдіть довжину і ширину цього прямокутника.

г) Два трактори, працюючи разом, можуть зорати поле за 6 год. За який час кожен трактор, працюючи окремо, може зорати поле, якщо один із них може зробити це сам на 5 год швидше, ніж другий?

355. **а)** Середнє арифметичне двох чисел дорівнює 17, а середнє геометричне — 15. Знайдіть ці числа.

б) Площа прямокутника дорівнює 90 см^2. Якщо довжину прямокутника зменшити на 3 см, а ширину — збільшити на 2 см, то отримаємо прямокутник, площа якого дорівнює 96 см^2. Знайдіть довжину і ширину даного прямокутника.

в) Відстань 360 км пасажирський поїзд пройшов на 3 год швидше від товарного. Яка швидкість кожного поїзда, якщо швидкість пасажирського на 20 км більша, ніж швидкість товарного?

г) Два прокатних стани, працюючи одночасно, можуть прокатати деяку кількість металу за 9 год 36 хв. Працюючи окремо, один стан може прокатати цей метал на 8 год швидше, ніж другий стан. За який час може виконати завдання кожен стан, працюючи окремо?

356. **а)** Якщо двоцифрове число поділити на суму його цифр, то отримаємо частку 6 і остачу 2. Якщо це саме число поділити на добуток його цифр, то в частці буде 5 і в остачі теж 2. Знайдіть це число.

б) Із листа картону, що має форму прямокутника, виготовили відкриту зверху коробку, об'єм якої дорівнює 1,5 дм^3. Для цього по кутах листа вирізали по квадрату зі стороною 5 см і утворені краї загнули. Які розміри мав лист картону, якщо його довжина була вдвічі більша від ширини?

в) З двох населених пунктів A і B, відстань між якими 24 км, виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. Після їх зустрічі автомобіль, що виїхав з пункту A, приїхав до пункту B через 16 хв, а другий автомобіль приїхав до пункту A через 4 хв. З якою швидкістю їхав кожний автомобіль?

г) Рівнодійна двох сил, спрямованих під прямим кутом, дорівнює 25 Н. Якщо меншу силу збільшити на 8 Н, а більшу силу зменшити на 4 Н, то рівнодійна залишиться без змін. Знайдіть величини складових сил.

✓ Завдання для самоперевірки

I рівень

1. Перевірте, чи є число –3 розв'язком нерівності:
а) $(x + 2)(x - 4) < 0$; **б)** $(x - 1)(x - 3) > 0$.

2. При яких значеннях змінної вираз має смисл:
а) $\sqrt{2x - 3}$; **б)** $\sqrt{3x + 5}$.

3. Знайдіть область визначення функції:
а) $y = \sqrt{x^2 + 3x}$; **б)** $y = \sqrt{x^2 - 4x}$.

4. Розв'яжіть нерівність графічним способом:
а) $x^2 - 8x + 15 < 0$; **б)** $x^2 + 10x + 25 > 0$.

5. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:
а) $(x - 3)(x - 5) < 0$; **б)** $(x - 2)(x - 4) \le 0$.

6. Чи є пара чисел (2; 3) розв'язком системи рівнянь:
а) $\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ 3x + y = 10; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ x - y = -1? \end{cases}$

7. Розв'яжіть систему рівнянь:
а) $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ y - x = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y^2 = 5. \end{cases}$

8. Розв'яжіть задачі, склавши системи рівнянь.
а) Добуток двох чисел, одне з яких на 2 більше від другого, дорівнює 8. Знайдіть ці числа.
б) Добуток двох чисел, одне з яких на 3 менше від другого, дорівнює 18. Знайдіть ці числа.

II рівень

1. Розв'яжіть нерівність:
а) $2x^2 - 3x + 5 \ge 0$; **б)** $2x^2 - 7x - 4 \le 0$.

2. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:
а) $(x + 1)(x - 2)(x - 4) > 0$; **б)** $(x + 2)(x + 2)(x - 4) < 0$.

3. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:
а) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ y + 2x = 3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ x + y = 2. \end{cases}$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y^2 = 16, \\ x + 5y = 10; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x - 2y^2 = 1, \\ x - 8y = 1. \end{cases}$

5. Розв'яжіть задачі.

а) Сума двох чисел дорівнює 7, а різниця їх квадратів 21. Знайдіть ці числа.

б) Різниця двох чисел дорівнює 3, а сума їх квадратів 29. Знайдіть ці числа.

III рівень

1. Розв'яжіть нерівність:

а) $17 - 2x^2 < 15x$; **б)** $12 + 4x > 19x$.

2. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

а) $(4x^2 - 9)(2x - x^2) > 0$; **б)** $(5x^2 - 3x)(4x^2 - 1) < 0$.

3. При яких значеннях a рівняння $x^2 + 2x + 2 - a = 0$:

а) не має розв'язків; **б)** має два різні корені?

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2xy + y^2 = 6, \\ 4x + y = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2 - xy = 12, \\ x + 2y = 14. \end{cases}$

5. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 4 - x^2 - y = 0, \\ x + y = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y + 2x + x^2 = 0, \\ y - x = -10. \end{cases}$

6. Розв'яжіть задачі.

а) Дві бригади, працюючи разом, обробили ділянку за 12 год. За який час могла б обробити цю саму ділянку кожна бригада окремо, якщо продуктивності праці бригад відносяться, як 3 : 2?

б) Два зварники, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 7 днів за умови, що другий починає працювати на півтора дні пізніше від першого. За скільки днів кожний зварник самостійно може виконати це замовлення, якщо другому зварнику для цього потрібно на 3 дні менше, ніж першому?

IV рівень

1. Знайдіть множину допустимих значень змінної у виразі:

а) $\sqrt{2x^2+7x-4}$; **б)** $\dfrac{1}{\sqrt{-3x^2+17x-10}}$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x^2-xy+2y^2+3x-3y=14, \\ 2x+y=8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+4xy-y^2-3x-2=0, \\ 2y-3x=4. \end{cases}$

3. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{x^2-2x-3}$; **б)** $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-6x+5}$.

6. Розв'яжіть задачі.

а) Із пункту A в пункт B, відстань між якими 80 км, одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти. Після зустрічі перший велосипедист прибуває у B через 1 год 20 хв, а другий — в A через 3 год. З якою швидкістю їхали велосипедисти?

б) Два поїзди виходять одночасно з пунктів M і N, відстань між якими 45 км, назустріч один одному і зустрічаються через 20 хв. З якою швидкістю їхав кожний поїзд, якщо поїзд, що виїхав із M, прибув у N на 9 хв раніше, ніж прибув у M поїзд, який виїхав із N?

Розділ IV

ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

§7. Математичне моделювання. Відсоткові розрахунки

7.1. Поняття математичного моделювання

Пригадайте

1. У чому суть методу розв'язування задач за допомогою рівнянь?
2. Як називають рівняння або систему рівнянь, які складені за умовою задачі?
3. В якій послідовності відбувається процес розв'язування задачі за допомогою рівнянь?

① **Поняття математичного моделювання.** Математика тісно пов'язана з життям. Її виникнення зумовлене потребами практики. Уже саме поняття натурального числа з'явилося, очевидно, у зв'язку з необхідністю лічби. Упродовж усього часу існування математики як науки значну частину наукових пошуків займали і продовжують займати розв'язання численних ***прикладних задач***, тобто задач, породжених практикою, тих, що описують певні ситуації, які виникають у житті, в різних сферах людської діяльності. Математика допомагає розв'язувати велику кількість таких задач, які нематематичними методами розв'язати неможливо.

Як це їй вдається робити? Для того, щоб розв'язати певну прикладну задачу математичними методами її зміст перекладають на мову математики. В результаті отримують ***математичну модель*** початкової задачі, де вже фігурують не

реальні об'єкти, а абстрактні математичні поняття, числа, вирази, відношення. Математичною моделлю прикладної задачі може бути рівняння, нерівність, функція, система рівнянь або нерівностей тощо.

Математичні моделі можуть створюватися для вивчення і дослідження процесів, явищ, об'єктів реального світу. Наприклад, лінійна функція $y = kx + b$ є математичною моделлю рівномірного прямолінійного руху, який відбувається за законом $S = S_0 + vt$. Усі особливості такого руху можна встановити, досліджуючи зазначену функцію.

② **Процес математичного моделювання.** З рівняннями або їх системами як математичними моделями задач вам уже неодноразово доводилося мати справу. Розглянемо прикладну задачу, математичною моделлю якої є функція, і прослідкуємо процес створення та реалізації цієї моделі.

Задача. Дитячий майданчик прямокутної форми, який прилягає до стіни будинку, треба обнести огорожею завдовжки 40 м. Які розміри при цьому повинен мати майданчик, щоб його площа була найбільшою?

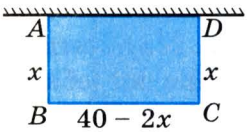


Рис. 81

▽ *Розв'язання.* Проаналізуємо умову і зробимо відповідний рисунок (рис. 81). Майданчик зображено на ньому у формі прямокутника $ABCD$, одна сторона AD якого прилягає до стіни. Отже, огорожа майданчика проляже вздовж сторін AB, BC і CD. Позначимо довжину однієї з них, наприклад AB, через x. Тоді довжина сторони BC становитиме $40 - 2x$.

За умовою задачі площа прямокутника $ABCD$ має бути найбільшою. За відомою формулою, $S_{ABCD} = AB \cdot BC = x(40 - 2x)$. Залишається знайти, при яких значеннях x значення цього добутку буде найбільшим.

Отже, розв'язання даної прикладної задачі звелося до розв'язання винятково математичної задачі: при яких значеннях змінної x вираз $x(40 - 2x)$ або, що те саме, функція

$y = x(40 - 2x)$ набуває найбільшого значення. Оця функція і є математичною моделлю даної прикладної задачі. Тепер ми маємо справу поки що тільки з нею (функцією), абстрагуючись від об'єкта, який вона моделює, і досліджуватимемо її за допомогою математичних методів.

Функція $y = x(40 - 2x)$ або $y = -2x^2 + 40x$ є квадратичною функцією. Оскільки коефіцієнт при x^2 від'ємне число, то ця функція набуває найбільшого значення в точці $x_0 = -\frac{b}{2a}$, що є абсцисою вершини параболи $y = ax^2 + bx + c$ (с. 95). У даному випадку: $a = -2$, $b = 40$. Отже, $x_0 = \frac{40}{4} = 10$.

Повернемося до змісту задачі. Проведене дослідження математичної моделі дозволяє зробити висновок, що дитячий майданчик за даних умов повинен мати розміри 10 м і $40 - 20 = 20$ (м). ▲

Отже, у процесі математичного моделювання, зокрема, при розв'язанні прикладних задач, можна виокремити такі основні етапи:

1) попередній аналіз об'єкта моделювання;

2) побудова математичної моделі (стосовно розглянутої задачі — утворення алгебраїчного виразу і відповідної функції);

3) реалізація математичної моделі (дослідження функції);

4) аналіз одержаних даних і перенесення їх на об'єкт моделювання.

Наголосимо на недопустимості ігнорування четвертого етапу, оскільки в результаті реалізації моделі можна отримати дані, окремі з яких не відповідають об'єкту моделювання, зокрема, умові прикладної задачі (наприклад, від'ємне значення площі або дробове значення кількості предметів). У такому разі такі дані потрібно відкинути.

Запитання для самоперевірки

1. Для чого створюють математичні моделі?
2. Наведіть приклади математичних моделей реальних процесів, прикладних задач.
3. Які основні етапи можна виокремити у процесі математичного моделювання?

Задачі та вправи

Розв'яжіть задачі (**357 – 362**), попередньо склавши їх математичну модель:

357. **а°)** Периметр прямокутника дорівнює 80 м, а його площа — 375 м^2. Знайдіть довжину сторін прямокутника.

б) Який із прямокутників з периметром 80 м матиме найбільшу площу?

в) Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю 200 м/с. Через який час тіло досягне висоти 875 м? Через який час тіло опиниться у найвищій точці? (Опором повітря нехтувати; вважати, що прискорення вільного падіння дорівнює 10 м/с^2).

Порівняйте математичні моделі задач **а**) – **в**).

358*. Потрібно обгородити дротяною сіткою ділянку площею 24 ари і розділити її огорожею на дві рівні частини прямокутної форми. Які розміри повинна мати ділянка, щоб довжина огорожі була якнайменшою?

359. Щоб перевезти 60 т вантажу, були замовлені автомашини певної вантажності. Оскільки машин потрібної вантажності не виявилося, то було відправлено на 4 автомашини більше, але їх вантажність була на півтонни меншою. Яку кількість автомашин було замовлено?

360. Час, який витрачає автобус на подолання відстані у 325 км, у новому графіку зменшено на 40 хв. Визначте середню швидкість руху автобуса за новим графіком, якщо вона на 10 км/год більша від середньої швидкості, передбаченої старим графіком.

361. Із трикутника, основа якого дорівнює 120 см, а висота — 60 см, треба вирізати прямокутник так, щоб дві його вершини лежали на основі трикутника, а дві інші — на бічних сторонах. Який периметр матиме прямокутник, якщо його площа повинна дорівнювати 13,5 дм^2?

362. З куска жерсті, що має форму гострокутного трикутника зі стороною $a = 40$ см і висотою $h_a = 30$ см, треба вирізати прямокутник так, щоб дві його вершини лежали на стороні $a = 40$ см, а дві інші — на бічних сторонах. Які розміри матиме прямокутник, якщо його площа повинна дорівнювати:

а) 192 см^2; **б)** 300 см^2; **в)** 324 см^2?

7.2. Задачі на відсоткові розрахунки

Пригадайте

1. Що називають відсотком?
2. Як записати певну кількість відсотків у вигляді десяткового дробу? Наведіть приклади.
3. Як записати у відсотках десятковий дріб? Наведіть приклади.
4. Як знайти відсоток від числа? Наведіть приклади.
5. Як знайти число за його відсотком? Наведіть приклади.
6. Що таке відсоткове відношення двох чисел? Наведіть приклади.

① **Основні задачі на відсотки.** Основними задачами на відсотки є: 1) знаходження відсотка від даного числа; 2) знаходження числа за його відсотком; 3) знаходження відсоткового відношення двох чисел; 4) відсоткові обчислення, які пов'язані з фінансовими операціями.

З першими трьома видами задач ви добре ознайомлені. Розглянемо прикладні задачі четвертого виду. У процесі їх розв'язування використовують спеціальні назви величин:

- ✔ грошова сума, внесена до ощадного банку, називається ***початковим капіталом*** (сумою);
- ✔ число, яке показує, на скільки відсотків збільшується (зменшується) початковий капітал за один рік, називається ***відсотковою таксою***;
- ✔ прибуток, отриманий через рік з початкового капіталу, називається ***відсотковими грішми***, а відсотки, за якими він нараховується — ***простими відсотками***;
- ✔ суму початкового капіталу разом з відсотковими грішми називають ***нарощеним капіталом***.

Задача 1. Щомісячна оплата за радіо становить 4 грн. Абонент прострочив оплату на 25 днів. Яку суму він має сплатити, якщо за кожний прострочений день нараховується пеня у розмірі 1% від суми щомісячної оплати?

▽ *Розв'язання.* Відсоткові гроші становлять:

$$\frac{4}{100}\cdot 1\cdot 25 \text{ (грн.)}.$$

Загальна сума (нарощене число) оплати через 25 днів разом з пенею становить:

$$4+\frac{4\cdot 25}{100}=4+1=5 \text{ (грн.)}. \blacktriangle$$

Задача 2. У банк, що виплачує 16% річних, покладено 600 грн. В яку суму перетвориться цей вклад через 2 роки?

▽ *Розв'язання.* Відсоткові гроші за перший рік становитимуть:

$$\frac{600}{100}\cdot 16=96 \text{ (грн.)}.$$

Нарощений капітал через рік становитиме:

$$600+600\cdot 0{,}16=600\cdot(1+0{,}16)=600\cdot 1{,}16 \text{ (грн.)}.$$

Відсоткові гроші за другий рік становитимуть:

$$\frac{600 \cdot 1{,}16}{100} \cdot 16 \text{ (грн.)}.$$

Нарощений капітал через два роки становитиме:

$$600 \cdot 1{,}16 + \frac{600 \cdot 1{,}16 \cdot 16}{100} = 600 \cdot 1{,}16 \cdot (1 + 0{,}16) = 600 \cdot 1{,}16^2 =$$

$= 807{,}36$ (грн.). ▲

Неважко помітити сутнісну відмінність між задачами 1 і 2. Якщо в першій задачі відсоток пені за кожен прострочений день нараховується від початкової суми 4 грн., і тому пеня за кожен день не змінюється, то в другій — річний прибуток з кожним роком збільшується, бо нараховується з нарощеного капіталу, сума якого з кожним роком зростає.

Відсоткові розрахунки, проведені в другій задачі, називають ***складними відсотками*** на відміну від ***простих відсотків*** (перша задача).

Складними відсотками, як правило, користуються під час фінансових розрахунків, а також розв'язуючи задачі, пов'язані з підрахунками народонаселення, визначенням кількісних змін у рослинному та тваринному світі тощо.

Величини, що використовуються в таких задачах, зокрема у фінансових розрахунках, позначають так: початковий капітал — a_0, відсоткова такса — $p\%$, час обігу грошей у банку — t, відсоткові гроші P_t, нарощений капітал — A_t.

② **Задачі на прості відсотки.** Якщо приріст капіталу або зміна чогось іншого обраховується за простими відсотками, то, використовуючи введені позначення, можемо обчислити нарощений капітал A_t через t років після внесення вкладу.

Якщо відсоткова такса становить $p\%$, то за рік початковий капітал a_0 зросте на суму $\frac{a_0 p}{100}$ грошових одиниць, а за t років — на $\frac{a_0 pt}{100}$ грошових одиниць. Нарощений капітал можна обчислити за формулою

$$\boxed{A_t = a_0 + \frac{a_0 pt}{100}} \quad \text{або} \quad \boxed{A_t = a_0\left(1 + \frac{pt}{100}\right)}. \qquad (1)$$

Цю формулу використовують для визначення будь-якої невідомої величини, що входить до неї, якщо відомі всі інші величини. Проілюструємо це на прикладі такої задачі.

Задача 3. На який термін банк надав позику в розмірі 10000 грн., якщо, повертаючи кредит, позичальник сплатив 18750 грн., а річна такса становила 25%?

▽ *Розв'язання.* Оскільки в даному випадку річна такса розраховується з початкового капіталу (позиченої суми), то тут маємо справу з простими відсотками.

За умовою: $A_t = 18750$, $a_0 = 10000$, $p = 25\%$.

Підставляючи ці дані у формулу (1), маємо:

$$18750 = 10000\left(1 + \frac{25t}{100}\right).$$

Звідси $18750 = 10000 + 2500t$; $2500t = 8750$; $t = 3{,}5$.

Отже, позику було надано на 3,5 роки. ▲

③ **Задачі на складні відсотки.** Встановимо формулу обчислення нарощеного капіталу, якщо відсоткова такса нараховується з нарощеного капіталу (складні відсотки).

Нехай початковий капітал становить a_0 грошових одиниць, а відсоткова такса дорівнює $p\%$. За перший рік початковий капітал зросте на $p\%$, тобто на $\frac{pa_0}{100}$ грошових одиниць, і через рік нарощений капітал становитиме $A_1 = a_0 + \frac{a_0 p}{100} = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ грошових одиниць. За другий рік відсоткові гроші нараховуватимуться вже від нарощеного капіталу A_1 і становитимуть $\frac{A_1 p}{100}$ грошових одиниць, а нарощений капітал після другого року дорівнюватиме: $A_2 = A_1 + \frac{A_1 p}{100} = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Оскільки $A_1 = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$, то $A_2 = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)$, тобто $A_2 = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$.

Через три роки нарощений капітал становитиме:

$$A_3 = A_2\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3.$$

Аналогічно через t років:

$$\boldsymbol{A_t = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t}. \qquad (2)$$

Формулу (2) використовують не лише в задачах, пов'язаних з банківськими розрахунками, але і в процесі розв'язання інших задач на складні відсотки. Розглянемо одну з них.

Задача 4. Продуктивність праці на заводі щороку збільшується на однакову кількість відсотків. За три роки вона зросла на 33,1%. На скільки відсотків щороку збільшувалася продуктивність праці?

▽ *Розв'язання.* Оскільки розрахунок зростання продуктивності праці щороку здійснюється з урахуванням уже нарощеної продуктивності, то в даному випадку маємо справу із складними відсотками.

Нехай початкова продуктивність праці на заводі дорівнює a_0 і щороку збільшується на p%. Тоді за формулою (2) продуктивність праці в кінці третього року (A_3) становитиме $A_3 = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$. З іншого боку, відповідно до умови задачі, продуктивність праці зросла на 33,1%, тобто в 1,331 рази і становить: $a_0 \cdot 1{,}331 = 1{,}331a_0$. Маємо рівняння: $1{,}331a_0 = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$

або $1{,}331 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$. За таблицею кубів знаходимо: $1 + \frac{p}{100} = 1{,}1$; $\frac{p}{100} = 0{,}1$; $p = 10\%$.

Отже, щороку продуктивність праці на заводі зростала на 10%. ▲

Задачі та вправи

363°. **а)** Скільки сухої ромашки можна отримати з 30 кг свіжої, якщо при сушінні вона втрачає 85% своєї маси?

б) Липовий цвіт при сушінні втрачає 75% своєї маси. Скільки вийде сухого липового цвіту зі 150 кг свіжого?

364. Донецька і Луганська області займають 8,8% території України, тут проживає 15,2% населення України. Яка площа цієї території і скільки людей проживає в цих областях, якщо площа території нашої країни становить 603,7 тис. км^2, а чисельність її населення — 48 млн. чоловік?

365°. При помолі жита можна отримати 75% борошна. Скільки жита треба змолоти, щоб мати 0,3 т борошна?

366. Сільськогосподарські угіддя України займають 42,26 млн. га, або 70% загальної земельної площі. Яка площа території України?

367*. Щойно добуте з шахти вугілля містить 2,5% води, а після п'ятиденного перебування на повітрі воно вже містить 4% води. На скільки збільшиться маса 1020 т вугілля через 5 днів після видобутку?

368. Підприємець поклав у банк 2700 грн. Скільки відсоткових грошей на цю суму нарахують за 2 місяці та 10 днів, якщо банк виплачує 2% місячних (прості відсотки)?

369°. В яку суму перетворяться 1700 грн., покладених у банк, який сплачує 18% річних (складні відсотки): через рік? Через 2 роки?

370°. У банк, який виплачує 3% місячних (прості відсотки), було покладено 5400 грн. В яку суму перетвориться цей вклад через 4 місяці? Через 9 місяців?

371°. У банк, який виплачує 3% місячних (прості відсотки), поклали 800 грн. Через який час прибуток з цієї суми становитиме:

а) 24 грн.; **б)** 16,8 грн.; **в)** 5,6 грн.; **г)** 2,4 грн.?

372. Через який час подвоїться сума, покладена в банк, якщо річна відсоткова такса становить 41% (складні відсотки)?

373. Яка сума дає щорічний прибуток:

а) 60 грн.; **б)** 48 грн.; **в)** 50 грн.; **г)** 200 грн.,

якщо банк сплачує 20% річних?

374. Яка сума при нараховуванні 25% річних дає прибуток за рік:

а) 250 грн.; **б)** 650 грн.; **в)** 725 грн.; **г)** 62,5 грн.?

375°. Яка сума була покладена в банк, що сплачує 2% місячних, якщо через місяць прибуток становив 432 грн. 60 к.?

376. Яка сума, покладена у банк під 20% річних (прості відсотки), перетвориться через 6 місяців у 4400 грн.?

377. Початкова сума вкладу становить 800 грн., місячна відсоткова такса — 2%, термін зберігання грошей — 4 місяці. Визначте:

а) відсоткову суму грошей за простими і складними відсотками;

б) кінцеву суму грошей за простими і складними відсотками.

378°. Кінцева сума вкладу становить 1200 грн., місячна відсоткова такса — 2%, термін зберігання грошей — 3 місяці. Визначте початкову суму грошей за простими відсотками.

379. Підприємець поклав у банк 2700 грн. Скільки відсоткових грошей на цю суму нарахують за 3 роки, якщо банк сплачує 22% річних (складні відсотки)?

380. У банк, який сплачує 3% місячних (складні відсотки), було покладено 5710 грн. В яку суму перетвориться цей вклад через 3 місяці? Через 4 місяці?

381. Скільки річних відсотків сплачує банк, якщо сума 3000 грн. через 2 роки зросла до 4320 грн.? Грошові нарахування банк здійснює за формулою складних відсотків.

382. Якою є річна відсоткова такса, якщо через 2 роки покладена у банк сума 1000 грн. зросла до 1440 грн.? Грошові нарахування банк здійснює за формулою складних відсотків.

383. Яку суму грошей треба покласти в банк, що нараховує 20% річних (складні відсотки), щоб через 4 роки одержати 10368 грн.?

§8. Елементи теорії імовірностей

8.1. Поняття про теорію імовірностей

① **Що вивчає теорія імовірностей.** В реальному світі є безліч подій, настання яких однозначно передбачити неможливо. Наприклад, неможливо передбачити: номер лотерейного білета, на який випаде виграш в черговому тиражі; кількість виробів, виготовлених підприємством за день, які не відповідатимуть стандарту, або кількість зернин у колосі, що виросте з посіяного зерна пшениці, тощо.

Але якщо багаторазово спостерігати за настанням певної події за одних і тих самих умов, то можна виявити деякі закономірності, які дозволять більш визначено говорити про можливість настання цієї події. Так, коли багато разів підряд підкидати монету, можна помітити, що герб випаде приблизно в половині всіх випадків. Ця закономірність справджуватиметься при досить великій кількості випробувань, хоча в кожному окремому випробуванні передбачити результат неможливо: може випасти герб, а може — й ні.

При великій кількості пострілів у мішень відносна частота влучень (відношення кількості влучень до кількості зроблених пострілів) наближатиметься до певного числа, що характеризує вправність стрільця. І хоч при кожному окремому пострілі передбачити результат неможливо — стрілець може влучити, а може й не влучити, — проте при великій кількості пострілів виявиться певна закономірність. Взагалі, якщо повторити ба-

гато разів те саме випробування з випадковим результатом, то можна визначити постійну відносну частоту одержання певного результату.

Такими закономірностями, які виявляються при спостереженні за великою кількістю однорідних випадкових подій (явищ) займається теорія імовірностей.

Отже, ***теорія імовірностей*** — це математична наука, що вивчає закономірності випадкових процесів і подій.

② **З історії розвитку теорії імовірностей.** Теорія імовірностей, як і багато інших наук, розвинулася з потреб практики. Вона виникла в середині XVII ст., спочатку у зв'язку із задачами теорії азартних ігор.

Уперше теорією ігор зайнявся італійський філософ і математик Джероламо Кардано (1501–1576), який написав твір «Про азартні ігри». Виникнення теорії імовірностей відносять до 1654 року, на який припадає листування між французькими математиками Блезом Паскалем (1623–1662) і П'єром Ферма (1601–1665) з приводу задачі, пов'язаної з грою в кості. Подібними задачами пізніше займався відомий нідерландський фізик Хрістіан Гюйгенс (1629–1695), який написав твір «Про розрахунки в азартній грі».

Велике значення у розвитку теорії імовірностей як галузі математичної науки мали праці швейцарського математика

Джероламо Кардано
(1501–1576)

Блез Паскаль
(1623–1662)

Якоб Бернуллі
(1655–1705)

Андрій Колмогоров
(1903–1987)

Євген Слуцький
(1880–1948)

Борис Гнєденко
(1912–1995)

Якоба Бернуллі, французького математика П'єра Лапласа, німецького математика Карла Гаусса, французького математика Сімеона Пуассона. У XIX ст. і на початку XX ст. розвиток теорії імовірностей пов'язаний з іменами академіків Петербурзької Академії наук Пафнутія Чебишова, Андрія Маркова, Олексія Ляпунова.

У подальшому теорію імовірностей збагатили своїми відкриттями російські вчені Андрій Колмогоров, Сергій Бернштейн, Всеволод Романовський, а також українські математики Анатолій Скороход, Мирон Зарицкий, Валерій Гливенко, Борис Гнєденко, Євген Слуцький. Наприклад, економіко-математичні дослідження Є. Слуцького мали помітний вплив на розвиток основ теорії імовірностей та математичної статистики. Є. Слуцький походив з козацької родини на Полтавщині, виріс у вчительській сім'ї, закінчив Житомирську гімназію та Київський університет. Його праці публікувалися у багатьох вітчизняних та зарубіжних виданнях.

У наш час теорія імовірностей знаходить застосування у природознавстві, економіці, на транспорті, у виробництві, медицині, гуманітарних науках.

Запитання для самоперевірки

1. Що вивчає теорія імовірностей як математична наука?
2. Наведіть приклади випадкових подій, масових випадкових подій.

3. Як виникла теорія імовірностей?
4. Де застосовується теорія імовірностей?

8.2. Основні поняття теорії імовірностей

① **Випробування і події.** Теорія імовірностей, як і будь-яка математична наука, оперує певним колом понять. Більшість понять теорії імовірностей описують за допомогою строгих означень, але є ряд основних, неозначуваних понять, як, наприклад, у геометрії поняття точки, прямої, площини. Одним із таких понять теорії імовірностей є поняття *події*. Під подією розуміють те, про що можна сказати, що воно відбувається або не відбувається. Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування (або досліду). Під випробуванням (або дослідом) розуміють ті умови, в результаті яких відбувається подія.

Наприклад, підкидання грального кубика — випробування, поява 3-ох очок на верхній грані кубика — подія; запитання вчителя — випробування, неправильна відповідь учня — подія.

Події прийнято позначати буквами A, B, C, ...

Усі події (явища), за якими ми спостерігаємо, можна поділити на три види: ***вірогідні***, ***неможливі*** і ***випадкові***.

! **Подія, яка в результаті випробування обов'язково відбудеться, називається *вірогідною*.**

Наприклад, якщо нагріти в посудині воду до температури 100°С при нормальному атмосферному тиску, то вона обов'язково закипить. Якщо з урни, де містяться лише білі кулі, виймати кулі, то подія «виймання з урни білої кулі» настає обов'язково, тобто буде вірогідною.

Подія, яка в результаті випробування не відбудеться ніколи, називається *неможливою*.

Наприклад, якщо в урні містяться сині кулі, то виймання жовтої кулі є неможливим.

Подія, яка в результаті випробування може відбутися або не відбутися, називається *випадковою*.

Наприклад, подія, коли підкинута монета падає гербом догори, є випадковою.

② **Якими бувають випадкові події.**

Дві події називають ***несумісними***, якщо настання однієї з них унеможливлює настання іншої при тому самому випробуванні.

Приклад. В урні лежать сині та жовті кульки. З урни вийняли одну кульку: нехай подія A — виймання синьої кульки, подія B — виймання жовтої кульки. Події A і B є *несумісними*, бо вийнята кулька не може бути одночасно і синьою, і жовтою.

Якщо при випробуванні може відбутися кілька подій і немає підстав вважати, що настання якої-небудь із них більш можливе, ніж настання інших, то такі події називають ***рівноможливими***.

Приклад. При підкиданні грального кубика на його верхній грані може з'явитися така кількість очок: 1, 2, 3, 4, 5 або 6. При цьому відбудеться одна з цих шести подій, які є рівноможливими. Справді, іншої події не буде, якщо припустити, що кубик, виготовлений з однорідного матеріалу, має форму правильного шестигранника і наявність очок не впливає на випадання будь-якої грані.

Події A_1, A_2, A_3, ..., A_n утворюють *повну групу подій*, якщо в результаті випробування хоч одна з цих подій відбувається. Іншими словами, настання хоча б однієї з по-

дій повної групи є вірогідною подією. Зокрема, якщо події, які утворюють повну групу подій, є попарно несумісними, то в результаті випробування відбудеться одна і тільки одна з цих подій.

Приклад. Волейбольна команда гімназії грала з командою ліцею. Нехай подія A_1 — команда гімназії виграла, подія A_2 — команда ліцею виграла, подія A_3 — нічия.

Події A_1, A_2, A_3 є попарно несумісними. Одна з цих подій неодмінно відбудеться. Отже, ці три події утворюють повну групу подій.

Запитання для самоперевірки

1. Яка подія називається випадковою? Наведіть приклади.
2. Яка подія називається неможливою? Наведіть приклади.
3. Яка подія називається вірогідною? Наведіть приклади.
4. Які події називають несумісними? Наведіть приклади.
5. Які події називають рівноможливими? Наведіть приклади.
6. В якому випадку події утворюють повну групу подій? Наведіть приклади.

Задачі та вправи

384. Серед названих подій знайдіть вірогідні, неможливі і випадкові:
подія A — сьогодні о 23 годині сонце буде за горизонтом;
подія B — у серпні занять у школі не буде;
подія C — учень накреслив чотирикутник, сума внутрішніх кутів якого дорівнює 270°;
подія D — сьогодні о 22 годині сонце буде в зеніті;
подія E — учень описав навколо чотирикутника коло;
подія K — учень описав навколо трапеції коло.

385. Визначте вид події:
подія A — учень накреслив трикутник, сума внутрішніх кутів якого дорівнює 185°;
подія B — учень вписав у рівносторонній трикутник коло, центр якого знаходиться в точці перетину медіан;
подія C — учень описав навколо трикутника коло з центром у точці перетину висот;
подія D — із ящика, в якому є 90 стандартних деталей, навмання витягнули стандартну деталь.

386°. Чи є події A і B несумісними, якщо:
а) при одному киданні монети відбувається: подія A — випадає аверс (лицьовий бік) монети, подія B — випадає реверс (зворотний бік) монети;
б) при киданні кубика відбувається: подія A — випадає 3 очки; подія B — випадає непарна кількість очок;
в) стрілець зробив постріл у мішень: подія A — стрілець влучив у мішень; подія B — стрілець не влучив у мішень.

387°. Чи є події A, B і C попарно несумісними, якщо:
а) в ящику знаходяться білі і чорні кульки. З нього навмання виймають дві кульки. Подія A — вийнято дві білі кульки; подія B — вийнято дві чорні кульки; подія C — вийнято одну білу і одну чорну кульки;
б) учень накреслив кут. Подія A — кут виявився тупим; подія B — кут виявився гострим; подія C — кут виявився прямим.

388. Чи є події A і B рівноможливими, якщо:
а) при двох пострілах по мішенях відбувається: подія A — промах при першому пострілі; подія B — промах при другому пострілі;
б) при киданні грального кубика відбувається: подія A — випадає 4 очки; подія B — випадає парне число очок;
в) в ящику лежать 5 стандартних і 5 нестандартних деталей. При вийманні з ящика однієї деталі відбувається: подія A — виймають стандартну деталь; подія B — виймають нестандартну деталь.

389. Чи утворюють події повну групу подій, якщо:

а) з ящика, що містить стандартні і нестандартні деталі, виймають деталі. Подія A — вийняли стандартну деталь; подія B — вийняли нестандартну деталь;

б) в результаті зустрічі футбольних команд «Карпати» і «Нафтовик» відбулися: подія A — команда «Карпати» виграла; подія B — команда «Карпати» програла; подія C — команди зіграли внічию;

в) учень задумав натуральне число. Подія A — задумане число ділиться на 3; подія B — задумане число ділиться на 3 з остачею 1; подія C — задумане число ділиться на 3 з остачею 2;

г) на перехресті доріг встановлено світлофор. Подія A — світлофор світиться зеленим кольором; подія B — світлофор світиться червоним кольором; подія C — світлофор світиться жовтим кольором;

ґ) при пострілі у мішень відбувається: подія A — промах; подія B — влучення в мішень.

390. Які з подій є попарно несумісними і утворюють повну групу, якщо:

а) Олег склав іспит з алгебри. Подія A — Олег одержав оцінку «12 балів»; подія B — Олег одержав оцінку «8 балів»; подія C — Олег одержав оцінку «6 балів»;

б) учень купив лотерейний білет. Подія A — учень виграв велосипед; подія B — учень виграв авторучку;

в) в урні лежать білі і чорні кульки. З урни вийняли одну кульку. Подія A — вийняли білу кульку; подія B — вийняли чорну кульку;

г) подія A — влучення в мішень; подія B — промах при одному пострілі у мішень.

8.3. Імовірність події

① **Поняття імовірності події.** Одним із найважливіших понять теорії імовірностей є поняття ***імовірності події***. Пояснимо його на прикладі.

В урні лежать 9 однакових за розміром і різних за кольором куль (4 синіх,3 жовтих і 2 зелених). При такому розподілі куль за кольорами можна стверджувати, що при вийманні з урни однієї кулі можливість узяти синю кулю є більшою, ніж можливість узяти зелену. Виявляється, що кожній з таких можливостей можна дати числову характеристику. Для цього умовно пронумеруємо кулі: сині кулі позначимо номерами 1, 2, 3, 4, жовті — 5, 6, 7, зелені — 8, 9.

Якщо через A_i ($i = 1, 2, 3, 4, ..., 9$) позначимо подію «з'явилася куля з номером i», то можемо розглянути такі події: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9. Внаслідок випробування (виймання кулі з урни) одна з цих подій настає з необхідністю, тобто вони утворюють повну групу.

Крім цього, ці події будуть попарно несумісними, бо коли, наприклад, відбувається подія A_2, то інша подія при випробуванні не настає.

Події A_i будуть і рівноможливими, бо немає підстав твердити, що, наприклад, подія A_3 більш можлива, ніж подія A_8.

Таким чином, події A_1, A_2, A_3, ..., A_9 становлять сукупність попарно несумісних і рівноможливих подій, які утворюють повну групу.

Події, що становлять такі сукупності, називають ***елементарними*** (або ***випадками***).

Цілком зрозуміло, що при елементарних подіях A_1 або A_2, або A_3, або A_4 настає подія «з'явилася синя куля». При інших елементарних подіях ця подія не настане.

Елементарна подія, при якій настає подія $\boldsymbol{A}$, називається ***сприятливою для цієї події***.

Отже, елементарні події A_1, A_2, A_3, A_4 сприяють появі кульки синього кольору, а елементарні події A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 слід віднести до несприятливих для цієї події.

! ***Імовірністю події A*** **називають відношення кількості випадків, які сприяють події *A*, до кількості всіх можливих випадків.**

Імовірність події A позначають так: $P(A)$. Отже, $P(A)=\frac{m}{n}$, де m — кількість елементарних подій, які сприяють події A, n — загальна кількість попарно несумісних і рівноможливих подій, які утворюють повну групу.

Обчислимо імовірність виймання синьої, жовтої і зеленої кульок. Позначимо ці події відповідно через A, B, C. З усіх дев'яти елементарних подій події A сприяють 4, події B — 3, події C — 2 елементарні події. Відтак:

$$P(A)=\frac{4}{9},\quad P(B)=\frac{3}{9},\qquad P(C)=\frac{2}{9}.$$

Зрозуміло, що ***імовірність вірогідної події*** дорівнює 1, бо такій події сприяють усі можливі випадки (***m = n***).

Якщо, наприклад, в урні містяться 4 сині кульки, то в такому випадку імовірність виймання синьої кульки становить: $P(A)=\frac{4}{4}=1.$

Імовірність неможливої події дорівнює нулю, бо неможливій події не сприяє жоден із можливих випадків (***m*** = 0).

Якщо, наприклад, в урні міститься 4 синіх і 3 жовтих кульки, то імовірність витягування білої кульки (подія D) становить: $P(D)=\frac{0}{7}=0.$

Імовірність випадкової події A задовольняє подвійну нерівність

$$0 < P(A) < 1.$$

Імовірність будь-якої події E задовольняє таку умову:

$$0 \le P(E) \le 1.$$

② **Обчислення імовірності подій.** Розглянемо приклади.

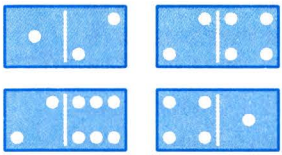


Рис. 82

Приклад 1. Кожна пластинка доміно поділена лінією на дві частини, на яких вирізьблені вічка від 0 до 6 (рис. 82). Знайдіть імовірність того, що на взятій навмання пластинці з комплекту доміно (хоча б на одній з її частин) буде 6 вічок.

▽ *Розв'язання.* Кількість усіх пластинок доміно можна обчислити, скориставшись такою таблицею, де записано можливі кількості вічок на кожній частині пластинки:

00	01	02	03	04	05	06
	11	12	13	14	15	16
	22	23	24	25	26	
	33	34	35	36		
	44	45	46			
	55	56				
	66					

Простий підрахунок показує, що кількість можливих випадків діставання пластинок (кількість усіх пластинок доміно) дорівнює 28.

Кількість випадків, що сприяють настанню події A, дорівнює 7 (кількість пластинок, на яких є 6 очок — принаймні на одній з половин пластинки).

Тому $P(A) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$. ▲

Приклад 2. Набираючи номер телефону, абонент забув одну з цифр і набрав її навмання. Знайдіть імовірність того, що була набрана потрібна цифра.

▽ *Розв'язання.* Абонент може набрати одну з таких цифр: 0, 1, 2, 3, 4. 5, 6, 7, 8, 9. Як бачимо, число можливих випадків дорівнює 10. Лише один з випадків сприяє нашій події (набра-

ти потрібну цифру). Відтак, імовірність події A становить: $P(A)=\frac{1}{10}=0{,}1$. ▲

Запитання для самоперевірки

1. Що називається імовірністю події?
2. В яких межах перебуває імовірність будь-якої події?

Задачі та вправи

391. Знайдіть імовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде парне число.

392°. В урні міститься 10 однакових за розміром і різних за кольором кульок: 6 жовтих і 4 синіх. Кульки перемішали. Знайдіть імовірність того, що навмання вийнята кулька виявиться синьою.

393. В урні пронумеровано 100 жетонів (від 1 до 100). Яка імовірність того, що номер навмання взятого з урни жетона не містить цифри 2?

394°. В урні є 5 червоних, 9 синіх і 6 жовтих кульок. Яка імовірність того, що навмання взята кулька буде жовтою?

395. Яка імовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде кількість очок, що ділиться на 3?

396°. На шкільному вечорі присутні 25 учнів 9-А класу, 23 учні 9-Б класу і 22 учні 9-В класу. Яка імовірність того, що учень, з яким ви заговорите, навчається в 9-А класі?

397. Телефонна лінія, що сполучає два населені пункти M і K, які знаходяться один від одного на відстані 4 км, обірвалася у невідомому місці. Яка імовірність того, що обрив стався не далі, як за 750 м від пункту K?

398. Учень задумав двоцифрове число. Яка імовірність того, що учень задумав двоцифрове число, яке записується різними цифрами?

399. У кошику лежать котушки з нитками червоного, синього і зеленого кольорів. Котушок з червоними нитками — 40%, із синіми — 25%, із зеленими — 35% від загальної кількості. Яка імовірність того, що взята навмання котушка буде із зеленими або червоними нитками?

400. У кошику лежать котушки з нитками чотирьох кольорів: червоного кольору — 35%, синього — 30%, жовтого — 25%, зеленого — 10% від загальної кількості. Яка імовірність того, що навмання взята котушка буде із червоними або жовтими нитками?

§9. Елементи математичної статистики

9.1. Початкові відомості про математичну статистику

Віктор Буняковський (1804–1889)

① **Що вивчає математична статистика.** Математичну статистику як один з розділів прикладної математики започаткував швейцарський математик Я. Бернуллі (1654–1705). Значних результатів у цій царині досяг також відомий український математик В.Я. Буняковський (1804–1889). Він народився в містечку Бар на Вінниччині. Після навчання у Парижі працював професором у Петербурзі. Він — автор понад 100 наукових праць, написаних в основному французькою мовою. Був почесним членом усіх університетів Російської імперії, віце-президентом Академії наук, головним експертом уряду з питань статистики і страхування.

Математична статистика — це розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, збору, обробки статистичних даних та їх використання для наукових і практичних висновків.

Дослідження методами математичної статистики застосовуються для прийняття рішень, зокрема, при прогнозуванні

розвитку певних галузей господарства, плануванні й організації виробництва, контролі якості продукції тощо.

② **Статистичні дослідження та їх етапи.** Під ***статистичними даними*** розуміють сукупність чисел, які дають кількісну характеристику ознак певних об'єктів та явищ, що нас цікавлять. Статистичні дані отримують в результаті дослідів, спостережень. Першим кроком статистичного дослідження є спостереження, збирання даних. Такі спостереження можуть бути суцільними і несуцільними.

Спостереження є ***суцільним***, якщо обстежують ознаки всіх одиниць сукупності. Прикладом може бути медичне обстеження населення у зв'язку з епідемією.

Спостереження є ***несуцільним***, якщо обстежуються ознаки окремих одиниць сукупності. Найбільш поширеним видом несуцільного спостереження є ***вибіркове спостереження***. Його застосовують тоді, коли в сукупність входить дуже велика кількість об'єктів або спостереження пов'язане із руйнуванням об'єктів, або ж воно вимагає великих затрат. У таких випадках зі всієї сукупності вибирають обмежену кількість об'єктів і вивчають їх.

Відібрану для спостереження сукупність об'єктів називають ***вибірковою сукупністю***, або просто ***вибіркою***.

Сукупність усіх об'єктів, над якими проводять спостереження (дослідження), називають ***генеральною сукупністю***.

Кількість об'єктів сукупності (вибіркової або генеральної) називають ***об'ємом сукупності***, відповідно, кількість об'єктів вибірки називають ***об'ємом вибірки***.

Наприклад, якщо із 800 деталей відібрано для дослідження 80 деталей, то об'єм генеральної сукупності дорівнює 800, а об'єм вибірки $n = 80$.

Результатом першого етапу статистичного дослідження є неупорядкований набір чисел, записаних дослідником у порядку їх надходження.

Наприклад, економіст, аналізуючи тарифні розряди працівників одного з цехів заводу, вибрав документи 20 робітників і

виписав з них послідовність чисел, що вказують на тарифні розряди (кваліфікацію робітників): 4, 4, 3, 2, 5, 2, 3, 5, 4, 3, 3, 2, 5, 4, 5, 4, 6, 3, 4, 5. Ці статистичні дані являють собою вибірку, яка піддається обробці.

На другому етапі статистичного дослідження, який називають ***зведенням***, упорядковують і узагальнюють статистичні дані, групують їх і на цій основі дають узагальнену характеристику сукупності.

У даному прикладі, розмістивши статистичні дані у порядку зростання розряду кваліфікації робітників, отримаємо ***статистичний ряд*** із 20 чисел: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6. (1)

Ці зведені дані про кваліфікацію робітників можна подати у вигляді статистичної таблиці (табл. 1) розподілу вибірки.

Таблиця 1

Тарифний розряд, x_i	2	3	4	5	6
Кількість робітників, n_i	3	5	6	5	1

Розглянутий статистичний ряд (1) розбито на 5 груп. Числа $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$ є значеннями ознаки кожної групи робітників. Їх називають ***варіантами***. А послідовність варіант: 2, 3, 4, 5, 6 — ***варіаційним рядом***.

Числа, які показують, скільки разів повторювалося кожне значення ознаки сукупності, називають ***частотами***.

Так, частота варіанти x_1 дорівнює 3, варіанти x_2 — 5, варіанти x_3 — 6, варіанти x_4 — 5, варіанти x_5 — 1 (див. табл. 1).

Відношення частоти до об'єму вибірки називають ***відносною частотою***.

Зокрема, у даному прикладі відносна частота робітників 2-го тарифного розряду становить $\frac{3}{20} = 15\%$; 3-го тарифного розряду — $\frac{5}{20} = 25\%$ і т.д.

Запитання для самоперевірки

1. Що вивчає математична статистика?
2. В якому випадку здійснюють вибіркові спостереження? Що таке вибірка і генеральна сукупність? Що таке об'єм сукупності та об'єм вибірки?
3. Як упорядковують і узагальнюють статистичні дані?
4. Поясніть на прикладі, що таке частота і відносна частота.

Задачі та вправи

401°. У таблиці подано результати квартального звіту торговельної організації. Знайдіть дохід кожного товару у відсотках. Який товар дав найбільший дохід у відсотках?

Назва товару	Залишок (наявність) товару на початку кварталу (тис. грн.)	Надходження товару за квартал (тис. грн.)	Продано (тис. грн.)	Залишок товару на кінець кварталу (тис. грн.)	Дохід з кожного товару у %
М'ясо	16	270		2	
Масло	20	95		20	
Цукор	35	215		24	
Кондитерські вироби	55	210		50	
Борошно	28	132		15	
Всього	154	922		115	

402. Для визначення попиту на жіноче взуття в одному з населених пунктів провели опитування, результати якого подані в таблиці:

Кількість жінок	20	28	30	16	4	1	1
Розмір взуття	35	36	37	38	39	40	41
Кількість взуття, у %							

Заповніть таблицю. Визначте вид спостереження і об'єм вибіркової сукупності.

403. У змаганнях з бігу на 100 м взяли участь 20 учнів, які показали такі результати (в секундах): 15,4; 16,8; 15,9; 16,7;

16,0; 15,9; 16,0; 15,9; 16,1; 16,3; 15,4; 15,9; 15,8; 16,0; 16,2; 16,4; 15,8; 15,8; 15,9; 15,8. Складіть варіаційний ряд, зробіть статистичне зведення цих даних. (Визначте відносну частоту результатів, розподіливши їх на 4 групи).

404. У змаганнях з підтягування на перекладині взяли участь 25 школярів, які показали такі результати (кількості підтягувань): 15, 9, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 14, 8, 12, 11, 14, 15, 12, 9, 12, 14, 15, 10, 11, 14, 12, 10, 10. Складіть таблицю статистичного розподілу і знайдіть відносну частоту кожної варіанти.

405. На підставі річних звітів управління статистики отримало такі дані про виробництво продукції промисловими підприємствами:

Номер підприємства	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Виробництво продукції, штук	330	175	180	75	80	240	250	320	200	120

Відповідно до обсягів виробництва продукції розподіліть підприємства на 3 групи.

406°. У відділі кадрів заводу підготували перелік деяких даних про працівників експериментального цеху (див. таблицю):

Порядковий номер робітника	Професія	Освіта
1	механік	середня технічна
2	слюсар-складальник	середня технічна
3	інженер-механік	вища
4	слюсар	середня
5	розмітник	середня
6	слюсар-складальник	середня технічна
7	механік	вища
8	розмітник	середня
9	інженер-механік	вища
10	слюсар-складальник	середня

Зробіть статистичне зведення цих даних, побудувавши ряди розподілу: 1) за професією; 2) за рівнем освіти. Зробіть короткі висновки.

9.2. Графічне зображення статистичних даних

① **Полігон частот.** Статистичні дані можна подавати не тільки у вигляді статистичного ряду та статистичної таблиці, а й графічним способом.

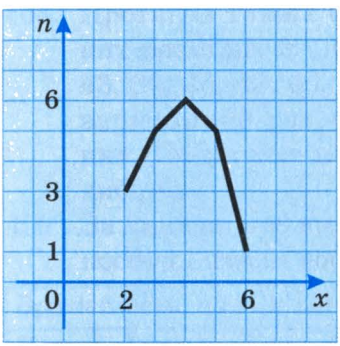


Рис. 83

Якщо на осі абсцис прямокутної системи координат розмістити варіанти x_i, а на осі ординат — відповідні їм частоти n_i, то можна побудувати ряд точок з координатами $(x_i; n_i)$. З'єднавши послідовно точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, $(x_3; n_3)$ і т.д. відрізками, отримаємо ламану лінію, яку називають ***полігоном частот***.

На рис. 83 зображено полігон частот для статистичного розподілу вибірки, заданої табл. 1 (с. 184).

② **Гістограма.** Статистичний розподіл вибірки може задаватися у вигляді послідовності інтервалів значень варіант x_i та їх частот n_i і графічно зображатися східчастою фігурою, яка складається з прямокутників, побудованих на інтервалах, як на основах, з висотами, пропорційними частотам інтервалів. Таке зображення називається ***гістограмою***.

Для побудови гістограм частот на осі абсцис відкладають значення варіант, а на осі ординат — відповідні частоти. Відтак, на відрізках осі абсцис, які відповідають побудованим інтервалам, необхідно побудувати прямокутники з висотами, які дорівнюють відповідним частотам.

Побудуємо гістограму, задану табл. 2, у якій зведені результати бігу 24 учнів 9-го класу на дистанції 100 м.

Таблиця 2

Час в секундах, затрачений на 100 м, (x_i)	[12,0–12,5)	[12,5–13,0)	[13,0–13,5)	[13,5–14,0)	[14,0–14,5)	[14,5–15,0]
Кількість учнів, (n_i)	2	3	8	6	4	1

На осі абсцис відкладено інтервали $h = x_{i+1} - x_i = 0{,}5$ (рис. 84). Над кожним з них будуємо прямокутник з висотою, яка дорівнює відповідній частоті.

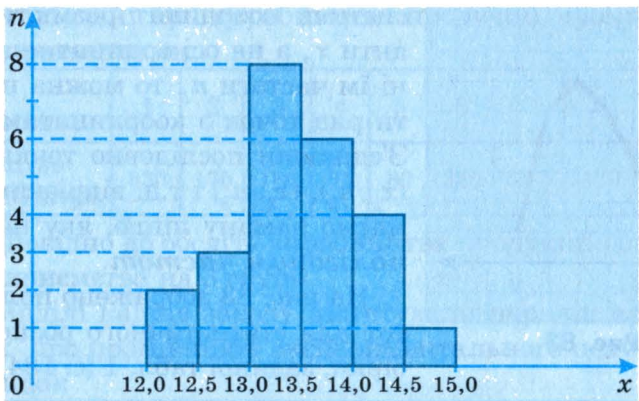


Рис. 84

Гістограму зручно будувати тоді, коли треба зобразити лиш один розподіл статистичного ряду за певною ознакою (в даному прикладі ознакою є час, затрачений на подолання дистанції 100 м). Якщо треба порівняти кілька розподілів, то краще будувати полігони частот, оскільки їх можна накласти один на одного.

Запитання для самоперевірки.

1. Назвіть відомі вам способи графічного подання статистичних даних.
2. Що таке гістограма? Наведіть приклад.

3. Що таке полігон частот? Наведіть приклад.
4. В яких випадках доцільніше вдаватися до полігону частот як способу подання статистичних даних?

Задачі та вправи

407. Побудуйте полігон частот для даного статистичного розподілу вибірки:

Розмір взуття, x_i	38	39	40	41	42	43	44
Кількість взуття, n_i	2	6	18	16	10	5	3

408. Протягом тижня було продано 25 чоловічих сорочок таких розмірів: 39, 41, 42, 41, 40, 44, 41, 41, 42, 40, 41, 42, 43, 39, 40, 40, 40, 40, 41, 42, 40, 41, 43, 41, 41. Складіть варіаційний ряд, зробіть статистичний розподіл цих даних. Побудуйте полігон частот статистичного розподілу вибірки.

409°. За даними про врожайність пшениці на різних ділянках посівної площі побудуйте гістограму.

Врожайність, ц/га	[20–25)	[25–30)	[30–35)	[35–40)	[40–45)	[45–50]
Площа ділянки, га	5	10	15	20	15	5

9.3. Середні значення

Пригадайте

1. Що таке середнє арифметичне двох додатних чисел?
2. Як знайти середнє арифметичне кількох додатних чисел?

① **Що таке середнє гармонійне двох додатних чисел.** Поряд з поняттями середнього арифметичного двох додатних чисел a і b $\left(m = \frac{a+b}{2}\right)$ та їх середнього геометричного $\left(g = \sqrt{ab}\right)$

у математиці існує ще поняття *середнього гармонійного* цих чисел: $h = \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$.

За переказами, поняття середнього гармонійного ввів Піфагор (VI ст. до н. е.), який установив, що разом із струною довжиною $12l$, співзвучно зливаючись із нею, звучать струни такого самого натягу, що мають довжини $6l$, $8l$ і $9l$. Неважко помітити, що 9 є середнім арифметичним чисел 6 і 12 $\left(9 = \dfrac{6+12}{2}\right)$, а $8 = \dfrac{2}{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12}}$. Останнє число, яке обчислюється за записаною формулою, він назвав середнім гармонійним чисел 6 і 12.

Якщо чисел не два, а декілька (a_1, a_2, a_3,...a_n, їх загальна кількість — n), то відповідні формули обчислення їх середніх арифметичного (m), геометричного (g) і гармонійного (h) мають, відповідно, такий вигляд:

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n};$$

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n};$$

$$h = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

Примітка. $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$ — позначення додатного числа, n-степінь якого дорівнює $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$.

Значна кількість статистичних задач пов'язана із знаходженням середніх значень. Розглянемо деякі з них.

② Задачі на знаходження середнього арифметичного.

Задача 1. У крамниці протягом трьох днів було продано відповідно 324 кг, 360 кг і 270 кг помідорів. Визначити, скільки в середньому було продано помідорів протягом одного дня.

▽ *Розв'язання.* Складемо статистичну таблицю.

Таблиця 3

День	перший	другий	третій
Кількість (x), кг	$x = 324$	$x = 360$	$x = 270$

Середня кількість помідорів, проданих протягом одного дня, становитиме: $\frac{324 + 360 + 270}{3} = 318$ (кг). ▲

Проведені обчислення можна узагальнити формулою:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}, \qquad (1)$$

де x_i — значення ознаки, які називають варіантами; n — число одиниць сукупності; $\overline{x}$ — середнє арифметичне значень x_i ознаки.

Задачі такого типу є найпростішими задачами на обчислення середнього арифметичного. Для його визначення потрібно суму окремих значень даної ознаки поділити на число одиниць, що мають цю ознаку.

Задача 2. У табл. 4 подано відомості про ціну та кількість реалізованого у трьох крамницях товару.

Таблиця 4

Крамниця	*A*	*B*	*C*
Ціна товару (варіанта x_i), грн.	$x_1 = 3$	$x_2 = 4$	$x_3 = 3{,}6$
Кількість товару (частота n_i), кг	$n_1 = 350$	$n_2 = 240$	$n_3 = 360$

Визначити середню ціну реалізованого товару.

Розрахунок середньої ціни товару здійснюємо так:

$$\text{Середня ціна} = \frac{\text{вартість реалізованого товару}}{\text{кількість товару}}.$$

Отже, середня ціна реалізованого товару буде такою:

$$\frac{3 \cdot 350 + 4 \cdot 240 + 3{,}6 \cdot 360}{350 + 240 + 360} = \frac{3306}{950} = 3{,}48 \text{ (грн.)} \ ▲$$

Проведені обчислення можна узагальнити формулою:

$$\overline{x}_{\text{с.а.}} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \ldots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}, \qquad (2)$$

де x_i — варіанта, n_i — частота.

У цій задачі, на відміну від попередньої, варіанти мають різні частоти. Тому формула ускладнюється.

③ Задачі на знаходження середнього гармонійного.

Задача 3. У табл. 5 подано інформацію про реалізацію товару в трьох крамницях протягом робочого дня. Визначити середню ціну реалізованого товару.

Таблиця 5

Крамниця	*A*	*B*	*C*
Ціна 1 кг товару (x_i), грн.	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_3 = 3{,}6$
Вартість реалізованого товару ($m_i = x_i \cdot n_i$), грн.	$m_1 = 864$	$m_2 = 864$	$m_3 = 864$

▽ *Розв'язання.* Середня ціна реалізованого товару визначатиметься за тим самим правилом, що й у задачі 2 (с. 191).

Відмінність тільки в тому, що треба спочатку визначити кількість реалізованого товару: $\left(\frac{864}{3} + \frac{864}{4} + \frac{864}{3{,}6}\right)$ (кг).

$$\overline{x}_{\text{с.г.}} = \frac{864 + 864 + 864}{\frac{864}{3} + \frac{864}{4} + \frac{864}{3{,}6}} = \frac{3 \cdot 864}{864\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3{,}6}\right)} = \frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3{,}6}} \approx 3{,}48 \text{ (грн.)}.$$

Отже, середня ціна реалізованого товару дорівнює приблизно 3,48 (грн.). ▲

Помічаємо, що в даному випадку середня ціна реалізованого товару є середнім гармонійним цін цього товару в крамницях і не залежить від вартості реалізованого товару, яка в усіх крамницях однакова. Для розв'язання задач такого виду можна відразу застосувати формулу середнього гармонійного

$$\overline{x}_{\text{с.г.}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$ де x_i — варіанта, а n — їх кількість.

Розглянемо задачу аналогічного типу, але з різною вартістю реалізованого товару.

Задача 4. У табл. 6 подано відомості про вартість товару, реалізованого в трьох крамницях протягом дня та його ціну. Визначити середню ціну реалізованого товару.

Таблиця 6

Крамниця	A	B	C
Ціна 1 кг товару (x_i), грн.	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_3 = 3{,}6$
Вартість реалізованого товару ($m_i = x_i \cdot n_i$), грн.	$m_1 = 1050$	$m_2 = 960$	$m_3 = 1296$

▽ *Розв'язання.* Середня ціна товару обчислюється за тим самим правилом, що й середня ціна товару в задачах 2 і 3.

$$\overline{x}_{\text{с.г.}} = \frac{1050 + 960 + 1296}{\frac{1050}{3} + \frac{960}{4} + \frac{1296}{3{,}6}} = 3{,}48 \text{ (грн.)}. \ ▲$$

Задачі та вправи

410°. При відгодівлі 10 бичків протягом п'яти днів зареєстровано такі прирости маси тварин (у кілограмах): 3,0; 2,8; 2,5; 2,6; 2,7; 2,9; 2,6; 2,7; 3,0; 2,6. Знайдіть середній денний приріст маси однієї тварини.

411°. Знайдіть середнє арифметичне на основі даних, наведених у таблиці.

Крамниця	Порядковий номер крамниці							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Площа крамниці, м^2	50	60	90	80	70	60	50	40

412. Знайдіть середнє арифметичне на основі даних, наведених у таблиці.

Площа крамниці, м^2 (варіанти)	40	50	60	70	75	80
Кількість крамниць, (частоти)	1	2	3	4	2	1

413°. На годинниковому заводі робітник виготовляв за кожну годину різну кількість деталей: за першу годину — 10, за

другу — 10, за третю — 9, за четверту — 9, за п'яту — 8, за шосту — 8, за сьому — 9 деталей. Складіть статистичну таблицю. Визначте, скільки деталей в середньому виготовляв робітник за годину.

414. Місячна заробітна платня робітників подана в таблиці.

Місячна зарплатня, (x_i), грн.	1100	1300	1600	1900	2100
Число робітників, n_i	2	4	8	16	10

Визначте середню місячну платню робітника. Побудуйте полігон статистичного розподілу вибірки.

415°. На основі даних, наведених у таблиці, знайдіть середню врожайність з одного гектара пшениці.

Валовий урожай, т	32	76	101	84	25
Площа, га	10	25	33	24	8

416. У таблиці наведено дані про зібраний на п'яти полях урожай пшениці та її врожайність з 1 га.

№ поля	1	2	3	4	5
Зібраний урожай, т	32	76	101	84	25
Врожайність з 1 га, т	3,2	3,0	3,04	3,5	3,125

Знайдіть середню врожайність з одного гектара пшениці. Визначте вид середньої величини.

417. У таблиці наведено дані про зібраний на п'яти полях урожай та врожайність з 1 га.

№ поля	1	2	3	4	5
Зібраний урожай, ц	240	240	240	240	240
Врожайність з 1 га, ц	40	30	24	48	32

Знайдіть середню врожайність з одного гектара. Визначте вид середньої величини.

418°. Протягом семигодинного робочого дня три слюсарі працюють над виготовленням деталей. Перший слюсар виготовляє за день 28 деталей, другий — 21 деталь, тре-

тій — 24 деталі. Скільки часу в середньому витрачається на виготовлення однієї деталі? Визначте вид середньої величини.

419. Три слюсарі протягом семигодинного робочого дня виготовляли деталі. Перший слюсар виготовляв одну деталь за 15 хв, другий — за 20 хв і третій — за 17,5 хв. Складіть таблицю статистичного розподілу. Визначте, скільки в середньому затрачалося часу на виготовлення однієї деталі. Назвіть вид середньої величини.

420. Перший слюсар за 7 годин виготовив 28 деталей, другий протягом 6 годин — 20 деталей, а третій за 8 годин — 24 деталі. Складіть таблицю статистичного розподілу. Скільки часу в середньому затрачалося на виготовлення однієї деталі? Визначте вид середньої величини.

421. Перший слюсар протягом семи годин виготовляє за кожних 15 хв одну деталь. Другий, працюючи шість годин, виготовляє одну деталь за кожних 18 хв, а третій, працюючи п'ять годин, виготовляє одну деталь за кожних 20 хв. Складіть статистичну таблицю. Скільки часу в середньому затрачається на виготовлення однієї деталі? Визначте вид середньої величини.

422. Для визначення попиту на чоловіче взуття в одному з населених пунктів провели опитування, результати якого подані в таблиці.

Розмір взуття	37	38	39	40	41	42	43	44	45
Кількість чоловіків	3	7	23	32	54	50	22	6	3
Кількість взуття, у %									

Заповніть таблицю. Визначте середнє значення розміру взуття. Побудуйте полігон частот.

423. Протягом квітня ранкова температура повітря була такою (у градусах): 7°, 5°, 6°, 4°, 3°, 4°, 5°, 6°, 2°, 4°, 6°, 5°, 4°, 6°, 7°, 5°, 6°, 4°, 8°, 5°, 4°, 5°, 6°, 6°, 3°, 4°, 5°, 6°, 8°, 7°. Складіть статистичний ряд із 30 чисел і статистичну

таблицю розподілу вибірки. Знайдіть середню температуру за цими даними. Побудуйте полігон частот.

424. 20 учнів брали участь у змаганнях з підтягування на перекладині і показали такі результати (кількості підтягувань): 14, 9, 10, 12, 14, 12, 10, 11, 12, 8, 13, 14, 10, 9, 13, 15, 12, 10, 12, 14. Складіть статистичний ряд із 20 чисел і статистичну таблицю. Побудуйте полігон частот. Знайдіть середнє значення кількості підтягувань.

425. Дані дослідження тривалості роботи електричних лампочок наведені в таблиці.

Тривалість роботи, тис. годин	2–2,1	2,1–2,2	2,2–2,3	2,3–2,4	2,4–2,5
Кількість лампочок	3	7	9	9	2

Побудуйте гістограму даного розподілу.

426. На уроці фізкультури вчитель фіксував кількість підтягувань учнів на перекладині. Були отримані такі результати (кількості підтягувань): 6, 8, 10, 7, 8, 9, 11, 12, 7, 9, 10, 11, 8, 9, 10, 10, 8, 9, 10, 9, 8, 5, 6, 7, 9. Складіть таблицю статистичного розподілу, знайдіть частоту кожної варіанти. Побудуйте полігон частот.

Додаткові задачі та вправи до розділу IV

Розв'яжіть задачі.

427. **а)** Учень прочитав із 200 сторінок книги 60% їх. Скільки сторінок прочитав учень?

б) Яка довжина всього шляху, якщо 6% його складає 72 км?

в) Скільки треба змішати 10-відсоткового і 15-відсоткового розчинів кислоти, щоб одержати 13-відсотковий її розчин масою 4 кг?

г) Банк виплачує 10% річних. Яку суму грошей поклали в банк, якщо через 3 місяці прибуток складав 536 грн. 40 к.?

428. **а)** Фірма виготовляла щомісяця 300 телевізорів. Потім щомісячний випуск телевізорів збільшився на 20%. На скільки телевізорів більше стала випускати фірма?

б) На товар, що спочатку коштував 400 грн., двічі знижували ціну на 10%. Скільки коштував товар після знижок?

в) При випаровуванні з 24 кг розсолу одержали 6 кг харчової солі, що містить 10% води. Якої міцності отримали розсіл?

г) У букіністичному магазині антикварне зібрання творів двічі уцінювалася на одну й ту саму кількість відсотків. Знайдіть цей відсоток, якщо початкова вартість зібрання становила 700 грн., а після уцінки — 567 грн.

429. **а)** У парку росте 240 дерев, з яких 25% — сосни. Скільки сосен у парку?

б) 65% земельної ділянки, площа якої становить 162,5 га, зорано. Яка площа ділянки залишилася незораною?

в) Яка сума грошей при нарахуванні 20% річних через рік дає прибуток, що становить 240 грн.?

г) Скільки відсотків річних (прості відсотки) сплачує банк, якщо через два роки покладена до банку сума 2000 грн. зросла до 3380 грн.?

430. **а)** В яку суму перетворяться 4000 грн., покладені в банк під 14% річних (складні відсотки): 1) через рік; 2) через 2 роки; 3) через 3 роки?

б) Грошовий вклад, покладений у банк на 2 роки, збільшився на 69%. Скільки відсотків нараховує банк щороку?

431*. В яку суму перетворяться 2000 грн., покладених в ощадний банк на 4 роки, якщо вклад щороку збільшуватиметься на 25% (складні відсотки)? Виконайте обчислення, користуючись калькулятором.

432*. На дослідній лісовій ділянці щорічний приріст деревини становить 10%. Який об'єм деревини буде на ділянці через 5 років, якщо початковий об'єм деревини — 20 000 м^3? Обчислення виконайте за допомогою калькулятора.

433*. Після кожного руху поршня розріджувального насоса з посудини витискується 20% повітря, яке міститься в ній. Визначте тиск повітря всередині посудини після шести рухів поршня, якщо початковий тиск — 760 мм рт. ст.

434. Учень записав двоцифрове число. Яка імовірність того, що записане число ділиться на:

а) 10; **б)** 5; **в)** 3; **г)** 9?

435. Учень узяв один екзаменаційний білет із 35, які лежали на столі. Знайдіть імовірність того, що номер узятого білета:

а) закінчується цифрою 5;

б) ділиться на 3;

в) ділиться на 9.

436. Набираючи номер телефону, абонент забув перші дві цифри, але пам'ятав, що сума цифр дорівнює 8. Знайдіть імовірність того, що абонент набрав потрібний номер, дотримуючись цієї умови.

437. На шкільному вечорі присутні 30 учнів 10-го класу і 20 учнів 11-го класу. Яка імовірність того, що учень, з яким ви розмовляєте, навчається у 10-му класі?

438. В ящику лежать котушки ниток трьох кольорів: 9 білих, 7 синіх і 4 червоних. Яка імовірність того, що взята навмання котушка не буде червоною?

439. Із 20 білетів, пронумерованих числами від 1 до 20, навмання вибирають один. Яка імовірність того, що номер вибраного білета не ділиться ні на 4, ні на 7?

440. У лотереї беруть участь 1000 білетів, з них на один білет припадає виграш 400 грн., на 12 білетів — виграш по 100 грн., на 25 білетів — по 50 грн., на 40 білетів — по 20 грн., на 70 білетів — по 5 грн. Решта — невиграшні. Знайдіть імовірність виграшу на один білет не менше 50 грн.

441. Протягом травня ранкова температура становила (у градусах): 17°, 15°, 16°, 14°, 13°, 14°, 15°, 16°, 12°, 14°, 16°, 15°, 14°, 16°, 17°, 15°, 16°, 14°, 18°, 15°, 14°, 15°, 16°, 16°, 13°, 14°, 15°, 16°, 18°, 17°, 12°.

1) Складіть за цими даними: **а)** статистичний ряд із 30 чисел; **б)** статистичну таблицю розподілу вибірки.

2) Побудуйте полігон частот.

442. Жирність молока 12 корів характеризується такими статистичними даними (у відсотках жиру): 3,9; 3,1; 3,7; 3,8; 3,9; 4,1; 4,0; 3,9; 3,8; 3,9; 3,7; 3,8.

1) Складіть за цими даними статистичний ряд і статистичну таблицю розподілу вибірки;

2) Побудуйте полігон частот.

✓ Завдання для самоперевірки

I рівень

Розв'яжіть задачі.

1. Для перевезення вантажу потрібно 30 вагонів вантажністю 16 т. Скільки потрібно вагонів вантажністю 20 т для перевезення цього самого вантажу?

2. Із свіжих вишень виходить 18% сушених. Скільки сушених вишень вийде:

а) із 15 кг свіжих; **б)** зі 40 кг свіжих?

3. При переробці цукрових буряків виходить 16% цукру. Скільки треба взяти буряків, щоб отримати:

а) 64 т цукру; **б)** 80 т цукру?

4. Обчисліть відсоток жирності молока, якщо в 240 т молока міститься:

а) 8,4 т жиру; **б)** 9,6 т жиру?

5. Банк виплачує 10% річних. Яку суму становитиме вклад 2000 грн. через рік?

6. Знайдіть середнє значення вибірки: 2; 2; 4; 14; 18.

7. В урні знаходяться дві жовті і три сині кульки. Яка імовірність того, що взята навмання кулька буде:

а) жовтою; **б)** синьою?

II рівень

Розв'яжіть задачі.

1. Є матеріал для виготовлення 100 м огорожі. Чи можна цією огорожею обнести прямокутну ділянку площею 600 м^2?
2. Стіл і стілець коштували разом 650 грн. Після того, як стіл подешевшав на 20%, а стілець подорожчав на 20%, їхня загальна вартість становила 568 грн. Знайдіть початкову ціну стола і початкову ціну стільця.
3. Ощадний банк виплачує 12% річних. Яку суму одержить його вкладник через 2 роки, якщо початковий вклад становить 10 000 грн. (складні відсотки)?
4. У кошику 12 яблук сорту «Ренет» і 13 яблук сорту «Антонівка». Яка імовірність того, що навмання взяте яблуко буде сорту «Ренет»?
5. Протягом семигодинного робочого дня робітник погодинно виготовляв 10; 8; 11; 12; 11; 9; 7 деталей.
   а) Запишіть статистичний ряд.
   б) Знайдіть середнє значення вибірки.
   в) Побудуйте гістограму.

III рівень

Розв'яжіть задачі.

1. З міста A у місто B виїхав велосипедист. Через 3 год із міста A виїхав мотоцикліст, який прибув до міста В одночасно з велосипедистом. Знайдіть швидкість мотоцикліста, якщо вона на 45 км/год більша від швидкості велосипедиста, а відстань між містами A і B дорівнює 60 км.
2. Ціна автомобіля спочатку знизилася на 20%, а потім зросла на 20%. Як змінилася вартість автомобіля внаслідок цих двох переоцінок?
3. Вкладник вніс на банківський рахунок 6000 грн. під 15% річних. В яку суму перетвориться цей вклад через 4 роки (складні відсотки)?

4. Яку суму грошей треба покласти в банк під 15% річних, щоб через 2 роки вона становила 5290 грн. (прості відсотки)?

5. Дитина грається літерами Б, К, У. Яка імовірність того, що внаслідок випадкового складання літер утвориться слово «БУК»?

6. Опитавши 20 жінок про розмір їхнього взуття, отримали такі дані: 37; 35; 36; 35; 38; 39; 36; 37; 40; 39; 35; 36; 36; 37; 38; 39; 38; 37; 36; 37. Складіть статистичний ряд, варіаційний ряд. Зведені дані подайте у вигляді статистичної таблиці. Визначте попит на жіноче взуття у відсотках.

IV рівень

1. На рис. 85 зображено графік руху туриста. Дайте відповідь на запитання: **а)** скільки часу був у дорозі турист; **б)** яку відстань він подолав за цей час; **в)** скільки годин він рухався і скільки відпочивав; **г)** з якою швидкістю турист рухався останні дві години; **ґ)** з якою середньою швидкістю рухався турист, повертаючись додому?

Рис. 85

Розв'яжіть задачі.

2. Знайдіть щорічний приріст деревини (у відсотках) на дослідній ділянці, якщо за 4 роки об'єм деревини зріс з 20 000 м^3 до 29 282 м^3. Обчислення виконайте за допомогою калькулятора.

3. Скільки кілограмів 20-відсоткового і скільки кілограмів 50-відсоткового сплавів міді треба взяти, щоб отримати 30 кг 30-відсоткового сплаву?

4. В ящику лежать котушки ниток трьох кольорів: 6 білих, 4 синіх і 10 чорних. Яка імовірність того, що взята навмання котушка буде синього кольору?

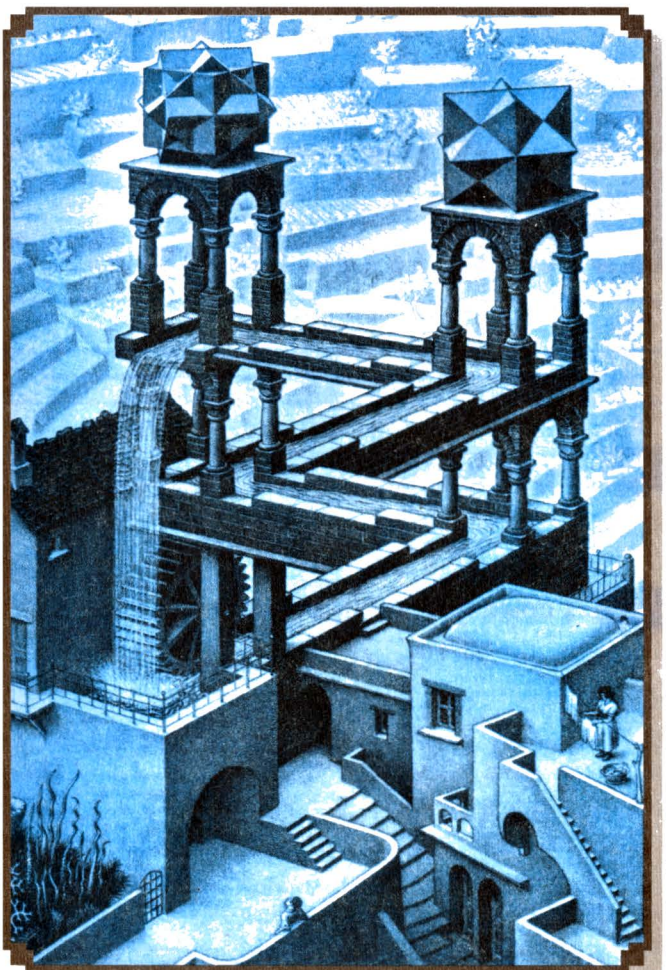
5. У таблиці подано узагальнені дані про витрати матеріалу на виробництво продукції у чотирьох цехах заводу.

Номер цеху	Витрати матеріалу, м	
	на один виріб	на всі вироби
1	0,6	150
2	0,7	126
3	0,9	161
4	0,4	200

Визначте витрати матеріалу на один виріб в середньому по заводу.

Розділ V

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ



§10. Арифметична прогресія

10.1. Поняття числової послідовності

Пригадайте

1. Що таке функція?
2. Яку назву мають змінні у функціональній залежності?
3. Що таке область визначення функції?
4. Що означає «задати функцію» і як це можна зробити?

① **Поняття числової послідовності.** Розглянемо кілька прикладів.

1. Тіло, що вільно падає, за t секунд долає шлях, довжина S якого обчислюється за формулою: $S \approx 4{,}9t^2$.

2. Будь-яке непарне число визначається формулою: $a_n = 2n - 1$, де n — натуральне число.

Обидві формули задають функції. Але якщо аргумент t першої функції може набувати будь-якого невід'ємного дійсного значення, то аргумент n другої функції — лише натурального значення. Інакше кажучи, областю визначення другої функції є множина N натуральних чисел. Такі функції називають ***числовими послідовностями***.

! **Числова функція, областю визначення якої є множина натуральних чисел, називається *числовою послідовністю*.**

З означення випливає, що аргумент цієї функції набуває натуральних значень, починаючи з 1. Підставляючи ці значення у формулу, що задає функцію, отримаємо відповідні значення функції, які називають ***членами послідовності***.

Знайдемо кілька членів послідовності непарних чисел, заданої формулою $a = 2n - 1$:

$n = 1, \quad a = 2 - 1 = 1,$

$n = 2, \quad a = 2 \cdot 2 - 1 = 3,$

$n = 5, \quad a = 2 \cdot 5 - 1 = 9.$

Членам числової послідовності надають номер, який дорівнює відповідному числовому значенню аргументу n. Зокрема, $a = 1$ — перший член послідовності непарних чисел, $a = 3$ — другий, $a = 9$ — п'ятий член цієї послідовності. Кожен член послідовності позначають буквою з індексом, що відповідає його порядковому номеру: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_5 = 9$ і т.д. Член a_n зі змінним номером n називають ***загальним членом*** послідовності. Саму послідовність коротко позначають символом (a_n).

З означення числової послідовності випливає, що кількість її членів, як і кількість натуральних чисел, вказати не можна, тобто вона ***нескінченна***.

У ряді випадків доводиться мати справу з числовими функціями, областю визначення яких є множина лише n перших натуральних чисел. Такі функції теж відносять до числових послідовностей, які називають ***скінченними***, бо кількість їх членів дорівнює певному натуральному числу. До скінченних належать, наприклад, послідовність перших десяти непарних чисел, послідовність квадратів перших ста натуральних чисел тощо.

② **Як задають числові послідовності.** Числову послідовність, як і функцію, можна задати аналітичним, графічним або табличним способами (останніми двома — лише скінченну послідовність).

Аналітичним способом числову послідовність зазвичай задають за допомогою формули її загального члена. Якщо, на-

приклад, $a_n = \frac{n+1}{n}$, то, надаючи змінній n натуральних значень, починаючи з 1, отримаємо відповідні члени цієї послідовності:

$n = 1,\ a_1 = \frac{1+1}{1} = 2;\ n = 2,\ a_2 = \frac{3}{2};\ n = 3,\ a_3 = \frac{4}{3}$, і т.д.

Оскільки аргументом послідовності є лише натуральні числа, то її графіком є окремі точки, а не суцільна лінія.

Наприклад, графіком послідовності $a_n = \sqrt{n}$ $(y = \sqrt{x})$ $(n \le 9)$ є множина точок, зображених на рис. 86.

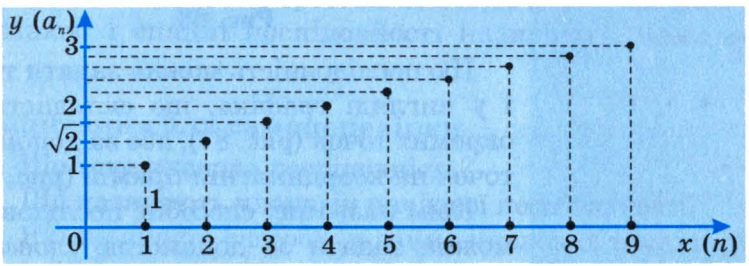


Рис. 86

Абсцисами цих точок є натуральні числа 1, 2, 3, ..., 9, а ординатами — відповідно $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{9}$.

Розглянемо ще один спосіб задання послідовності, в якої, наприклад, $a_1 = 3$, а кожний член, починаючи з другого, визначається співвідношенням: $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

Користуючись цими даними, знайдемо:

$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7;$

$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15;$

$a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$ і т.д.

Такий спосіб задання послідовності називають ***рекурентним***.

Формулу, що визначає будь-який член послідовності, починаючи з деякого, через попередні члени, називають ***реку-***

рентною (від латинського слова recurrens — «біжу назад, повертаюся»).

Одну й ту саму послідовність можна задати кількома способами.

Наприклад, послідовність 7, 10, 13, 16, 19 можна задати формулою n-го члена $a_n = 3n + 4$, $n \leq 5$.

Її можна задати і рекурентним співвідношенням $a_1 = 7$, $a_{n+1} = a_n + 3$, $n \leq 5$.

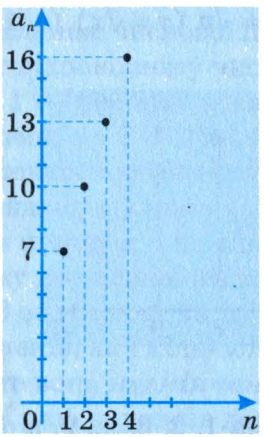


Рис. 87

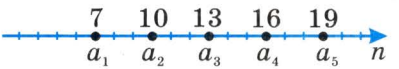


Рис. 88

Цю послідовність можна задати також і у вигляді графіка, що складається з окремих точок (рис. 87), або за допомогою точок на координатній прямій (рис. 88).

Крім названих способів, послідовність можна задати за допомогою *словесного опису*, з якого зрозуміло, як утворюються члени послідовності. Наприклад, послідовність десяткових наближень числа $\frac{2}{3}$ з недостачею: 0,6; 0,66; 0,666; ... .

③ **Приклади числових послідовностей, заданих формулою загального члена.** Розглянемо конкретні приклади числових послідовностей, які задані формулою загального члена.

1) Формула $a_n = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, задає числову послідовність: 3; 5; 7; ..., бо $a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, і т.д.

2) Формула $b_n = \frac{2n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, задає числову послідовність:

$\frac{2}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{8}{5}$; ...; $\frac{200}{101}$; ... .

Будь-який член послідовності b_n менший від числа 2.

3) Формула $c_n = \frac{2n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, задає числову послідовність:

$3; \frac{5}{2}; \frac{7}{3}; \frac{9}{4}; \ldots; \frac{201}{100}; \ldots$.

Будь-який член послідовності c_n більший від числа 2.

4) Формула $p_n = 7 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$, задає числову послідовність:

$5; 3; 1; -1; \ldots$.

Послідовності, як і функції, бувають ***зростаючими*** і ***спадними***.

Послідовності (a_n) і (b_n) зростаючі, а (c_n) і (p_n) — спадні.

Зростаючі і спадні послідовності називають ***монотонними***.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке числова послідовність?
2. Що називають членами числової послідовності?
3. Які ви знаєте способи задання числових послідовностей?
4. Наведіть приклади задання числової послідовності формулою її загального члена.

Задачі та вправи

443°. Знайдіть п'ять перших членів числової послідовності, заданої формулою:

а) $y_n = 3n - 2$; **б)** $y_n = 8 - 3n$; **в)** $y_n = n^2 - n$;

г) $y_n = 4 - n^2$; **ґ)** $y_n = \frac{4}{n}$; **д)** $y_n = (-1)^n - 5$.

444. Запишіть кілька перших членів послідовності натуральних чисел, кратних 4. Обчисліть її сотий член.

445°. Загальний член числової послідовності задано формулою $a_n = 0{,}5(n-2)^2$.

Обчисліть перші п'ять членів цієї послідовності і перевірте, чи правильно вони зображені: **1)** точками на ко-

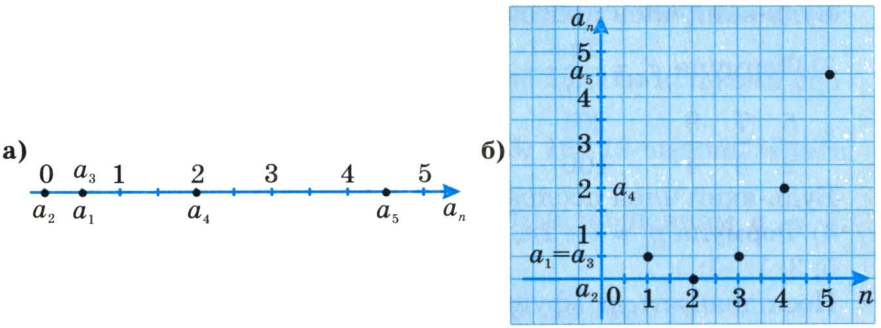


Рис. 89

ординатній прямій (рис. 89, а); **2)** точками координатної площини (рис. 89, б).

446°. Обчисліть перших п'ять членів числової послідовності, загальний член якої задано формулою:

а) $a_n = 2n$; **б)** $a_n = \frac{2}{n}$; **в)** $a_n = 9 - n^2$.

447°. Запишіть перших п'ять членів послідовності:

а) парних чисел;

б) чисел, обернених до чисел натурального ряду;

в) квадратів чисел натурального ряду;

г) чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 2.

448°. Послідовність (a_n) задана формулою $a_n = 3n + 2$. Знайдіть члени послідовності з номером, який дорівнює:

а) 5; **б)** 10; **в)** 15; **г)** 16; **ґ)** 100.

449°. Послідовність задана формулою $a_n = 4n - 3$. Знайдіть:

а) a_4; **б)** a_5; **в)** a_{40}; **г)** a_{100}; **ґ)** a_{110}.

450. Чи є членом послідовності, заданої формулою $y_n = n^2 - 2n + 1$, число:

а) 36; **б)** 144; **в)** 255; **г)** 226; **ґ)** 289?

451. Починаючи з якого номера члени послідовності, загальний член якої $y_n = n^2$, більші від:

а) 100; **б)** 400; **в)** 1001?

452*. Знайдіть формулу n-го члена скінченної послідовності:

а) 3; 6; 9; 12; 15;
б) 1; 8; 27; 64; 125;
в) 1; 3; 5; 7; 9;
г) 1; 4; 9; 16; 25;
ґ) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5};$
д) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}.$

453*. Скінченні послідовності задано графіками (рис. 90, а–г). Задайте їх за допомогою формули загального члена.

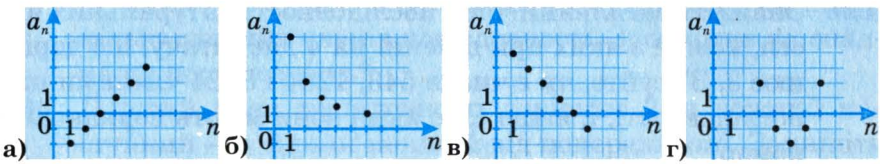


Рис. 90

454. Знайдіть п'ять перших членів послідовності, у якої:

а) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 1;$
б) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n;$
в) $a_1 = -4,\ a_{n+1} = a_n - 3;$
г) $a_1 = \frac{1}{4},\ a_{n+1} = 0{,}1a_n;$
ґ) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n};$
д) $a_1 = 0{,}5,\ a_{n+1} = a_n + 3.$

455*. Запишіть кілька перших членів послідовності і задайте цю послідовність формулою n-го члена, якщо:

а) $b_1 = 10,\ b_{n+1} = b_n + 10;$
б) $b_1 = 2,\ b_{n+1} = b_n + 2;$
в) $b_1 = 10,\ b_{n+1} = 10b_n;$
г) $b_1 = 2,\ b_{n+1} = 2b_n.$

456*. Знайдіть найбільший член послідовності, заданої формулою:

а) $y_n = -n^2 + 12n + 35;$
б) $y_n = 37 + 12n - n^2;$
в) $y_n = -n^2 + 9n + 21;$
г) $y_n = 20 + 9n - n^2.$

457*. Знайдіть найменший член послідовності, заданої формулою:

а) $y_n = n^2 - 20n + 101;$
б) $y_n = n^2 - 20n + 99;$
в) $y_n = n^2 - 7n + 12;$
г) $y_n = n^2 - 7n + 11.$

458. Запишіть:

а) п'ять перших членів послідовності, членами якої є десяткові дроби, знайдені внаслідок округлення числа $\sqrt{2}$ з точністю до одиниць, десятих, сотих, тисячних і десятитисячних з недостачею;

б) послідовність простих чисел натурального ряду від 1 до 60.

459. Знайдіть загальний член послідовності натуральних чисел, кожне з яких при діленні на 4 дає остачу, що дорівнює 3. З'ясуйте, чи є числа 543, 1234 і 3224 членами цієї послідовності, і, якщо є, то який вони мають порядковий номер?

460*. Запишіть $\frac{5}{12}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу. Нехай (x_n) — послідовність, членами якої є десяткові дроби, знайдені внаслідок округлення цього нескінченного десяткового дробу до десятих, сотих, тисячних і т. д. Знайдіть x_1, x_2, x_3, x_{10}. Чи є послідовність (x_n) монотонною?

461*. Запишіть $\frac{19}{45}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу. Нехай (y_n) — послідовність, членами якої є десяткові дроби, знайдені внаслідок округлення цього нескінченного десяткового дробу до десятих, сотих, тисячних і т. д. Чи є серед членів послідовності однакові? Яким членом послідовності є число 0,422222. Чи монотонна ця послідовність?

462. Послідовність додатних чисел, що при діленні на 5 дають в остачі 3, можна задати формулою $a_n = 5n + 3$, $n \in \mathbb{N}$.

а) Обчисліть значення семи перших членів цієї послідовності.

б) Починаючи з якого номера, члени послідовності будуть більші від 200?

463°. Перший член послідовності дорівнює 9, а кожний наступний — на 2 більший від попереднього. Запишіть кілька

перших членів послідовності. Зростаюча чи спадна ця послідовність?

464°. Перший член послідовності дорівнює 9, а кожний наступний — на 3 менший від попереднього. Запишіть кілька перших членів послідовності. Зростаюча чи спадна ця послідовність?

465°. Перший член послідовності дорівнює 0,5, а кожний наступний — у 2 рази більший від попереднього. Запишіть кілька перших членів послідовності. Зростаюча чи спадна ця послідовність?

466. Перший член послідовності дорівнює 2, а кожний наступний — у 2 рази менший від попереднього. Запишіть кілька перших членів послідовності. Зростаюча чи спадна ця послідовність?

467*. Послідовність задана формулою: $a_n = \frac{3n}{n+1}$. Знайдіть a_1, a_2, a_3, a_{10}, a_{100}. Чи є ця послідовність монотонною? Вкажіть вид монотонності.

468*. Послідовність задана формулою: $a_n = \frac{n+1}{3n}$. Знайдіть a_1, a_2, a_3, a_{10}, a_{100}, a_{1000}. Чи є ця послідовність монотонною? Вкажіть вид монотонності.

469. Послідовність задана формулою: $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$. Знайдіть a_1, a_2, a_3, a_{10}, a_{100}, a_{1000}.

470. Послідовність задана формулою: $a_n = \frac{3n-1}{n}$. Знайдіть a_1, a_2, a_3, a_{10}, a_{100}, a_{1000}.

10.2. Арифметична прогресія і формула її загального члена

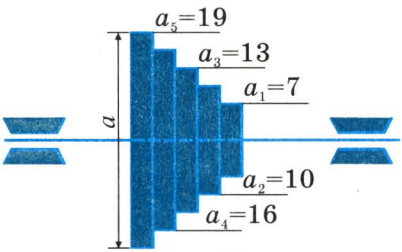


Рис. 91

① **Поняття арифметичної прогресії.** Розглянемо числові послідовності та звернемо увагу на їх особливості:

а) 7; 10; 13; 16; 19 (рис. 91);

(a — діаметри шківів (у см), насаджених на спільний вал).

б) 6; 4,5; 3; 1,5; 0; –1,5; ... .

Очевидно, що другий член послідовності **а)** більший від першого на 3; третій член — також більший від другого на 3 і т.д. Тобто кожен член цієї послідовності, починаючи з другого, можна отримати, додавши до попереднього члена число 3.

У послідовності **б)** кожен член, починаючи з другого, можна отримати, віднявши 1,5 від попереднього члена (або додавши до попереднього члена –1,5).

$4{,}5 = 6 - 1{,}5 = 6 + (-1{,}5)$; $3 = 4{,}5 + (-1{,}5)$;

$1{,}5 = 3 + (-1{,}5)$ і т.д.

Такі послідовності називають ***арифметичною прогресією***.

Числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому членові, до якого додають одне і те саме число, називається *арифметичною прогресією*.

Інакше кажучи, числова послідовність a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... є арифметичною прогресією, якщо для будь-якого натурального числа n виконується умова

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

З цієї рівності випливає рівність $a_{n+1} - a_n = d$, яка означає, що різниця між будь-яким наступним і попереднім членами

арифметичної прогресії дорівнює одному і тому самому числу, яке тому і називають ***різницею прогресії*** (d).

Якщо різниця прогресії $d > 0$, то прогресія є ***зростаючою***, якщо різниця $d < 0$, то прогресія є ***спадною***, а при $d = 0$ — ***сталою***.

Наприклад:

прогресія 20; 24; 28; ... є зростаючою ($d = 4 > 0$);

прогресія 11; 8; 5; ... є спадною ($d = -3 < 0$);

прогресія 2; 2; 2; ... є сталою ($d = 0$).

② **Формула загального члена арифметичної прогресії.** Нехай маємо арифметичну прогресію: –12; –8; –4; 0; 4; ... . Закономірність утворення її членів очевидна: в даному випадку різниця прогресії $d = 4$. Продовжуючи додавати це число до кожного нового члена прогресії, можемо обчислити значення її члена, який стоїть на будь-якому місці (з будь-яким порядковим номером). Однак цей шлях громіздкий і не досить раціональний. Уявімо, скільки потрібно виконати обчислень, щоб знайти значення, наприклад, сотого члена даної прогресії.

Спробуймо відшукати простіший спосіб розв'язання цієї і подібних задач.

З означення арифметичної прогресії випливає:

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = \overline{(a_1 + \boldsymbol{d})} + d = \underline{a_1 + 2d};$$

$$a_4 = a_3 + d = \overline{(a_1 + \boldsymbol{2d})} + d = \underline{a_1 + 3d};$$

$$a_5 = a_4 + d = \overline{(a_1 + \boldsymbol{3d})} + d = a_1 + 4d \text{ і т.д.}$$

Аналізуючи здобуті формули, помічаємо, що відповідний член прогресії отримують додаванням до першого її члена a_1 різниці прогресії d, помноженої на число, яке на 1 менше від порядкового номера шуканого члена.

Поширюючи за аналогією цей висновок на наступні члени, можемо записати, що $a_6 = a_1 + 5d$; $a_7 = a_1 + 6d$; ... ; $a_{10} = a_1 + 9d$; ... ; $a_{100} = a_1 + 99d$; ... .

Взагалі,

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.} \qquad (1)$$

Таким чином, ми отримали формулу загального члена арифметичної прогресії.

Зауваження. Наведені міркування не можна вважати строгим виведенням формули загального члена арифметичної прогресії. Математично бездоганні способи такого обґрунтуванням ми розглядати не будемо.

Відтак, можемо обчислити сотий член розглянутої на початку підпункту прогресії. Оскільки $a_1 = -12$, $d = 4$, то $a_{100} = -12 + 99 \cdot 4 = 384$.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Знайти 7-й член арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 9$, $d = -2$.

▽ *Розв'язання.* $a_7 = a_1 + 6d = 9 + 6 \cdot (-2) = -3$; $a_7 = -3$. ▲

Приклад 2. Знайти перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо її п'ятий член дорівнює 12, а різниця становить 4.

▽ *Розв'язання.* $a_5 = a_1 + 4d$; $12 = a_1 + 4 \cdot 4$; $a_1 = 12 - 16 = -4$; $a_1 = -4$. ▲

Приклад 3. Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_6 = 18$ і $a_{11} = 30$.

▽ *Розв'язання.* Знайдемо d.

$a_6 = a_1 + 5d$,

$a_{11} = a_1 + 10d$;

$a_{11} - a_6 = (a_1 + 10d) - (a_1 + 5d) = 5d$; $30 - 18 = 5d$, $d = 2{,}4$.

Знайдемо a_1 так само, як у попередньому прикладі:

$a_6 = a_1 + 5d$; $\qquad 18 = a_1 + 5 \cdot 2{,}4$;

$18 = a_1 + 12$; $\qquad a_1 = 18 - 12 = 6$.

$a_1 = 6$. ▲

Запитання для самоперевірки

1. Яку числову послідовність називають арифметичною прогресією?
2. Що таке різниця арифметичної прогресії?
3. Як обчислити будь-який член арифметичної прогресії, знаючи її перший член і різницю?
4. Чи правильне твердження: арифметичну прогресію можна задати її першим членом і різницею прогресії?
5. Чи правильне твердження: арифметичну прогресію задають будь-які два її члени?

Задачі та вправи

471. Які з послідовностей є арифметичними прогресіями:

а) 2; 5; 8; 11; ...; **б)** 2; 6; 12; 24; ...;

в) 7; 4; 1; –2;...; **г)** 1; 2; 3; 5; 8; ... ?

472°. Сходи, що ведуть на веранду, мають 8 східців (рис. 92). Перший східець — бетонна плита заввишки 10 см; усі інші східці мають висоту 15 см. На якій висоті від землі розташовані 2-й, 3-й, 4-й східці та підлога веранди?

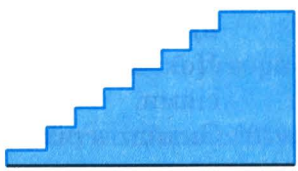


Рис. 92

473°. Запишіть шість перших членів арифметичної прогресії, якщо:

а) $a_1 = 5$, $d = 3$; **б)** $a_1 = 1{,}4$, $d = 0{,}5$;

в) $a_1 = 0{,}3$, $d = 0{,}2$; **г)** $a_1 = 4$, $d = -2$;

ґ) $a_1 = 0{,}6$, $d = -0{,}2$; **д)** $a_1 = 4\frac{3}{4}$, $d = -1\frac{1}{2}$.

474°. В арифметичній прогресії (a_n) перший член $a_1 = 1$ і різниця $d = 4$. Знайдіть a_{10}, a_{20}, a_{100}.

475. Знайдіть n-й член арифметичної прогресії:

а) 1; 4; 7; ...; **б)** 0,5; 1,2; 1,9; ...;

в) 8; 6,5; 5; ...; **г)** $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$; ... .

476. В арифметичній прогресії (a_n): $a_1 = 3$, $d = 2$. Знайдіть порядковий номер її члена, який дорівнює:

а) 17; **б)** 41; **в)** 107; **г)** 91.

Чи є членом цієї прогресії число 322? А число 185?

(*Вказівка*: якщо число є членом прогресії, то його порядковий номер має бути натуральним числом).

477. Дано нескінченну числову послідовність: 1; 4; 7; 10; ... .

Запишіть формулу для обчислення будь-якого члена цієї послідовності, якщо закономірність утворення наступних її членів зберігається.

Дізнайтесь, чи є членом цієї послідовності кожне з чисел:

а) 298; **б)** 4891;

в) 10536; **г)** 24850.

Якщо є, то який порядковий номер кожне з них має?

478°. Знайдіть п'ять перших членів послідовності, у якій:

а) $a_n = 3n + 2$; **б)** $a_n = 2n - 3$;

в) $a_n = 1{,}5n + 2$; **г)** $a_n = 1{,}5 - 2n$.

Покажіть, що ці послідовності є арифметичними прогресіями.

479°. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), у якій:

а) $a_5 = 19$; $a_9 = 35$; **б)** $a_1 = \frac{1}{3}$; $a_{10} = 6\frac{1}{3}$;

в) $a_3 = -12$; $a_6 = -27$; **г)** $a_4 = 136$; $a_{10} = 436$.

480°. В арифметичній прогресії: $a_2 = 3$, $a_3 = 5$. Знайдіть a_5, a_7.

481. В арифметичній прогресії: $a_3 = 4$, $a_5 = 7$. Знайдіть a_{10}.

482. Підприємство розпочало використовувати нове обладнання вартістю 1 200 000 грн. Щороку вартість обладнання зменшується на 50 000 грн. (через амортизацію). Знайдіть вартість цього обладнання через 10 років. Коли вартість обладнання досягне 200 000 грн., воно стане непридатним для використання. Через скільки років це станеться?

483. На стороні AB кута ABC (рис. 93) відкладено рівні відрізки BA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_7A_8 і через їхні кінці проведено паралельні прямі до перетину зі стороною BC. Довжина відрізка A_1C_1 дорівнює 2,5 см. Знайдіть довжину відрізків A_4C_4 і A_8C_8.

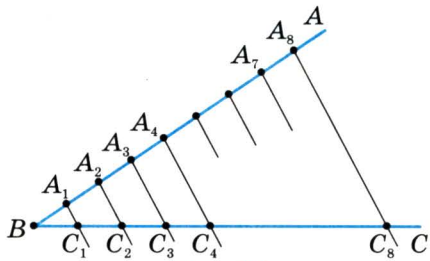


Рис. 93

484. **а)** Числові значення діаметрів шківів, насаджених на спільний вал, утворюють арифметичну прогресію з шести членів. Діаметри найменшого і найбільшого шківів дорівнюють відповідно 125 мм і 250 мм. Знайдіть діаметри решти шківів.

б) Між числами 6 і 16 розмістіть такі три числа, щоб вони разом з даними утворили арифметичну прогресію.

485. Між числами 7 і 35 розмістіть шість чисел, які б утворили з даними арифметичну прогресію.

486. Знайдіть п'ять чисел, які треба розмістити між числами 1 і 25 так, щоб отримати арифметичну прогресію.

487. Починаючи з якого номера, члени прогресії 2; 1,8; 1,6; 1,4; ... будуть від'ємними числами?

488*. Знайдіть чотири перші члени арифметичної прогресії, якщо $a_1a_4 = 22$, $a_2a_3 = 40$.

489*. Сума першого і п'ятого членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 14, а добуток другого і четвертого її членів дорівнює 45. Знайдіть перший член і різницю прогресії.

10.3. Сума n перших членів арифметичної прогресії

Пригадайте

1. Який вигляд має формула загального члена арифметичної прогресії?
2. Як виразити через a_1 і d член арифметичної прогресії, номер якого дорівнює $n - k$?

① **Як рахував Гаусс.** Розповідають, що незвичайні здібності видатного німецького математика Карла Фрідріха Гаусса (1777–1855) почали виявлятися вже в ранньому віці. Якось він здивував учителя, миттєво обчисливши суму перших ста натуральних чисел. Він, очевидно, помітив, що в послідовності 1; 2; 3; 4; ...; 97; 98; 99; 100 сума першого і останнього числа дорівнює 101 (1 + 100 = 101), другого і передостаннього — теж 101 (2 + 99 = 101), третього від початку і третього від кінця — теж 101 (3 + 98 = 101) і т.д. Всього таких сум можна утворити 50 (остання — 50 + 51). Отже, сума перших ста натуральних чисел дорівнює $101 \cdot 50 = 5050$.

② **Властивість арифметичної прогресії.** Неважко бачити, що послідовність перших ста натуральних чисел є скінченною арифметичною прогресією, перший і останній члени (або інакше, крайні члени) якої дорівнюють відповідно 1 і 100, а різниця $d = 1$. Вона має властивість, яку і помітив Гаусс: *сума будь-яких двох її членів, рівновіддалених від крайніх членів, дорівнює сумі крайніх членів* (у даному випадку 101).

Таку властивість має будь-яка скінченна арифметична прогресія. Доведемо її.

▽ Нехай маємо скінченну арифметичну прогресію: a_1, a_2, a_3,..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n. Запишемо у загальному вигляді два довільні члени цієї прогресії, які рівновіддалені від її крайніх членів, наприклад, стоять на k-му місці від початку і від кінця. Очевидно, що на k-му місці від початку прогресії знаходиться член a_k. Тепер встановимо номер члена, який стоїть на k-му

місці від кінця прогресії. Перед цим зауважимо, що сума номерів крайніх членів і членів, рівновіддалених від крайніх, на 1 більша від кількості n членів прогресії і дорівнює $n + 1$.

Справді, сума номерів першого (a_1) і останнього (a_n) членів дорівнює $1 + n$; другого (a_2) і передостаннього (a_{n-1}) — $2 + n - 1 = n + 1$; третього (a_3) і третього від кінця (a_{n-2}) — $3 + n - 2 = n + 1$ і т.д.

Отже, сума номерів членів прогресії, що стоять на k-му місці від початку і на k-му місці від кінця, теж має дорівнювати $n + 1$. Порядковий номер члена, що стоїть на k-му місці від початку, дорівнює k. Щоб знайти номер члена, що стоїть на k-му місці від кінця прогресії, треба від $n + 1$ відняти k: $n + 1 - k = n - k + 1$.

Знайдемо суму членів a_k і a_{n-k+1}, скориставшись формулою загального члена арифметичної прогресії. Маємо:

$$a_k = a_1 + d(k-1), \quad a_{n-k+1} = a_1 + d(n-k+1-1) = a_1 + d(n-k);$$
$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + d(k-1) + a_1 + d(n-k) =$$
$$= a_1 + a_1 + d(k-1+n-k) = a_1 + \underbrace{a_1 + d(n-1)}_{a_n} = a_1 + a_n. \blacktriangle$$

③ **Формула суми n перших членів арифметичної прогресії.** Щойно доведену властивість можна використати для встановлення формули обчислення суми n перших членів арифметичної прогресії.

Нехай треба знайти суму членів арифметичної прогресії: a_1, a_2, a_3,..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n. Позначають таку суму зазвичай S_n.

Запишемо цю суму двома способами: у прямому і зворотному порядку розміщення доданків.

Маємо:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1,$$

Додамо почленно ці дві рівності. Маємо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Кожна із сум у дужках, як було доведено вище, дорівнює $a_1 + a_n$. Кількість таких сум дорівнює n. Отже, $2S_n = (a_1 + a_n)n$. Звідси:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Враховуючи те, що $a_n = a_1 + d(n - 1)$, формулу суми членів арифметичної прогресії можна записати і в такому вигляді:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, \quad \text{або} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

За встановленою формулою суму ста перших натуральних чисел можна обчислити так: $S_{100} = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 101 \cdot 50 = 5050.$

Запитання для самоперевірки.

1. Яку властивість скінченної арифметичної прогресії використовують для встановлення формули суми n перших її членів?
2. Запишіть два варіанти формули суми n перших членів арифметичної прогресії. В якому випадку, на ваш погляд, доцільніше використовувати один з них, а в якому випадку — інший?

Задачі та вправи

490°. Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $a_1 = 3$, $a_n = 39$, $n = 13$;
б) $a_1 = 20{,}2$, $a_n = -18{,}4$, $n = 15$;
в) $a_1 = 3$, $d = 2$, $n = 32$;
г) $a_1 = -4$, $d = 4$, $n = 25$;
ґ) $a_1 = -5$, $d = -7$, $n = 14$;
д) $a_1 = 8$, $d = -3$, $n = 40$.

491°. Знайдіть суму 10-ти перших членів арифметичної прогресії:

а) 2; 5; 8; ...;
б) 19; 15; 11; ...;
в) –17; –12; –7; ...;
г) 14,2; 12; 9,8; ... .

492°. Знайдіть суму перших двохсот натуральних чисел.

493. Знайдіть суму:
а°) усіх натуральних чисел від 20 до 120 включно;
б) усіх двоцифрових чисел;
в) усіх двоцифрових парних чисел;
г) усіх непарних чисел, менших від 100.

494. Якою є кількість двоцифрових натуральних чисел, кратних 6? Знайдіть їх суму.

495°. В амфітеатрі 12 рядів. У першому ряді 40 місць, а в кожному наступному — на 10 місць більше, ніж у попередньому. Скільки місць в амфітеатрі?

496°. Тіло, що вільно падає, пролітає за першу секунду від початку падіння 4,9 м, а за кожну наступну секунду — на 9,8 м більше, ніж за попередню. З якої висоти почало падати тіло, якщо воно досягло поверхні землі за 30 с?

497. Камінь, скинутий у свердловину, досяг її дна через 12 с. Знайдіть глибину свердловини.

498. Скільки ударів зробить годинник протягом доби, якщо він вибиває лише кількість цілих годин від 1 до 12?

499. Арифметична прогресія має ще й таку властивість: кожний її член, починаючи з другого, є середнім арифметичним членів, рівновіддалених від нього, тобто $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$. Доведіть цю властивість.

500. Використовуючи зазначену у попередній вправі властивість, знайдіть усно:
а) a_5, якщо $a_2 = 6$, $a_8 = 20$;
б) a_7, якщо $a_3 = -3$, $a_{11} = 15$;
в) a_8, якщо $a_7 = 1{,}5$, $a_9 = 11{,}5$;
г) a_8, якщо $a_2 = -17$, $a_4 = -21$.

501*. Числа, що виражають градусну міру кутів трикутника, становлять арифметичну прогресію. Знайдіть середній член цієї прогресії.

502*. В арифметичній прогресії (a_n) $a_7 = 6$. Знайдіть S_{13}.

503°. Знайдіть перший член і суму n членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $d = 10$, $n = 45$, $a_n = 459$; **б)** $d = 2$, $n = 15$, $a_n = -10$.

504. Четвертий член арифметичної прогресії дорівнює 10, а сьомий член її дорівнює 19. Знайдіть перший член і суму перших десяти членів цієї прогресії.

505. В арифметичній прогресії — десять членів. П'ятий її член дорівнює 11, а восьмий член дорівнює 17. Знайдіть суму членів цієї прогресії.

506. Швидкість підкинутого вгору тіла щосекунди зменшується на 9,8 м/с. Скільки часу буде летіти вгору куля, що вилетіла вертикально зі швидкістю 300 м/с, та якої максимальної висоти над Землею вона досягне?

507°. Знайдіть кількість n членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $a_1 = 1$, $d = 2$, $S_n = 36$; **б)** $a_3 = 2$, $d = 4$, $S_n = 0$.

508. Скільки треба взяти членів прогресії 105; 98; 91; 84; .., щоб їх сума дорівнювала 0?

509. За скільки годин велосипедист проїде 54 км, якщо за першу годину він проїжджає 15 км, а за кожну наступну — на 1 км менше, ніж за попередню?

510*. Розв'яжіть рівняння:

а) $2 + 5 + 8 + \ldots + x = 155$;

б) $1 - 5 - 11 - \ldots - x = -207$;

в) $x - 1 + x - 3 + x - 5 + \ldots + x - 27 = 70$.

511*. Третій член арифметичної прогресії дорівнює 10, а восьмий член її дорівнює 30. Скільки треба взяти членів цієї прогресії, щоб їх сума дорівнювала 242?

512*. Знайдіть натуральне число, яке дорівнює сумі всіх натуральних чисел, які стоять перед ним.

513*. Довжини сторін многокутника утворюють арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює 3 см. Найбільша сторона многокутника дорівнює 38 см. Знайдіть кількість сторін многокутника, якщо його периметр дорівнює 258 см.

§11. Геометрична прогресія

11.1. Означення і властивості геометричної прогресії

Пригадайте

1. Яку числову послідовність називають арифметичною прогресією?
2. Чи можуть члени арифметичної прогресії дорівнювати нулю?
3. Чи може різниця арифметичної прогресії дорівнювати нулю?

① **Поняття геометричної прогресії.** Розглянемо числові послідовності:

1) 1; 2; 4; 8; 16; ...;

2) 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{3}{16}$; ...;

3) 2; –1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ... .

Особливість цих послідовностей полягає в тому, що кожний наступний член є результатом множення попереднього члена на одне й те саме для даної послідовності число.

Зокрема, кожен член першої послідовності множили на 2; другої — на $\frac{1}{2}$; третьої — на $-\frac{1}{2}$.

Числова послідовність, у якій перший член відмінний від нуля, а кожний наступний член дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число, називається *геометричною прогресією*.

Тобто числова послідовність $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ є геометричною прогресією, якщо для всіх натуральних n виконується умова $b_{n+1} = b_n q$, де $q \neq 0, b_n \neq 0$.

З цієї рівності випливає, що $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, тобто відношення будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, до попереднього члена дорівнює одному і тому самому числу q, яке називається ***знаменником геометричної прогресії.***

У розглянутих вище прикладах геометричної прогресії знаменники дорівнюють відповідно 2, $\frac{1}{2}$ і -2.

Щоб задати геометричну прогресію, досить мати її перший член і знаменник.

Наприклад, якщо $b_1 = 4$ і $q = 3$, то прогресія має вигляд 4; 12; 36; 108; ... .

Якщо $b_n = -12$ і $q = -\frac{1}{3}$, то маємо таку прогресію: $-12; 4; -\frac{4}{3}; \frac{4}{9}; \ldots$.

② **Формула загального члена геометричної прогресії.** Встановимо формулу загального члена геометричної прогресії $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$.

▽ Згідно з означенням геометричної прогресії,

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$
$$b_3 = b_2 \cdot q;$$
$$b_4 = b_3 \cdot q;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{n-1} = b_{n-2} \cdot q;$$
$$b_n = b_{n-1} \cdot q.$$

Помноживши почленно ці рівності, маємо:

$$\underline{b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}} \cdot b_n = b_1 \cdot \underline{b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-2} \cdot b_{n-1}} \cdot q^{n-1}.$$

Поділимо обидві частини одержаної рівності на підкреслений добуток. Отримаємо шукану формулу:

$$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}. \blacktriangle \qquad (1)$$

Приклад 1. Знайти шостий член геометричної прогресії, перший член якої дорівнює 8, а знаменник становить $\frac{1}{2}$.

▽ *Розв'язання.* $b_6 = b_1 q^5$; $b_6 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^3 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

$b_6 = \frac{1}{4}$. ▲

Приклад 2. Другий член геометричної прогресії дорівнює $\frac{1}{27}$, а п'ятий член дорівнює 1. Знайти перший член і знаменник прогресії.

▽ *Розв'язання.* $b_2 = b_1 q$, $b_5 = b_1 q^4$, $\frac{b_5}{b_2} = \frac{b_1 q^4}{b_1 q} = q^3$;

$\frac{1}{\frac{1}{27}} = q^3$, $q^3 = 27$, $q = 3$.

b_1 знаходимо з рівності $b_2 = b_1 q$: $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{\frac{1}{27}}{3} = \frac{1}{81}$. ▲

Приклад 3. Знайти четвертий член геометричної прогресії (b_n), якщо п'ятий її член дорівнює –6, а сьомий член дорівнює –54.

▽ *Розв'язання.* Виразимо сьомий член прогресії через її п'ятий член і знаменник. Маємо: $b_7 = b_5 q^2$. Звідси $q^2 = \frac{b_7}{b_5}$ або

$q^2 = \frac{-54}{-6} = 9$. З рівняння $q^2 = 9$ маємо два значення q: $q_1 = 3$, $q_2 = -3$.

Щоб знайти четвертий член прогресії, досить п'ятий член поділити на q.

Якщо $q = 3$, то $b_4 = \frac{-6}{3} = -2$;

якщо $q = -3$, то $b_4 = \frac{-6}{-3} = 2$.

Отже, отримали два розв'язки: $b_n = -2$, $b_n = 2$. ▲

③ **Властивості геометричної прогресії.** Геометрична прогресія має наступні властивості.

1. Будь-який член геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім пропорційним (геометричним) двох сусідніх з ним членів.

Тобто квадрат кожного члена геометричної прогресії, крім першого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів.

Приклад. $16^2 = 32 \cdot 8$ $\qquad$ $2^2 = 4 \cdot 1$

Прогресія: **32;** 16; **8;** **4;** 2; **1;** $\frac{1}{2}$; ... .

$8^2 = 16 \cdot 4$ $\qquad$ $1^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}$

Взагалі, якщо b_{m-1}, b_m і b_{m+1} — три послідовні члени геометричної прогресії, то $b_m^2 = b_{m-1} \cdot b_{m+1}$.

▽ *Доведення.* За означенням прогресії: $\frac{b_{m-1}}{b_m} = \frac{b_m}{b_{m+1}} = q$; звідки $b_m^2 = b_{m-1} \cdot b_{m+1}$. ▲

2. Добуток двох членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від крайніх членів, дорівнює добутку крайніх членів.

Приклад.

Прогресія: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

64

64

64

Доведемо цю властивість у загальному вигляді.

▽ *Доведення.* Нехай геометрична прогресія (b_n) має n членів. Члени прогресії, що стоять на k-му місці від початку та на k-му місці від її кінця, відповідно дорівнюють:

$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$, $b_{n-k+1} = b_1 \cdot q^{n-k}$.

Утворимо їх добуток:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 q^{n-k} = b_1^2 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot b_1 q^{n-1} = b_1 \cdot b_n,$$

що й треба було довести. ▲

Запитання для самоперевірки.

1. Яку числову послідовність називають геометричною прогресією?
2. Що називають знаменником геометричної прогресії?
3. Чи може хоча б один член геометричної прогресії дорівнювати нулю?
4. Як обчислити будь-який член геометричної прогресії, знаючи її перший член і знаменник?

Задачі та вправи

514°. Знайдіть п'ять перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_1 = 6$, $q = 2$;

б) $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{2}$;

в) $b_1 = -4$, $q = \frac{1}{2}$;

г) $b_1 = -1{,}5$, $q = 2$;

ґ) $b_1 = 4$, $q = 0{,}5$;

д) $b_1 = 1$, $q = 0{,}5$.

Які з даних послідовностей є арифметичними, а які — геометричними прогресіями (**515; 516**):

515°. **а)** 1, 4, 7, 10, ...; **б)** 1, 2, 4, 8, ...;
в) 1, 3, 5, 7, ...; **г)** –2, –4, –8, ...?

516°. **а)** 1, $\sqrt{2}$, 2, ...; **б)** 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, ...;
в) 2, $2+\sqrt{2}$, $2+2\sqrt{2}$, ...; **г)** 3, $\frac{3}{\sqrt{3}}$, 1, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ...?

Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії (**517; 518**):

517°. **а)** 2, 4, 8, 16, ...; **б)** 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...;
в) 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ...; **г)** 4, 2, 1, 0,5, ...

518. **а)** 1, $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, ...; **б)** 3, $\frac{3}{\sqrt{3}}$, 1, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ...;
в) 2, $\sqrt{2}$, 1, ...; **г)** 4, –1, $\frac{1}{4}$, ...

Задайте геометричну прогресію (b_n) формулою n-го члена, якщо (**519; 520**):

519°. **а)** $b_1 = 3$, $b_{n+1} = 2b_n$; **б)** $b_1 = 2$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$;
в) $b_1 = 4$, $b_{n+1} = 3b_n$.

520°. **а)** $b_1 = 4$, $b_n = -3b_{n-1}$; **б)** $b_1 = \sqrt{2}$, $b_n = \sqrt{2}b_{n-1}$;
в) $b_1 = \sqrt{2}$, $b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}b_n$.

521°. Числова послідовність (b_n) є геометричною прогресією. Знайдіть:
а) b_4, якщо $b_1 = 1$, $q = 5$;
б) b_8, якщо $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$;
в) b_9, якщо $b_1 = -3$, $q = \sqrt{2}$;
г) b_7, якщо $b_1 = \frac{1}{9}$, $q = -\sqrt{3}$;

ґ) b_4, якщо $b_1 = \frac{3}{4}, q = \frac{2}{3}$;

д) b_7, якщо $b_1 = 0{,}125$, $q = -2$;

е) b_5, якщо $b_1 = 27$, $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

є) b_6, якщо $b_1 = -125$, $q = -\frac{1}{5}$.

522°. Знайдіть перший член геометричної прогресі (b_n), якщо:

а) $b_{11} = 128$, $q = 2$;

б) $b_4 = 10$, $q = 5$;

в) $b_5 = 27$, $q = -3$;

г) $b_7 = 125\sqrt{5}, q = \sqrt{5}$;

ґ) $b_6 = \frac{8}{27}, q = \frac{2}{3}$;

д) $b_8 = \frac{8}{\sqrt{2}}, q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

523°. У геометричній прогресії (b_n) знайдіть:

а) знаменник і третій член, якщо $b_1 = 8$, $b_2 = -16$;

б) знаменник і четвертий член, якщо $b_2 = \frac{3}{4}, b_3 = 1$;

в) знаменник і другий член, якщо $b_3 = 2, b_4 = \sqrt{2}$;

г) перший член, якщо $b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = -\frac{3}{4}$.

524. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_3 = 6$, $b_6 = 48$;

б) $b_2 = -9, b_5 = -\frac{1}{3}$;

в) $b_2 = 6, b_4 = \frac{2}{3}$;

г) $b_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}, b_7 = \sqrt{2}$.

525. Знайдіть номер n-го члена геометричної прогресії, якщо:

а) $b_n = 162$, $b_1 = 2$, $q = 3$;

б) $b_n = 10$, $b_1 = 640$, $q = \frac{1}{2}$;

в) $b_n = \frac{1}{81}, b_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$;

г) $b_n = 320$, $b_1 = 5$, $q = 2$.

526. Між числами 1 і 16 вставте такі три числа, щоб вони разом із даними числами утворили геометричну прогресію.

527. Між числами $\frac{3}{4}$ і $\frac{1}{12}$ вставте число, щоб воно разом із даними числами утворило геометричну прогресію. Скільки таких чисел можна знайти?

528. У геометричній прогресії сума першого і третього членів дорівнює 40, а сума другого і четвертого членів дорівнює 80. Знайдіть перший член і знаменник прогресії.

529. Знайдіть чотири числа, які утворюють геометричну прогресію, якщо сума першого і третього чисел дорівнює 35, а сума другого і четвертого дорівнює 70.

11.2. Сума *n* перших членів геометричної прогресії

Встановимо формулу для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії (b_n), позначивши цю суму, як і у випадку арифметичної прогресії, S_n.

Отже, $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$.

Наступні міркування подамо математичною мовою без коментарів, надаючи вам можливість зробити самостійно відповідні пояснення.

$$\begin{array}{rl} & b_2 = b_1 q, \\ & b_3 = b_2 q, \\ & b_4 = b_3 q, \\ + & \ldots\ldots\ldots, \\ & b_{n-1} = b_{n-2} q, \\ & b_n = b_{n-1} q \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_{n-1} + b_n}_{S_n - b_1} = \underbrace{(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_{n-1})}_{S_n - b_n} \cdot q$$

$$S_n - b_1 = (S_n - b_n)q,$$

$$S_n - b_1 = S_n q - b_n q, \qquad S_n - S_n q = b_1 - b_n q, \qquad S_n(1-q) = b_1 - b_n q,$$

звідки

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}. \qquad (2)$$

Якщо $q > 1$, то доцільніше використовувати формулу (2) у такому вигляді:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}.$$

Скориставшись рівністю $b_n = b_1 q^{n-1}$, отримаємо ще один запис останньої формули:

$$S_n = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1}, \quad \text{або} \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Приклад. Знайти суму перших шести членів геометричної прогресії: 4; 2; 1; ... .

▽ *Розв'язання.* Оскільки тут $b_1 = 4$, а $q = \frac{1}{2}$, то доцільно скористатися таким варіантом формули: $S_n = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}$.

Маємо: $S_6 = \frac{4 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4 \cdot \left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{4 \cdot \frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63 \cdot 2}{16} = \frac{63}{8}$. ▲

Запитання для самоперевірки

Запишіть варіанти формул для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії. Поясніть, коли доцільно використовувати кожну з них.

Задачі та вправи

Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n), у якої (**530; 531**):

530°. **а)** $b_1 = 5$, $q = 2$, $n = 5$; **б)** $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 4$;

в) $b_1 = 4$, $q = -2$, $n = 6$; **г)** $b_1 = -2$, $q = 3$, $n = 5$.

531. **а)** $b_1 = 3$, $q = \sqrt{2}$, $n = 6$; **б)** $b_1 = 3$, $q = .\sqrt{2},.$ $n = 5$.

Знайдіть суму восьми перших членів геометричної прогресії (**532; 533**):

532°. **а)** 1; 2; 4; 8; ...; **б)** 1; 3; 9; 27; ...;

в) 4; 2; 1; 0,5; ...; **г)** -3; -1; $-\frac{1}{3}$; ... .

533*. **а)** 1024; 512; 256; ...; **б)** $\sqrt{2}$, 2; $2\sqrt{2}$; ...;

в) $\sqrt{3}$; 3; $3\sqrt{3}$; ...; **г)** $\sqrt{2}$; 1; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ... .

534°. Знайдіть суму перших п'яти членів геометричної прогресії, якщо:

а) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$; **б)** $b_1 = 3$, $q = 2$.

535. Обчисліть: $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9$.

Знайдіть перший член і суму n членів геометричної прогресії, у якої (**536; 537**):

536°. **а)** $b_n = 192$, $q = 2$, $n = 7$; **б)** $b_n = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$.

537. **а)** $b_n = \frac{32}{81}$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 6$; **б)** $b_n = 9\sqrt{6}$, $q = 3$, $n = 5$.

538. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії, четвертий член якої дорівнює 9, а знаменник дорівнює $\frac{1}{3}$.

539°. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії, другий член якої дорівнює 32, а третій член дорівнює 8.

540. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії, третій і п'ятий члени якої дорівнюють відповідно 8 і $\frac{1}{2}$. Скільки розв'язків має задача?

541. Знаменник геометричної прогресії дорівнює –2, а сума п'яти перших її членів дорівнює 5,5. Знайдіть п'ятий член цієї прогресії.

542*. У геометричній прогресії $b_2 = 3$. Знайдіть $b_1 b_2 b_3$.

543*. У геометричній прогресії $b_4 = \sqrt{3} - 1$. Знайдіть $b_1 b_7$.

11.3. Сума нескінченної геометричної прогресії, якщо $|q| < 1$

Розглянемо геометричні прогресії:

а) $1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ \frac{1}{81};\ \ldots,\ q = \frac{1}{3};$

б) $4;\ -2;\ 1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots,\ q = -\frac{1}{2};$

в) $-10;\ -2;\ -\frac{2}{5};\ -\frac{2}{25};\ -\frac{2}{125};\ \ldots,\ q = \frac{1}{5}.$

Усі вони — нескінченні, і знаменник q кожної з них такий, що $|q| < 1$.

Їхньою особливістю є те, що зі збільшенням номера члена прогресії його значення дедалі менше відрізняється від нуля (кажуть: «значення членів прогресії b_n прямують до нуля при необмеженому зростанні n», а записують так: $b_n \to 0$ при $n \to \infty$).

Розглянемо, що відбувається із сумою n перших членів таких прогресій при необмеженому зростанні n.

За відомою формулою

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_n q}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - b_n \cdot \frac{q}{1 - q}.$$

В одержаній різниці $\frac{b_1}{1-q}$ не залежить від n. Відомо, що при $n \to \infty$ $b_n \to 0$, тому і добуток $b_n \cdot \frac{q}{1-q} \to 0$. Отже, при $n \to \infty$

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - b_n \cdot \frac{q}{1-q} \to \frac{b_1}{1-q}.$$

Вираз $\frac{b_1}{1-q}$ вважають ***сумою нескінченної геометричної прогресії*** з першим членом b_1 і знаменником q, де $|q| < 1$. Позначивши цю суму буквою S, можна записати:

$$\boldsymbol{S = \frac{b_1}{1-q}.}$$

Приклад 1. Обчислити суму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$.

▽ *Розв'язання.* Маємо суму членів нескінченної геометричної прогресії, в якої $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Скориставшись формулою $S = \frac{b_1}{1-q}$, маємо:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Отже, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1$. ▲

Приклад 2. Періодичний дріб 0,151515... записати у вигляді суми членів нескінченної геометричної прогресії і знайти цю суму.

▽ *Розв'язання.* Маємо: $0,(15) = \frac{15}{100} + \frac{15}{10000} + \frac{15}{1000000} + \ldots$.

У прогресії $\frac{15}{100}, \frac{15}{10000}, \frac{15}{1000000}, \ldots$: $b_1 = 0{,}15$, $q = 0{,}01$.

Отже, $S = \frac{0{,}15}{1-0{,}01} = \frac{0{,}15}{0{,}99} = \frac{5}{33}$. ▲

Приклад 3. Періодичний дріб 0,2777... перетворити у звичайний.

▽ *Розв'язання.* $0{,}2777 = \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \ldots =$

$= \frac{2}{10} + \frac{0{,}07}{1-0{,}1} = \frac{2}{10} + \frac{0{,}07}{0{,}9} = \frac{2}{10} + \frac{7}{90} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$. ▲

Розглянуті приклади 2 і 3 показують, як періодичні десяткові дроби можна записати у вигляді звичайних.

Задачі та вправи

544. Знайдіть суму нескінченної спадної геометричної прогресії:

а°) 2; 1; 0,5; ...;

б°) 4; 1; $\frac{1}{4}$; ...;

в°) 2; –1; $\frac{1}{2}$; ...;

г) 1; $-\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; ...;

ґ*) 2; –1; $\frac{1}{2}$; ...;

д*) 3^2; 3; 1; ...;

е*) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2^2}$; $\frac{1}{2^3}$; ...;

є*) 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3^2}$; ... .

545°. Обчисліть:

а) $\frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{4}{125} + \ldots$;

б) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots$.

546. Доведіть, що:

а°) $\frac{6}{5} + \frac{12}{25} + \frac{24}{125} + \ldots = 2$;

б) $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \ldots = 3$;

в) $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \ldots = 2\sqrt{3}$;

г*) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + \ldots = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-1}$.

547. У рівносторонній трикутник зі стороною a вписано сполученням середин його сторін новий трикутник; у цей трикутник таким самим способом вписано новий трикутник — і так далі до нескінченності. Знайдіть суму периметрів вписаних трикутників.

548. Дано квадрат, сторона якого дорівнює 4 см. Середини його сторін є вершинами другого квадрата, середини сторін другого є вершинами третього квадрата і т. д. (рис. 94). Знайдіть суму площ усіх квадратів.

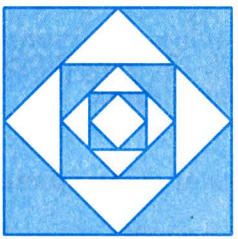


Рис. 94

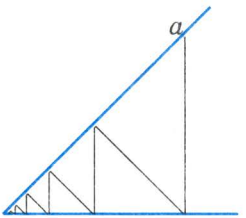


Рис. 95

549. На стороні кута 45° взято точку на відстані a від вершини. З цієї точки опущено перпендикуляр на другу сторону; з основи цього перпендикуляра опущено новий перпендикуляр на першу сторону — і т.д. до нескінченності (рис. 95). Знайдіть суму довжин цих перпендикулярів.

550*. Перетворіть у звичайні дроби:

а) 0,(8); **б)** 0,7(3); **в)** 0,2(35);
г) 0,(7); **ґ)** 0,(35); **д)** 0,5(23).

Додаткові задачі та вправи до розділу V

551. Знайдіть п'ять перших членів послідовності:

а) $y = 2n + 1$; **б)** $y = 3 - 2n$;

в) $y = n - n^2$; **г)** $y = (-2)^n - 3$.

552. Загальний член послідовності задано формулою $y = 0{,}5n^2 + 3$. Знайдіть п'ять перших членів цієї послідовності. Запишіть послідовність, утворену знайденими числами. Задайте її:

а) таблицею;

б) точками на координатній прямій;

в) точками на координатній площині.

553. Запишіть п'ять перших членів послідовності:

а) непарних натуральних чисел;

б) кубів чисел натурального ряду;

в) натуральних чисел, які діляться на 2 і 3 одночасно;

г) натуральних чисел, які при діленні на 4 дають в остачі 2.

554. Знайдіть формулу загального члена скінченної послідовності:

а) 2; 5; 8; 11; 14; **б)** 2; 4; 8; 16; 32;

в) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$; **г)** $-1; 0; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{5}$.

555. Знайдіть п'ять перших членів послідовності, заданої рекурентним способом:

а) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3$; **б)** $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$;

в) $a_1 = -4$, $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$; **г)** $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (1 - 2a_n)^2$.

556. Знайдіть a_1; a_3; a_5; a_{10}; a_{100} послідовності (a_n), заданої формулою:

а) $a_n = \frac{3}{n}$; **б)** $a_n = \frac{2n-1}{n}$.

557. Запишіть кілька членів послідовності, якщо:

а) перший її член дорівнює 5, а кожний наступний — на 3,5 більший від попереднього;

б) перший її член дорівнює 3, а кожний наступний — на 2,5 менший від попереднього;

в) перший її член дорівнює 2,3, а кожний наступний член втричі більший від попереднього.

Зростаючою чи спадною є кожна з цих послідовностей?

558. Запишіть дані дробові числа у вигляді десяткового дробу, якщо:

а) $\frac{4}{7}$; **б)** $2\frac{2}{3}$; **в)** $3\frac{5}{12}$; **г)** $6\frac{8}{15}$.

Нехай (x_n) — послідовність, членами якої є десяткові наближення цих дробів з точністю до десятих, сотих, тисячних, десятитисячних і т. д. Знайдіть x_1, x_3, x_5, x_{10}. Чи є кожна з цих послідовностей монотонною?

559. Знайдіть найбільший (найменший) член послідовності, заданої формулою:

а) $y_n = n^2 - 2n + 1$; **б)** $y_n = -12n + n^2 + 32$;

в) $y_n = -n^2 + 10n + 16$; **г)** $y_n = 9 - n^2 - 10n$.

560. Задайте послідовність формулою n-го члена, якщо:

а) $x_1 = 5$, $x_{n+1} = x_n + 1$; **б)** $x_1 = 3n$, $x_{n+1} = x_n - 1$;

в) $x_1 = 0{,}5$, $x_{n+1} = 0{,}5x_n$; **г)** $x_1 = -2$, $x_{n+1} = -2{,}5x_n$.

561. Знайдіть, починаючи з якого номера n член послідовності, заданої формулою n-го члена (x_n):

а) $x_n = 2n + 1$, буде більший від 13;

б) $x_n = \frac{1}{3}n - 2$, буде менший від 4;

в) $x_n = 2 + 5n$, перевищуватиме 100;

г) $x_n = \frac{2n+1}{n+2}$, відрізнятиметься від 2 менше, ніж на 0,001.

562. Встановіть, чи є число:

а) 6,5 членом послідовності $y_n = \frac{n+1}{2}$;

б) $1\frac{32}{63}$ членом послідовності $y_n = \frac{3n+1}{2n}$;

в) 85 членом послідовності $y_n = n(2n - 29)$;

г) $21\frac{1}{16}$ членом послідовності $y_n = \frac{2n^2 - 1}{n + 3}$?

563. Покажіть, що послідовність (a_n) є арифметичною прогресією:

а) $a_n = 2n + 1$; **б)** $a_n = 3n - 2$;

в) $a_n = 1{,}5 + 3{,}5n$; **г)** $a_n = 3{,}5 - 4n$.

564. Знайдіть n-й член арифметичної прогресії:

а) 1; 5; 9; ...; **б)** 0,5; 1,1; 1,7; ...;

в) 10; 5,5; 1; ...; **г)** $\frac{1}{3}$; 1; $1\frac{2}{3}$; ... .

565. Знайдіть суму n членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $a_1 = 2$, $a_n = 24$, $n = 12$; **б)** $a_1 = 8$, $a_n = -2$, $n = 11$;

в) $a_1 = 7$, $d = -2$, $n = 15$; **г)** $a_1 = -8$, $d = -4$, $n = 28$.

566. В арифметичній прогресії (a_n) знайдіть:

а) a_1, якщо $S_n = 50$, $a_n = 7$ і $n = 10$;

б) n, якщо $S_n = 40$, $a_1 = 2$ і $a_n = 6$;

в) d, якщо $S_n = 24{,}8$, $a_1 = 5$ і $n = 16$;

г) n, якщо $S_n = 15$, $a_1 = -5$ і $d = 3$.

567. Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n):

а) 8; 4; 0; ..., якщо $n = 16$;

б) –21; –18; –15; ..., якщо $n = 21$;

в) якщо $a_2 = 29$; $a_3 = 26$;

г) якщо $a_3 = 24$; $a_4 = 21$.

568. Починаючи з якого номера в арифметичній прогресії (x_n):

а) $x_n < 0$, якщо $x_2 = 8{,}4$, а $x_4 = 7{,}8$;

б) $x_n > 0$, якщо $x_3 = 6{,}9$, а $x_5 = 6{,}1$;

в) $S_n > 143$, якщо $x_2 = 5$, а $x_5 = 11$;

г) $S_n < 88$, якщо $x_2 = 6$, а $x_4 = 10$?

569. Знайдіть суму всіх додатних членів арифметичної прогресії: 4,6; 4,2; 3,8; ... .

570. Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (y_n), якщо:

а) сума першого і другого її членів дорівнює 8, а добуток дорівнює 12;

б) різниця першого і другого її членів дорівнює 6, а добуток дорівнює 16;

в) сума двадцять шостого і шістнадцятого її членів дорівнює 62, а добуток дорівнює 385;

г) різниця шістнадцятого і двадцять шостого її членів дорівнює 30, а добуток дорівнює 3619.

571. Сума n перших членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою $S_n = n^2 + 3n$. Знайдіть шостий член цієї прогресії.

572. Які з послідовностей є арифметичними, а які — геометричними прогресіями:

а) 1; 5; 9; 12; ...;

б) 2; 6; 18; 54; ...;

в) 1; 5; 25; 125; ...;

г) –4; –2; 0; 2; ...;

ґ) $1;\ \sqrt{3}; 3;\ 3\sqrt{3}; \ldots;$

д) $1+\sqrt{3}; 1+3\sqrt{3}; 1+5\sqrt{3}; \ldots;$

е) $0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}; \ldots;$

є) $1;\ -\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{27}; \ldots;$

ж) $\frac{1}{\sqrt{2}}; 1; \sqrt{2}; \ldots;$

з) 1; –1; 1; –1; ...?

573. Знайдіть п'ять перших членів геометричної прогресії (x_n), якщо:

а) $x_1 = 6,\ q = \frac{1}{2};$

б) $x_1 = -3,\ q = -\frac{1}{3};$

в) $x_1 = 0{,}5,\ q = 0{,}5;$

г) $x_1 = -1\frac{2}{3},\ q = 0{,}2.$

574. Знайдіть десять перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_1 = 5,\ q = 2;$

б) $b_1 = 4,\ q = -\frac{1}{2};$

в) $b_1 = 8,\ b_n = -2b_{n-1};$

г) $b_1 = \sqrt{3},\ b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} b_n.$

575. Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії (y_n), якщо:

а) 1; 2; 4; 8; ...; $2; \frac{2}{3}; \frac{2}{9}; \ldots;$

б) 4; 1; $\frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \ldots;$ 3; 1,5; 0,75; ...;

в) $\sqrt{3}; 3; 3\sqrt{3}; \ldots;$ $\frac{2}{\sqrt{2}}; 1; \frac{1}{\sqrt{2}}; \ldots;$

г) $3; \sqrt{3}; 1; \ldots;$ 5; –1; 0,2; ... .

576. Між даними числами вставте три числа так, щоб утворилася геометрична прогресія:

а) 1 і 81; **б)** 2 і $\frac{1}{8}$; **в)** 2 і 32; **г)** 3 і $\frac{1}{27}$.

577. Числова послідовність (x_n) — геометрична прогресія. Знайдіть:

а) x_5, якщо $x_2 = 8$, а $x_4 = 2$;

б) x_5, якщо $x_2 = -270$, а $x_3 = -90$;

в) x_4, якщо $x_2 = -18$, а $x_6 = -\frac{2}{9}$;

г) x_5, якщо $x_2 = 240$, а $x_3 = -80$.

578. Сума другого і третього членів геометричної прогресії дорівнює 30, а різниця четвертого і другого членів дорівнює 90. Знайдіть перший член прогресії.

579. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (y_n), якщо:

а) $y_2 = 4$, $y_3 = 2$, а $n = 5$; **б)** $y_2 = 9$, $y_3 = -3$, а $n = 4$.

580. Запишіть п'ять перших членів геометричної прогресії (x_n), якщо:

а) сума чотирьох перших її членів дорівнює 180, а знаменник 2;

б) сума чотирьох перших її членів дорівнює 180, а знаменник –3;

в) перший і третій її члени відповідно дорівнюють 27 і 3, й усі члени її — додатні;

г) перший член дорівнює 81, третій дорівнює 9 і другий член — від'ємний.

581. Знайдіть перший член і суму n перших членів геометричної прогресії (a_n), якщо:

а) $a_n = 96$, $q = 2$, $n = 6$; **б)** $a_n = 486$, $q = 2$, $n = 6$;

в) $a_n = \frac{81}{625}$, $q = -\frac{3}{5}$; $n = 5$; **г)** $a_n = -12\sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}$, $n = 6$.

582. Обчисліть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) $4; 2; 1; \ldots;$ $3; 1; \frac{1}{3}; \ldots;$

б) $4; -1; \frac{1}{4}; \ldots;$ $2; -\frac{4}{5}; \frac{8}{25}; \ldots;$

в) $5; -1; \frac{1}{5}; \ldots;$ $16; 4; 1; \ldots;$

г) $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \ldots;$ $2; \frac{2}{5}; \frac{2}{25}; \ldots$.

583. Перетворіть періодичні дроби у звичайні:

а) 0,(2); 0,(3); 0,(5); **б)** 2,(12); 6,(16); 9,(20);

в) 3,2(3); 1,4(2); 7,3(4); **г)** 4,12(15); 3,18(20); 8,16(18)

584. Чотири числа утворюють арифметичну прогресію; якщо до них додати відповідно 1; 1; 3; 9, то отримаємо геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

585. Чотири числа утворюють геометричну прогресію; якщо від кожного з них відняти відповідно 1; 3; 9; 23, то отримаємо арифметичну прогресію. Знайдіть ці числа.

586. Три числа, сума яких дорівнює 21, утворюють арифметичну прогресію; якщо до них додати 2; 3 і 9, то одержані числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

587. Три додатні числа, сума яких дорівнює 12, утворюють арифметичну прогресію; якщо від них відняти відповідно –1; –2; –6, то одержані числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

588. Доведіть, що:

а) сума n перших непарних чисел натурального ряду дорівнює квадрату їх кількості;

б) сума n перших парних чисел натурального ряду дорівнює $n(n + 1)$;

в) $6 + 4 + 2 + \ldots + 2(4 - n) = n(7 - n)$, де $n \in \mathbb{N}$;

г) $4 + 2 + \ldots + 2(3 - n) = n(5 - n)$, де $n \in \mathbb{N}$.

✓ Завдання для самоперевірки

I рівень

1. Знайдіть п'ять перших членів послідовності, заданої формулою:

а) $y_n = 2n + 3$; **б)** $y_n = 12 - 5n$.

2. Послідовність (x_n) задана формулою: $x_n = 5n - 2$. Знайдіть член послідовності з номером, що дорівнює:

а) 6; **б)** 32.

3. В арифметичній прогресії (a_n): $a_2 = 5$, $a_3 = 8$. Знайдіть:

а) п'ятий член прогресії;

б) сьомий член прогресії.

4. Знайдіть суму n членів арифметичної прогресії, знаючи, що:

а) $a_1 = 4$, $a_n = 26$, $n = 12$;

б) $a_1 = 10$, $a_n = 94$, $n = 15$.

5. Знайдіть номер члена арифметичної прогресії (y_n), що дорівнює 12, якщо прогресія задана формулою:

а) $y_n = 5n + 2$;

б) $y_n = 7n - 16$.

6. Знайдіть три перших члени геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_1 = 4$, $q = 3$; **б)** $b_1 = -2$, $q = 0{,}5$.

7. Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії:

а) 2; 6; 18; ... ; **б)** 5; 2,5; 1,25; ... .

8. Задайте геометричну прогресію (b_n) формулою n-го її члена, якщо:

а) $b_1 = 4$, $b_{n+1} = 2b_n$;

б) $b_1 = 5$, $b_{n+1} = 3b_n$.

9. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n), у якої:

а) $b_1 = 4$, $q = 2$, $n = 6$;

б) $b_1 = 2$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$.

10. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) 2; 1; 0,5; ...; **б)** 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ... .

II рівень

1. Послідовність задана формулою: $y_n = n(n-1)$. Знайдіть:

а) y_5; **б)** y_6.

2. Запишіть п'ять перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $a_1 = 0{,}2$, $d = 6$;

б) $a_1 = 4$, $d = -0{,}5$.

3. Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії:

а) 6; 5,5; 5; ...; **б)** $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; ... .

4. Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $a_1 = -3$, $d = -2$, $n = 10$;

б) $a_1 = 4$, $d = -3$, $n = 8$.

5. Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

а) $b_1 = 4$, $q = -3$, $n = 4$;

б) $b_1 = -2$, $q = 3$, $n = 5$.

6. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

а) 3; –1; $\frac{1}{3}$; ...; **б)** 1; $-\frac{3}{4}$; $\frac{9}{16}$; ... .

III рівень

1. Запишіть формулу послідовності натуральних чисел, які при діленні на:

а) 4 дають в остачі 3;

б) 5 дають в остачі 2.

2. Знайдіть десятий член арифметичної прогресії (a_n), якщо:

а) $a_4 = 18$, $a_7 = 33$;

б) $a_3 = 2$, $a_8 = -13$.

3. Знайдіть суму чотирнадцяти перших членів арифметичної прогресії, якщо чотири перші члени її дорівнюють:

а) 4; 8; 12; 16;

б) 2; 6; 10; 14.

4. Знайдіть геометричну прогресію (b_n), якщо:

а) $b_3 + b_5 = 180$; $b_1 + b_3 = 20$;

б) $b_1 + b_2 + b_3 = 6$; $b_2 + b_3 + b_4 = -3$.

5. Знайдіть чотири числа, що утворюють геометричну прогресію, якщо:

а) перше число менше від третього на 36, а четверте — більше від другого на 12;

б) третє число менше від першого на 6, а четверте — більше від другого на 3.

6. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо $b_2 - b_4 = 1{,}5$ і $b_1 - b_3 = 3$.

IV рівень

1. Встановіть, чи є монотонною послідовність, задана формулою, і знайдіть значення a_1; a_5; a_{10}:

а) $a_n = \dfrac{2n}{n-1}$; **б)** $a_n = \dfrac{n-1}{2n}$.

2. Знайдіть десятий член арифметичної прогресії, якщо:

а) шостий її член становить 60% від третього, а їх добуток дорівнює 15;

б) п'ятий член становить 75% від другого, а їх добуток дорівнює 27.

3. Знайдіть прогресію, якщо:

а) різниця першого і другого членів спадної геометричної прогресії дорівнює 8, а сума другого і третього членів дорівнює 12;

б) різниця другого і першого членів зростаючої геометричної прогресії дорівнює 20, а різниця четвертого і першого членів дорівнює 140.

4. Знайдіть кількість членів скінченної арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 5, а різниця 1, якщо сума всіх її членів дорівнює сумі нескінченної спадної геометричної прогресії, другий член якої дорівнює $15\frac{3}{7}$, а третій дорівнює $13\frac{11}{49}$.

Розділ VI

ПОВТОРЕННЯ КУРСУ АЛГЕБРИ

1. Числа і дії над ними

589. Обчисліть:

а) $\left(4\cdot 1\frac{3}{4}-3,4\right):1\frac{4}{5}-1,9;$

б) $0,375:\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\right)\cdot 2,5;$

в) $3\frac{7}{8}-1\frac{2}{13}\cdot\left(\frac{9}{10}-\frac{7}{15}\right)+0,25;$

г) $\left(3,125:\frac{1}{8}-4,2\right)+0,25+0,8.$

590. Виконайте дії:

а) $(0,5^2+0,75):1\frac{1}{4}-2;$

б) $(5^0-0,5^3):1\frac{1}{8}+\frac{5}{6};$

в) $\left(\sqrt{1,44}\cdot\frac{5}{6}-\sqrt{1,96}\right)\cdot 0,25;$

г) $\sqrt{245}+\frac{1}{6}\sqrt{58^2-22^2}-30\sqrt{1,8}.$

591. Обчисліть значення виразу:

а) $\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot 0,5^{-2};$ **б)** $9^4\cdot 81^3\cdot\left(3^{-6}\right)^2+9^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2;$

в) $\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{12}\right)^3}+\left|2-2\sqrt{3}\right|;$ **г)** $\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot 4^5+(-0,25)^4\cdot 16^2\cdot\left(2^{-3}\right)^0.$

Знайдіть значення виразів (**592; 593**):

592. **а)** $a^2 - x^2$ при $a = 4{,}5$, $x = 2{,}5$;
б) $4(a - x)^2$ при $a = 5$, $x = 3{,}5$;
в) $3\,(a - x)^3$ при $a = 3{,}2$, $x = 2{,}2$;
г) $2|x + y|$ при $x = -23{,}5$, $y = -11{,}2$.

593. **а)** $2\pi r$ при $r = 5$;
б) $6a^2$ при $a = 4{,}5$;
в) πr^2 при $r = 4$;
г) $2(ab + ac + bc)$ при $a = 4$; $b = 2{,}5$, $c = 1{,}8$;
ґ) $\pi(R^2 - r^2)$ при $R = 7$; $r = 4$;
д) $a^2 - \pi r^2$ при $a = 12$; $r = 3$;
е) $\pi r^2 - a^2$ при $r = 6$; $a = 4$;
є) $\dfrac{(a+b)h}{2}$ при $a = 7$; $b = 5$; $h = 4{,}5$;
ж) $\pi r^2 h$ при $r = 8$; $h = 10$;
з) $4\pi r^2$ при $r = 5$.

594. Яких геометричних фігур стосуються вирази, що розглядаються у завданні № 593?

2. Тотожні перетворення

Спростіть вирази (**595 – 598**):

595. **а)** $\dfrac{a+1}{a-1} - \dfrac{2(a+1)}{3a-3}$;
б) $\dfrac{2a}{b^2 - a^2} + \dfrac{1}{a-b}$;
в) $\dfrac{a+3b}{(a-b)^2} + \dfrac{a-3b}{a^2-b^2}$;
г) $\dfrac{a^2-4a}{a^2+7a} : \dfrac{24-6a}{49-a^2}$.

596. **а)** $\dfrac{2}{a^2-3a} - \dfrac{1}{a^2+3a} - \dfrac{a+1}{a^2-9}$;
б) $\dfrac{2a+1}{a^2+3a} + \dfrac{a+2}{3a-a^2} - \dfrac{1}{a}$;
в) $\dfrac{(a+b)^2-2ab}{4a^2} : \dfrac{a^2+b^2}{ab}$;
г) $\dfrac{a^3-16a}{2a+18} : \dfrac{4-a}{a^2+9a}$.

597. **а)** $\left(4a^{-2}b^{3}\right)^{2}\cdot\left(0,5a^{2}b^{-1}\right)^{3}$;

б) $\left(0,25a^{-3}b^{4}\right)^{-2}\cdot\left(2a^{5}b^{-6}\right)^{-1}$;

в) $\sqrt{50a}+\sqrt{32a}-\sqrt{98a}$;

г) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{a}\right)-\left(\sqrt{a}-\sqrt{2}\right)\sqrt{a}$.

598. **а)** $\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}+1}\cdot\left(a\sqrt{a}-1\right)}+\sqrt{a}$, де $a=0,3$;

б) $\sqrt{\left(1-b\sqrt{b}\right)\cdot\dfrac{1-\sqrt{b}}{b+\sqrt{b}+1}}-\sqrt{b}$, де $b=3$;

в) $\sqrt{b}\cdot\sqrt{\sqrt{b}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{b}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+2}+b$, де $b=0,7$;

г) $\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}-\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{2b}}{b-2}\right)(b-2)}+\sqrt{b}$, де $b=1,7$.

599. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{15a^{2}-10ab}{8b^{2}-12ab}$; **б)** $\dfrac{3-a^{2}}{\sqrt{3}-a}$; **в)** $\dfrac{x^{2}+x-12}{x^{2}+8x+16}$.

600. Винесіть множник з-під знака кореня:

а) $\sqrt{18x^{2}}$, де $x\geq 0$; **б)** $\sqrt{32y^{4}}$, де $y<0$;

в) $\sqrt{162c^{6}}$, де $c<0$.

601. Внесіть множник під знак кореня:

а) $x\sqrt{2}$, де $x\geq 0$; **б)** $y\sqrt{5}$, де $y<0$; **в)** $c\sqrt{7c^{2}}$, де $c<0$.

602. При яких значеннях змінної вираз не має смислу:

а) $\dfrac{x+2}{(x-4)\sqrt{x-1}}$; **б)** $\dfrac{x^{2}-4}{(x-5)\sqrt{2-x}}$;

в) $\dfrac{4}{\sqrt{(x-3)(6-x)}}$?

603. Знайдіть область визначення функції:

а) $\dfrac{x}{(x-3)\sqrt{x-1}}$; **б)** $\dfrac{4-x^2}{(x-4)\sqrt{2-x}}$;

в) $\dfrac{2}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$.

3. Рівняння і системи рівнянь

Розв'яжіть рівняння (**604 – 612**):

604. **а)** $3(x-1)^2-4=2(x-1)^2$; **б)** $(x-5)^2-x(x+3)=12$.

605. **а)** $(x-4)^2=8x+16$; **б)** $(5-x)^2=10x+25$.

606. **а)** $(x+2)^2=(x-1)(x+4)$; **б)** $(x-4)^2=(x-5)(x+2)$.

607. **а)** $x(x-4)(x-2)=0$; **б)** $\dfrac{x^2-4}{x+1}=0$.

608. **а)** $x^2=4x$; **б)** $4x^2-10x=0$.

609. **а)** $3x^2+20x=7$; **б)** $7x+15=2x^2$.

610. **а)** $10x^2=17x+6$; **б)** $8+22x+5x^2=0$.

611. **а)** $\dfrac{14x^2}{16-x^2}+\dfrac{11}{x-4}=-\dfrac{40}{x+4}$; **б)** $\dfrac{1}{x^2-9}+\dfrac{1}{3x-x^2}=\dfrac{3}{2x+6}$.

612. **а)** $\left(\sqrt{x}+2\right)(x^2-36)(x^2+1{,}6)=0$;

б) $(4x^2+7)(x^2+x-12)=0$.

Розв'яжіть системи рівнянь (**613 – 621**):

613. **а)** $\begin{cases}10x+7y=17,\\13x-5y=8;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}3x-39y=10,\\2x-26y=7.\end{cases}$

614. **а)** $\begin{cases}x-2y=1,\\y-x=1;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x+2y-3=0,\\2x+4y+2=0.\end{cases}$

615. **а)** $\begin{cases}x-y=8,\\xy=20;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x-y=8,\\xy=-15.\end{cases}$

616. **а)** $\begin{cases}x^2+xy-y^2=-5,\\x-y=3;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}x-y=3,\\xy+x=1+y.\end{cases}$

617. а) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2xy, \\ x + y = 20. \end{cases}$

618. а) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{1}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

619. а) $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 18, \\ x - y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 10, \\ x + y = 5. \end{cases}$

620. а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$

621. а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$

4. Нерівності

622. Що можна сказати про знаки чисел a і b, якщо:

а) $ab > 0$; б) $\frac{a}{b} > 0$; в) $ab < 0$; г) $\frac{a}{b} < 0$?

623. Випишіть у порядку зростання всі трицифрові числа, що містять цифри 0; 3; 7, і поставте між ними знаки нерівності.

624. При одноразовому вимірюванні деякої довжини l виявили, що вона більша від 217 см, але менша від 218 см. Запишіть результат вимірювання, вважаючи ці числа межами значення довжини l.

625. При зважуванні предмета виявилося, що він важчий від 21,5 г, але легший від 22,0 г. Запишіть результат зважування, визначивши межі значення маси.

626. Яке число, кратне 9, лежить між числами 172 і 190?

627. Визначте, яке з двох чисел більше, коли відомо, що кожне з них більше від 103 і менше від 115, причому перше число кратне 13, а друге — кратне 9.

628. Куплено 6 книг з математики, фізики та історії України. Скільки куплено книг з кожного предмета, якщо книг з математики куплено більше, ніж з історії, а з фізики — менше, ніж з історії?

629. На уроці алгебри було перевірено знання трьох учнів. Яку оцінку одержав кожен учень, коли відомо, що перший з них одержав вищий бал, ніж другий, а другий — вищий, ніж третій, і число балів, одержаних кожним учнем, відповідає достатньому рівню знань?

630. При зважуванні вантажу виявилося, що $P = 18{,}7\ (\pm 0{,}3\%)$ (кг). Знайдіть межі маси P.

631. Вимірюючи на карті відстань між двома містами, виявили, що вона більша від 18,6 см, але менша від 19,1 см. Знайдіть справжню відстань між містами, абсолютну і відносну похибки обчислення, якщо масштаб карти $1 : 2\,000\,000$.

632. Чи рівносильні нерівності:

а) $4x + 7 > 0$ і $4x > -7$;

б) $-5x + 9 < 0$ і $5x - 9 > 0$;

в) $\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{2} < 1$ і $3(x - 1) + 2(x + 1) < 6$;

г) $(x + 2)(x^2 + 1) > 0$ і $x + 2 > 0$?

633. Побудуйте графік функції:

а) $y = x + 2$; **б)** $y = 0{,}5x + 1$; **в)** $y = -2x + 1$.

Визначте за графіком, при яких значеннях аргументу x кожна з цих функцій набуває: **а)** додатних значень; **б)** від'ємних значень; **в)** нульового значення.

Перевірте відповіді, розв'язавши відповідні нерівності.

634. Розв'яжіть нерівність:

а) $3 - 2x > 12 - 5x$; **б)** $7(1 + x) > 2x - 3$;

в) $4x - \frac{x-1}{2} < 3{,}5(x+1)$; **г)** $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 0{,}1 + \frac{x}{6}$.

635. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} 2x+1>3x+4, \\ 5x+3\ge 8x+21; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 5x-2\ge 2x+1, \\ 2x+3<18-3x. \end{cases}$

636. Знайдіть суму цілих розв'язків системи:

а) $\begin{cases} 2(3x-4)<3(4x-3)+16, \\ 4(1+x)\le 3x+5; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x>2-\dfrac{2x-13}{11}, \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{2}{3}(x-7)<\dfrac{3x-20}{9}. \end{cases}$

Розв'яжіть нерівності (**637 – 642**):

637. **а)** $(x+3)(x-5)<0$; **б)** $x(5-x)\ge 0$.

638. **а)** $(x-3)(x-5)(x^2+1)\ge 0$; **б)** $(x^2+3)(x-2)(4+x)<0$.

639. **а)** $x^2-2x-8\ge 0$; **б)** $x(x+5)\ge 4x$.

640 **а)** $2(x+2)^2-3{,}5\ge 2x$; **б)** $x>\dfrac{x^2}{2}-4x+4\dfrac{1}{2}$.

641. **а)** $\dfrac{x^2+2}{x^2-x-6}<0$; **б)** $\dfrac{x^2-8x+15}{5+x^2}\ge 0$.

642. **а)** $\dfrac{x^2-3x-10}{|x|+4}\le 0$; **б)** $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-16x+65}>0$.

5. Функції

Побудуйте графіки функцій (**643 – 645**):

643. **а)** $y=2x$; **б)** $y=2x-1$; **в)** $y=-2x+1$.

644. **а)** $y=\dfrac{2}{x}$; **б)** $y=-\dfrac{2}{x}$; **в)** $y=-\dfrac{4}{x}$;

г) $y=\dfrac{4}{x}$; **ґ)** $y=\dfrac{4}{|x|}$; **д)** $y=\dfrac{4}{x}+2$.

645. **а)** $y=x^2$; **б)** $y=x^2+3$; **в)** $y=(x-2)^2$;

г) $y=(x-2)^2+3$; **ґ)** $y=x^2-2x+3$.

646. У таблиці подані відомості, що характеризують різні ситуації на товарному ринку.

Ціна, грн. (x)	Обсяг попиту, тис. штук на місяць (y)	Обсяг пропозиції, тис. штук на місяць (y)
7	35	5
7,5	32,5	7,5
8	30	10
8,5	27,5	12,5
9	25	15

Використовуючи дані таблиці:

а) встановіть залежність між ціною і попитом на товар;

б) встановіть залежність між ціною і пропозицією товару;

в) зобразіть на координатній площині точки, координатами яких є ціна і попит на товар;

г) зобразіть на координатній площині точки, координатами яких є ціна і пропозиція товару;

ґ) задайте функцію формулою, яка виражає залежність попиту на товар від його ціни;

д) задайте функцію формулою, яка виражає залежність пропозиції товару від його ціни;

е) визначте, при якій ціні попит на товар дорівнює його пропозиції;

є) визначте обсяг дефіциту товару, ціна якого дорівнює 8 грн.;

ж) визначте розмір надлишку товару, який утвориться, якщо його ціна дорівнюватиме 11 грн.

647. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

а) $y = x^2 - 4x + 4$ і $y = -x^2 + 4x - 4$ при $0 \le x \le 4$;

б) $y = x^2$ і $y = 8 - x^2$ при $|x| \le 2$;

в) $y = \dfrac{8}{|x|}$ при $|x| \le 8$, $y = 8$ при $|x| \le 1$;

г) $y = \dfrac{1}{16}(x-4)^2$, $y = \dfrac{1}{16}(x-4)^2 + 1$, $y = \dfrac{1}{16}(x-4)^2 + 2$ при $0 \le x \le 8$.

648. Побудуйте графік функції:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; **б)** $f(x) = -x^2 + 6x + 5$.

— Знайдіть координати вершини параболи.

— У яких точках вісь x перетинається з графіком функції?

— У яких точках вісь y перетинається з графіком функції?

— Знайдіть область визначення функції.

— Знайдіть область значень функції.

— Знайдіть проміжки зростання і спадання функції.

— Знайдіть найменше і найбільше значення функції.

649. При якому значенні x квадратний тричлен набуває найменшого чи найбільшого значень? Знайдіть ці значення.

а) $2x^2 - 4x$; **б)** $x^2 + x - 9$;

в) $x^2 - 4x - 5$; **г)** $-x^2 + 4x - 1$.

650. Яких значень може набувати кожен з квадратних тричленів:

а) $x^2 - 3 + 4x$; **б)** $x^2 - 6x + 11$; **в)** $4 - x^2 + 2x$;

г) $2x^2 - 6x + 7{,}5$; **ґ)** $1 - x^2 - 6x$; **д)** $1 - x^2 + 6x$?

651. Побудуйте графік функції:

а) $y = \dfrac{(x-4)(x+3)}{x-4}$; **б)** $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x-3}$;

в) $y = \dfrac{x^2 - 4x}{4 - x}$; **г)** $y = \dfrac{x^2 - 4}{2 + x}$.

652. Побудуйте графік функції:

а) $y = (4 - x)x$; **б)** $y = -x(x - 4)$; **в)** $y = (x - 4)^2$.

— Знайдіть спільні точки графіка функції з осями координат.

— Знайдіть три точки, що належать графіку функції, в яких $x < 4$, $y > 0$.

Побудуйте графіки функцій і знайдіть область визначення і область значень кожної з них (**653 – 655**):

653. **а)** $y = (x - 4)^2 + 1$; **б)** $y = 4 - (x - 4)^2$;

в) $y = x^2 - 8x + 17$; **г)** $y = x^2 - 8x + 15$.

654. **а)** $y = \dfrac{4}{x}$; **б)** $y = -\dfrac{2}{x}$; **в)** $y = \dfrac{4}{x-2}$.

655. **а)** $y = |x - 2|$; **б)** $y = |x| + 1$; **в)** $y = 2|x| - 1$;
г) $y = 2 - |x|$; **ґ)** $y = \frac{4}{|x| + 2}$; **д)** $y = \frac{4}{|x| - 2}$.

656. Знайдіть область визначення і область значень функції:
а) $y = \frac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 2x - 8}$; **б)** $y = \frac{\sqrt{x - 2}}{x^2 - 6x - 5}$;
в) $y = \frac{\sqrt{-x}}{6 - 2x - x^2}$.

657. Економісти промислового підприємства встановили, що витрати на виготовлення x виробів виражаються формулою: $y = 0{,}1x^2 - 4x + 65$.
Знайдіть:
а) при якій кількості виготовлених виробів підприємство матиме найменші витрати;
б) приріст витрат, коли кількість виробів зросте з 30 до 40 одиниць;
в) середні витрати на виготовлення одного виробу, коли їх кількість зросте з 30 до 40 одиниць.

658. Який серед прямокутників з периметром 80 см матиме найбільшу площу?

659. Який серед прямокутних трикутників, сума катетів кожного з яких дорівнює 20 см, матиме найбільшу площу?

660. Ділянку прямокутної форми, що межує з річкою, потрібно обгородити з трьох боків парканом завдовжки 120 м. Яку довжину і ширину повинна мати ділянка, щоб її площа була якомога більшою?

661. Який серед прямокутників з площею 144 см^2 матиме найменший периметр?

6. Послідовності

662. Загальний член числової послідовності визначається формулою:

$$x_n = \frac{n-1}{n}.$$

а) Знайдіть п'ять перших членів цієї послідовності.

б) Покажіть, що послідовність (x_n) зростає, але значення її членів менші від 1.

в) Знайдіть, при яких значеннях n $|1 - x_n| < 0{,}01$.

663. Загальний член послідовності визначається формулою:

$$x_n = \frac{4n}{2n-1}.$$

а) Знайдіть п'ять перших членів цієї послідовності.

б) Позначте на числовій осі точки, абсциси яких дорівнюють значенням знайдених членів послідовності.

в) Покажіть, що послідовність x_n спадає, але будь-який її член більший від 2.

664. Покажіть, що числова послідовність є арифметичною прогресією:

а) $a_n = 4n + 3$; **б)** $a_n = \frac{3n+2}{5}$; **в)** $a_n = \frac{5n+1}{3}$.

665. В арифметичній прогресії пропущено члени з парними номерами. Чи утворюють інші члени прогресію?

666. Арифметична прогресія має 8 членів. Сума членів, що мають парні номери, дорівнює 28, а сума членів прогресії з непарними номерами дорівнює 16. Знайдіть усі члени прогресії.

667. Покажіть, що послідовність, загальний член якої задано нижче, є геометричною прогресією:

а) $b_n = 3 \cdot 2^n$; **б)** $b_n = \frac{2}{3} \cdot 3^n$; **в)** $b_n = \frac{3}{2^n}$.

668. Між числами 8 і 128 помістіть три числа, щоб утворилася геометрична прогресія.

669. Подайте чистий періодичний дріб у вигляді суми нескінченної спадної геометричної прогресії і знайдіть цю суму:

а) 0,(2); **б)** 0,(21); **в)** 0,(27); **г)** 2,(342).

670. Подайте мішаний періодичний дріб у вигляді суми нескінченної спадної геометричної прогресії і обчисліть цю суму:

а) 0,2(3); **б)** 1,0(7); **в)** 2,3(24); **г)** 2,3(124).

7. Задачі

671. Ощадний банк виплачує 16% річних (складні відсотки). Який прибуток отримає вкладник через 2 роки, якщо початкова сума його вкладу становить 4000 грн.?

672. Банк виплачує 20% річних (складні відсотки). Скільки грошей матиме вкладник через 2 роки, якщо початкова сума його вкладу становить 5000 грн.?

673. Скільки складних відсотків повинен виплачувати банк, щоб через 2 роки вкладені 2000 грн. зросли до 2832,2 грн.?

674. Скільки складних відсотків повинен виплачувати банк, щоб вкладені 3000 грн. через 2 роки зросли до 4177,2 грн.?

675. Бригада за декілька днів мала виготовити 1200 деталей. Якби бригада працювала на 6 днів більше, то виготовляла б щодня на 10 деталей менше. Скільки деталей виготовляла бригада щодня?

676. Господарство обробило 300 га землі. Якби воно мало на 3 трактори більше, то закінчило б роботу на 6 днів раніше. Скільки тракторів було у господарстві, якщо один трактор обробляв 15 га землі за день?

677. У чемпіонаті району з футболу зіграно 20 матчів, причому кожна команда двічі зіграла з кожним із суперників. Скільки команд брало участь у першості?

678. Чи можливий такий опуклий многокутник, у якого число всіх діагоналей дорівнює 20?

679. В якому многокутнику кількість сторін дорівнює кількості діагоналей?

680. Два робітники спільно можуть виконати роботу за 2 год 55 хв. Перший з них може виконати її самостійно на 2 год швидше від другого. За який час кожен робітник, працюючи окремо, може виконати усю роботу?

681. Периметр прямокутника дорівнює 85 см, а його діагональ — 32,5 см. Знайдіть довжину сторін прямокутника.

682. З прямокутного листа жерсті завширшки l треба вигнути жолоб з якомога більшою площею прямокутного перерізу (рис. 96). Визначте висоту бортів жолоба.

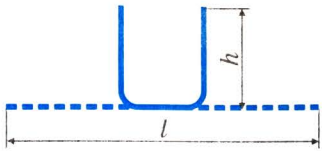


Рис. 96

683. У партії з 1000 деталей є 650 деталей першого сорту, 280 — другого сорту, а решта — браковані. Яка імовірність того, що навмання вибрана деталь не буде бракованою?

684. У гаманці є 6 монет по 25 копійок і 4 монети по 10 копійок. Яка імовірність того, що навмання вийнята монета матиме вартість: **а)** 25 копійок; **б)** 10 копійок?

685. Три токарі протягом семигодинного робочого дня виготовляли деталі. Перший токар виготовляв одну деталь за 36 хв, другий — за 42 хв і третій — за 30 хв. Складіть таблицю статистичного розподілу. Знайдіть, скільки часу в середньому затрачалося на виготовлення однієї деталі.

686. Опитавши 30 чоловік про розмір їхнього взуття, отримали такі дані: 39, 41, 29, 40, 40, 41, 39, 42, 41, 39, 43, 39, 41, 42, 40, 41, 39, 40, 40, 41, 41, 42, 40, 39, 40, 41, 39, 41, 40, 42. Складіть статистичний та варіаційний ряди. Зведені дані подайте у вигляді статистичної таблиці. Визначте попит на чоловіче взуття у відсотках.

8. Задачі підвищеної складності

687. Яке найбільше значення має вираз $|x-1|-|x-2|-|x|$?

688. Чи може вираз: **а)** $\frac{6}{2+|x|}$; **б)** $\frac{15}{2+|x|}$ набувати значень, більших від числа 3?

689. Розв'яжіть рівняння графічним способом:

а) $|x|=2x-3$; **б)** $|x-1|=2x-3$.

690. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases}|x-2|+|y-3|=1,\\ y=3+|x-2|.\end{cases}$

691. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases}x+2y-6=0,\\ |x-3|-y=0.\end{cases}$

Наведіть геометричне пояснення.

692. Розв'яжіть нерівності:

а) $|2x-5|-|3x-10|>0$; **б)** $|x|+|x-2|<4$.

693. Доведіть нерівність:

а) $a^3+b^3+c^3>3abc$, де $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$;

б) $\frac{x^2}{a}+\frac{a^2}{x}\ge a+x$, якщо $a>0$, $x>0$;

в) $x^3+y^3\ge xy(x+y)$, якщо $x>0$, $y>0$.

694. Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

а) $\begin{cases}1-\frac{3x-88}{7}>5x,\\ 4x+5-\frac{1}{6}(25x+29{,}5)<0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\frac{3x^2-2x+1}{x^2-3x-18}<0,\\ \frac{3x-7}{2}>-2.\end{cases}$

695. Знайдіть область визначення функції:

а) $y=\sqrt{\frac{3-x}{2x+5}}$; **б)** $y=\sqrt{\frac{x}{x-5}+1}$.

696. При яких значеннях k прямі $2x + 3y = k$ і $x + y = 6$ перетинаються в точці, координати якої є додатними числами?

697. Знайдіть значення x, кратні 5, які задовольняють систему нерівностей:

а) $\begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3x - 459}{1 + x^2} > 1, \\ x^2 - 31x + 30 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3x^2 - 3x - 3}{x^2 - 1} \le 1, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0. \end{cases}$

698. Розв'яжіть нерівність:

а) $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 3} < 0;$ б) $\dfrac{2x^2 - 3|x| + 3}{x^2 + 1} \ge 1.$

699. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1} = 5 - x$ графічним способом.

700. Дорога від A до B має спуск, а потім від B до C — підйом, причому кутове значення крутосхилу на обох ділянках шляху однакове. Машина йде на спусках зі швидкістю 40 км/год, а на підйомах — 30 км/год. Шлях від A до C вона подолала за 6 год, а назад — за t год. Знайдіть відстань від A до B та від B до C і покажіть, при яких значеннях t задача має додатний розв'язок.

701. Числа $5x - y$, $2x + y$, $x + 2y$ утворюють арифметичну прогресію, а $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ — геометричну прогресію. Знайдіть x і y.

702. У двоцифровому числі цифра десятків на 3 більша від цифри одиниць. Знайдіть це число, коли відомо, що воно більше від 35 і менше від 74.

703. Вартість експлуатації катера, швидкість якого υ км/год, становить $(90 + 0{,}4\upsilon^2)$ грн. за годину. Якою має бути швидкість катера, щоб вартість подолання одного кілометра шляху була найменшою?

704. Вантаж із 14 однакових ящиків і однієї бочки має масу 658 кг. Визначте масу ящика і масу бочки, якщо маса бочки на 4% менша від маси 5 ящиків.

705. Вершина параболи $y = ax^2 + bx + c$ має координати $x_0 = 4$, $y_0 = -1$. Одна з гілок параболи проходить через точку з координатами (0; 15). Знайдіть рівняння параболи.

706. У дерев'яному бруску, що має квадратну основу зі стороною $a = 10$ см і висоту $h = 6$ см, треба зробити квадратний виріз (рис. 97). Якою має бути сторона основи цього вирізу, аби площа поверхні решти бруска була якомога більшою?

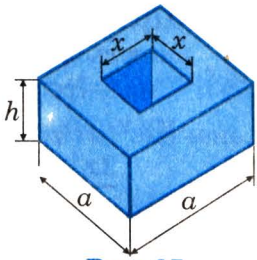


Рис. 97

Відповіді та вказівки

Розділ I

10. 11. **11.** 13. **64.** **а)** $(-\infty; 1{,}4]$; **в)** $(-1{,}44; +\infty)$. **65.** **а)** $\left(1\frac{5}{6}; +\infty\right)$; **б)** $(-1{,}2; +\infty)$. **66.** **а)** $[-0{,}5; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 3)$; **в)** $(-5; +\infty)$; **г)** $(1; +\infty)$. **67.** *Вказівка.* **а)** $[-1; +\infty)$; **б)** $(0; +\infty)$; **в)** $[1; +\infty)$; **г)** $[1; +\infty)$; **ґ)** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$; **д)** $\left(\frac{6}{7}; +\infty\right)$. **68.** **в)** $(-\infty; 7{,}5)$. **69.** **в)** $(-\infty; 0{,}6]$; **д)** $(-\infty; +\infty)$. **70.** **а)** $(-\infty; 4)$; **в)** $(-2; +\infty)$; **г)** $(-\infty; 0{,}4)$. **73.** Не менше 28 га. **74.** 35. **79.** **а)** –3; б) 9; **в)** 5; **г)** 34. **84.** **а)** $(0; 2)$; **б)** $(0; 15)$; **в)** $\left(0; \frac{1}{6}\right)$. **85.** **а)** 110; **б)** 120; **в)** 2. **86.** **а)** $(0; 2]$. **89.** Швидкість більша від 49 км/год, але менша від 50 км/год. **90.** Менше 3,2 л і більше 2 л. **91.** Не менше $\frac{2}{3}$ кг і не більше 2,8 кг. **92.** Не більше 30 км і не менше 20 км. **93.** Не більше 50 кг і не менше 25 кг. **94.** **а)** Чекати таксі; **б)** краще йти пішки. **95.** Не менше $\frac{2}{3}$ т і не більше 2 т. **99.** **а)** $(1; 5)$; б) $(-\infty; 1)$ або $(7; +\infty)$. **100.** **а)** $(-4; -1)$; **б)** $\left[-1; 3\frac{2}{7}\right]$. **102.** а) 27; **в)** 3. **103.** **а)** 24; **б)** 60. **104.** **а)** 1; **б)** 3. **105.** **а)** $x \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; **б)** $x \in (-\infty, -2)$. **132.** **б)** $13{,}6 < p < 14$. **133.** **а)** $-22 < 4m - 5n < -13$. **139.** **в)** $(-5; +\infty)$. **140.** **г)** $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$. **144.** **а)** $(-\infty; -6)$. **149.** **а)** *Вказівка.* $|5x - 1| < 2$. **150.** **г)** $(-\infty; 1{,}5]$. **157.** **в)** 49 км/год $< v <$ 50 км/год. **158.** **г)** Не менше 8 л, але не більше 24 л.

Розділ II

161. –0,25; –2. **201.** **а)** $f(3) = 0$; **б)** $y_{\text{найм.}} = 0$ при $x = 3$. **202.** **а)** $y_{\text{найм.}} = -4$ при $x = -2$. **203.** **а)** $y_{\text{найб.}} = 4$ при $x = 0$. **204.** **а)** $a = 1$; $b = 0$; **б)** $a = 2{,}5$; $b = 0{,}5$. **205.** $y = -0{,}5x^2 + 4x - 5$. **206.** $y = -\frac{1}{18}x^2 + \frac{4}{3}x$ при $0 \le x \le 24$. **208.** **в)** *Вказівка.*

$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\frac{1}{4}\geq -2\frac{1}{4}$. **209. в)** $y_{\text{найб.}}=5$ при $x=-3$. **210. а)** $y_{\text{найм.}}=0{,}5$ при $x=-1$. **211. г)** $y_{\text{найм.}}=0$ при $x=-2$. **212. б)** $y_{\text{найб.}}=12$ при $x=-2$. **213. б)** $y_{\text{найм.}}=-1$ при $x=1$. **214.** $y_{\text{найб.}}=625$ при $x=25$. **216.** 7,5 + 7,5. **217.** $x=y=5$. *Вказівка.* $x^3+y^3=10(x^2-xy+y^2)$, $x+y=10$. **218.** 6 м × 6 м. **219.** 10 м × 5 м. **220.** *Вказівка.* $S=x(22-x)=-(x-11)^2+121\leq 121$. **222.** $x=y=5$. $(x+y)_{\text{найм.}}=10$. **223.** Ні. *Вказівка.* Див. № 221. **224.** $(xy)_{\text{найм.}}=50$ при $x=5$, $y=10$. **254. б)** (–0,5; 20,25). **255.** $a=-2$. **256.** $b=\pm 7$. **257.** $c=2$. **258.** $n=4$. **259. а)** $p=-7$, $q=-12$. **260. а)** $a=2$. **263. б)** 12 см × 12 см.

Розділ III

267. е) $(-\infty;\ 3)\cup(4;\ +\infty)$; **є)** розв'язків немає. **270.** Ширина прямокутника повинна бути менша від 8 м. **272. а)** $(-\infty;\ -5)\cup(2;\ +\infty)$; **д)** [–0,5; 1,5]. **274. д)** [–4; 15]; **е)** $(-\infty;\ -5]\cup[9;\ +\infty)$. **275. е)** $(-2;\ -0{,}5)\cup(0{,}5;\ 2)$; **є)** ±0,5. **276. е)** $(-\infty;\ -10)\cup\left(3\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; **є)** $(-\infty;\ 1{,}5)\cup(2;\ +\infty)$. **277. а)** –1; **б)** 7; **в)** 7; **г)** 9. **278. а)** 2 і 4. **279. г)** 210. **280. г)** *Вказівка.* $(2x-1)^2+2\geq 2$. **281.** (4; 6). **282.** (–2; 6). **283. ж)** [3; 4]; **з)** $(-\infty;\ 3)$. **284. ґ)** $(-\infty;\ -1)\cup(0{,}8;\ 3)$. **286. д)** $(-\infty;\ 1)\cup(2;\ 3)$. **292. в)** $\left(2\sqrt{2};\ -2\sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right)$; **ґ)** (6; –8), (–8; 6). **293. ґ)** (5,25; 3,25). **294. б)** (3; 2), (–3; –2); **г)** розв'язків немає. **295. а)** (2; 1,2), (–1,2; –2); **д)** (8; 6), (–8; –6). **296. д)** (1; 5), (5; 1), (2; 3), (3; 2). **297. б)** (5; 2), (2; 5), (–5; –2), (–2; –5). **298. а)** (2; 5), $\left(11\frac{2}{3};\ -4\frac{2}{3}\right)$; **в)** (0; 1), (3; –2); **ґ)** (±2; ±1). **299. а)** (2; 3), (–2; –3); **в)** (1; –2), (–1; 2). **300. а)** (±4; ±2); **б)** $\left(\pm\frac{1}{2};\ \mp\frac{1}{2}\right)$, (∓2; ±1). *Вказівка.* Додайте почленно рівняння системи, щоб отримати однорідне рівняння; **в)** $\left(\pm 3\sqrt{2};\pm 2\sqrt{2}\right)$, (4; 3), (–4; –3); **г)** (±2; ±1), $\left(\mp\frac{4}{\sqrt{7}};\ \pm\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$. *Вказівка.* Поділіть почленно рівняння системи, щоб отримати однорідне рівняння. **301. а)** (–2; –3), (–0,5; –1,5); **б)** (12; –7), (3; 2); **в)** (–1,2; –0,8), (3; 2); **г)** (±2; 3), (±3; 2). **303. а)** 8 і 12, 12 і 8; **б)** 80 м × 20 м; **в)** 13 м × 8 м або 26 м × 4 м. **304. а)** 18 і 12, –12 і –18; **б)** 18 м × 12 м. **305. а)** 8 см і 6 см; **б)** 15 см, 20 см. **306.** (24; 18). **307.** (15; 6). **308.** 15 см, 8 см. **309.** 40 см, 9 см. **310. а)** 15 см, 12 см, 9 см; **б)** 20 см, 21 см, 29 см. **311.** 35 м × 24 м. **312.** 20 м × 15 м. **315.** 48 і 24. **316.** 36. **317.** 10 год; 15 год. **318.** 8 ст.; 10 ст. **319.** 40 см, 40 см і 60 см або 42 см, 42 см і 56 см. **320.** 36 км/год, 48 км/год. **321. а)** 12 км/год, 15 км/год; **б)** 60 км/год, 75 км/год. **322.** 60 км/год, 80 км/год. **323.** 60 км/год. **324.** 30 год і 45 год. **326. а)** $(-\infty;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$. **327. г)** Розв'язків

немає. **328. г)** Розв'язків немає. **329. г)** $(-\infty; +\infty)$. **330. г)** $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (0,9; +\infty)$.

331. г) Розв'язків немає. **332. г)** $(-\infty; -8,5) \cup (1; +\infty)$. **333. б)** $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$. **334. г)** $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$. **335. г)** $[0; 2,5]$. **336. г)** $(-\infty; +\infty)$. **337. г)** $[-5; 0) \cup (0; 1]$.

338. г) $[-5; 0] \cup [5; +\infty)$. **339. г)** $(-\infty; -\sqrt{7}) \cup (-\sqrt{5}; -2)$. **340. г)** $(-\infty; -1,5) \cup (1,5; 2)$. **341. г)** $(-\infty; 0) \cup (0; 0,25)$. **342. г)** $[-1; 0] \cup [1; +\infty)$. **343. г)** $[1; +\infty)$. **344. г)** $(-\infty; -0,5] \cup$ $\cup [0; 0,5] \cup [1; +\infty)$. **345. г)** $(-\infty; -1,5] \cup [1,5; +\infty)$. **346. а)** $x \in (41; 42)$, $y \in (0; 1)$ або $x \in (0; 1)$, $y \in (41; 42)$. **347. д)** $(1; -2)$, $(2; -1)$. **348. б)** $(2; 1)$. **349. д)** $(3; 0)$, $(1; -2)$.

350. д) $(4; 0)$, $\left(-\frac{2}{3}; -4\frac{2}{3}\right)$. **352. а)** $b = 9,5$, $b = -13$; **б)** $b = 1$, $b = 7$; **в)** $c = 2$; **г)** $c = 1$, $c = 8$. **353. а)** 5 і 3; **б)** 2 і 5; –2 і –5; **в)** 3 см і 4 см; **г)** 4 см і 3 см. **354. а)** 3 і 4; **б)** (10; 6), (–10; –6); **в)** 10 см × 4 см; **г)** 10 год і 15 год. **355. а)** 25 і 9; **б)** 15 см і 6 см; **в)** 60 км/год і 40 км/год; **г)** 24 год і 16 год. **356. а)** 32; **б)** 2 дм × 4 дм; **в)** 60 км/год і 120 км/год; **г)** 7 Н і 24 Н.

Розділ IV

357. а) 25 м × 15 м; **б)** 20 м × 20 м; **в)** 35 с і 5 с; 20 с. **358.** 60 м × 40 м. **359.** 20 автомашин. **360.** 75 км/год. **361.** 21 дм або 15 дм. **362. а)** 24 см × 8 см або 6 см × 32 см; **б)** 20 м × 15 м; **в)** прямокутника площею 324 см² вирізати не можна. **367.** ≈15,9 т. **368.** 126 грн. **369.** 2006 грн., 2367,08 грн. **370.** 6077,75 грн., 7045 грн. **372.** Через 2 роки. **373. а)** 300 грн. **374. а)** 1000 грн.; **б)** 2600 грн.; **в)** 2900 грн.; **г)** 250 грн. **375.** 21630 грн. **376.** 4000 грн. **377. а)** 64 грн., 65,95 грн.; **б)** 864 грн., 865,95 грн. **378.** 1132,08 грн. **379.** 2202,79 грн. **380.** 6239,47 грн., 6426,65 грн. **381.** 20%. **382.** 20%. **383.** 5000 грн. **393.** 0,81. **398.** 0,9. **399.** 0,75. **400.** 0,6. **410.** 2,74 кг. **411.** 62,5 м². **412.** ≈ 63, 85 м². **414.** 1790 грн. **415.** 3,18 т. **416.** ≈ 3,16 т. **417.** ≈ 32,88 ц. **419.** ≈ 17,3 хв. **420.** 17,5 хв. **421.** ≈17,14 хв. **424.** Середнє значення — 11,7. **427. в)** 1,6 кг 10%-го розчину і 2,4 кг 15%-го розчину. **428. б)** 324 грн.; **г)** 10%. **429. б)** 87,5 га; **г)** 34,5%. **430. а)** 5926,18 грн. **431.** 4882,81 грн. **432.** 32210,2 м³. **433.** 199,2 мм. рт. ст.

434. б) 0,2; **г)** 0,1. **435. б)** $\frac{11}{35}$. **436.** $\frac{1}{8}$. **437.** 0,6. **438.** 0,8. **439.** 0,65. **440.** 3,8%.

Розділ V

455. в) 10^n. **456. в)** $y_{\text{найб.}} = 41$ при $n = 4$ або $n = 5$. *Вказівка.* $y_n = -\left(n - \frac{9}{2}\right)^2 + 41\frac{1}{4}$.

457. г) $y_{\text{найм.}} = -1$ при $n = 3$ або $n = 4$. **462. б)** При $n \geq 40$. **472.** 115 см. **474.** $a_{10} = 37$, $a_{20} = 77$, $a_{100} = 397$. **475. г)** $a_n = 0,25n$. **481.** $a_{10} = 14,5$. **482.** 20 років. **483.** $A_4C_4 = 10$; $A_8C_8 = 20$. **484. а)** $a_2 = 150$ мм; $a_3 = 175$ мм; $a_4 = 200$ мм; $a_5 = 225$ мм. **485.** $a_1 = 7$, $d = 4$. **486.** 5, 9, 13, 17, 21. **487.** $n = 12$. **488.** 2; 5; 8; 11 і –11; –8; –5; –2. **489.** $a_1 = 3$, $d = 2$ і $a_1 = 11$, $d = -2$. **494.** 810. **495.** 1140. **496.** 4410 м. **497.** 705,6 м. **498.** 156.

501. 60°. **502.** 78. **504.** $a_1 = 1$, $S_{10} = 145$. **505.** 120. **506.** 31 с, ≈4742 м. **508.** 31. **509.** 4 год. **510. а)** 29. **511.** 11. **513.** 12. **519. а)** $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. **520. в)** $b_n = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$. **522. г)** $\sqrt{5}$. **523. г)** $-\frac{1}{3}$. **528.** $b_1 = 8$, $q = 2$. **529.** 7; 14; 28; 56. **532. г)** $0{,}5 \cdot (3^{-6} - 3^2)$. **535.** 1022. **538.** 364. **540.** $170\frac{5}{8}$; $102\frac{3}{8}$. **541.** 8. **542.** 27. **543.** $4 - 2\sqrt{3}$. **545. б)** 1. **548.** 32 кв. од. **549.** $a(\sqrt{2}+1)$. **550. в)** $\frac{233}{990}$; **г)** $\frac{35}{99}$. **555. б)** 3; 6; 12; 24; 48. **559. б)** $y_{\text{найм.}} = -4$ при $n = 6$; **в)** $y_{\text{найб.}} = 41$ при $n = 5$. **560. г)** $x_n = -2 \cdot (-2{,}5)^{n-1}$. **561. г)** $n > 2998$. **566. в)** $-0{,}46$; **г)** $n = 6$. **568. а)** $n > 30$. **570. в)** $a_1 = 127$; $d = -4{,}8$ і $a_1 = -65$, $d = 4{,}8$; **г)** $a_1 = -2$, $d = -3$ і $a_1 = 122$, $d = -3$. **571.** 14. **576. а)** 3; 9; 27 і –3; 9; –27; **б)** 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ і –1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$. **577. б)** –10. **578.** 1,5. **580. г)** 81; –27; 9; –3; 1. **583. г)** $4\frac{1203}{9900}$. **584.** 1; 3; 5; 7. **585.** 4; 8; 16; 32. **586.** 3; 7; 11. **587.** 2; 4; 6.

Розділ VI

589. а) 0,1; **г)** 21,85. **590. в)** –0,1; **г)** $-7\sqrt{5}$. **591. в)** 1; **г)** 33. **592. в)** 3; **г)** 69,4. **593. г)** 43,4. **595. б)** $-\frac{1}{a+b}$; **г)** $\frac{a-7}{6}$. **596. а)** $-\frac{1}{a}$; **б)** $\frac{10}{9-a^2}$. **597. г)** $\sqrt{2a} - 2$. **598. а)** 1; **б)** –1; **в)** 1; **г)** $\sqrt{2}$. **599. в)** $\frac{x-3}{x+4}$. **603. в)** (2; 4). **611. а)** Розв'язків немає; **б)** 1 і 2. **612. а)** 6 і –6; **б)** 3 і –4. **613. а)** (1; 1); **б)** розв'язків немає. **614. а)** (–3; –2); **б)** розв'язків немає. **615. а)** (–2; –10); (10; 2); **б)** (3; –5); (5; – 3). **616. а)** (1; –2); (–4; –7); **б)** (2; –1); (1; –2). **617. а)** (3; 2); (–10; 15); **б)** $\left(10\sqrt{2};\ 20-10\sqrt{2}\right)$; $\left(-10\sqrt{2};\ 20+10\sqrt{2}\right)$. **618. а)** (2; 3); (3; 2); (–2; –3); (–3; –2); **б)** (2; 3); (3; 2). **619. а)** (4; 1); **б)** (4; 1). **620. а)** (2; 1); (–1; –2); **б)** (2; 1); (1; 2). **621. а)** (3; 1); **б)** (4; 3). **634. в)** x — будь-яке число; **г)** x — будь-яке число. **635. а)** $(-\infty; -6]$; **б)** [1; 3). **636. а)** –2; **б)** 9. **639. а)** $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$. **640. а)** x — будь-яке число; **б)** (1; 9). **641. а)** (–2; 3); **б)** $(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$. **642. а)** [–2; 5]; **б)** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. **646. ґ)** $y = -5x + 70$; **д)** $y = 5x - 30$; **е)** 10 грн.; **є)** 20 тис. штук; **ж)** 10 тис. штук. **650. в)** $y = -(x-1)^2 + 5$, $y_{\text{найб.}} = 5$ при $x = 1$; **г)** $y_{\text{найм.}} = 3$ при $x = 1{,}5$. **657. а)** 20 виробів; **б)** 30; **в)** 3. **658.** 20 см × 20 см. **659.** 10 см × 10 см. **660.** 60 м × 30 м. **661.** 12 см × 12 см. **666.** –5; –2; 1; ... **668.** 16; 32; 64. **671.** 1382,4 грн. **672.** 7200 грн. **673.** 19%. **674.** 18%. **675.** 50 деталей. **676.** 2 трактори. **677.** 5 команд. **678.** *Вказівка.* $\frac{n(n-3)}{2}$. **680.** 5 год; 7 год. **681.** 30 см × 12,5 см.

682. $\frac{l}{4}$. **687.** –1 при $x = 0$ і $x = 2$. **689.** **а)** 3; **б)** 2. **690.** (1,5; 3,5), (2,5; 3,5). **691.** (0; 3), (4; 1). **692.** **а)** (3; 5); **б)** (–1; 3). **694.** **а)** 1 і 2; **б)** 2; 3; 4; 5. **695.** **а)** (–2,5; 3]; **б)** $(-\infty;\ 2{,}5]\cup(5;\ +\infty)$. **696.** $12 < k < 18$. **697.** **а)** 25. **698.** **а)** (1; 6). **699.** 3. **700.** $\frac{240}{7}(2t-9)$ км; $\frac{360}{7}(8-t)$ км; $4{,}5 < t < 8$. **701.** (–2; –4); (0,25; 0,5). **702.** 41; 52; 63. **703.** *Вказівка.* Вартість 1 км шляху: $\frac{90+0{,}4\upsilon^2}{\upsilon} = \frac{90}{\upsilon} + \frac{4\upsilon}{10} = \left(\sqrt{\frac{90}{\upsilon}} - \sqrt{\frac{4\upsilon}{10}}\right)^2 + 12$. **704.** 35 кг; 168 кг. **705.** $a = 1$, $b = -8$, $c = 15$. **706.** *Вказівка.* $S = 440 - 2(x-6)^2 + 72$.

Формули

1. Властивості степенів

Для будь-яких цілих m, n і додатних a та b справедливі рівності:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $\quad a^n : a^m = a^{n-m}$; $\quad \left(a^n\right)^m = a^{nm}$;

$(ab)^n = a^n b^n$; $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;

$a^0 = 1$.

2. Многочлени

Для будь-яких a і b справедливі рівності:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 + 3ab(a \pm b);$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

3. Властивості квадратних коренів

Для будь-якого натурального n та невід'ємних a і b справедливі рівності:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad b \neq 0;$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt{a^{2n}} = |a|^n.$$

4. Квадратне рівняння і квадратний тричлен

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$

де x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння.

5. Прогресії

Арифметична прогресія. Формула загального члена a_n і суми S_n:

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Геометрична прогресія. Формула загального члена b_n і суми S_n:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \qquad S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}.$$

6. Елементи прикладної математики

Формула складних відсотків:

$$A_t = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t,$$

де A_t — нарощений капітал; a_0 — початковий капітал; p — відсоткові гроші; t — час обігу грошей у банку.

Імовірність події A:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

де m — кількість сприятливих випробувань; n — кількість усіх випробувань.

Середнє арифметичне:

$$m=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

Середнє геометричне:

$$g=\sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\ldots\cdot b_n}.$$

Середнє гармонійне:

$$h=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Термінологічний словник

Арифметична прогресія — числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому членові, до якого додають одне й те саме число.

Варіанта — значення ознаки групи об'єктів статистичного ряду.

Варіаційний ряд — послідовність варіант сукупності.

Вибірка — те, що й **вибіркова сукупність.**

Вибіркова сукупність — сукупність об'єктів, відібрана для спостереження.

Вибіркове спостереження — один із видів несуцільного спостереження.

Випадкова подія — подія, яка за певних умов може відбутися або не відбутися

Відносна частота — відношення частоти варіанти до об'єму вибірки.

Відсоткова такса — кількість відсотків, на які змінюється початковий капітал за рік.

Відсоткові гроші — прибуток, одержаний через рік з початкового капіталу.

Вірогідна подія — подія, яка за певних умов обов'язково відбудеться.

Генеральна сукупність — сукупність усіх об'єктів спостереження.

Геометрична прогресія — числова послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а кожний наступний дорівнює попередньому членові, помноженому на одне й те саме число, що не дорівнює нулю.

Дослідження функції — процес встановлення властивостей функції.

Знаки нестрогої нерівності — математичні знаки $\geq$ (більше або дорівнює; не менше ніж) та $\leq$ (менше або дорівнює; не більше ніж).

Знаки строгої нерівності — математичні знаки > (більше) та < (менше).

Знаменник геометричної прогресії — відношення будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, до попереднього члена.

Імовірність події — відношення числа сприятливих для цієї події результатів випробування до числа випробувань.

Квадратична функція — функція, задана формулою $y = ax^2 + bx + c$.

Квадратна нерівність — нерівність, ліва частина якої є квадратний тричлен, а права — нуль.

Лінійна нерівність з однією змінною — нерівність виду $ax + b > 0$.

Математична статистика — розділ математики, який вивчає методи збору, обробки, систематизації та дослідження статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Метод інтервалів — один із способів розв'язування нерівностей.

Нарощений капітал — сума початкового капіталу і відсоткових грошей.

Неможлива подія — подія, яка за певних умов ніколи не відбудеться.

Нерівність — числа і (або) вирази, сполучені математичним знаком > (≥) або < (≤).

Нерівність другого степеня з однією змінною — те саме, що **квадратна нерівність**.

Нерівності однакового смислу — нерівності, утворені за допомогою знаків нерівності одного смислу.

Нерівності протилежного смислу — нерівності, утворені за допомогою знаків нерівності протилежного смислу.

Нестрога нерівність — нерівність, утворена за допомогою математичних знаків ≥ або ≤.

Несумісні події — події, настання однієї з яких унеможливлює настання іншої при тому самому випробуванні.

Несуцільне спостереження — збір даних про окремі об'єкти сукупності.

Об'єднання числових проміжків — числовий проміжок, що містить усі числа даних проміжків, кожне з яких належить принаймні одному з них, і не містить інших чисел.

Об'єм сукупності — кількість об'єктів вибіркової або генеральної сукупності.

Однорідне рівняння — рівняння, всі члени якого мають однаковий степінь.

Переріз числових проміжків — числовий проміжок, який є спільною частиною даних проміжків.

Подвійна нерівність — нерівність виду $a < x < b$.

Початковий капітал — сума грошей, внесена до ощадного банку.

Прикладні задачі — задачі, які породжені практикою і описують певні ситуації, що виникають у житті та різних сферах людської діяльності.

Проміжки знакосталості функції — проміжки, на яких функція набуває лише додатних або лише від'ємних значень.

Проміжок зростання функції — проміжок, у всіх точках якого більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, і навпаки — меншому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Проміжок спадання функції — проміжок, у всіх точках якого більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, і навпаки — меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Прості відсотки — відсотки, що нараховуються лише з початкового капіталу.

Протилежні знаки нерівності — математичні знаки > (більше) і < (менше).

Рівноможливі події — події, які одночасно можуть відбутися при випробуванні, і немає підстав вважати, що настання якої-небудь із них більш можливе, ніж настання інших.

Рівносильні нерівності — нерівності, що мають одну і ту саму множину розв'язків.

Різниця арифметичної прогресії — різниця між будь-яким наступним і попереднім членами прогресії.

Розв'язок лінійної нерівності з однією змінною — значення змінної, при якому дана нерівність перетворюється в правильну числову нерівність.

Складні відсотки — відсотки, що нараховуються з нарощеного капіталу.

Спостереження — збір даних про об'єкти сукупності.

Статистичний ряд — упорядковане певним чином розміщення об'єктів, над якими проводиться спостереження.

Статистичні дані — сукупність чисел, що дають кількісну характеристику ознак певних об'єктів та явищ, які досліджують.

Строга нерівність — нерівність, утворена за допомогою математичних знаків > (більше) та < (менше).

Суцільне спостереження — збір даних про всі об'єкти сукупності.

Теорія імовірностей — розділ математики, що вивчає закономірності у масових випадкових процесах і подіях.

Частота — число, яке показує скільки разів повторювалося кожне значення ознаки сукупності.

Числова пряма — множина всіх дійсних чисел $(-\infty; \infty)$.

Числовий проміжок — частина числової прямої.

Предметний покажчик

Зміст

Розділ II. Квадратична функція

Розділ III. Квадратні нерівності та системи рівнянь другого степеня

Розділ IV. Елементи прикладної математики

Розділ V. Числові послідовності

Розділ VI. Повторення курсу алгебри