Василий Кравчук
Мария Пидручная
Галина Янченко

АЛГЕБРА

класс

9

УДК 371.671
ББК 22.141я721
К 77

Редакторы: *Ярослав Гапюк*, кандидат педагогических наук, доцент
Ярослав Гринчишин, кандидат физико-математических наук, доцент
Сергей Мартынюк, кандидат физико-математических наук, доцент
Литературное редактирование *Оксаны Давыдовой, Маргариты Бильчук*
Обложка *Светланы Демчак*

Ответственные за подготовку учебник к изданию:

Прокопенко Н. С. —	главный специалист Министерства образования и науки Украины
Литвиненко О. А. —	методист высшей категории Института инновационных технологий и содержания образования

Эксперты, проводившие экспертизу рукописей учебников на Всеукраинском конкурсе рукописей учебников:

Горобец И. В. —	заместитель директора лицея «Перспектива», г. Запорожье, учитель-методист
Горбачик О. В. —	учитель Кузнецовской гимназии Ровенской области
Кастранец Л. М. —	методист Чертковского РМК
Бончук Е. Н. —	методист по математике методического кабинета Новоодесской РГА Николаевской области, учитель-методист
Величко И. Г. —	доцент кафедры алгебры и геометрии Запорожского национального университета, кандидат физико-математических наук
Дрозд Ю. А. —	заведующий отделом алгебры Института математики НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор
Глобин А. И. —	старший научный сотрудник лаборатории математического и физического образования АПН Украины, кандидат педагогических наук

Рекомендован Министерством образования и науки Украины (приказ №56 от 02.02.2009 года)

**Издано за счет государственных средств.
Продажа запрещена**

Кравчук Василий, Пидручная Мария, Янченко Галина

К 77 Алгебра: Учебник для 9 класса. — Тернополь: Підручники і посібники, 2009. — 256 с.

ISBN 978-966-07-1540-0

ББК 22.141я721

ISBN 978-966-07-1540-0

© Кравчук В., Пидручная М., Янченко Г., 2009

ЮНЫЕ ДРУЗЬЯ!

Несколько слов об особенностях учебника.

Материал, который вы будете изучать, разделен на четыре параграфа, а параграфы — на пункты.

Каждый пункт начинается изложением теоретического материала. Некоторые пункты содержат дополнительный материал под рубрикой «Для тех, кто хочет знать больше».

Для тех, кто хочет знать больше

Рубрика «Примеры решения упражнений» поможет вам ознакомиться с основными видами упражнений, способами их решения и научит правильно записывать решение.

Примеры решения упражнений

Прочитав теоретический материал и поразмыслив над образцами решения задач, желательно сначала решать устные упражнения и более простые задачи (уровень А), а затем переходить к более сложным (уровень Б). Задачи уровня В — для самых смекалистых, тех, кто хочет уметь и знать больше и получать самые высокие оценки. Для некоторых задач этого уровня приводятся решения.

Уровень А

Уровень Б

Уровень В

Для самостоятельной работы дома рекомендуются задачи, номера которых выделены цветом (например, **182**).

Рубрика «Упражнения для повторения» поможет периодически повторять основные виды упражнений.

Упражнения для повторения

После изучения параграфа вы сможете повторить и систематизировать материал, дав ответы на вопросы и решив задачи в конце параграфа.

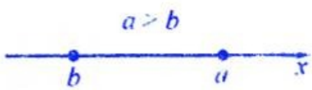
Свои знания можно проверить, решив задания для самопроверки.

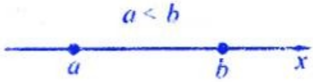
Искренне желаем успеха!

§ 1 НЕРАВЕНСТВА

Существует много задач, при решении которых нужно сравнить некоторые числа или величины, найти значения переменной, удовлетворяющие некоторому неравенству.

В этом параграфе мы выясним свойства числовых неравенств, как доказывать неравенства, что такое неравенство с переменной и система неравенств с переменной, как решать неравенства и их системы.





1. Числовые неравенства

1. Числовые неравенства. Вы знаете, что записи

$$25 > 17; \ \ 0{,}32 > 0{,}2; \ \ \frac{3}{7} > \frac{1}{7}; \ \ -5 > -7$$

являются примерами *числовых неравенств*. Вы научились сравнивать натуральные числа, дроби, рациональные и действительные числа.

Известно, что $25 > 17$. Найдем разность левой и правой частей этого неравенства:

$25 - 17 = 8 > 0$ — разность положительна.

Найдем разность левой и правой частей неравенства $7 < 10$:

$7 - 10 = -3 < 0$ — разность отрицательна.

Из равенства $15 = 15$ имеем:

$15 - 15 = 0$ — разность равна нулю.

Следовательно, существует зависимость между соотношениями «>», «<», «=» и значением разности левой и правой частей соответствующего неравенства (равенства). Эту зависимость выражает определение.

Определение

Число *a больше* числа *b*, если разность $a - b$ — положительное число;
число *a меньше* числа *b*, если разность $a - b$ — отрицательное число;
число *a равно* числу *b*, если разность $a - b$ равна нулю.

Так как разность чисел a и b может быть либо положительной, либо отрицательной, либо равна нулю, то для любых чисел a и b выполняется одно и только одно из трех соотношений: $a > b$, $a < b$ или $a = b$.

Используя данное определение, сравним числа $\frac{3}{7}$ и $\frac{9}{22}$. Для этого найдем их разность:

$$\frac{3}{7} - \frac{9}{22} = \frac{3 \cdot 22 - 7 \cdot 9}{7 \cdot 22} = \frac{3}{7 \cdot 22}.$$

Разность данных чисел — число положительное, поэтому $\frac{3}{7} > \frac{9}{22}$.

Следовательно, для сравнения двух чисел a и b достаточно образовать разность $a - b$ и выяснить, является она положительным числом, отрицательным числом или нулем. Если $a - b > 0$, то $a > b$; если $a - b < 0$, то $a < b$; если $a - b = 0$, то $a = b$.

На координатной прямой большее число изображают точкой, которая лежит правее точки, изображающей меньшее число (см. рис. 1).

Рис. 1

В неравенствах используют знаки: «<» — меньше, «>» — больше, «≤» — меньше или равно (не больше), «≥» — больше или равно (не меньше).

Неравенства, образованные при помощи знаков «<» или «>», называют *строгими* неравенствами, а неравенства, образованные при помощи знаков «≤» или «≥», называют *нестрогими*.

Из определения соотношений «больше», «меньше», «равно» следует, что $a \geq b$, если $a - b \geq 0$; $a \leq b$, если $a - b \leq 0$.

Числовые неравенства могут быть *верными* и *неверными*. Например, $5 < 8$; $1{,}2 \geq -1$ — верные неравенства, $21 > 30$ — неверное неравенство.

2. Доказательство неравенств. Докажем, что при любом значении a справедливо неравенство

$$a(a-4) < (a-2)^2.$$

(Еще говорят: докажем неравенство $a(a-4) < (a-2)^2$.)

Для этого образуем разность левой и правой частей неравенства и преобразуем ее:

$$a(a-4) - (a-2)^2 = a^2 - 4a - a^2 + 4a - 4 = -4.$$

Так как разность $a(a-4) - (a-2)^2$ отрицательна при любом значении a, то неравенство $a(a-4) < (a-2)^2$ справедливо также при любом значении a.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Доказать неравенство $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$, если $a > 0, b > 0$.

• Образуем разность левой и правой частей неравенства и преобразуем ее:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Разность мы представили в виде дроби, числитель которой неотрицателен, так как он является квадратом некоторого числа, а знаменатель положителен как произведение положительных чисел. Поэтому эта дробь, а значит и разность, неотрицательны: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\geq 0$. Следовательно, неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ справедливо при любых положительных числах a и b. •

Если в доказанном неравенстве принять, что $b=1$, то получим верное неравенство:

$$\boldsymbol{a+\frac{1}{a}\geq 2}\textbf{, где } \boldsymbol{a>0}.$$

Итак, *сумма двух положительных взаимно обратных чисел не меньше* 2.

Упражнение 2. Доказать неравенство $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, если $a\geq 0$, $b\geq 0$.

•Образуем разность левой и правой частей неравенства и преобразуем ее:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0.$$

Следовательно, $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$. •

Для положительных чисел a и b число $\sqrt{ab}$ называют их *средним геометрическим* (или *средним пропорциональным*). Неравенство

$$\boldsymbol{\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}}\textbf{, где } \boldsymbol{a\geq 0, b\geq 0},$$

справедливо и при любых положительных числах a и b. Поэтому *среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.*

Упражнение 3. Доказать, что неравенство $10a^2-6a+2ab+b^2+2>0$ справедливо при любых действительных числах a и b.

•$10a^2-6a+2ab+b^2+2=(9a^2-6a+1)+(a^2+2ab+b^2)+1=$

$$=(3a-1)^2+(a+b)^2+1.$$

Так как $(3a-1)^2\geq 0$, $(a+b)^2\geq 0$ при любых действительных числах a и b, то $(3a-1)^2+(a+b)^2+1>0$. •

Примечание. При доказательстве неравенства при помощи определения соотношений «больше», «меньше» или «равно» разность левой и правой части неравенства нужно преобразовать так, чтобы можно было определить знак разности.

Выражение, полученное после преобразований, принимает неотрицательные значения, если оно является, например, суммой, произведением или частным неотрицательных чисел, четной степенью некоторого выражения и т. п.

Выражение принимает отрицательные значения, если оно является суммой отрицательных чисел, произведением или частным чисел разных знаков и т. п.

Устно

1. Сравните с нулем разность левой и правой частей верных неравенств:

а) $m < n$; **б)** $p \geq q$; **в)** $8 > y$; **г)** $k \leq 5$.

2. Известно, что $a > b$. Может ли разность $a - b$ равняться: -5; 0; 2; 0,01?

3. Сравните числа a и b, b и c, a и c, отмеченные точками на координатной прямой (рис. 2).

Рис. 2

Уровень А

4. Сравните числа x и y, если разность $x - y$ равна 8; 0; $-1{,}5$.

5. Сравните числа m и n, если $m - n = -3$; $m - n = 3$.

6. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам p, q и r, если $p < r$, $r < q$.

7. Отметьте на координатной прямой точки, соответствующие числам a, b и c, если $c > b$, $b > a$.

Сравните числа:

8. **а)** $\frac{3}{5}$ и $\frac{15}{26}$; **б)** $\frac{1}{3}$ и 0,4; **в)** $-\frac{11}{13}$ и $-\frac{3}{4}$.

9. **а)** $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{7}$; **б)** $-\frac{7}{11}$ и $-\frac{3}{5}$; **в)** $\frac{1}{3}$ и 0,3.

10. Запишите в порядкс возрастания числа: $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{7}$.

11. Запишите в порядке убывания числа: $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{2}{7}$.

12. Сравните значения выражений $5(a + 2) - 2a$ и $3a - 4$ при $a = -3$; $a = 0{,}1$. Докажите, что при любом значении a значение первого выражения больше соответствующего значения второго выражения.

13. Сравните значения выражений $6(b - 2) + 4b$ и $10b + 1$ при $b = -0{,}1$; $b = 0$. Докажите, что при любом значении b значение первого выражения меньше соответствующего значения второго выражения.

Докажите неравенство:

14. **а)** $2(a-3)+5a<7a+8$; **б)** $(a-4)(a+5)>a^2+a-30$;
в) $(b-5)^2>b(b-10)$; **г)** $a(a+7)<(a+3)(a+4)$.

15. **а)** $12b+8>4b+8(b-0{,}5)$; **б)** $2x^2+13x+3<(2x+5)(x+4)$;
в) $(b-3)(b+3)>b^2-14$.

16. **а)** $a^2+b^2\geq 2ab$; **б)** $a^2+9\geq 6a$;
в) $m(m+n)\geq mn$; **г)** $2y^2-21>(y+5)(y-5)$.

17. **а)** $4+b^2\geq 4b$; **б)** $x(x+2)>2x-3$;
в) $a(a+b)+1>ab$.

Уровень Б

18. Сравните числа:

а) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; **б)** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Докажите неравенство:

19. **а)** $4bc\leq 4b^2+c^2$; **б)** $(2n+1)^2\geq 8n$;
в) $a^2+2a\leq 17a^2+10a+1$; **г)** $b^2+10>6b$;
д) $a^2-4a+b^2+2b+5\geq 0$; **е)** $2x^2-6xy+9y^2-6x+10>0$.

20. **а)** $9x^2-3xy+y^2\geq 3xy$; **б)** $(5-3y)^2\geq 3y(y-2)+1$;
в) $8b(3b-10)<(5b-8)^2$; **г)** $(a+1)^2>4a-1$;
д) $x^2+6x+y^2-2y+10\geq 0$; **е)** $5a^2+4a-2ab+b^2+2>0$.

21. **а)** $\dfrac{3c}{9c^2+1}\leq\dfrac{1}{2}$; **б)** $\dfrac{x^2}{1+x^4}\leq\dfrac{1}{2}$.

22. Определите знак числа x, если известно, что:
а) $8x<3x$; **б)** $7x>4x$; **в)** $2x<-3x$; **г)** $-10x>-2x$.

Уровень В

Докажите неравенство:

23. **а)** $a^2+b^2+2\geq 2(a+b)$; **б)** $a^2+b^2\geq ab$;
в) $2a^2+b^2+1\geq 2ab+2a$; **г)** $m^3n+mn^3\leq m^4+n^4$;
д) $a^2+5b^2+4ab+4\geq 4b$; **е)** $1+2a^4\geq a^2+2a^3$.

24. **а)** $ab+1 \ge 2\sqrt{ab}$; **б)** $4\sqrt{ab} \le \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$;

в) $\dfrac{b^2+5}{2} > \sqrt{b^2+4}$; **г)** $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$.

Указание. **в)** При определении знака разности левой и правой частей воспользуйтесь тождеством $b^2+5=\left(\sqrt{b^2+4}\right)^2+1$.

25. Докажите неравенство $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2} > \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, если $a>0$, $b>0$, $a \ne b$.

Упражнения для повторения

26. Решите уравнение:

а) $(x-5)(x+1)=3x-5$; **б)** $\dfrac{4x}{x^2-4}+\dfrac{x}{x-2}=3\dfrac{1}{3}$.

27. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}+\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$; **б)** $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

28. Отец в три раза старше сына. Через 6 лет сумма чисел лет отца и сына будет равна 68. Сколько лет сыну сейчас?

29. Семья состоит из отца, матери и трех сыновей. Всем вместе им 90 лет. Разность в возрасте сыновей составляет 2 года. Число лет матери на 10 больше числа лет сыновей вместе. Разность числа лет отца и матери равна числу лет среднего сына. На сколько лет мать старше младшего сына?

2. Свойства числовых неравенств

Свойство 1 | **Если $a>b$, то $b<a$.**

Доказательство. Если $a>b$, то $a-b$ — положительное число. Противоположное ему число $-(a-b)=b-a$ является отрицательным. Так как $b-a<0$, то $b<a$. ●

Свойство 2 | **Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.**

Доказательство. По условию $a<b$ и $b<c$, поэтому $a-b$ и $b-c$ — отрицательные числа. Сумма двух отрицательных чисел является отрицательным числом, поэтому $(a-b)+(b-c)=a-b+b-c=a-c<0$. Так как $a-c<0$, то $a<c$. ●

Геометрическая иллюстрация свойства 2 представлена на рисунке 3.

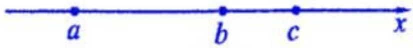


Рис. 3

Аналогично можно доказать утверждение: **если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.**

Свойство 3

Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получим верное неравенство.

Доказательство. Пусть $a < b$ и c — любое число. Докажем, что $a + c < b + c$. Рассмотрим разность $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$. Так как $a < b$, то $a - b < 0$. Следовательно, $(a + c) - (b + c) < 0$, поэтому $a + c < b + c$.

Аналогично проводится доказательство для случая $a > b$ и любого числа c. •

Следствие. *Если некоторое слагаемое перенести из одной части верного неравенства в другую, изменив при этом знак слагаемого на противоположный, то получим верное неравенство.*

Доказательство. Пусть $a < b + c$ — верное неравенство. Прибавим к обоим ее частям число $-c$, получим верное неравенство $a + (-c) < b + c + (-c)$ или $a - c < b$. Итак, если перенести слагаемое c в левую часть неравенства, изменив его знак на противоположный, то получим верное неравенство. •

Свойство 4

Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство.

Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство.

Доказательство. Пусть $a < b$. Докажем, что $ac < bc$, если c — положительное число, и $ac > bc$, если c — отрицательное число. Рассмотрим разность:

$$ac - bc = c(a - b).$$

По условию $a < b$, поэтому $a - b < 0$. Если $c > 0$, то в произведении $c(a - b)$ первый множитель положительный, а второй — отрицательный. Поэтому $c(a - b) < 0$. В данном случае $ac - bc < 0$, откуда $ac < bc$.

Если $c < 0$, то произведение $c(a - b)$ положительно как произведение двух отрицательных множителей. Тогда и $ac - bc > 0$, откуда $ac > bc$.

Аналогично проводится доказательство, если имеем неравенство $a > b$.

Справедливой является и часть свойства, касающаяся деления обеих частей неравенства на некоторое число, так как деление можно заменить умножением на число, обратное делителю. •

Следствие. *Если a и b — положительные числа и $a < b$, то* $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

Доказательство. Разделим обе части неравенства $a < b$ на положительное число ab. Получим:

$$\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab};\ \frac{1}{b} < \frac{1}{a},\ \text{то есть } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$ •

Это следствие можно использовать при сравнении чисел, обратных данным. Например, поскольку $\sqrt{2} < 2$, то $\dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{2}$.

Замечание. Двойное неравенство $a < b < c$ можно записать в виде двух неравенств: $a < b$ и $b < c$. Если $a < b$ и $b < c$, то для любого числа m справедливы неравенства: $a + m < b + m$ и $b + m < c + m$, откуда $a + m < b + m < c + m$. Итак, если ко всем частям верного двойного неравенства прибавить одно и то же число, то получим верное двойное неравенство.

Аналогично можно обосновать утверждения:

если $a < b < c$ и $m > 0$, то $am < bm < cm$;

если $a < b < c$ и $m < 0$, то $am > bm > cm$, то есть $cm < bm < am$.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Известно, что $-1 < x < 3$. Оцените значение выражения:

а) $x - 3$; **б)** $-x$; **в)** $2x - 5$.

• **а)** Прибавим ко всем частям неравенства $-1 < x < 3$ число -3, получим: $-1 - 3 < x - 3 < 3 - 3$, откуда $-4 < x - 3 < 0$.

б) Умножим все части неравенства $-1 < x < 3$ на -1, получим:

$$1 > -x > -3, \text{ или } -3 < -x < 1.$$

в) Умножим все части заданного неравенства на 2, получим: $-2 < 2x < 6$. Теперь прибавим ко всем частям полученного неравенства число -5, получим: $-2 - 5 < 2x - 5 < 6 - 5$, откуда $-7 < 2x - 5 < 1$. •

Упражнение 2. Доказать, что $a^3 + 1 \geq a^2 + a$, если $a \geq -1$.

• Образуем разность левой и правой частей неравенства и преобразуем ее:

$$a^3 + 1 - a^2 - a = (a^3 - a^2) + (1 - a) = a^2(a - 1) - (a - 1) = (a - 1)(a^2 - 1) =$$
$$= (a - 1)(a - 1)(a + 1) = (a - 1)^2(a + 1).$$

Значения выражения $(a-1)^2$ являются неотрицательными. По условию $a \geq -1$, прибавим к обеим частям этого неравенства число 1, получим: $a+1 \geq 0$. Поэтому

$$(a-1)^2(a+1) \geq 0.$$

Следовательно, если $a \geq -1$, то неравенство $a^3+1 \geq a^2+a$ является верным. •

Устно

30. Сравните числа x и y, если $x < 3$ и $3 < y$.

31. Известно, что $m < n$. Какие из данных неравенств являются верными:

а) $m+7 < n+7$; **б)** $m-7 < n-7$; **в)** $m+3 > n+3$;

г) $3m < 3n$; **д)** $-3m < -3n$; **е)** $\frac{m}{3} < \frac{n}{3}$?

Ответы обоснуйте.

Уровень А

32. Известно, что $a < b$. Запишите вместо «*» знак «<» или «>» так, чтобы получилось верное неравенство:

а) $5a * 5b$; **б)** $-7a * -7b$; **в)** $-a * -b$;

г) $\frac{1}{3}a * \frac{1}{3}b$; **д)** $\frac{a}{6} * \frac{b}{6}$; **е)** $-\frac{a}{5} * -\frac{b}{5}$.

33. Вместо «*» запишите знак «>» или «<» так, чтобы было верным утверждение:

а) если $a < -5$, то $-5 * a$; **б)** если $-2 > a$ и $a > b$, то $-2 * b$.

34. Известно, что $a < b$. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получим, если:

а) к обеим частям неравенства прибавим число -2;

б) обе части неравенства умножим на 3;

в) обе части неравенства умножим на -1;

г) обе части неравенства разделим на 5.

35. Известно, что $x > y$. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получим, если:

а) к обеим частям неравенства прибавим число 9;

б) из обеих частей неравенства вычтем число -3;

в) обе части неравенства умножим на -5;

г) обе части неравенства разделим на -3.

36. Известно, что $3{,}2 < a < 3{,}4$. Оцените значение выражения:

а) $a+4$; **б)** $2a$; **в)** $3a-2$.

37. Известно, что $1{,}4 < c < 1{,}6$. Оцените значение выражения:
а) $c - 1$; **б)** $3c$; **в)** $2c + 3$.

Уровень Б

Докажите утверждение:

38. **а)** Если $ac > bc$ и $c > 0$, то $a > b$;
б) если $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ и $c < 0$, то $a > b$.

39. **а)** Если $an > bn$ и $n < 0$, то $a < b$; **б)** если $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$ и $n > 0$, то $a < b$.

40. Сравните числа a и d, если:
а) $a < b$ и $d > b$; **б)** $b - a < 0$ и $d - b < 0$.

41. Сравните числа m и k, если:
а) $m > n$ и $k < n$; **б)** $m - n > 0$ и $n - k > 0$.

42. Сравните числа $\frac{c}{a}$ и $\frac{c}{b}$, если $0 < b < a$ и $c > 0$.

43. Сравните числа $\frac{c}{a}$ и $\frac{c}{b}$, если $0 < a < b$ и $c > 0$.

44. Запишите в порядке убывания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$, если все они положительны и $a > b$, $b > c$.

45. Известно, что $-2 \le x < 5$. Оцените значение выражения:
а) $1{,}5x - 3$; **б)** $-x$; **в)** $1{,}5 - 3x$.

46. Известно, что $0{,}5 < c < 2$. Оцените значение выражения:
а) $\frac{1}{c}$; **б)** $\frac{3}{c}$; **в)** $-\frac{2}{c}$.

47. Известно, что $2 < y \le 3$. Оцените значение выражения:
а) $-y$; **б)** $-2y + 1$; **в)** $\frac{1}{y}$.

48. Оцените периметр квадрата со стороной b см, если $3{,}8 < b < 4{,}2$.

49. Оцените периметр равностороннего треугольника со стороной a дм, если $1{,}7 < a < 1{,}9$.

Уровень В

50. Докажите утверждение:
а) если $a < b$ и $b \le c$, то $a < c$;

б) если $a < b$, $b < c$ и $c < d$, то $a < d$;

в) если $a \geq b$ и $c < 0$, то $ac \leq bc$;

г) если a, b — отрицательные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

51. Докажите неравенство $a^3 + 8 \geq 2a^2 + 4a$, если $a \geq -2$.

Упражнения для повторения

52. Решите уравнение:

а) $\frac{7x^2-11}{2} - \frac{3x^2+13}{5} = 18$; **б)** $\frac{14}{x^2-9} + \frac{2}{3x-9} = 2\frac{2}{3}$.

53. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 8; \\ x - y = -9; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 0,5x + 0,2y = 2; \\ 2x - y = -1. \end{cases}$

54. Смешали 30%-й и 40%-й растворы сульфатной кислоты и получили 200 л 34%-го раствора. Сколько литров каждого из растворов использовали?

55*. Имеется 110 листов бумаги. Из них нужно сшить тетради по 8 и по 10 листов в каждой. Сколько можно сшить тетрадей каждого вида?

3. Сложение и умножение числовых неравенств. Оценка значений выражений

Рассмотрим действия, которые можно выполнять над верными числовыми неравенствами.

1. Сложение числовых неравенств. Возьмем верные числовые неравенства с одинаковыми знаками: $-3 < 4$ и $5 < 7$. Сложим эти неравенства почленно. Получим верное неравенство того же знака, а именно: $-3 + 5 < 4 + 7$ или $2 < 11$. В общем случае справедливо такое свойство:

Свойство 5 **Если почленно сложить верные неравенства одного знака, сохранив их общий знак, то получим верное неравенство.**

Доказательство. Пусть $a < b$ и $c < d$. Нужно доказать, что $a + c < b + d$. Чтобы получить сумму $a + c$, прибавим к обеим частям первого неравенства число c, а чтобы получить сумму $b + d$, прибавим к обеим частям второго неравенства число b. Получим верные неравенства: $a + c < b + c$, $b + c < b + d$. По свойству 2 из последних двух неравенств следует, что $a + c < b + d$.

Аналогично можно доказать, что если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$. •

2. Умножение числовых неравенств. Возьмем верные неравенства: $7 > 2$ и $5 > 3$. Почленно перемножим их. Получим верное неравенство $7 \cdot 5 > 2 \cdot 3$ или $35 > 6$.

Почленно перемножим неравенства $-3 < 1$ и $-4 < 6$. Получим неверное неравенство $12 < 6$.

В первом случае все числа данных неравенств были положительными, во втором — положительными и отрицательными. Докажем следующее свойство.

Свойство 6

Если почленно перемножить верные неравенства одного знака, левые и правые части которых — положительные числа, сохранив при этом их общий знак, то получим верное неравенство.

Доказательство. Пусть $a < b$ и $c < d$, где a, b, c и d — положительные числа. Нужно доказать, что $ac < bd$. Умножим обе части неравенства $a < b$ на положительное число c, а обе части неравенства $c < d$ — на положительное число b. Получим верные неравенства: $ac < bc$, $bc < bd$. По свойству 2 из последних двух неравенств следует, что $ac < bd$.

Аналогично можно доказать, что если $a > b$ и $c > d$, где a, b, c и d — положительные числа, то $ac > bd$. •

Следствие. *Если $a < b$, a и b — положительные числа, n — натуральное число, то $a^n < b^n$.*

При доказательстве следствия достаточно взять n неравенств $a < b$ и почленно их перемножить.

3. Оценка значений выражений. Рассмотрим пример.

Пример 1. Дано: $11 < x < 14$ и $1 < y < 2$. Оценить:

а) сумму $x + y$; **б)** разность $x - y$;

в) произведение xy; **г)** частное $\dfrac{x}{y}$.

• **а)** Оценим сумму $x + y$.

Применим к неравенствам $11 < x$ и $1 < y$ свойство о почленном сложении неравенств. Получим: $12 < x + y$. Применим это же свойство к неравенствам $x < 14$ и $y < 2$. Получим: $x + y < 16$. Результат запишем в виде двойного неравенства $12 < x + y < 16$.

Сокращенно эти преобразования записывают так:

$$\begin{array}{r} _{+}\begin{array}{r} 11<x<14 \\ 1<y<2 \end{array} \\ \hline 12<x+y<16. \end{array}$$

Общая схема оценки суммы имеет такой вид:

$$\begin{array}{c} _{+}\begin{array}{c} a<x<b \\ c<y<d \end{array} \\ \hline a+c<x+y<b+d. \end{array}$$

б) Оценим разность $x-y$.

Зная, как оценивается сумма, представим разность $x-y$ в виде суммы $x+(-y)$. Сначала оценим значение выражения $-y$. Умножив все части неравенства $1<y<2$ на -1, получим: $-1>-y>-2$ или $-2<-y<-1$. Согласно свойству о почленном сложении неравенств получим:

$$\begin{array}{r} _{+}\begin{array}{r} 11<x<14 \\ -2<-y<-1 \end{array} \\ \hline 9<x-y<13. \end{array}$$

Общая схема оценки разности имеет такой вид:

$$\begin{array}{c} _{-}\begin{array}{c} a<x<b \\ c<y<d \end{array} \\ \hline a-d<x-y<b-c. \end{array}$$

в) Оценим произведение xy.

Поскольку $11<x<14$ и $1<y<2$, то x и y — положительные числа. Применим к неравенству $11<x$ и $1<y$ свойство о почленном умножении неравенств. Получим: $11<xy$. Применим это же свойство к неравенствам $x<14$ и $y<2$. Получим: $xy<28$. Результат запишем в виде двойного неравенства $11<xy<28$.

Сокращенно эти преобразования записывают так:

$$\begin{array}{r} _{\times}\begin{array}{r} 11<x<14 \\ 1<y<2 \end{array} \\ \hline 11<xy<28. \end{array}$$

Общая схема оценки произведения имеет такой вид:

$$\times\begin{array}{l} a<x<b \\ \underline{c<y<d} \\ ac<xy<bd \end{array} \quad (a>0,\, b>0,\, c>0,\, d>0).$$

г) Оценим частное $\dfrac{x}{y}$.

Представим частное $\dfrac{x}{y}$ в виде произведения $x\cdot\dfrac{1}{y}$. Поскольку $1<y<2$, то $\dfrac{1}{1}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{2}$ или $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{y}<1$. Согласно свойству о почленном умножении неравенств получим:

$$\times\begin{array}{l} 11<x<14 \\ \underline{\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{y}<1} \\ \dfrac{11}{2}<\dfrac{x}{y}<14, \end{array}$$

то есть $5{,}5<\dfrac{x}{y}<14$.

Общая схема оценки частного имеет такой вид:

$$:\begin{array}{l} a<x<b \\ \underline{c<y<d} \\ \dfrac{a}{d}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{b}{c} \end{array} \quad (a>0,\, b>0,\, c>0,\, d>0). \bullet$$

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Доказать неравенство $(m+n)(mn+1)\geq 4mn$, где $m\geq 0$, $n\geq 0$.

• Используем известное неравенство $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, где $a\geq 0$, $b\geq 0$. Запишем это неравенство для чисел m и n, а потом — для чисел mn и 1. Получим два верных неравенства:

$$\frac{m+n}{2}\geq\sqrt{mn}; \qquad \frac{mn+1}{2}\geq\sqrt{mn}.$$

Умножим обе части каждого неравенства на 2:

$$m+n \geq 2\sqrt{mn}; \quad mn+1 \geq 2\sqrt{mn}.$$

Почленно перемножив эти неравенства, получим:

$$(m+n)(mn+1) \geq 4mn. \bullet$$

Примечание. При доказательстве неравенства из примера 1 мы использовали известное неравенство, доказанное ранее. Особенность использованного способа доказательства неравенств состоит в том, что:

1) записываем несколько неравенств, доказанных ранее;

2) перемножив (или сложив) эти неравенства, приходим к доказываемому неравенству.

Устно

56. Сложите и перемножьте почленно неравенства $5 > 3$ и $7 > 4$.

57. Возведите обе части неравенства $2 < 3$ в квадрат; в куб.

58. Получим ли верное неравенство того же знака, перемножив почленно неравенства $4 > -2$ и $1 > -3$?

59. Получим ли верное неравенство того же знака, возведя в квадрат обе части неравенства $-5 < 2$?

Уровень А

Сложите почленно неравенства:

60. **а)** $-7 > -9$ и $9 > 4$; **б)** $1{,}3 < 2{,}5$ и $-3{,}4 < -1{,}3$;
в) $2{,}5 < 3{,}2$ и $-1{,}7 < -0{,}9$.

61. **а)** $-11 < -9$ и $-3 < 7$; **б)** $-0{,}1 > -0{,}3$ и $1{,}2 > 0{,}8$.

Перемножьте почленно неравенства:

62. **а)** $0{,}8 < 1{,}2$ и $5 < 7$; **б)** $7{,}2 > 3{,}5$ и $0{,}5 > 0{,}4$.

63. **а)** $0{,}25 > 0{,}1$ и $12 > 8$; **б)** $0{,}3 < 0{,}5$ и $11 < 18$.

64. Возведите в квадрат обе части неравенства:
а) $9 > 7$; **б)** $0{,}9 < 1{,}2$.

65. Известно, что $2 < a < 4$ и $-5 < b < -2$. Оцените значение выражения:
а) $a + b$; **б)** $a - b$.

66. Известно, что $0{,}5 < x < 2$ и $2 < y < 3$. Оцените значение выражения: $x + y$; $x - y$; xy.

67. Известно, что $1 < a < 3$ и $0{,}2 < b < 0{,}5$. Оцените значение выражения:

а) $a + b$; **б)** $a - b$; **в)** ab.

Уровень Б

68. Известно, что $3 < a < 5$ и $7 < b < 9$. Оцените значение выражения:

а) $a + 2b$; **б)** $2ab$; **в)** $\dfrac{a}{b}$.

69. Известно, что $4 < x < 5$ и $8 < y < 10$. Оцените значение выражения:

а) $2x - y$; **б)** $0{,}5xy$; **в)** $\dfrac{y}{x}$.

70. Оцените периметр треугольника со сторонами a дм, b дм, c дм, если $2 < a < 2{,}1$; $1{,}6 < b < 1{,}7$; $0{,}9 < c < 1$.

71. Оцените площадь квадрата со стороной b см, если $1{,}1 < b < 1{,}2$.

72. Оцените периметр и площадь прямоугольника со сторонами a см и b см, если $3{,}5 < a < 4$; $2 < b < 2{,}2$.

Докажите неравенство:

73. **а)** $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;

б) $(p + 2)(q + 2)(p + q) \geq 16pq$, если $p \geq 0$, $q \geq 0$;

в) $(a + b)(ab + 4) \geq 8ab$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$.

74. **а)** $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8\sqrt{abc}$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;

б) $(a^2 + 1)(a + 1) \geq 4a\sqrt{a}$, если $a \geq 0$.

75. **а)** $\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}} \geq 2$, если $a > 0$; **б)** $(x^2 + 1) + \dfrac{1}{x^2 + 1} \geq 2$.

Уровень В

76. Докажите неравенство:

а) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt{abcd}$, если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$; $d \geq 0$;

б) $(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_{10}) \geq 2^{10}$, если a_1, a_2, ..., a_{10} — положительные числа, произведение которых равно 1.

77. Докажите неравенство $a + b + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq 4$, если $a > 0$, $b > 0$.

78. Докажите, что если $a + b = 1$, то $a^4 + b^4 \geq \dfrac{1}{8}$.

Упражнения для повторения

79. Найдите все целые решения неравенства:

а) $-2 \le x < 7$; б) $-1 < y \le 6$; в) $-5 < x < 3$.

80. Упростите выражение $\dfrac{a+2}{a^2-2a+1} : \dfrac{a^2-4}{a-1} - \dfrac{1}{a-2}$.

81. *Задача Эйлера.* Две крестьянки принесли на рынок 100 яиц, одна больше другой; продавая их по разным ценам, обе крестьянки денег выручили поровну. Тогда первая сказала второй: «Если бы у меня были твои яйца, я бы выручила за них 15 крейцеров». Вторая ответила: «А если бы твои яйца были у меня, я бы выручила за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Сколько яиц было у каждой крестьянки?

82. Книжный магазин получил учебники по физике и математике. Когда было продано 50% учебников по математике и 20% учебников по физике, что вместе составило 780 книг, то оказалось, что учебников по математике осталось в три раза больше, чем по физике. Сколько учебников по математике получил магазин?

4. Неравенства с одной переменной. Числовые промежутки

1. Понятие о неравенстве с одной переменной и его решении. Рассмотрим неравенство $2x + 5 > 11$. При одних значениях x данное неравенство превращается в верное числовое неравенство, при других — в неверное. Например, при $x = 5$ получим верное числовое неравенство $2 \cdot 5 + 5 > 11$; $15 > 11$, а при $x = 1$ получим неверное числовое неравенство $2 \cdot 1 + 5 > 11$; $7 > 11$.

Если нужно найти все значения x, при которых неравенство $2x + 5 > 11$ является верным, то говорят, что нужно *решить* неравенство $2x + 5 > 11$, содержащее одну переменную x.

При $x = 5$ неравенство $2x + 5 > 11$ является верным. Говорят, что число 5 является *решением* данного неравенства или *удовлетворяет* данному неравенству.

Определение

Решением неравенства с одной переменной называют значение переменной, превращающее его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Неравенство с одной переменной преимущественно имеет бесконечное множество решений. Так, решениями неравенства $2x + 5 > 11$ являются числа 3,5; 4; 5; $5\frac{1}{3}$ и т. п. Множества решений неравенства иногда можно записывать в виде *числовых промежутков*.

2. Числовые промежутки. Рассмотрим несколько примеров.

1) Неравенству $-2 < x < 3$ удовлетворяют все действительные числа больше –2 и меньше 3, то есть все действительные числа, лежащие на числовой прямой между числами –2 и 3. Множество всех чисел, удовлетворяющих двойному неравенству $-2 < x < 3$, называют *числовым промежутком* или просто *промежутком* и обозначают (–2; 3) (читают: «промежуток от –2 до 3»). На координатной прямой его изображают так:

Рис. 4

Промежуток заштриховывают, точки –2 и 3 изображают «пустыми» («выколотыми»).

Число 2,2 удовлетворяет двойному неравенству $-2 < x < 3$, а число 4 ему не удовлетворяет. Говорят, что число 2,2 *принадлежит* промежутку (–2; 3), а число 4 ему *не принадлежит*.

Рис. 5

2) Неравенству $-2 \le x \le 3$ удовлетворяют все действительные числа, которые лежат между числами –2 и 3 или равны числам –2 или 3. Множество таких чисел обозначают так: [–2; 3] (читают: «промежуток от –2 до 3, включая –2 и 3»). На координатной прямой его изображают так:

Рис. 6

3) Множества чисел, удовлетворяющих двойным неравенствам $-2 \le x < 3$ и $-2 < x \le 3$, обозначают соответственно $[-2; 3)$ и $(-2; 3]$ (читают: «промежуток от -2 до 3, включая -2» и «промежуток от -2 до 3, включая 3»). Эти промежутки изображают на координатной прямой так:

Рис. 7 а

Рис. 7 б

4) Неравенству $x > 4$ удовлетворяют все действительные числа больше 4. На координатной прямой эти числа изображают точками, лежащими справа от точки с координатой 4. Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > 4$, изображают полупрямой, находящейся справа от точки с координатой 4 без этой точки (см. рис. 8). Такое множество называют промежутком от 4 до плюс бесконечности и обозначают $(4; +\infty)$.

Рис. 8

Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \ge 4$, изображают полупрямой (см. рис. 9). Это множество обозначают $[4; +\infty)$ (читают: «промежуток от 4 до плюс бесконечности, включая 4»).

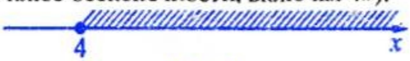


Рис. 9

5) Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < 8$, записывают $(-\infty; 8)$ и читают «промежуток от минус бесконечности до 8». Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \le 8$, записывают $(-\infty; 8]$ и читают: «промежуток от минус бесконечности до 8, включая 8». На координатной прямой эти числовые промежутки изображают так:

Рис. 10 а

Рис. 10 б

6) Множество всех действительных чисел изображают всей координатной прямой и обозначают так: $(-\infty; +\infty)$.

3. Объединение и пересечение числовых промежутков. Рассмотрим два промежутка: $[-1; 4)$ и $(2; 7)$.

Рис. 11

Промежуток $[-1; 7)$ образуют все числа, принадлежащие промежутку $[-1; 4)$ или промежутку $(2; 7)$. Говорят, что промежуток $[-1; 7)$ является *объединением* промежутков $[-1; 4)$ и $(2; 7)$. Записывают: $[-1; 4) \cup (2; 7) = [-1; 7)$, где «$\cup$» — знак объединения.

Определение **Объединением числовых промежутков называют множество всех чисел, принадлежащих хотя бы одному из этих промежутков.**

Промежуток (2; 4) образуют все общие числа из промежутков [–1; 4) и (2; 7), то есть все числа, принадлежащие каждому из промежутков [–1; 4) и (2; 7). Говорят, что промежуток (2; 4) является *пересечением* промежутков [–1; 4) и (2; 7). Записывают: $[-1; 4)\cap(2; 7) = (2; 4)$, где «$\cap$» — знак пересечения.

Определение **Пересечением числовых промежутков называют множество всех чисел, принадлежащих каждому из этих промежутков.**

Для тех, кто хочет знать больше

Объединением и пересечением двух числовых промежутков могут быть не числовые промежутки. Рассмотрим, например, промежутки [–2; 1] и (3; 4). Чисел, принадлежащих обоим этим промежуткам, нет (см. рис. 12). Поэтому говорят, что пересечением этих промежутков является *пустое множество*. Его обозначают символом «$\varnothing$». Записывают: $[-2; 1]\cap(3; 4) = \varnothing$. Объединением промежутков [–2; 1] и (3; 4) является множество $[-2; 1]\cup(3; 4)$, не являющееся числовым промежутком (оно «состоит» из двух промежутков).

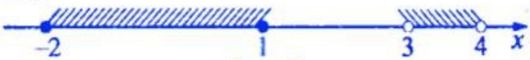


Рис. 12

Для промежутков [–2; 1] и [1; +∞) множество общих чисел содержит только одно число — число 1 (см. рис. 13). Такое множество обозначают так: {1}. Записывают: $[-2; 1]\cap[1; +\infty) = \{1\}$. Легко найти, что $[-2; 1]\cup[1; +\infty) = [-2; +\infty)$.

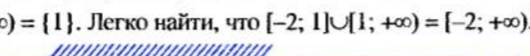


Рис. 13

Примеры решения упражнений

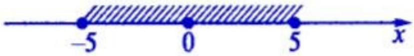
Упражнение 1. Указать наименьшее и наибольшее действительные числа, принадлежащие промежутку:

а) $\left[-\frac{1}{3}; 1{,}01\right]$; б) [–2; 3); в) (–∞; 4,8]; г) (5; +∞).

• **а)** $-\frac{1}{3}$; 1,01; **б)** –2; наибольшего действительно числа, принадлежащего этому промежутку, нет. (Это следует из таких соображений. Предположим, что m — наибольшее число из промежутка [–2; 3). Так как $m < 3$, то можно рассматривать промежуток (m; 3), любое число из которого больше m. Следовательно, число m на промежутке [–2; 3) не является наибольшим.); **в)** наименьшего числа нет; 4,8; **г)** ни наименьшего, ни наибольшего чисел нет. •

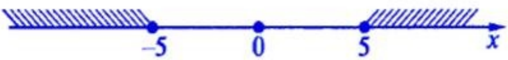
Упражнение 2. Отметить на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству, и записать это множество в виде промежутка или объединения промежутков: **а)** $|x| \le 5$; **б)** $|x| \ge 5$.

• **а)** Модулем числа x является расстояние от начала отсчета до точки, изображающей число x на координатной прямой. Поэтому решениями данного неравенства являются числа, соответствующие тем точкам координатной прямой, которые лежат от начала отсчета на расстоянии не больше 5.



Следовательно, решениями неравенства $|x| \le 5$ являются все числа, принадлежащие промежутку [–5; 5].

б) Решениями неравенства $|x| \ge 5$ являются числа, которым соответствуют те точки координатной прямой, которые лежат от начала отсчета на расстоянии не меньше 5 (больше 5 или равном 5), то есть значения x, удовлетворяющие неравенству $x \le -5$ или неравенству $x \ge 5$.



Следовательно, множеством решений неравенства $|x| \ge 5$ является объединение промежутков $(-\infty; -5]$ и $[5; +\infty)$, то есть $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$. •

Устно

83. Какие из чисел –2; $-\frac{1}{3}$; 0; 0,5; 4 являются решениями неравенства $3x + 1 > 2$?

84. Назовите промежутки, изображенные на рисунке 14.

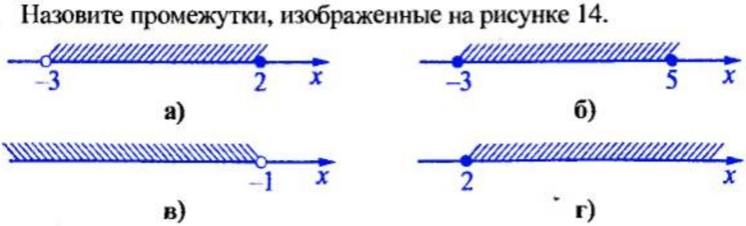


Рис. 14

85. Какие из чисел –3; –1; 0; 1,7; 4 принадлежат числовому промежутку:

а) [–2; 4]; **б)** (–3; 4); **в)** (–1; 5); **г)** [–3; +∞)?

86. Укажите объединение и пересечение промежутков, изображенных на рисунке 15.

Рис. 15

Уровень А

87. Какие из чисел −4; 0,5; 8; 10 являются решениями неравенства $3(x-2) > 2x + 1$?

88. Найдите три любые решения неравенства $-5x + 1 < 3x$.

Отметьте на координатной прямой промежуток:

89. **а)** $[-2; 4)$; **б)** $(-\infty; 3]$; **в)** $(2; +\infty)$; **г)** $(3; 7]$.

90. **а)** $[-1; 3]$; **б)** $(2; 6]$; **в)** $[3; +\infty)$; **г)** $(-\infty; 1)$.

Отметьте на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющее неравенству, и запишите это множество в виде промежутка:

91. **а)** $x \geq 3$; **б)** $x > 4$; **в)** $-1 \leq x < 3$; **г)** $1 < x \leq 5$.

92. **а)** $x \leq -1$; **б)** $x > 5$; **в)** $0 \leq x \leq 6$; **г)** $-1 < x < 4$.

93. Найдите, если возможно, наибольшее натуральное число, принадлежащее промежутку:

а) $(-7; 8)$; **б)** $(-\infty; 3)$; **в)** $(-15; -3)$; **г)** $(-\infty; 7]$.

94. Запишите все целые числа, принадлежащие промежутку:

а) $(-1; 9)$; **б)** $[5; 12)$; **в)** $(-4; 10]$; **г)** $(0; 7)$.

Укажите, если возможно, наименьшее и наибольшее числа, принадлежащие промежутку:

95. **а)** $[5; 11)$; **б)** $(8; 20]$; **в)** $[-3; +\infty)$; **г)** $(-\infty; 2)$.

96. **а)** $(3; 8]$; **б)** $[-4; 5]$; **в)** $(-\infty; 3]$; **г)** $(0; +\infty)$.

Отметьте на координатной прямой промежутки и найдите их объединение и пересечение:

97. **а)** $[-1; 2]$ и $(1; 3)$; **б)** $[3; 4)$ и $[2; +\infty)$;

в) $(-\infty; 5)$ и $[0; 2]$; **г)** $(-\infty; -1]$ и $[-2; +\infty)$.

98. **а)** $[-4; 0)$ и $[-2; 2)$; **б)** $(-\infty; 5]$ и $[1; 6]$.

Уровень Б

Отметьте на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству, и запишите это множество в виде промежутка или объединения промежутков:

99. **а)** $|x| < 3$; **б)** $|x| > 4$; **в)** $|x| \leq 3{,}5$; **г)** $|x| \geq 1{,}5$.

100. а) $|x| \ge 1$; б) $|x| < 2{,}5$; в) $|x| \le 1{,}5$; г) $|x| > 0{,}5$.

101. Запишите пять чисел, принадлежащих промежутку (0,1; 0,2).

Упражнения для повторения

102. Решите уравнение:

а) $7(2x-1)-5x=11+3(3x-2)$; б) $\dfrac{7x-2}{20}=\dfrac{4x+1}{5}-\dfrac{3x-6}{4}$.

103. При каких значениях a значение дроби равно нулю:

а) $\dfrac{a^2-49}{a+7}$; б) $\dfrac{|a|-5}{a+5}$; в) $\dfrac{|a|-2}{a^2-3a+2}$?

104. Вкладчик внес в банк 5000 грн. Часть денег он положил под 7% годовых, а остальные — под 6%. Через год общая сумма денег увеличилась на 315 грн. Сколько денег внес вкладчик под 7% годовых?

105. *Задача Бхаскари (известного индийского математика XII в.).* Из множества чистых цветков лотоса были принесены в жертву: Шиве — третья часть этого множества, Вишну — пятая, Солнцу — шестая, четвертую часть получил Бхавани, а остальные — шесть цветков — получил почтенный Учитель. Сколько было цветков?

5. Решение неравенств с одной переменной. Равносильные неравенства

Задача. Одна сторона участка прямоугольной формы на 5 м длиннее другой. Какими могут быть стороны участка, чтобы для его ограждения хватило сетки длиной 46 м?

Пусть длина меньшей стороны участка равна x м, тогда длина большей — $(x+5)$ м, а периметр участка — $2(x+x+5)=(4x+10)$ (м). По условию периметр не превышает 46 м, поэтому $4x+10 \le 46$.

Чтобы найти стороны участка, нужно решить неравенство $4x+10 \le 46$ с одной переменной x.

При решении неравенства его преобразуют, заменяя более простыми неравенствами с теми же решениями.

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называют ***равносильными****. Неравенства, не имеющие решений, также называют равносильными.*

Замену неравенства равносильными ему неравенствами выполняют на основании таких свойств:

1) если выполнить тождественные преобразования некоторой части неравенства, которые не меняют допустимые значения переменной, то получим неравенство, равносильное данному;

2) если из одной части неравенства перенести в другую часть слагаемое, изменив его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному;

3) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному;

4) если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и при этом изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Используя эти свойства, решим неравенство:

$$4x + 10 \le 46.$$

Перенесем слагаемое 10 из левой части неравенства в правую с противоположным знаком, получим неравенство

$$4x \le 46 - 10,$$

равносильное заданному неравенству.

В правой части неравенства $4x \le 46 - 10$ приведем подобные слагаемые, получим:

$$4x \le 36.$$

Разделив обе части последнего неравенства на 4, получим неравенство

$$x \le 9.$$

Следовательно, неравенство $4x + 10 \le 46$ равносильно неравенству $x \le 9$, и ему удовлетворяют все числа не больше 9 (см. рис. 16). Множество решений данного неравенства можно записать в виде числового промежутка $(-\infty; 9]$.

Рис. 16

Вернемся к задаче. Длину меньшей стороны участка мы обозначили через x м. Поскольку длина стороны выражается положительным числом, то x может принимать значения из промежутка $(0; 9]$. Итак, меньшая сторона участка не должна превышать 9 м, большая же сторона на 5 м длиннее нее.

Для тех, кто хочет знать больше

Решая неравенство

$$4x + 10 \le 46, \tag{1}$$

мы перенесли слагаемое 10 из левой части неравенства в правую с противоположным знаком и получили неравенство

$$4x \leq 46 - 10. \qquad (2)$$

Докажем, что неравенства (1) и (2) равносильны.

Пусть $x = a$ — любое решение неравенства (1), тогда $4a + 10 \leq 46$ — верное числовое неравенство. Перенесем слагаемое 10 из левой части неравенства в правую, изменив его знак на противоположный, получим верное числовое неравенство $4a \leq 46 - 10$. Из того, что последнее неравенство является верным, следует, что число a является решением неравенства (2).

Пусть $x = b$ — любое решение неравенства (2), тогда $4b \leq 46 - 10$ — верное числовое неравенство. Перенесем слагаемое -10 из правой части неравенства в левую, изменив его знак на противоположный, получим верное числовое неравенство $4b + 10 \leq 46$. Из того, что последнее неравенство является верным, следует, что число b является решением неравенства (1).

Мы показали, что любое решение неравенства (1) является решением неравенства (2) и любое решение неравенства (2) является решением неравенства (1). Поэтому эти неравенства имеют одни и те же решения, то есть являются равносильными.

Равносильность неравенств $4x \leq 46 - 10$ и $4x \leq 36$, а также неравенств $4x \leq 36$ и $x \leq 9$ доказывают аналогично.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Решить неравенство $3(5x - 1) + 10 > 7 - 2(1 - 6x)$ и отметить на координатной прямой множество его решений.

• Раскроем скобки:

$$15x - 3 + 10 > 7 - 2 + 12x;$$

перенесем слагаемые, содержащие переменную, в левую часть неравенства, а остальные — в правую часть:

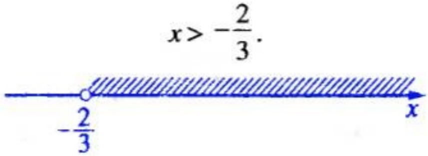
$$15x - 12x > 7 - 2 + 3 - 10;$$

приведем подобные слагаемые:

$$3x > -2;$$

разделим обе части неравенства на 3:

$$x > -\frac{2}{3}.$$



Ответ. $x > -\frac{2}{3}$, или $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ •

Упражнение 2. Решить неравенство $\frac{3t-1}{6}-\frac{2t}{9}\le 1$, отметить на координатной прямой множество его решений и записать это множество в виде числового промежутка.

• Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство, то есть на 18. Получим:

$$18\cdot\frac{3t-1}{6}-18\cdot\frac{2t}{9}\le 18;\ \ 9t-3-4t\le 18;\ \ 9t-4t\le 18+3;\ \ 5t\le 21;\ \ t\le 4{,}2.$$

Ответ. $(-\infty; 4{,}2]$. •

Упражнение 3. Решить неравенство $-2\le\frac{3x-1}{2}\le 5$.

• Умножим все части неравенства на 2: $-4\le 3x-1\le 10$.

Прибавим ко всем частям неравенства число 1:

$$-4+1\le 3x-1+1\le 10+1;\qquad -3\le 3x\le 11.$$

Разделим все части неравенства на 3, получим: $-1\le x\le 3\frac{2}{3}$.

Ответ. $-1\le x\le 3\frac{2}{3}$, или $\left[-1; 3\frac{2}{3}\right]$. •

Упражнение 4. Решить неравенство:

а) $|2x-3|\le 5$; **б)** $|3x-1|<-4$; **в)** $|2x-1|>5$.

• **а)** Решениями неравенства $|2x-3|\le 5$ являются числа, удовлетворяющие двойному неравенству

$$-5\le 2x-3\le 5.$$

Прибавим ко всем частям неравенства число 3, получим:

$$-2\le 2x\le 8.$$

Разделим все части неравенства на 2:

$$-1\le x\le 4.$$

Ответ. $[-1; 4]$.

б) Модуль числа — число неотрицательное, поэтому модуль числа не может быть меньше числа –4. Неравенство $|3x-1|<-4$ не имеет решений.

Ответ. Решений нет.

в) Выражение $2x-1$, стоящее под знаком модуля, должно принимать значения меньше –5 или больше 5. Итак, $2x-1<-5$ или $2x-1>5$.

Если нужно найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $2x-1<-5$ или неравенству $2x-1>5$, то говорят, что нужно решить *совокупность* неравенств, которую записывают так: $\left[\begin{array}{l}2x-1<-5;\\ 2x-1>5.\end{array}\right.$

Решая каждое неравенство совокупности, получим:

$$\left[\begin{array}{l}2x<-5+1;\\ 2x>5+1;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2x<-4;\\ 2x>6;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x<-2;\\ x>3.\end{array}\right.$$

Решениями совокупности являются значения x, удовлетворяющие неравенству $x<-2$ или неравенству $x>3$.

Ответ. $x<-2$ или $x>3$. (Ответ можно записать и в виде объединения промежутков: $(-\infty; -2)\cup(3; +\infty)$.) •

Устно

106. Равносильны ли неравенства:

а) $5x+1>0$ и $5x>1$; **б)** $3x<0$ и $x<0$; **в)** $-2x>0$ и $x>0$?

107. Обоснуйте равносильность преобразований при решении неравенства: $3x-2>1$; $3x>1+2$; $3x>3$; $x>1$.

Уровень А

Решите неравенство, отметьте множество его решений на координатной прямой и запишите это множество в виде числового промежутка:

108. **а)** $x-5>0$; **б)** $x+7<0$; **в)** $x-3{,}2\le 0$; **г)** $x+5{,}3\ge 0$.

109. **а)** $2x<5$; **б)** $3x\ge -15$; **в)** $-3x<-36$; **г)** $-0{,}5x\le 0$.

110. **а)** $5x-3\le 0$; **б)** $4x-7>11$; **в)** $2x-9\le 5+x$; **г)** $19-x>5+6x$.

111. **а)** $x-2<0$; **б)** $x+3{,}5\ge 0$; **в)** $5x\ge 15$; **г)** $-2x<5$;
д) $-0{,}8x>0$; **е)** $8x-12\le 0$; **ж)** $3x+11>5$; **з)** $3x-13\ge 7x+3$.

112. Решите неравенство $9x-5>4x+3$. Запишите три значения x, являющиеся решениями этого неравенства.

113. Решите неравенство $11-2x\le 15-4x$. Являются ли решениями этого неравенства числа -3; 0?

Решите неравенство:

114. **а)** $4(x-3)+1\ge 12-3(1-2x)$; **б)** $9-2(5+3x)<4(1-2x)$;
в) $4a-12(3a-1)<16(1-a)$; **г)** $5(x+3)-3(1-x)>1-3x$.

115. а) $7(x-2)+20<4(x-3)-9$; б) $2(3-y)-3(2+y)\le y$;
в) $z+10<5(2z+7)+14(5-z)$; г) $5y-(y+3)-4(2-y)\le 9$.

116. а) $\frac{x}{4}\ge 0$; б) $\frac{5x}{3}<0$; в) $\frac{x-6}{8}\le 1$; г) $\frac{3x}{5}\ge 2$.

117. а) $\frac{7x}{4}\ge 0$; б) $\frac{2x-1}{3}<0$; в) $\frac{x+7}{8}>1$; г) $\frac{x-5}{3}>4$.

Уровень Б

Решите неравенство:

118. а) $250(x-3)>500(x+1)+750$;
б) $\frac{1}{70}(3x+1)+\frac{9}{70}<\frac{11}{70}x$; в) $\frac{2x+1}{4}-\frac{2x-3}{6}\le\frac{1}{12}$.

119. а) $90(x-12)+180(x+6)<270$; б) $\frac{1-x}{30}-\frac{1+x}{15}\ge\frac{7}{60}$.

Решите двойное неравенство:

120. а) $-1\le 3x+4<5$; б) $0<2-5x<7$;
в) $2<\frac{7+2a}{3}\le 6$; г) $-2<\frac{8-x}{4}<2$.

121. а) $-1<7+2y<4$; б) $4<8-3x\le 10$;
в) $0<\frac{3y+2}{6}\le 5$; г) $2\le\frac{3-x}{8}<3$.

Решите неравенство:

122. а) $|5x-9|<7$; б) $|11-2x|\ge 3$;
в) $|4x-15|\le -2$; г) $|x+1|>0$.

123. а) $|2x-7|\le 1$; б) $|1-4x|>5$.

124. Основание равнобедренного треугольника равно 7 см. Какой может быть боковая сторона этого треугольника, если его периметр меньше периметра равностороннего треугольника со стороной 9 см?

125. Одна сторона прямоугольника на 11 см короче другой. Какой может быть длина большей стороны прямоугольника, если его периметр больше периметра квадрата со стороной 18 см?

Уровень В

126. Решите неравенство:
а) $5|x-3|<9+2|x-3|$; б) $|1-2(x+6)|\ge 11$;
в) $4-|2x+9|>3(|2x+9|-4)$; г) $|1-4x|+|x|\le -2$.

127. Докажите равносильность неравенств:

а) $30(x-5) < 120$ и $x - 5 < 4$; б) $\frac{2}{7}(x+3) \geq \frac{1}{7}x$ и $2(x+3) \geq x$.

Упражнения для повторения

128. Решите уравнение:

а) $|x| - 1 = 5$; б) $|3x + 4| = 8$; в) $3x + |x| = -7$.

129. По течению реки катер прошел за 7 ч такой путь, который он проходит за 8 ч против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость катера в стоячей воде равна 30 км/ч.

130. Сумма цифр двузначного числа равна 8. Если цифры числа поменять местами, то получим число, которое меньше данного на 18. Найдите данное число.

131. В слове *мама* произвольно меняют местами две буквы. Найдите вероятность того, что после этого снова получится слово *мама*.

6. Линейные неравенства с одной переменной

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство $2(6x + 5) + 3x \leq 40$.

• $12x + 10 + 3x \leq 40;$

$$12x + 3x \leq 40 - 10;$$

$$15x \leq 30;$$

$$x \leq 2.$$

Множеством решений неравенства является числовой промежуток $(-\infty; 2]$.

Ответ. $(-\infty; 2]$. •

Пример 2. Решить неравенство $4(3x + 7) - 9x > 20 + 3x$.

• $12x + 28 - 9x > 20 + 3x;$

$$12x - 9x - 3x > 20 - 28;$$

$$0 \cdot x > -8.$$

При любом значении x значение левой части неравенства $0 \cdot x > -8$ равно нулю, а нуль больше -8. Поэтому множеством решений данного неравенства является множество всех действительных чисел, то есть промежуток $(-\infty; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; +\infty)$. •

Пример 3. Решить неравенство $14x + 17 < 8x + 6(x + 2)$.

• $14x + 17 < 8x + 6x + 12$; $14x - 8x - 6x < 12 - 17$; $0 \cdot x < -5$.

Неравенство $0 \cdot x < -5$ не имеет решений, так как при любом x значение ее левой части равно нулю, а нуль не меньше -5.

Ответ. Решений нет. •

В результате преобразований мы привели первое неравенство к неравенству $15x \leq 30$, второе — к неравенству $0 \cdot x > -8$, третье — к неравенству $0 \cdot x < -5$. Неравенства такого вида называют *линейными неравенствами с одной переменной*.

Неравенства вида $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$, где a и b — некоторые известные числа, а x — переменная, называют *линейными неравенствами с одной переменной*.

Если $a \neq 0$, то для решения линейного неравенства с одной переменной нужно разделить обе части неравенства на a. Если $a = 0$, то или решением неравенства является любое число, или неравенство не имеет решений.

Выделим следующие основные шаги решения неравенств:

1) если неравенство содержит дроби, то обе части неравенства умножаем на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство;

2) если в неравенства есть скобки, то раскрываем их;

3) переносим слагаемые, содержащие переменную, в одну часть неравенства (как правило, в левую), а слагаемые, не содержащие переменной, — в другую часть (как правило, в правую);

4) приводим подобные слагаемые;

5) если получили линейное неравенство и коэффициент при переменной не равен нулю, то делим на него обе части неравенства;

6) если коэффициент при переменной равен нулю, то неравенство или не имеет решений, или его решением является любое число.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Найти область определения функции $y = \sqrt{8 - 2x}$.

• Область определения функции образуют те значения x, при которых выражение $8 - 2x$ принимает неотрицательные значения. Следовательно, нужно решить неравенство $8 - 2x \geq 0$. Получим:

$$-2x \geq -8; \quad x \leq 4.$$

Областью определения функции является промежуток $(-\infty; 4]$.

Ответ. $(-\infty; 4]$. •

Упражнение 2. Решить неравенство $(a+3)x<5$ с параметром a.

Рассмотрим три случая: 1) $a+3<0$; 2) $a+3=0$; 3) $a+3>0$.

1) Если $a+3<0$, то есть $a<-3$, то, разделив обе части неравенства на отрицательное число $a+3$, получим: $x>\frac{5}{a+3}$.

2) Если $a+3=0$, то есть $a=-3$, то получим неравенство $0\cdot x<5$, решением которого является любое число.

3) Если $a+3>0$, то есть $a>-3$, то $x<\frac{5}{a+3}$.

Ответ. Если $a<-3$, то $x>\frac{5}{a+3}$; если $a=-3$, то решением неравенства является любое число; если $a>-3$, то $x<\frac{5}{a+3}$.

Устно

132. Решите неравенство:

а) $2x<8$; **б)** $3x\ge 6$; **в)** $0x>11$;
г) $0x<-7$; **д)** $0x<8$; **е)** $0x>-3$.

Уровень А

Решите неравенство:

133. **а)** $9(x-1)+5x<17x-11$; **б)** $8x-5(x+2)\ge 3x$;
в) $7(1-2x)+5x\ge 4-9x$; **г)** $10a-4(a+3)>5+6a$.

134. **а)** $9y-4(1+2y)<y-7$; **б)** $7(2x-3)\ge 10+2(2x-1)$;
в) $y-7(y+1)\le 5-6(y+2)$; **г)** $3(5+x)>11+8(x-2)$.

135. **а)** $\frac{3x}{2}+\frac{x}{3}<4$; **б)** $\frac{4y}{9}-y\ge 2$; **в)** $\frac{a}{8}-\frac{3a}{4}>-1$; **г)** $\frac{5x}{6}+3\le x$.

136. **а)** $\frac{3x}{5}-4x<0$; **б)** $\frac{a}{6}-\frac{3a}{4}>1$; **в)** $\frac{x}{4}-\frac{x}{2}<-3$; **г)** $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}\le 2$.

137. При каких значениях x функция $y=3(5-4x)$ принимает отрицательные значения?

138. При каких значениях x функция $y=\frac{7-8x}{5}$ принимает неотрицательные значения?

Найдите область определения функции:

139. а) $y=\sqrt{x-3}$; б) $y=\sqrt{2x+6}$;

в) $y=\sqrt{5-x}$; г) $y=\sqrt{7-2x}$.

140. а) $y=\sqrt{3x-12}$; б) $y=\sqrt{4-8x}$.

Уровень Б

Решите неравенство:

141. а) $\frac{4+3y}{3}-5y\ge 0$; б) $\frac{5y-13}{4}-y\le\frac{y}{4}$;

в) $x-\frac{x+3}{2}\ge\frac{2x-1}{4}$; г) $\frac{3a-1}{2}-\frac{2a+5}{8}-a<3$.

142. а) $\frac{5-3y}{3}-y\ge 17-2y$; б) $4-\frac{a}{3}+a<\frac{2a}{3}$;

в) $\frac{15x-8}{5}<3x+12$; г) $\frac{y+1}{2}+\frac{2y-1}{6}<y$.

143. а) $x^2+3x-8<x(x+2)$; б) $(x-3)^2>x^2-7x$.

144. а) $x(x-5)>x^2-4x+1$; б) $x(x+4)<(x+3)^2$.

145. При каких значениях x значение дроби $\frac{1{,}5x-4}{5}$ меньше соответствующего значения дроби $\frac{2{,}4x+3}{4}$?

146. При каких значениях y значение дроби $\frac{0{,}6y+5}{3}$ больше соответствующего значения дроби $\frac{4-1{,}2y}{4}$?

147. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{-(9-11x)}$; б) $y=\sqrt{\frac{2}{7}-\frac{1}{14}x}$; в) $y=\sqrt{\frac{x-1}{3}-7}$.

148. Сторона треугольника 12 см. Какой может быть высота треугольника, проведенная к этой стороне, если его площадь меньше площади прямоугольника со сторонами 7 см и 9 см?

149. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 6 см, 7 см и 8 см. Какой может быть высота призмы, если площадь ее боковой поверхности меньше площади боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является прямоугольник со сторонами 5 см и 6 см, а его высота равна 7 см?

150. Туристы планируют совершить прогулку по реке на моторной лодке и вернуться на базу не позже чем через 5 часов. На какое расстояние они могут отплыть от базы по течению реки, если скорость лодки в стоячей воде 15 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч?

Уровень В

Решите неравенство:

151. **а)** $2x - 3a \le 4 - 7a$; **б)** $3(x + a) - 2 \ge 7x - a$.

152. **а)** $(a + 2)x > 1$; **б)** $(2a + 3)x > a$.

153. Существуют ли значения a, при которых неравенство $a(x + 1) \le (2a + 3)x$ не имеет решений?

154. Существуют ли значения a, при которых решением неравенства $(a^2 + 2a - 3) \cdot x \ge a + 3$ является любое число?

Упражнения для повторения

155. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 7x + 12y = 41; \\ 8x + 3y = 4; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3(x + y) - 11y = 6{,}5; \\ 10x - 4(x - y) = 17. \end{cases}$

156. Цену на ботинки снизили на 10%, а потом еще на 20%. После двух уценок они стали стоить 90 грн. Какова начальная цена ботинок?

157*. Найдите два таких натуральных числа, разность квадратов которых равна 133.

158. *Древнекитайская задача.* В клетке находятся фазаны и кролики. Известно, что у них 35 голов и 94 ноги. Сколько в клетке фазанов и сколько кроликов?

7. Системы линейных неравенств с одной переменной

1. Понятие системы неравенств с одной переменной и ее решения.

Задача. Одна хозяйка купила на рынке 10 кг помидоров и заплатила за них больше 18 грн. Вторая хозяйка купила такие же помидоры и заплатила за 5 кг меньше 14 грн. По какой цене покупали помидоры хозяйки?

Пусть цена 1 кг помидоров x грн., тогда 10 кг стоят $10x$ грн., что по условию задачи больше 18 грн., то есть $10x > 18$.

5 кг помидоров стоят $5x$ грн., что по условию задачи меньше 14 грн., то есть $5x < 14$.

Чтобы решить задачу, нужно найти те значения x, при которых верным будет как неравенство $10x > 18$, так и неравенство $5x < 14$.

Если нужно найти те значения переменной, которые удовлетворяют двум неравенствам, то говорят, что нужно *решить систему неравенств*. Для нашей задачи систему записывают так:

$$\begin{cases} 10x > 18; \\ 5x < 14. \end{cases}$$

Решив каждое из неравенств системы, получим: $\begin{cases} x > 1{,}8; \\ x < 2{,}8. \end{cases}$

Следовательно, значения x должны удовлетворять условию $1{,}8 < x < 2{,}8$, то есть цена 1 кг помидоров больше 1 грн. 80 к., но меньше 2 грн. 80 к.

Значение $x = 2$ является решением обоих неравенств системы $\begin{cases} 10x > 18; \\ 5x < 14, \end{cases}$ поскольку каждое из числовых неравенств $10 \cdot 2 > 18$ и $5 \cdot 2 < 14$ является верным. Такое значение x называют *решением системы неравенств*.

Определение **Решением системы неравенств с одной переменной называют значение переменной, при котором выполняется каждое из неравенств системы.**

Решить систему неравенств значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

2. Решение систем линейных неравенств с одной переменной. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x + 3 < 11; \\ x + 6 \le 5. \end{cases}$

• Решим каждое из неравенств системы:

$$\begin{cases} 2x + 3 < 11; \\ x + 6 \le 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < 11 - 3; \\ x \le 5 - 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < 8; \\ x \le -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4; \\ x \le -1. \end{cases}$$

Отметим на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих первому неравенству последней системы, — промежуток $(-\infty; 4)$, и множество чисел, удовлетворяющих второму неравенству, — промежуток $(-\infty; 1]$.

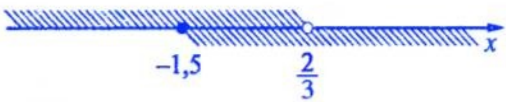
Общими решениями неравенств являются значения x, принадлежащие обеим промежуткам, то есть их пересечению: $(-\infty; 4)\cap(-\infty; 1] = (-\infty; 1]$.

Ответ. $(-\infty; -1]$. •

Пример 2. Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x+4<6; \\ 2x+7\ge 4. \end{cases}$

• $\begin{cases} 3x<6-4; \\ 2x\ge 4-7; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x<2; \\ 2x\ge -3; \end{cases}$ $\begin{cases} x<\dfrac{2}{3}; \\ x\ge -1{,}5. \end{cases}$

На координатной прямой отметим множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x<\dfrac{2}{3}$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x\ge -1{,}5$.



Общими решениями неравенств являются значения x, принадлежащие промежутку $\left[-1{,}5; \dfrac{2}{3}\right)$.

Ответ. $\left[-1{,}5; \dfrac{2}{3}\right)$. •

Пример 3. Решить систему неравенств $\begin{cases} 4x+1>9; \\ 8-x>11. \end{cases}$

• $\begin{cases} 4x>9-1; \\ -x>11-8; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x>8; \\ -x>3; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2; \\ x<-3. \end{cases}$

На координатной прямой отметим множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x>2$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x<-3$.

Общих решений неравенства не имеют.

Ответ. Решений нет. •

Следовательно, систему линейных неравенств с одной переменной можно решить, используя следующую схему:

1) решаем каждое неравенство системы;

2) отмечаем множество решений каждого неравенства на одной координатной прямой;

3) находим пересечение множеств решений неравенств и записываем множество решений системы в виде промежутка или соответствующего неравенства.

Примечание.

1. Если система неравенств приводится к виду $\begin{cases} x < a; \\ x < b, \end{cases}$ где $a < b$, то решениями системы являются $x < a$, то есть x меньше меньшего из чисел a и b.

2. Если система неравенств приводится к виду $\begin{cases} x > a; \\ x > b, \end{cases}$ где $a > b$, то решениями системы являются $x > a$, то есть x больше большего из чисел a и b.

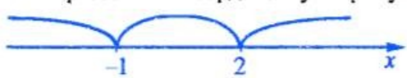
Для тех, кто хочет знать больше

Пример 4. Решить неравенство $|x + 1| + |x - 2| < 6$.

• Найдем значения x, при которых значения выражений, стоящих под знаком модуля, равны нулю:

$$x + 1 = 0,\ x = -1; \qquad x - 2 = 0,\ x = 2.$$

Значения $x = -1$ и $x = 2$ разбивают координатную прямую на три промежутка.



Раскроем модули на каждом из промежутков и решим соответствующее неравенство.

1) $x < -1$, или x принадлежит промежутку $(-\infty; -1)$, что сокращенно записывают так: $x \in (-\infty; -1)$ (знак «$\in$» читают: «принадлежит»). При таких значениях x выражение $x + 1$ принимает отрицательные значения, поэтому $|x + 1| = -x - 1$; выражение $x - 2$ также принимает отрицательные значения, поэтому $|x - 2| = -x + 2$. Тогда неравенство $|x + 1| + |x - 2| < 6$ будет иметь вид $-x - 1 - x + 2 < 6$. Решим полученное неравенство:

$$-2x < 6 + 1 - 2; \quad -2x < 5; \quad x > -2{,}5.$$

Кроме того, значения x должны удовлетворять неравенству $x < -1$, а значит, и системе неравенств $\begin{cases} x < -1; \\ x > -2{,}5. \end{cases}$ Множеством решений этой системы является промежуток $(-2{,}5; -1)$.

2) $-1 \le x < 2$, или $x \in [-1; 2)$. Значения выражения $x + 1$ при таких значениях x неотрицательны, поэтому $|x + 1| = x + 1$; выражение $x - 2$ принимает отрицательные значения, поэтому $|x-2|=-x+2$. Заданное неравенство на промежутке $[-1; 2)$ без знака модуля имеет вид: $x+1-x+2<6$, откуда $0\cdot x<3$. Решениями последнего неравенства являются любые числа. Поэтому все числа из промежутка $[-1; 2)$ являются решениями заданного неравенства.

3) $x\ge 2$, или $x\in[2; +\infty)$. На этом промежутке выражения $x+1$ и $x-2$ принимают неотрицательные значения, поэтому $|x+1|=x+1$, $|x-2|=x-2$. Заданное неравенство на промежутке $[2; +\infty)$ без знака модуля запишется так: $x+1+x-2<6$, откуда $2x<7$; $x<3{,}5$.

Значения x должны удовлетворять двум неравенствам: $x\ge 2$ и $x<3{,}5$, то есть системе $\begin{cases} x\ge 2; \\ x<3.5, \end{cases}$ множеством решений которой является промежуток $[2; 3{,}5)$.

Итак, множеством решений заданного неравенства является объединение промежутков $(-2{,}5; -1)$, $[-1; 2)$ и $[2; 3{,}5)$, то есть промежуток $(-2{,}5; 3{,}5)$.

Ответ. $(-2{,}5; 3{,}5)$. •

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{2x+9}+\sqrt{5+x}$?

•Данное выражение имеет смысл при тех значениях x, при которых каждое из выражений $2x+9$ и $5+x$ принимает неотрицательные значения. Поэтому искомые значения x должны удовлетворять систему неравенств $\begin{cases} 2x+9\ge 0; \\ 5+x\ge 0. \end{cases}$

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 2x+9\ge 0; \\ 5+x\ge 0; \end{cases} \begin{cases} 2x\ge -9; \\ x\ge -5; \end{cases} \begin{cases} x\ge -4{,}5; \\ x\ge -5. \end{cases}$$

Общими решениями неравенств являются значения x, удовлетворяющие неравенству $x\ge -4{,}5$.

Ответ. $x\ge -4{,}5$. •

Упражнение 2. Решить неравенство $\dfrac{x-2}{x+1}>0$.

•Дробь положительна только тогда, когда ее числитель и знаменатель положительны или когда они оба отрицательны. Поэтому решение данного неравенства сводится к решению двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x-2>0; \\ x+1>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2<0; \\ x+1<0. \end{cases}$$

Решениями первой системы являются значения x, удовлетворяющие неравенству $x > 2$, а второй — неравенству $x < -1$.

Ответ. $x < -1$ или $x > 2$. (Множество решений можно записать в виде объединения промежутков: $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$.)•

Замечание. Решение неравенства $(x-2)(x+1)>0$ также сводится к решению двух систем, приведенных в предыдущем примере. Поэтому множеством решений этого неравенства также является $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$.

Упражнение 3. Решить двойное неравенство $4 < 3 - 2x \le 9$.

• Данное двойное неравенство можно записать в виде системы

$$\begin{cases} 3-2x>4; \\ 3-2x\le 9. \end{cases}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 3-2x>4; \\ 3-2x\le 9; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x>4-3; \\ -2x\le 9-3; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x>1; \\ -2x\le 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x<-0,5; \\ x\ge -3. \end{cases}$$

Ответ. $[-3; -0,5)$.•

Заметим, что двойное неравенство в упражнении 3 можно решать и на основании свойств равносильности неравенств (см. пункт 5, упражнение 3).

Устно

159. Какие из чисел -4; 0; 5 являются решениями системы неравенств $\begin{cases} 3x\le 0; \\ x+7>0? \end{cases}$

160. На рисунке 17 отмечены множества решений неравенств системы. Верно ли записано множество решений системы?

$(4; +\infty)$;

а)

решений нет;

б)

$(-4; 1]$;

в)

$(-\infty; 6]$.

г)

Рис. 17

Уровень А

161. Какие из чисел –3; 0; 5; 11 являются решениями системы неравенств
$\begin{cases} 4x-11>1; \\ 7-3x\le 8? \end{cases}$

162. Является ли число –2 решением системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-1<0; \\ 5x+9>1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4-3x\ge 0; \\ 6x-11<3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7x+8<3; \\ 4x+5>2? \end{cases}$

Решите систему неравенств:

163. а) $\begin{cases} x\ge 3; \\ x>5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x<-2; \\ x<3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x<4; \\ x\ge -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x>4; \\ x<-3. \end{cases}$

164. а) $\begin{cases} x\le -4; \\ x<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x\ge 5; \\ x<-1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x\ge -2; \\ x\ge 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x<5; \\ x\ge -1. \end{cases}$

165. а) $\begin{cases} x-1\ge 0; \\ 3x>12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x<8; \\ x-5>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x\le 20; \\ 2x+4>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -4x\ge 10; \\ 3x-15>0. \end{cases}$

166. а) $\begin{cases} x+7<0; \\ 5x\le 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-9\ge 0; \\ -x>2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+6\le 0; \\ 5-2x>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9-4x<0; \\ 3x+1\ge 0. \end{cases}$

167. а) $\begin{cases} 4x+6\le 7x; \\ x-9>10-5x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}1x-2>1{,}4x-3; \\ 4-9x<1-2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 21-5x\le 8+2x; \\ 3x+7{,}7\le 1+4x. \end{cases}$

168. а) $\begin{cases} 14-6x>3x+2; \\ 11x-3\le 2x+15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3-7y>10y+3; \\ 5y+1{,}2\ge 6-3y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8x+5\le x; \\ 10x+14\le 2x+13. \end{cases}$

169. Решите систему неравенств и укажите наибольшее целое число, которое является ее решением:

а) $\begin{cases} 3-4y<19; \\ 6y\le 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8-4x\le 0; \\ 4x-1\le 24-x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5-4x<17; \\ 3<23-5x. \end{cases}$

170. Найдите натуральные решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x+8<23; \\ 4x+11>3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 20-4x\ge -12; \\ 7x+9>30; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 15-x>14; \\ 5x+12\le -8. \end{cases}$

Уровень Б

Решите систему неравенств:

171. а) $\begin{cases} 5(3-x)+4(2x-6)>2x-7; \\ 11x-17(1+2x)<11-14x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x-9-3(4x-12)\le 2x+17; \\ 14(x-1)-19x+31>1-2x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9(x+2)-7,2(2x+1)\ge 1,8+0,9x; \\ 10x-6,5(x-2)<1,5x+1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3,5-(y-1,5)\le 6-4y; \\ y(y-2)-(y^2+4)<1-6y. \end{cases}$

172. а) $\begin{cases} 11x-5(2+3x)>x-8; \\ 7(1-2x)+10x<1-4x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 11-3,2(x-0,5)<2,8x+3; \\ 4,5x-3(x-1,5)<13+0,8x. \end{cases}$

173. а) $\begin{cases} \dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{6}<5; \\ 3-\dfrac{a}{4}\ge 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y-\dfrac{2y-1}{3}<4; \\ \dfrac{y-1}{5}\le 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-x\le 4; \\ 2x-\dfrac{x}{3}\ge 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2y-\dfrac{y+5}{3}<6; \\ \dfrac{y}{2}-\dfrac{y}{8}\ge 2. \end{cases}$

174. а) $\begin{cases} \dfrac{a-3}{3}-\dfrac{a-2}{2}<1; \\ 4-\dfrac{a}{2}\ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5-\dfrac{3y-1}{4}\ge 1; \\ \dfrac{6y-1}{8}<1. \end{cases}$

175. а) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}(2-3x)+0,5>3; \\ 1,6-\dfrac{2}{3}(6x-1)<0,6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2}{7}x+11<3x-8; \\ 12+2,5x>3,3x+2. \end{cases}$

176. а) $\begin{cases} 17-\dfrac{2}{9}(18x+1)>5x+1\dfrac{7}{9}; \\ 4x-1,1>9x+2,4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7-0,6(5x+2)<10; \\ 1,2x+3>2,8x-1,8. \end{cases}$

177. При каких значениях аргумента значения функции $y=\dfrac{6x+1}{5}$ принадлежат промежутку $[-3; 1]$?

178. При каких значениях аргумента значения функции $y = \dfrac{1-4x}{3}$ больше -2, но меньше 4?

Решите неравенство:

179. **а)** $(x-3)(x+1) < 0$; **б)** $(x-1)(2x+5) \geq 0$;

в) $\dfrac{x+2}{x-3} > 0$; **г)** $\dfrac{1-2x}{4-2x} \leq 0$.

180. **а)** $(x-2)(2x-5) < 0$; **б)** $\dfrac{x+3}{x-1} \geq 0$.

181. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{2x+10} - \sqrt{9-3x}$; **б)** $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{5-4x}$.

182. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{3-5x} + \sqrt{x+9}$; **б)** $\sqrt{x-8} - \sqrt{3x-6}$?

183. Поезд движется с некоторой скоростью. Если он увеличит скорость на 10 км/ч, то за 4 ч пройдет меньше, чем 260 км. Если же он уменьшит скорость на 5 км/ч, то за 5 ч пройдет больше, чем 240 км. Какой могла быть скорость поезда?

Уровень В

184. Решите неравенство:

а) $|x| + |4x-1| < 3$; **б)** $|2x+5| - |3x-6| > 4$;

в) $3x + |x-1| \leq 7$; **г)** $|6-3x| - (3x-5) > 1$.

185. Решите систему неравенств с параметром a:

а) $\begin{cases} x + a < 5; \\ 3x < 3a; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 4x + a \geq 1; \\ 5x - a < 8. \end{cases}$

186. Смешали 2 кг 30%-го раствора серной кислоты с 3 кг другого раствора этой же кислоты и получили раствор, процентное содержание в котором серной кислоты больше 36%, но меньше 42%. Сколько процентов серной кислоты содержал второй раствор?

Упражнения для повторения

187. Найдите значение функции $y = 4 - 2x^2$ при $x = 0$; $x = -3$; $x = 3$. Проходит ли график этой функции через точку $A(4; -28)$?

188. Постройте график функции:

а) $y = 2x - 2$; б) $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

189. Найдите значение k, при котором графики функций $y = kx + 4$ и $y = 0{,}5x - 2$ пересекаются в точке, расположенной на оси абсцисс.

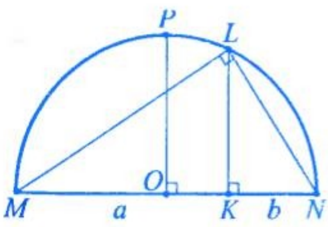
190. Найдите три последовательных натуральных числа, если известно, что сумма квадратов наименьшего и наибольшего чисел в 5 раз больше третьего числа.

Интересно знать

Как известно, возникновение чисел обусловлено потребностями практической деятельности человека. Применение чисел требовало умения их сравнивать. Делать это люди научились много тысячелетий назад.

Еще в «Началах» Евклида сугубо геометрически было обосновано неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где a и b рассматривались как длины отрезков.

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию неравенства $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a > 0$, $b > 0$.



На отрезке MN длиной $a + b$ как на диаметре построим полуокружность, O — ее центр, $MK = a$, $KN = b$. Проведем перпендикуляры PO и LK к прямой MN, где P и L — точки полуокружности. Треугольник MLN — прямоугольный ($\angle L = 90°$), LK — его высота, поэтому $LK = \sqrt{MK \cdot KN} = \sqrt{ab}$.

Отрезок PO — радиус полуокружности, поэтому $PO = \frac{1}{2}MN = \frac{a+b}{2}$.

Поскольку $PO \geq LK$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Это известное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел, которое можно распространить на случай большего количества чисел, называют еще *неравенством Коши*.

Огюсте́н Луи́ Коши́ — известный французский математик. Он является автором более 800 работ по арифметике и теории чисел, алгебре, математическому анализу, теоретической и небесной механике, математической физике и т. п. Были периоды, когда Коши каждую неделю подавал в Парижскую Академию наук новую математическую работу. Скорость, с какой Коши переходил от одного предмета к другому, позволила ему проложить в математике немало новых путей. Многие теоремы, определения, признаки носят его имя.

Огюстен Луи Коши
(1789 – 1857)

Приведем еще два известных неравенства, которые, как и неравенство Коши, используют для доказательства многих математических утверждений, в частности, для доказательства других неравенств.

Неравенство Коши — Буняковского:

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ — любые действительные числа.

О В. Я. Буняковском читайте в рубрике «Отечественные математики».

Неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

где $x \geq -1$, n — натуральное число.

Якоб Берну́лли — швейцарский математик, профессор Базельского университета. Основные его работы посвящены математическому анализу, но особое внимание ученый уделял теории вероятностей. Немало теорем названы его именем. Бернулли положил начало одному из разделов прикладной математики — математической статистике.

Якоб Бернулли
(1654 – 1705)

Вопросы и упражнения для повторения §1

1. Когда число a больше числа b, меньше числа b, равно числу b?
2. Как расположены на координатной прямой точки, соответствующие числам a и b, если $a < b$; $a > b$?
3. Какие неравенства называют строгими; нестрогими?
4. Сформулируйте свойства числовых неравенств. Докажите их.
5. Сформулируйте свойство сложения числовых неравенств, докажите его.
6. Сформулируйте свойства умножения числовых неравенств, докажите его.
7. Сформулируйте следствие из свойства умножения числовых неравенств.
8. Приведите примеры неравенств с одной переменной.
9. Что называют решением неравенства с одной переменной? Что значит решить такое неравенство?
10. Приведите примеры числовых промежутков.
11. Какие неравенства называют равносильными?
12. Сформулируйте свойства равносильности неравенств.
13. Когда неравенства с одной переменной образуют систему неравенств?
14. Что называют решением системы неравенств с одной переменной?
15. Назовите шаги решения системы линейных неравенств с одной переменной.

Докажите неравенство:

191. а) $(4a+3)^2 \geq 48a$; б) $4(b+2) < (b+3)^2 - 2b$;

в) $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$; г) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$;

д) $\dfrac{m^2+n^2}{2} \geq m+n-1$; е) $\dfrac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2$.

192. а) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{a}\right) \geq 4$, если $a > 0$, $b > 0$;

б) $\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\left(1+\dfrac{y}{z}\right)\left(1+\dfrac{z}{x}\right) \geq 8$, если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

в) $x^2 + y^2 \geq 8$, если $x + y = 4$;

г) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$; д) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

193. Выделив из трехчлена квадрат двучлена, докажите неравенство:

а) $x^2 + 4x + 5 > 0$; **б)** $a^2 - 10a + 30 > 0$;

в) $x^2 + 2xy + 2y^2 \geq 0$; **г)** $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

194*. В каком случае катер затратит больше времени: если пройдет 30 км по течению реки и 30 км против течения или если пройдет 60 км в стоячей воде?

195*. Два катера, имеющие одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум разным рекам одинаковое расстояние по течению реки и возвращаются в те пункты, из которых вышли. В какой реке на это движение потребуется больше времени: в реке с быстрым течением или в реке с медленным течением?

196*. Докажите, что для любого треугольника ABC выполняется неравенство $AB + BC - AC < 2BM$, где M — произвольная точка стороны AC.

197. Оцените значение выражения:

а) $a - 2b$, если $-3 < a < -2{,}5$; $1{,}5 < b < 2$;

б) $\dfrac{a}{5} + 3b$, если $1 < a < 1{,}2$; $0{,}3 < b < 0{,}4$.

198. Оцените длину l средней линии трапеции с основаниями a и b, если $7{,}4 < a < 7{,}5$ и $4{,}8 < b < 4{,}9$.

199. Отметьте на координатной прямой промежуток:

а) $[-1{,}5; 2)$; **б)** $[3; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -7]$; **г)** $(2; 7)$.

Назовите, если возможно, наибольшее и наименьшее числа, принадлежащие заданному промежутку.

200. Является ли число 1,999 решением неравенства $x < 2$? Найдите любое число больше 1,999, удовлетворяющее данному неравенству.

Решите неравенство:

201. **а)** $11(x + 7) - 14x < 37 + 13x$; **б)** $0{,}3x - 1{,}1(4 - 2x) \geq 7{,}5x + 1{,}6$;

в) $\frac{1}{3}(1-9x)-\frac{2}{5}(4-10x)<4\frac{1}{3}+2x$; **г)** $(y - 5)(y + 3) - y^2 > 3y + 17$.

202. **а)** $\dfrac{2y-1}{2}+\dfrac{5y}{6}-\dfrac{3y-1}{3}<1$; **б)** $\dfrac{2a+9}{5}-\dfrac{9a}{10}>a$;

в) $\dfrac{11-3x}{3}+\dfrac{8+3x}{2}\geq 3$; **г)** $\dfrac{1+2y}{4}-1<\dfrac{4y-5}{8}$.

203. **а)** $|x - 3| < 18$; **б)** $|2x + 7| \geq 9$;

в) $1 - |x + 2| < 2(|x + 2| + 5)$; **г)** $|1 - 4x| + |x| \leq -2$.

204. Найдите все натуральные числа, удовлетворяющие неравенству:

а) $8 - 3(x + 1) > -10$; **б)** $7 - 3y \geq 2y - 23$.

205. При каких значениях x значение дроби $\frac{12-5x}{3}$ больше соответствующего значения дроби $\frac{4x+5}{2}$?

206. Найдите все значения a, при которых уравнение имеет отрицательный корень:

а) $5x-2a=0$; **б)** $x-7=3a$;

в) $x+9=4a+3$; **г)** $1-2x=3a+5$.

207. Ученику нужно купить книгу, которая стоит 3 грн. 20 к., и несколько тетрадей по 80 к. Какое наибольшее количество тетрадей может купить ученик, если у него есть 9 грн.?

208. Из Киева в Ровно выехал автобус и двигался со скоростью 70 км/ч, а через час вслед за ним выехал автомобиль. С какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы догнать автобус до его прибытия в Ровно, если расстояние между этими городами 320 км?

Решите систему неравенств:

209. а) $\begin{cases}3x+4>x+2;\\-7x<1;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}5-2x\le 9;\\10-3x<7-1,2x;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2+3<0;\\3x-2(x+7)<9x;\end{cases}$ **г)** $\begin{cases}3x^2+5>0;\\2,5x-0,15\le 0,6x+0,8;\end{cases}$

д) $\begin{cases}3x+2,4<\dfrac{x-11}{5};\\7x+1>\dfrac{2-21x}{2};\end{cases}$ **е)** $\begin{cases}5(x-3)(x+3)\ge 9x+5x^2;\\x+3<\dfrac{6x}{7}+2;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}\dfrac{x}{7}+1<\dfrac{2x}{3}+4;\\1,4+\dfrac{x}{5}\le x;\end{cases}$ **з)** $\begin{cases}(2x-1)^2+5>4x^2+3x;\\0,6(x-5)+1,4x<6x-1.\end{cases}$

210*. а) $\begin{cases}3x>0;\\-2x<0;\\x+5>0;\end{cases}$ **б)** $\begin{cases}4x<0;\\5x>0;\\x-7<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}5x<10;\\-2x<0;\\2x^2+3>0;\end{cases}$ **г)** $\begin{cases}x+5<0;\\3x>-27;\\-2x>12;\\x<0.\end{cases}$

211. Найдите множество неотрицательных чисел, удовлетворяющих систему неравенств:

а) $\begin{cases} 7y-2(y-6)>5y+9; \\ 12y-2(3-2y)<2(y-2); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{9+y}{9}-\dfrac{2y-1}{3}<0; \\ 1-\dfrac{y+4}{9}<0. \end{cases}$

212. Решите двойное неравенство:

а) $-3 \le 2x+5<1$;

б) $3<2-x<9$;

в) $-1<\dfrac{3+2y}{5}\le 3$;

г) $2<\dfrac{1-x}{7}<3$.

213. Решите неравенство:

а) $(x-2)(2x-3)\le 0$;

б) $(3-x)(4-2x)>0$;

в) $\dfrac{6+2y}{y}<0$;

г) $\dfrac{1-x}{7-2x}\ge 0$;

д) $|x+2|+|x-2|<6$;

е) $|4x+2|-|x-6|>1$.

214. Длина прямоугольного участка 12 м. Если ширину этого участка увеличить на 1,5 м, то площадь станет больше 90 $м^2$. Если же ширину участка уменьшить на 0,5 м, то площадь станет меньше 72 $м^2$. Какой может быть ширина участка?

215. Бак имеет форму прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат со стороной 2 м. Если высоту бака увеличить на 0,6 м, то объем все же будет меньше 24 $м^3$. Если же высоту бака уменьшить на 0,2 м, то объем будет больше 20 $м^3$. Какой может быть высота этого бака?

Задания для самопроверки № 1

Уровень 1

1. Известно, что $a < b$. Какому из чисел может быть равна разность $a - b$:
а) 6; **б)** 0,03; **в)** –1,2; **г)** 0?

2. Известно, что $x > y$. Укажите верные неравенства:
а) $x - 2 > y - 2$; **б)** $-x > -y$; **в)** $5x < 5y$; **г)** $2x + 1 > 2y + 1$.

3. Решением какого неравенства является число –3:
а) $5x + 1 > 0$; **б)** $-x + 7 > 0$; **в)** $-2x - 1 < 0$; **г)** $x + 8 < 0$?

4. Какой промежуток отмечен на рисунке:

а) $(-\infty; 3)$; **б)** $(-3; +\infty)$; **в)** $[3; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -3]$?

5. Множеством решений неравенства $3x + 6 < 0$ является:
а) $(-\infty; -2]$; **б)** $(-\infty; -2)$; **в)** $(-2; +\infty)$; **г)** $[-2; +\infty)$.

6. Множеством решений системы неравенств $\begin{cases} 3x+1 \le 7; \\ 2x > -2 \end{cases}$ является:

а) $(-\infty; -1)$; **б)** $[-1; 2]$; **в)** $(-1; 2]$; **г)** $[2; +\infty)$.

Уровень 2

7. Сравните числа:

а) $2\frac{1}{3}$ и $2\frac{2}{7}$; **б)** $-0{,}5$ и $-\frac{5}{9}$.

8. Известно, что $a < b$. Используя разные свойства числовых неравенств, запишите 3 верных неравенства.

9. Измерив длину a и ширину b прямоугольника (в сантиметрах), нашли, что $2{,}1 < a < 2{,}2$ и $1{,}7 < b < 1{,}8$. Оцените:
а) периметр прямоугольника; **б)** площадь прямоугольника.

10. Отметьте на координатной прямой промежуток:
а) $(4; 7]$; **б)** $(3; +\infty)$.

11. Решите неравенство:
а) $-3x < 12$; **б)** $5 + 4x > 6$.

12. Решите систему неравенств $\begin{cases} 6y > -24; \\ 2y + 3 < 8. \end{cases}$

Уровень 3

13. Докажите неравенство:

а) $(3m-1)(3m+1) > 9m^2 - 7$; б) $x^2 + 8x + 19 > 0$.

14. Зная, что $4 \le x \le 5$, $2 \le y \le 3$, оцените значение выражения:

а) $x + y$; б) $3x - 0{,}5y$.

15. Решите неравенство:

а) $4(3x+1) - (8x+5) < 1 + 4x$; б) $\dfrac{11-3x}{2} + x < 0$.

16. Решите двойное неравенство $-1 < \dfrac{4x-3}{2} \le 0$.

17. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3+3{,}2x \ge 7-1{,}8x; \\ 5+6x \ge 4{,}5+4x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{y}{2} > 5; \\ 2y - \dfrac{y+1}{3} > 3. \end{cases}$

18. Туристы должны пройти некоторое расстояние на моторной лодке по течению реки и вернуться. Скорость течения реки 3 км/ч, скорость лодки в стоячей воде 15 км/ч. На какое расстояние могут отойти туристы, чтобы прогулка длилась больше 3 ч, но меньше 4 ч?

Уровень 4

19. Докажите неравенство:

а) $(a^2+1)(a^4+1) \ge 4a^3$; б) $a^2 + 2b^2 + 3 \ge 2a + 4b$.

20. Зная, что $0{,}6 \le a \le 0{,}7$, $0{,}4 \le b \le 0.5$, оцените значение выражения:

а) $a^2 - b^2$; б) $\dfrac{a}{b}$.

21. Решите неравенство:

а) $|3x - 0{,}5| \le 3{,}5$; б) $|2x + 1| > 1$.

22. Найдите целые решения системы неравенств $\begin{cases} 0{,}2(5x-1) + \dfrac{1}{3}(3x+1) < x + 5{,}8; \\ 8x - 7 - \dfrac{1}{6}(6x-2) > x. \end{cases}$

23. Найдите область определения функции:

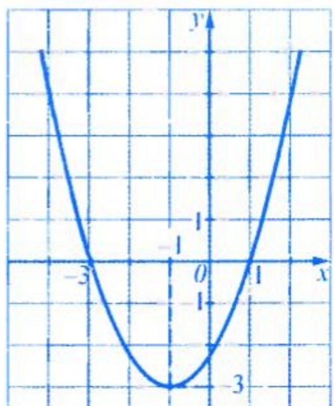
а) $y = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-3x}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{3x-4}}{x-2}$.

24. Два туриста прошли путь из пункта A в пункт B. Первый турист первую половину времени двигался со скоростью v_1, а вторую половину времени — со скоростью v_2. Второй же турист первую половину пути шел со скоростью v_1, а вторую половину пути — со скоростью v_2. Кто из них затратил меньше времени на путь из пункта A в пункт B, если $v_1 \ne v_2$?

§ 2 КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Моделируя реальные процессы при помощи функций, довольно часто приходят к так называемой квадратичной функции, частичным случаем которой является уже изученная функция $y = x^2$.

В этом параграфе мы изучим: что такое квадратичная функция, каковы ее свойства и график; что такое квадратичное неравенство, как решать квадратичные неравенства, исходя из свойств квадратичной функции.



8. Функция. Область определения, область значений, график функции

В 7 классе мы начали изучать одно из важнейших понятий математики — понятие функции.

1. Что такое функция. Напомним, что переменную y называют функцией от переменной x, если *каждому* значению переменной x соответствует *единственное* значение переменной y. При этом переменную x называют *независимой переменной*, или *аргументом*, а переменную y — *зависимой переменной*, или *функцией* (от аргумента x).

Если переменная y является функцией от аргумента x, то записывают: $y = f(x)$ (читают: y равно f от x). Значение функции при $x = x_0$ обозначают через $f(x_0)$. Так, если функция задана формулой $y = 2x - 3$, то можно записать: $f(x) = 2x - 3$. Тогда, например, $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, $f(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5 - 3 = 2$.

2. Область определения и область значений функции. Множество значений, которые принимает независимая переменная (аргумент), называют *областью определения* функции; множество значений, которые принимает зависимая переменная (функция), называют *областью значений* функции.

Область определения функции $y = f(x)$ обозначают $D(f)$ или $D(y)$, а область значений — $E(f)$ или $E(y)$.

Так, областью определения линейной функции $f(x) = 2x$ является множество всех действительных чисел, то есть $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Множеством значений этой функции также является множество всех действительных чисел: $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

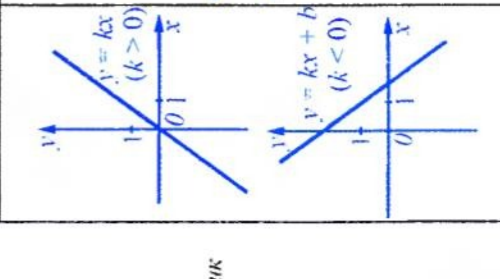
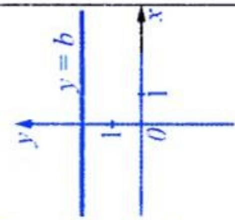
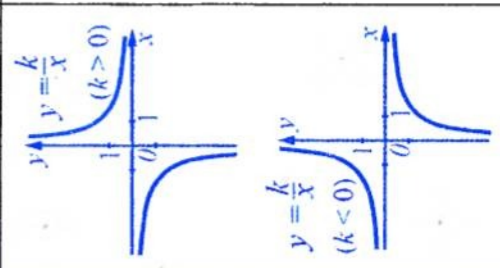
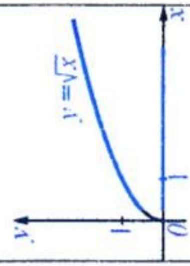
Если функция задана формулой $y = f(x)$ и не указано, какие значения может принимать аргумент, то считают, что областью определения функции является множество всех действительных чисел, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Если выражение $f(x)$ является многочленом, то областью определения функции $y = f(x)$ является множество всех действительных чисел; если $f(x)$ — рациональная дробь, то областью определения функции является множество всех действительных чисел, кроме тех значений x, при которых знаменатель дроби равен нулю; если функция задана формулой $y = \sqrt{f(x)}$, то областью определения функции является множество всех действительных чисел, при которых выполняется неравенство $f(x) \geq 0$.

Рассмотрим, например, функцию $y = \dfrac{2}{x-3}$. Выражение $\dfrac{2}{x-3}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме $x = 3$. Поэтому областью определения этой функции является множество всех действительных чисел, кроме $x = 3$, то есть $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

3. График функции. *Графиком* функции называют фигуру, состоящую из всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны всем значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Графики функций, которые мы изучали в 7 и 8 классах, а также их области определения и области значений приведены в таблице.

Функция	$y = kx + b$, $k \neq 0$	$y = kx + b$, $k = 0$	$y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$	$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$
Область определения	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Область значений	$(-\infty; +\infty)$	b	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
	прямая	прямая	гипербола	парабола	ветвь параболы
График					

На рисунке 18 изображен график функции $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-2; 4]$. Точка $M(2; 4)$ принадлежит графику. Это значит, что при $x = 2$ значение функции равно 4: $f(2) = 4$.

Очевидно, что наименьшее значение функции равно -1. Это наименьшее значение функция принимает при $x = 4$. Наибольшее значение функции равно 5 и достигается при $x = 0$. Областью значений функции является промежуток $[-1; 5]$.

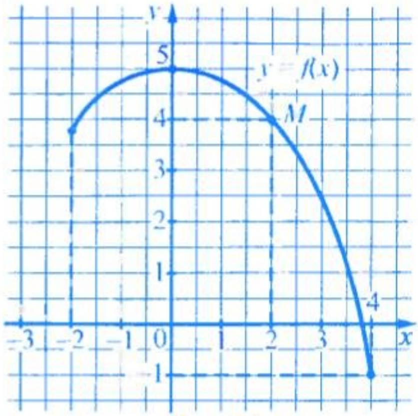


Рис. 18

Для тех, кто хочет знать больше

4. Задание функции несколькими формулами. Существуют функции, которые на отдельных частях области определения задаются разными формулами. Например, если функция $y = f(x)$ задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } x \le -1; \\ x^2, & \text{если } -1 < x \le 2; \\ 4, & \text{если } x > 2, \end{cases}$$

то это значит, что при $x \le -1$ значения функции нужно искать по формуле $f(x) = 2x + 3$, при $-1 < x \le 2$ — по формуле $f(x) = x^2$, а при $x > 2$ — по формуле $f(x) = 4$.

Так, $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$; $f(1) = 1^2 = 1$; $f(5) = 4$.

Чтобы построить график такой функции (см. рис. 19), достаточно на промежутке $(-\infty; -1]$ построить график функции $y = 2x + 3$, на промежутке $(-1; 2]$ — график функции $y = x^2$ и на промежутке $(2; +\infty)$ — график функции $y = 4$.

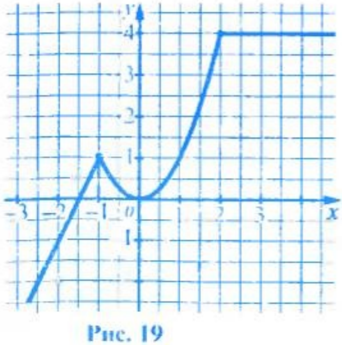


Рис. 19

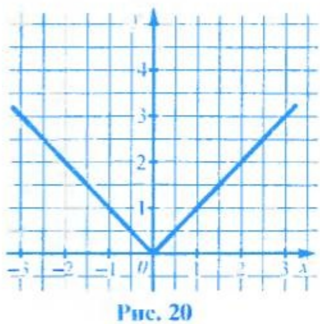


Рис. 20

Описанным способом можно задать и функцию $y = |x|$:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График функции $y = |x|$ изображен на рисунке 20.

5. График функции, формула которой содержит аргумент под знаком модуля. Построим график функции $y = |x - 1| + |x + 1|$.

Найдем значения x, при которых значения выражений $x - 1$ и $x + 1$, стоящих под знаком модуля, равны нулю:

$x - 1 = 0$; $x = 1$; $\qquad\qquad x + 1 = 0$; $x = -1$.

Значения $x = -1$ и $x = 1$ разбивают координатную прямую на три промежутка (см. рис. 21).

Рис. 21

Учитывая определение модуля числа, получим:

если $x < -1$, то $x - 1 < 0$, $x + 1 < 0$, поэтому $|x - 1| = -(x - 1)$, $|x - 1| = -(x + 1)$ и

$$y = -(x - 1) - (x + 1) = -2x;$$

если $-1 \leq x < 1$, то $x - 1 < 0$, $x + 1 \geq 0$ и $y = -(x - 1) + (x + 1) = 2$;

если $x \geq 1$, то $x - 1 \geq 0$, $x + 1 > 0$ и $y = (x - 1) + (x + 1) = 2x$.

Чтобы получить график заданной функции, строим на промежутке $(-\infty; -1)$ график функции $y = -2x$, на промежутке $[-1; 1)$ — график функции $y = 2$ и на промежутке $[1; +\infty)$ — график функции $y = 2x$. Искомый график изображен на рисунке 22.

Рис. 22

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Найти область определения функции $y = \sqrt{4 - 2x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

• Область определения функции образуют те значения x, при которых выражение $4 - 2x$ принимает неотрицательные значения, а выражение $2x$ — положительные значения. Следовательно, нужно решить систему неравенств $\begin{cases} 4 - 2x \geq 0; \\ 2x > 0. \end{cases}$ Получим:

$$\begin{cases} -2x \geq -4; \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2; \\ x > 0. \end{cases}$$

Областью определения функции является промежуток (0; 2].

Ответ. (0; 2]. •

Устно

216. Функция задана формулой $f(x) = \dfrac{15}{x}$.

а) Найдите значение функции при $x = 1$; $x = 3$.

б) Укажите область определения функции.

217. Функция задана формулой $f(x) = x^2$, где $-1 \leq x \leq 4$.

а) Найдите: $f(1)$; $f(3)$. **б)** Укажите область определения функции.

218. Функция $y = f(x)$ задана таблицей:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-1	0	-1	-4

а) Найдите: $f(-1)$; $f(2)$.

б) При каких значениях аргумента значение функции равно -4?

в) Укажите область определения и область значений функции.

219. На рисунке 23 изображен график функции $y = f(x)$.

а) Найдите: $f(-3)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$.

б) Укажите область определения и область значений функции.

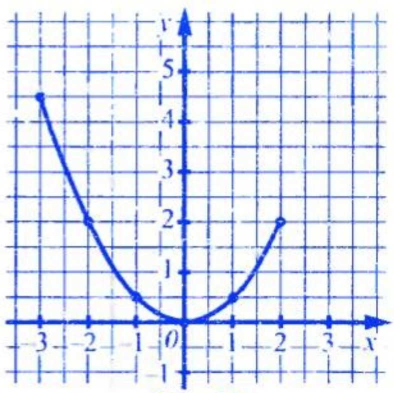


Рис. 23

220. Какова область определения функции, заданной формулой:

а) $y = 2x^2 + 1$, где $0 \leq x \leq 1$; **б)** $y = -x + 5$;

в) $y = \dfrac{3}{x-1}$; **г)** $y = 2\sqrt{x}$?

Уровень А

221. Функция задана формулой $f(x) = 2x^2 - 2$. Найдите: $f(0)$; $f(-3)$; $f(4)$.

222. Функция задана формулой $f(x) = 5 - x^2$. Найдите: $f(-1)$; $f(1)$; $f(10)$.

223. Найдите значение функции $y = \dfrac{x+5}{x-3}$ при $x = -1$.

224. Функция задана формулой $f(x) = 6x - 1$. Найдите значения x, при которых:
а) $f(x) = 11$; б) $f(x) > -19$.

225. Функция задана формулой $f(x) = 3x + 2$. Найдите значения x, при которых:
а) $f(x) = 17$; б) $f(x) < -4$.

Проходит ли график функции через данную точку:

226. а) $y = 4x - 5$; $A(3; 6)$; б) $y = x^2 - 3x$; $B(2; -2)$?

227. а) $y = 2x + 8$; $M(4; 16)$; б) $y = 4x - x^2$; $N(2; 2)$?

Найдите область определения функции:

228. а) $y = \dfrac{3}{2x-8}$; б) $y = \dfrac{4}{x^2-36}$; в) $y = \sqrt{x-8}$; г) $y = \sqrt{2-x}$.

229. а) $y = \dfrac{4}{9-3x}$; б) $y = \dfrac{5}{x^2-64}$; в) $y = \sqrt{4-x}$; г) $y = \sqrt{2x+8}$.

Постройте график функции:

230. а) $y = -3x$; б) $y = 2x - 3$; в) $y = 5 - 4x$; г) $y = -\dfrac{1}{3}x$.

231. а) $y = 2x$; б) $y = -x + 3$; в) $y = -\dfrac{1}{2}x$.

Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций без построения самих графиков:

232. а) $y = x^2$ и $y = 5x - 4$; б) $y = x^2 - x$ и $y = -x + 9$.

233. $y = 2 - x$ и $y = x^2$.

234. Найдите координаты точки пересечения графика функции $y = -3x + 9$ с осью абсцисс; осью ординат.

235. Найдите координаты точки пересечения графика функции $y = 2x + 16$ с осью абсцисс; осью ординат.

Уровень Б

Найдите область определения функции:

236. **а)** $y = \dfrac{1}{2x-4} + \dfrac{1}{x+3}$; **б)** $y = \dfrac{1}{x^2-5x+6}$;

в) $y = \sqrt{-2x-8}$; **г)** $y = \sqrt{1-4x}$;

д) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$; **е)** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

237. **а)** $y = \dfrac{2x+1}{x^2+8x-9}$; **б)** $y = \sqrt{4-3x}$; **в)** $y = \sqrt{5x+1}$.

238. Постройте графики функций $y = -\dfrac{6}{x}$ и $y = 4 - 2x$. Найдите координаты точек пересечения этих графиков.

239. Постройте графики функций $y = \dfrac{4}{x}$ и $y = x - 3$. Найдите координаты точек пересечения этих графиков.

240. При каких значениях аргумента значение функции $y = x^2 + 6x - 2$ равно: **а)** 5; **б)** –11; **в)** –15?

241. При каких значениях аргумента значение функции $y = x^2 - 2x + 5$ равно: **а)** 8; **б)** 4; **в)** –1?

242. Принадлежит ли число 5 области значений функции $y = 3x^2 - 2x + 6$?

243. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $M(-1; -2)$ и $N(2; 4)$. Найдите k и b.

244. Воду некоторое время нагревали. Зависимость ее температуры t (в °С) от времени τ (в минутах) задана так: $t(\tau) = \begin{cases} 12\tau + 16, & \text{если } 0 \le \tau \le 7; \\ 100, & \text{если } 7 < \tau \le 10; \\ -2\tau + 120, & \text{если } 10 < \tau \le 16. \end{cases}$

а) Найдите: $t(5)$, $t(9)$, $t(15)$, начальную и конечную температуры воды.

б) Какой физический смысл имеет процесс, описываемый функцией $t(\tau)$?

в) Постройте график функции $t(\tau)$, выбрав удобные масштабы на осях координат.

245. Тело движется прямолинейно. Зависимость пройденного им пути s (в метрах) от времени t (в секундах) задана так: $s(t) = \begin{cases} 2{,}5t, & \text{если } 0 \le t \le 2; \\ 5, & \text{если } 2 < t \le 4; \\ 3t - 7, & \text{если } 4 < t \le 6. \end{cases}$

а) Найдите: $s(1)$; $s(2)$; $s(3{,}5)$; $s(4)$; $s(6)$.

б) С какой скоростью двигалось тело в течение первых двух секунд; между второй и четвертой секундами движения; между четвертой и шестой секундами движения? Является ли движение тела равномерным?

в) Постройте график функции $s(t)$.

Уровень В

246. Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{1-0,1x}}-\sqrt{3x+2}$; **б)** $y=\dfrac{x}{\sqrt{3x+2}}+\dfrac{1}{|x|-3}$.

Постройте график функции:

247. **а)** $y=\dfrac{x-2}{x^2-2x}$; **б)** $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}+\dfrac{x^2+x}{x+1}$;

в) $y=\sqrt{x^2}-3x$, где $x\geq 0$; **г)** $y=\sqrt{x^2}+3x$, где $x\leq 0$.

248. **а)** $y=\begin{cases}x^2, & \text{если } x\geq -1;\\ x+2, & \text{если } x<-1;\end{cases}$ **б)** $y=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & \text{если } x\leq -2 \text{ или } x\geq 2;\\ x, & \text{если} -2<x<2.\end{cases}$

249. **а)** $y=|2x-4|+|2x+2|$; **б)** $y=|x-3|-|x-2|$;

в) $y=|x-1|+|3x+1|$; **г)** $y=|x+1|-|2x-4|$.

250. Дана функция $f(x)=\begin{cases}4x+12, & \text{если } x\leq -2;\\ x^2, & \text{если } -2<x<1;\\ 1, & \text{если } x\geq 1.\end{cases}$

а) Постройте график этой функции.

б) Решите уравнение $f(x)=2$.

251. **а)** Постройте график функции $y=|x-4|+|x+2|$.

б) Найдите все значения a, при которых уравнение $|x-4|+|x+2|=a$ имеет два корня; не имеет корней. Существуют ли значения a, при которых уравнение имеет только один корень?

Упражнения для повторения

252. За 300 г конфет и 500 г печенья заплатили 7 грн. 60 к. Сколько стоит 1 кг конфет и сколько 1 кг печенья, если 4 кг конфет дороже 5 кг печенья на 8 грн.?

253. *Задача из «Азбуки» Л. Н. Толстого.* К бочке подведены две трубы, из обеих труб вода течет в бочку. Из одной трубы вода наполняет бочку за 24 мин, из другой — за 15 мин. Еще в бочке есть дырка; через дырку вся вода из полной бочки вытечет за 2 ч. Наполнится ли бочка и как быстро, если пустить воду из обеих труб и вода будет вытекать из дырки?

254. Решите уравнение:

а) $\frac{4}{x+3}=-2x$; б) $\frac{36}{x-15}+\frac{36}{x+15}=1$; в) $\frac{3}{x+3}-\frac{5x}{x-1}=-1$.

255*. Один из корней уравнения $x^3+2x^2-9x+a=0$ равен -2. Найдите остальные корни этого уравнения.

9. Свойства функций

1. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Рассмотрим функцию $y=f(x)$, график которой изображен на рисунке 24. При $x=-1$, $x=4$ или $x=6$ значения функции равны нулю. Такие значения аргумента x называют *нулями функции*.

Определение **Значения аргумента, при которых значение функции равно нулю, называют нулями функции.**

Нулем функции $y=x-2$ является только одно значение x, а именно: $x=2$, так как значение функции равно нулю только при $x=2$.

Чтобы найти нули функции $y=f(x)$, нужно решить уравнение $f(x)=0$.

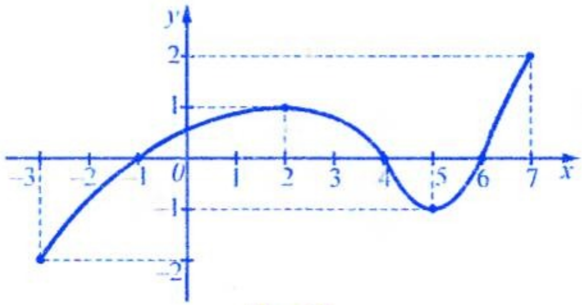


Рис. 24

Функция $y=f(x)$, график которой изображен на рисунке 24, на промежутках $[-3;-1)$ и $(4;6)$ принимает только отрицательные значения, а на промежутках $(-1;4)$ и $(6;7]$ — только положительные значения. Все эти промежутки называют *промежутками знакопостоянства* функции $y=f(x)$.

2. Возрастание, убывание функции. Рассмотрим график функции $y=f(x)$ на рисунке 24. На промежутке $[-3;2]$ график «идет вверх»: при увеличении значений x из этого промежутка соответствующие значения функции увеличиваются. Например, возьмем значения аргумента $x_1=-3$ и

$x_2 = -1$, тогда $x_2 > x_1$. Так как $f(x_1) = f(-3) = -2$, а $f(x_2) = f(-1) = 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$. Большему значению аргумента (x_2) соответствует большее значение функции ($f(x_2)$). Говорят, что на промежутке $[-3; 2]$ функция $y = f(x)$ *возрастает* (или *является возрастающей*). Такова же она и на промежутке $[5; 7]$.

На промежутке $[2; 5]$ график функции $y = f(x)$ «идет вниз»: при увеличении значений аргумента соответствующие значения функции уменьшаются. Говорят, что на этом промежутке функция $y = f(x)$ *убывает* (или *является убывающей*).

Определение

Функцию называют возрастающей на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функцию называют убывающей на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Если функция возрастает на всей области определения, то ее называют *возрастающей функцией*; если же функция убывает на всей области определения, то ее называют *убывающей функцией*.

Например, на рисунке 25 изображен график функции, областью определения которой является промежуток $[-1; 5]$. Эта функция является возрастающей, так как она возрастает на всей области определения. Функция, график которой изображен на рисунке 26, является убывающей, так как она убывает на всей области определения — промежутке $[-1; 5]$.

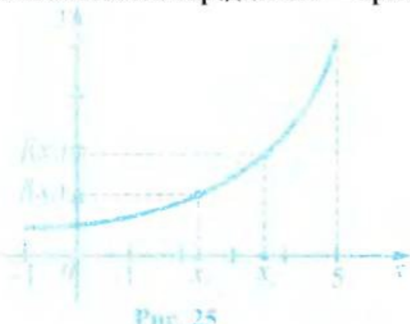


Рис. 25

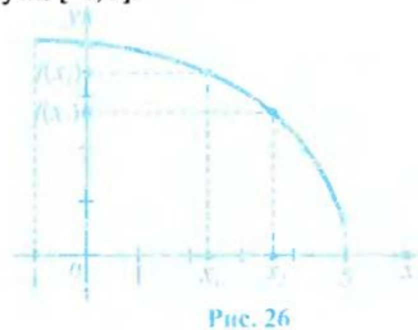


Рис. 26

Возрастающими, например, являются функции $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$ (их графики всегда «идут вверх»), а убывающими — функции $y = -2x$, $y = -x$ (их графики всегда «идут вниз»). Функция $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке 24, не является ни возрастающей, ни убывающей. Она только возрастает или убывает на отдельных промежутках.

Функция $y = \dfrac{k}{x}$, где $k > 0$, убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но не является убывающей. Действительно, она не убывает на всей области определения $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$, так как при $x_2 > x_1$ (см. рис. 27) имеем: $y_2 > y_1$.

Для тех, кто хочет знать больше

3. Четные и нечетные функции. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$, ее график изображен на рисунке 28. Так как для любого значения x выполняется равенство $(-x)^2 = x^2$, то $f(-x) = f(x)$. Функцию $f(x) = x^2$ называют *четной*.

Определение **Функцию $y = f(x)$ называют четной, если для любого значения x из области ее определения значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.**

Область определения четной функции симметрична относительно начала координат, так как вместе со значением x она содержит и значение $-x$.

График четной функции симметричен относительно оси y (см., например, рис. 28). поэтому для построения графика четной функции достаточно построить часть графика для $x \geq 0$, а потом симметрично отобразить эту часть относительно оси y.

На рисунке 29 изображен график функции $f(x) = x^3$. Так как для любого значения x выполняется равенство $(-x)^3 = -(x^3)$, то $f(-x) = -f(x)$. Функцию $f(x) = x^3$ называют *нечетной*.

Определение **Функцию $y = f(x)$ называют нечетной, если для любого значения x из области ее определения значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.**

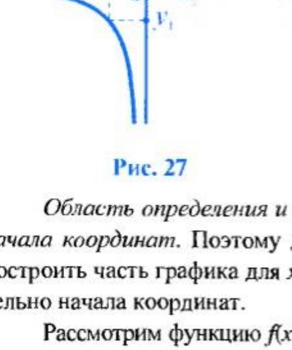


Рис. 27

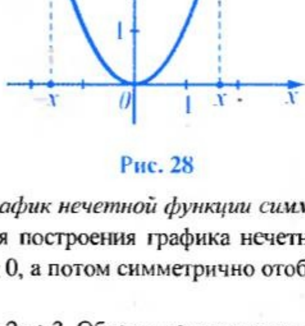


Рис. 28

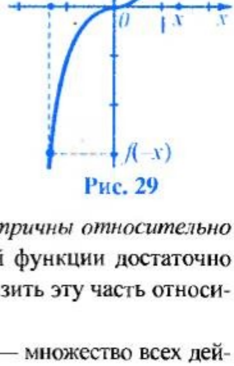


Рис. 29

Область определения и график нечетной функции симметричны относительно начала координат. Поэтому для построения графика нечетной функции достаточно построить часть графика для $x \geq 0$, а потом симметрично отобразить эту часть относительно начала координат.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2x + 3$. Область ее определения — множество всех действительных чисел — симметрична относительно начала координат. Для этой функции

$f(-x) = -2x + 3$. Равенства $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$ не выполняются для всех значений x, например, для $x = 1$ ($f(1) = 5$; $f(-1) = 1$; $f(-1) \neq f(1)$ и $f(-1) \neq -f(1)$). Эта функция не является ни четной, ни нечетной.

Функция $f(x) = \sqrt{x}$, где $x \geq 0$, также не является ни четной, ни нечетной, так как область определения функции (промежуток $[0; +\infty)$) не симметрична относительно начала координат.

Итог. *Чтобы исследовать функцию $y = f(x)$ на четность, нужно:*

1) *найти область определения функции и выяснить, симметрична ли она относительно начала координат;*

2) *если область определены симметрична относительно начала координат, то находим $f(-x)$:*

а) *если для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, то функция является четной;*

б) *если для любого значения x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, то функция является нечетной;*

в) *если хотя бы для одного значения x из области определения функции ни одно из этих равенств не выполняется, то функция не является ни четной, ни нечетной;*

3) *если область определения не симметрична относительно начала координат, то функция не является ни четной, ни нечетной.*

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Найти нули функции $y = x^2 - 8x + 12$.

• Решим уравнение $x^2 - 8x + 12 = 0$:

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 16; \quad x_1 = \frac{8-4}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{8+4}{2} = 6.$$

Таким образом, функция имеет два нуля: $x = 2$ и $x = 6$.

Ответ. 2; 6•

Упражнение 2. Доказать, что функция $y = x^2 - 1$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

• Пусть x_1 и x_2 — два произвольных значения аргумента из промежутка $[0; +\infty)$, причем $x_2 > x_1$, а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции, то есть $y_1 = x_1^2 - 1$, $y_2 = x_2^2 - 1$. Покажем, что $y_2 > y_1$. Для этого рассмотрим разность

$$y_2 - y_1 = (x_2^2 - 1) - (x_1^2 - 1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Так как $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Значения x_1 и x_2 принадлежат промежутку $[0; +\infty)$, поэтому $x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$ (поскольку $x_2 > x_1$) и $x_1 + x_2 > 0$.

Тогда:

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0; \quad y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0; \quad y_2 > y_1.$$

Большему значению аргумента из промежутка $[0; +\infty)$ соответствует большее значение функции. Следовательно, функция $y = x^2 - 1$ на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает.•

Упражнение 3. Четной или нечетной является функция:

а) $f(x) = x^3 + 3x$; **б)** $f(x) = x^4 + x^2$; **в)** $f(x) = x^3 + 1$?

Областью определения каждой из данных функций является множество всех действительных чисел. Поэтому область определения каждой функции симметрична относительно начала координат. Для любого значения x имеем:

а) $f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x = -(x^3 + 3x) = -f(x)$; функция $f(x) = x^3 + 3x$ является нечетной;

б) $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$; функция $f(x) = x^4 + x^2$ является четной;

в) $f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$. Возьмем $x = 1$ и найдем: $f(1) = 2$; $f(-1) = 0$. Видим, что $f(-1) \neq f(1)$ и $f(-1) \neq -f(1)$. Функция $f(x) = x^3 + 1$ не является ни четной, ни нечетной.

Ответ. **а)** Нечетная; **б)** четная; **в)** ни четная, ни нечетная.

Устно

256. На рисунке 30 изображен график функции $t = f(\tau)$, характеризующий изменение температуры тела в течение 7 минут.

а) В какие моменты времени температура тела равнялась 0 °C? Укажите нули функции $t = f(\tau)$.

б) В течение каких промежутков времени температура тела была положительной; отрицательной? На каких промежутках функция $t = f(\tau)$ принимает положительные значения; отрицательные значения?

в) В течение каких промежутков времени температура тела возрастала; убывала? На каких промежутках функция $t = f(\tau)$ возрастает; убывает?

г) Каково наибольшее (наименьшее) значение температуры тела? Каково наибольшее (наименьшее) значение функции $t = f(\tau)$?

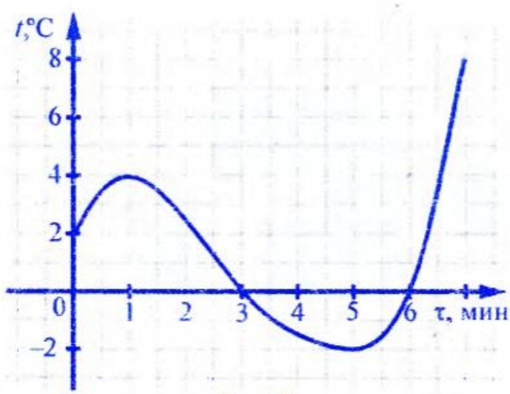


Рис. 30

Уровень А

257. На рисунке 31 изображен график функции $y=f(x)$, где $-2{,}5 \le x \le 4$. Укажите:

а) нули функции;

б) промежутки знакопостоянства функции;

в) промежутки, на которых функция возрастает; убывает;

г) наибольшее и наименьшее значения функции.

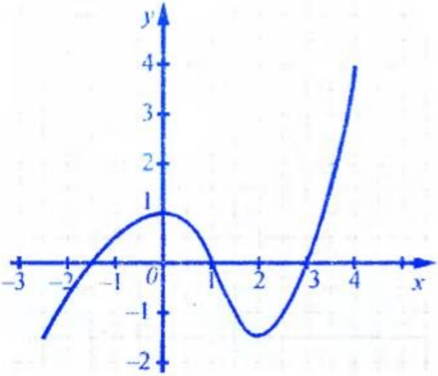


Рис. 31

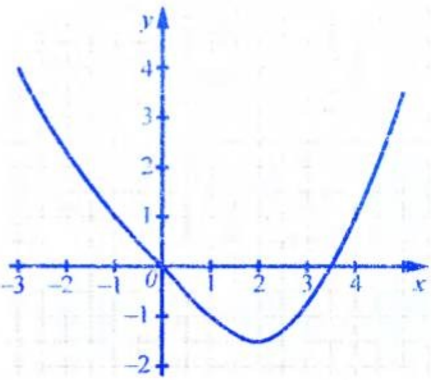


Рис. 32

258. На рисунке 32 изображен график функции $y=f(x)$, где $-3 \le x \le 5$. Укажите:

а) нули функции;

б) промежутки знакопостоянства функции;

в) промежутки, на которых функция возрастает; убывает.

Найдите нули функции:

259. **а)** $y = 2x - 4$; **б)** $y = 3 - 2x$; **в)** $y = (x-1)(x+2)$;

г) $y = x^2 - 6x + 8$; **д)** $y = \dfrac{x-1}{x-3}$; **е)** $y = \dfrac{x-1}{x^2-x}$.

260. **а)** $y = 6 - 2x$; **б)** $y = x^2 + 2x - 8$; **в)** $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

Постройте график функции. Найдите ее нули. Укажите промежутки знакопостоянства функции. Является ли данная функция возрастающей; убывающей?

261. **а)** $y = 2x$; **б)** $y = 3x - 3$; **в)** $y = -0{,}5x + 1$.

262. **а)** $y = 0{,}5x - 1$; **б)** $y = -2x - 2$.

Уровень Б

263. Начертите график функции, областью определения которой является промежуток $[-2; 4]$, чтобы функция:

а) возрастала на промежутке $[-2; 0]$ и убывала на промежутке $[0; 4]$;

б) убывала на промежутке $[-2; 1]$, возрастала на промежутке $[1; 4]$ и имела два нуля: $x = 0$ и $x = 3$;

в) была возрастающей и имела один нуль — число 2.

264. Начертите график функции, областью определения которой является промежуток $[-1; 6]$, чтобы функция:

а) убывала на промежутке $[-1; 4]$, возрастала на промежутке $[4; 6]$ и имела один нуль: $x = 1$;

б) была убывающей и имела один нуль — число 3;

в) была возрастающей и не имела нулей.

Найдите нули функции:

265. **а)** $y = 2x^2 - 2x - 1$; **б)** $y = \frac{x}{x+3} - \frac{1}{x-1}$; **в)** $y = \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x-3}$.

266. **а)** $y = -x^2 + 4x - 1$; **б)** $y = \frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1}$.

Постройте график функции. Используя график, укажите: а) промежутки знакопостоянства функции; б) промежутки, на которых функция возрастает; убывает. Является ли данная функция четной; нечетной?

267. **а)** $y = -\frac{2}{x}$; **б)** $y = \begin{cases} x+2, \text{если } x < -1; \\ x^2, \quad \text{если } -1 \le x \le 1; \\ 2-x, \text{если } x > 1. \end{cases}$

268. **а)** $y = \frac{4}{x}$; **б)** $y = \begin{cases} -x-2, \text{если } x \le -1; \\ -1, \quad \text{если } -1 < x < 1; \\ x-2, \quad \text{если } x \ge 1. \end{cases}$

Четной или нечетной является функция:

269. **а)** $y = x^4 - 4x^2$; **б)** $y = x^3 - x$; **в)** $y = x^2 - 2x$;

г) $y = \frac{1}{x-1}$; **д)** $y = \frac{x^2+1}{x}$; **е)** $y = \frac{2}{x^2-4}$?

270. **а)** $y = 4x + x^3$; **б)** $y = x^4 - 1$; **в)** $y = x + 1$;

г) $y = \sqrt{x-1}$; **д)** $y = \frac{1}{x^2-1}$; **е)** $y = \frac{2x}{x^2+2}$?

Уровень В

271. Докажите, что функция $y = x^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

272. Докажите, что функция $y = kx + b$ является возрастающей при $k > 0$; убывающей при $k < 0$.

273. **а)** Функция $y = f(x)$ является возрастающей, а функция $y = g(x)$ — убывающей. Докажите, что уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.

б) Решите (устно) уравнение $\sqrt{x} = 10 - 9x$.

274. Областью определения четной функции $y = f(x)$ является множество всех действительных чисел. Постройте график этой функции, если $f(x) = \sqrt{x}$ при $x \geq 0$. Задайте функцию $y = f(x)$ формулой на множестве всех действительных чисел.

275. **а)** Функция $y = f(x)$ является четной и имеет нечетное количество нулей. Докажите, что число 0 является нулем этой функции.

б) Найдите все значения a, при которых уравнение $x^4 - 4x^2 + a^2 - 1 = 0$ имеет три корня. Найдите эти корни.

Упражнения для повторения

276. Докажите тождество:

а) $\left(m - \dfrac{mn}{m+n}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{n}{m}\right) = m;$

б) $\left(\dfrac{1}{x-4y} + \dfrac{1}{x+4y}\right) : \left(\dfrac{x^2+16y^2}{x^2-16y^2} + 1\right) = \dfrac{1}{x}.$

277. Найдите значение выражения:

а) $2 + 4\sqrt{8} - 2\sqrt{32};$

б) $\left(\sqrt{17} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{17} + \sqrt{3}\right);$

в) $\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(3 - \sqrt{3}\right) - \sqrt{3};$

г) $\sqrt{\left(5 - \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2}.$

278. *Задача Бхаскари.* Докажите, что $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

279. Расстояние между пунктами A и B по шоссе равно 135 км, а по железной дороге — 120 км. Автомобиль выехал из пункта A на 10 мин раньше, чем поезд, и прибыл в пункт B на 8 мин позже. Найдите скорость автомобиля, если она на 10 км/ч меньше скорости поезда.

10. Преобразования графиков функций

1. График функции $y = f(x) \pm n$, где $n > 0$. Пусть имеем график функции $y = x^2$, а нужно построить графики функций $y = x^2 + 2$ и $y = x^2 - 3$. Составим таблицу значений этих функций для некоторых значений аргумента:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = x^2 + 2$	11	6	3	2	3	6	11
$y = x^2 - 3$	6	1	–2	–3	–2	1	6

Для любого значения x значение функции $y = x^2 + 2$ на 2 больше соответствующего значения функции $y = x^2$, а значение функции $y = x^2 - 3$ на 3 меньше соответствующего значения функции $y = x^2$. (Из таблицы это легко увидеть для выбранных значений x.)

Поэтому график функции $y = x^2 + 2$ можно получить при помощи параллельного переноса графика функции $y = x^2$ вдоль оси y на 2 единицы вверх (см. рис. 33). График функции $y = x^2 - 3$ можно получить при помощи параллельного переноса графика функции $y = x^2$ вдоль оси y на 3 единицы вниз.

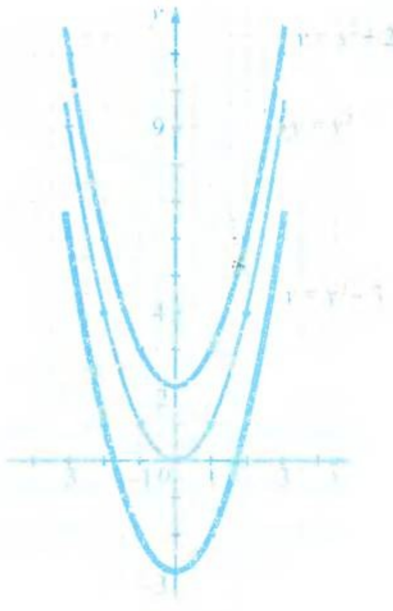


Рис. 33

Если функцию $y = x^2$ записать в виде $y = f(x)$, то функции $y = x^2 + 2$ и $y = x^2 - 3$ будут функциями вида $y = f(x) \pm n$, где $n > 0$, а именно: $y = f(x) + 2$ и $y = f(x) - 3$.

Вообще, *график функции $y = f(x) + n$, где $n > 0$, можно получить из графика функции $y = f(x)$ при помощи параллельного переноса вдоль оси y на n единиц вверх; график функции $y = f(x) - n$, где $n > 0$, можно получить из графика функции $y = f(x)$ при помощи параллельного переноса вдоль оси y на n единиц вниз.*

2. График функции $y = f(x \pm m)$, где $m > 0$. Пусть имеем график функции $y = x^2$, а нужно построить графики функций $y = (x - 3)^2$ и $y = (x + 2)^2$. Составим таблицу значений этих функций для некоторых значений аргумента:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$			9	4	1	0			
$y = (x - 3)^2$						9	4	1	0
$y = (x + 2)^2$	9	4	1	0					

Из таблицы видно, что график функции $y = (x - 3)^2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ при помощи параллельного переноса вдоль оси x на 3 единицы вправо (рис. 34).

График функции $y = (x + 2)^2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ при помощи параллельного переноса вдоль оси x на 2 единицы влево (рис. 34).

Если функцию $y = x^2$ записать в виде $y = f(x)$, то функции $y = (x - 3)^2$ и $y = (x + 2)^2$ будут функциями вида $y = f(x \pm m)$, где $m > 0$, а именно: $y = f(x - 3)$ и $y = f(x + 2)$.

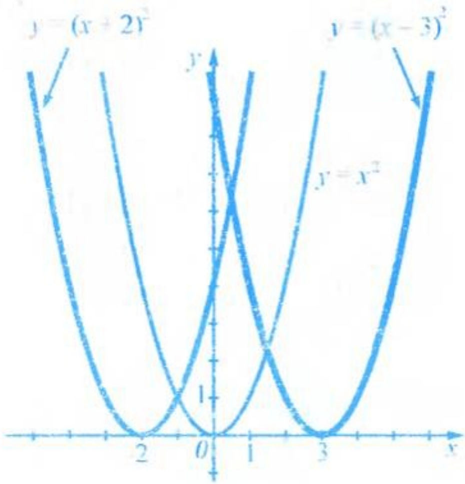


Рис. 34

Вообще, *график функции $y = f(x - m)$, где $m > 0$, можно получить из графика функции $y = f(x)$ при помощи параллельного переноса вдоль оси x на m единиц вправо; график функции $y = f(x + m)$, где $m > 0$, можно получить из графика функции $y = f(x)$ при помощи параллельного переноса вдоль оси x на m единиц влево.*

3. График функции $y = f(x \pm m) \pm n$, где $m > 0$, $n > 0$.

Рассмотрим функцию $y = (x-2)^2 - 1$. Ее график можно получить, если осуществить параллельный перенос график функции $y = x^2$ вдоль оси x на 2 единицы вправо, а потом вдоль оси y на 1 единицу вниз (рис. 35).

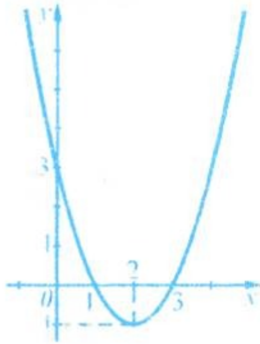


Рис. 35

4. График функции $y = -f(x)$. Пусть имеем график функции $y = x^2$, а нужно построить график функции $y = -x^2$. Составим таблицу значений этих функций для некоторых значений аргумента:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = -x^2$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9

Значения функции $y = -x^2$ противоположны соответствующим значениям функции $y = x^2$. Поэтому каждая точка графика функции $y = -x^2$ симметрична соответствующей точке графика функции $y = x^2$ относительно оси x. Например, точка (2; –4) графика функции $y = -x^2$ симметрична точке (2; 4) графика функции $y = x^2$ относительно оси x. Следовательно, график функции $y = -x^2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ при помощи симметрии относительно оси x (рис. 36).

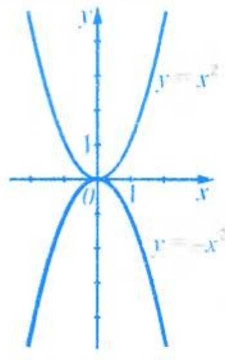


Рис. 36

Если функцию $y = x^2$ записать в виде $y = f(x)$, то функция $y = -x^2$ будет функцией вида $y = -f(x)$.

Вообще, *график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ при помощи симметрии относительно оси x.*

5. График функции $y = a f(x)$, где $a > 0$. Пусть имеем график функции $y = x^2$, а нужно построить графики функций $y = 2x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$. Составим таблицу значений этих функций для некоторых значений аргумента:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8
$y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Для любого значения x значение функции $y = 2x^2$ в два раза больше соответствующего значения функции $y = x^2$, а значение функции $y = \frac{1}{2}x^2$ в два раза меньше соответствующего значения функции $y = x^2$. (Из таблицы это легко увидеть для выбранных значений x.)

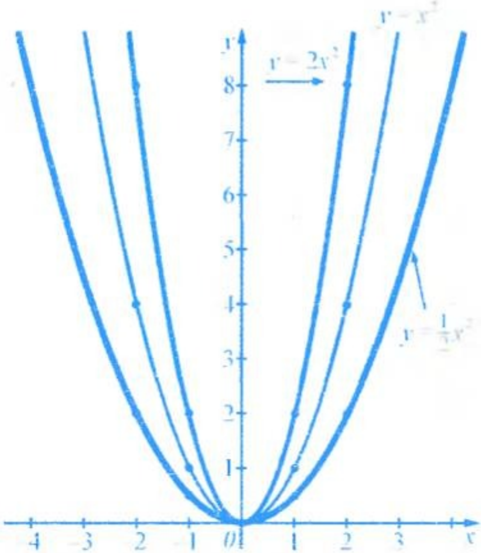


Рис. 37

Поэтому график функции $y = 2x^2$ можно получить из графика функции $y = x^2$, растянув последний от оси x в два раза, а график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ можно получить из графика функции $y = x^2$, сжав последний к оси x в два раза (см. рис. 37).

Если функцию $y = x^2$ записать в виде $y = f(x)$, то функции $y = 2x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$ будут функциями вида $y = af(x)$, где $a > 0$, а именно: $y = 2f(x)$ и $y = \frac{1}{2}f(x)$.

Вообще, *график функции* $y = af(x)$, *где* $a > 0$, *можно получить из графика функции* $y = f(x)$, *растянув последний от оси* x *в* a *раз при* $a > 1$, *и сжав его до оси* x *в* $\frac{1}{a}$ *раз при* $0 < a < 1$.

Для тех, кто хочет знать больше

6. График функции $y = |f(x)|$. По определению модуля числа имеем:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, если $f(x) \geq 0$, то значения функции $y = |f(x)|$ и $y = f(x)$ равны, если $f(x) < 0$, то значения этих функций являются противоположными числами. Поэтому график функции $y = |f(x)|$ можно получить так: строим график функции $y = f(x)$ и ту его часть, которая находится ниже оси x, симметрично отображаем относительно этой оси.

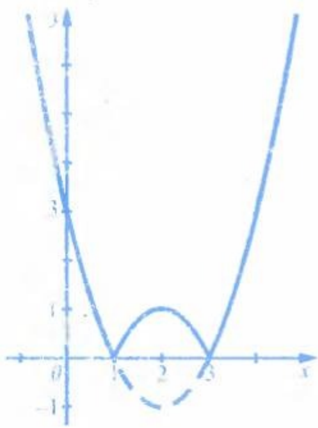


Рис. 38

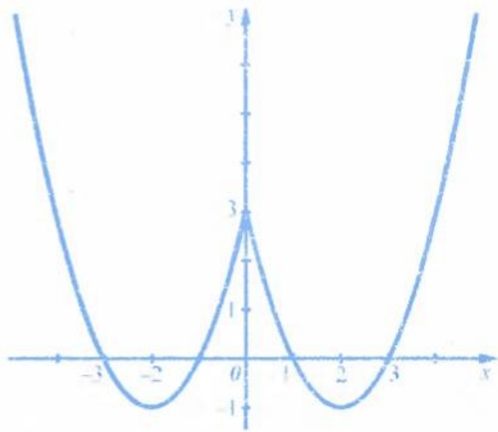


Рис. 39

На рисунке 38 изображен график функции $y = |(x-2)^2 - 1|$. Сравните его с графиком функции $y = (x-2)^2 - 1$ (рис. 35).

7. График функции $y = f(|x|)$. Отметим два свойства данной функции.

1) Функция является четной. Действительно, из тождества $|-x| = |x|$ следует, что для любого значения x из области ее определения выполняется равенство $f(|-x|) = f(|x|)$. Следовательно, график функции симметричен относительно оси y.

2) Если $x \geq 0$, то $y = f(|x|) = f(x)$. Поэтому при $x \geq 0$ график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$.

Таким образом, график функции $y = f(|x|)$ можно построить так: строим часть графика функции $y = f(x)$ для $x \geq 0$; выполнив симметрию построенной части относительно оси y, получаем вторую часть графика для $x \leq 0$.

На рисунке 39 изображен график функции $y = (|x| - 2)^2 - 1$. Сравните его с графиком функции $y = (x - 2)^2 - 1$ (рис. 35).

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Построить график функции $y = \sqrt{x+2} + 1$.

Строим график функции $y = \sqrt{x}$. Параллельно переносим его вдоль оси x на 2 единицы влево, а потом вдоль оси y на 1 единицу вверх. Получаем искомый график (рис. 40).

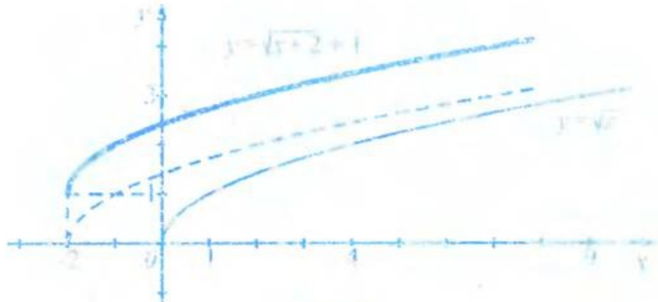


Рис. 40

Упражнение 2. Построить график функции $y = 2 - x^2$.

Последовательно строим графики следующих функций:

1) $y = x^2$; 2) $y = -x^2$; 3) $y = -x^2 + 2$, то есть $y = 2 - x^2$.

График функции $y = 2 - x^2$ изображен на рисунке 41.

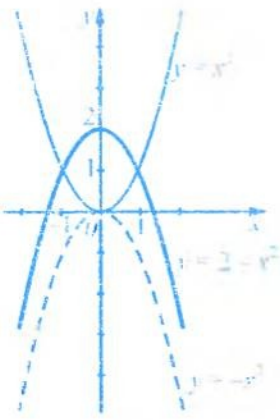


Рис. 41

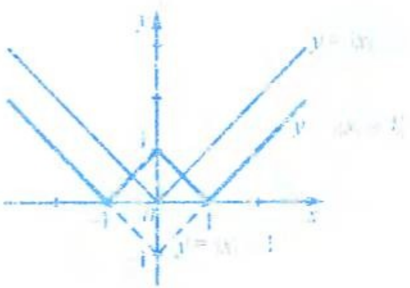


Рис. 42

Упражнение 3. Построить график функции $y = ||x| - 1|$.

• Последовательно строим графики следующих функций:

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| - 1$; 3) $y = ||x| - 1|$.

График функции $y = ||x| - 1|$ изображен на рисунке 42. •

Устно

280. На рисунке 43а изображены графики функций $y = f(x)$, $y = f(x) + a$ и $y = f(x) - b$, а на рисунке 43б — графики функций $y = f(x)$, $y = f(x - a)$ и $y = f(x + b)$. Найдите a и b.

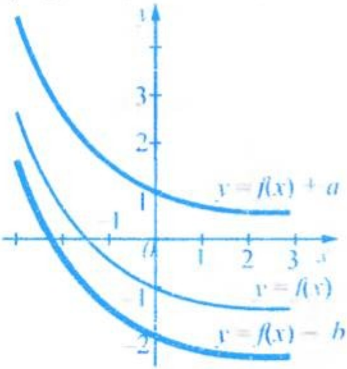


Рис. 43 а

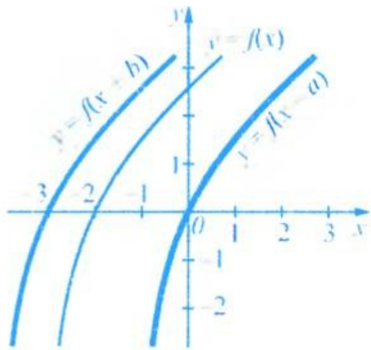


Рис. 43 б

Уровень А

Постройте график функции:

281. **а)** $y = x^2 + 1$; **б)** $y = \sqrt{x} - 3$; **в)** $y = (x - 3)^2$; **г)** $y = (x + 1)^2$.

282. **а)** $y = \sqrt{x} + 2$; **б)** $y = x^2 - 5$; **в)** $y = (x - 1)^2$.

Уровень Б

Постройте график функции:

283. **а)** $y = (x - 1)^2 + 2$; **б)** $y = (x + 3)^2 - 1$;

в) $y = \sqrt{x - 2} - 1$; **г)** $y = \sqrt{x + 4} + 4$.

284. **а)** $y = 4 - x^2$; **б)** $y = -(x + 2)^2$;

в) $y = -(x + 3)^2 + 4$; **г)** $y = -\sqrt{x - 4} + 2$.

285. **а)** $y = (x-2)^2 - 3$; **б)** $y = \sqrt{x+1} + 1$;

в) $y = -(x-3)^2$; **г)** $y = -(x+1)^2 + 5$.

286. **а)** $y = \frac{4}{x} + 2$; **б)** $y = \frac{4}{x-2}$.

287. **а)** $y = 2\sqrt{x}$; **б)** $y = \frac{1}{4}x^2$.

288. **а)** $y = \frac{1}{x} - 2$; **б)** $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

289. Постройте график функции $y = (x+3)^2 - 1$. Используя график, найдите:

а) область значений функции;

б) все значения x, при которых функция принимает отрицательные значения;

в) промежуток, на котором функция убывает.

290. Постройте график функции $y = (x-2)^2 - 4$. Используя график, найдите:

а) область значений функции;

б) все значения x, при которых функция принимает положительные значения;

в) промежуток, на котором функция возрастает.

291. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x+1}$ и $y = -x^2 + 2{,}5$. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x+1} = -x^2 + 2{,}5$?

Решите графически уравнение:

292. **а)** $(x-2)^2 = \sqrt{x}$; **б)** $\frac{4}{x+1} = x - 2$.

293. $\sqrt{x+3} = 4 - 2x$.

Уровень В

294. Постройте график функции:

а) $y = |x^2 - 4|$; **б)** $y = |(x+1)^2 - 1|$; **в)** $y = (|x| - 1)^2$;

г) $y = ||x| - 2|$; **д)** $y = 3 - |x - 3|$; **е)** $y = |3 - |x - 3||$.

295. Найдите все значения a, при которых уравнение $|1 - x^2| = a$ имеет три корня.

296. Сколько корней имеет уравнение $1 - |1 - |x|| = a$ в зависимости от значений параметра a?

Упражнения для повторения

297. Разложите на множители:

а) $2a - 6 + ab - 3b$; б) $x^2 + xy - 2x - 2y$.

298. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 7x + 2 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения $(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2$.

299*. Не решая уравнение $x^2 + 4x - 7 = 0$, составьте приведенное квадратное уравнение, корни которого на единицу меньше корней данного уравнения.

300. Два грузовика одновременно выехали из фабрики на базу, находящуюся на расстоянии 96 км от фабрики. Первый грузовик прибыл на базу на 10 мин раньше, чем второй. Найдите скорость первого грузовика, если она на 8 км/ч больше скорости второго.

11 Функция $y = ax^2$

Рассмотрим пример. Пусть тело свободно падает. Путь S, пройденный телом за время t, можно найти по формуле

$$S = \frac{gt^2}{2},$$

где g — ускорение свободного падения ($g \approx 9.8$ м/с^2).

Перейдя к принятым обозначениям аргумента и функции, получим функцию, которая задается формулой вида $y = ax^2$, где $a \neq 0$.

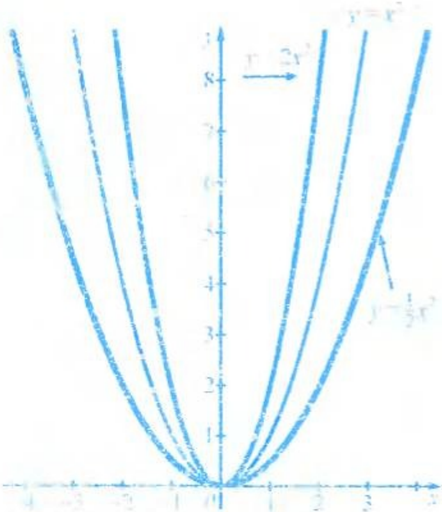


Рис. 44

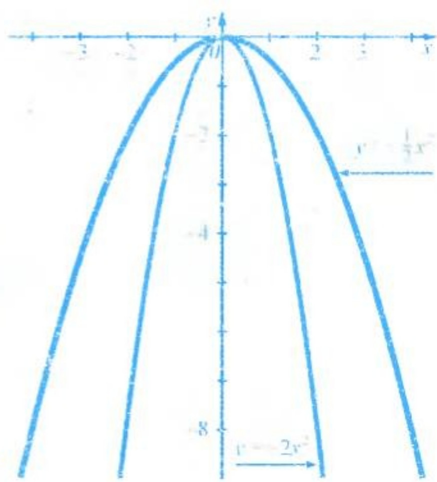


Рис. 45

На рисунках 44 и 45 изображены графики функций $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$, которые являются частными случаями функции $y = ax^2$ при a равно 1, 2, $\frac{1}{2}$, -2 и $-\frac{1}{2}$.

График функции $y = ax^2$, где $a \neq 0$, как и график функции $y = x^2$, называют *параболой*.

Функция $y = ax^2$, где $a \neq 0$, имеет такие свойства:

1. *Областью определения функции является множество всех действительных чисел.*

2. *При $a > 0$ областью значений функции является промежуток* $[0; +\infty)$; *при $a < 0$ — промежуток* $(-\infty; 0]$.

3. *График функции — парабола.*

4. *Если* $x = 0$, то $y = 0$. График проходит через точку $(0; 0)$. Эту точку называют *вершиной* параболы.

5. При $a > 0$ все точки параболы, кроме ее вершины, расположены выше оси x; при $a < 0$ — ниже этой оси. Говорят: *при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх; при $a < 0$ — вниз.*

6. *При $a > 0$ функция возрастает на промежутке* $[0; +\infty)$ *и убывает на промежутке* $(-\infty; 0]$. *При $a < 0$ функция возрастает на промежутке* $(-\infty; 0]$ *и убывает на промежутке* $[0; +\infty)$.

Доказательство свойства 6 приведено в рубрике «Для тех, кто хочет знать больше».

7. Функция $y = ax^2$ является *четной*, так как для любого значения x выполняется равенство $a(-x)^2 = ax^2$. *График функции симметричен относительно оси y.*

Для тех, кто хочет знать больше

Докажем, что функция $y = ax^2$ при $a > 0$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

Пусть x_1 и x_2 — два произвольных неотрицательных значения аргумента, причем $x_2 > x_1$, а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции, то есть $y_1 = ax_1^2$, $y_2 = ax_2^2$. Покажем, что $y_2 > y_1$. Для этого рассмотрим разность:

$$y_2 - y_1 = ax_2^2 - ax_1^2 = a(x_2^2 - x_1^2) = a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Так как $0 \le x_1 < x_2$, то $x_2 - x_1 > 0$ и $x_2 + x_1 > 0$. Учитывая, что $a > 0$, имеем:

$$a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0; \quad y_2 - y_1 > 0; \quad y_2 > y_1.$$

Большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Поэтому при $a > 0$ функция $y = ax^2$ на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает.

То, что функция $y = ax^2$ при $a > 0$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, доказывается аналогично.

Устно

301. Каковы свойства функции:

а) $y = 2x^2$; б) $y = -2x^2$?

Уровень А

302. Принадлежит ли графику функции $y = 8x^2$ точка: $A(2; 32)$; $B(3; 24)$; $C(-1; -8)$?

Постройте график функции:

303. а) $y = 3x^2$; б) $y = \frac{1}{3}x^2$; в) $y = -1,5x^2$.

304. а) $y = 2,5x^2$; б) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

305. Постройте график функции $y = -2,5x^2$. Укажите промежутки, на которых функция возрастает; убывает.

306. Постройте график функции $y = 1,5x^2$. Укажите промежутки, на которых функция возрастает; убывает.

Уровень Б

307. График функции $y = ax^2$ проходит через точку $M(2; -2)$. Постройте график этой функции.

308. График функции $y = ax^2$ проходит через точку $N(0,5; 1)$. Проходит ли этот график через точку $K(-4; 64)$?

Решите графически уравнение:

309. а) $-\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{x}$; б) $\frac{1}{8}x^2 = \sqrt{x}$.

310. $\frac{1}{2}x^2 = \frac{4}{x}$.

Уровень В

311. Постройте график функции:

а) $y = x|x|$; **б)** $y = \dfrac{2x^4 - 2x^2}{x^2 - 1}$.

312. Докажите, что функция $y = ax^2$ при $a < 0$ убывает на промежутке $[0; +\infty)$.

Упражнения для повторения

313. Постройте график функции:

а) $y = (x - 1{,}5)^2$; **б)** $y = (x + 1)^2 - 2$.

314. Докажите неравенство:

а) $x^2 + 4x + 5 > 0$; **б)** $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$.

315*. Первую часть пути автомобиль ехал со скоростью a км/ч. Вторую часть пути он ехал в два раза дольше со скоростью b км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

316*. Треть пути автомобиль ехал со скоростью a км/ч, а оставшийся путь — со скоростью b км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

12. Квадратичная функция

1. Понятие квадратичной функции. Рассмотрим пример. Пусть тело движется прямолинейно вдоль оси x с ускорением a_x. Если в начальный момент времени оно имело скорость v_{0x} и находилось в точке с координатой x_0, то координату x тела в момент времени t можно найти по формуле

$$x = \frac{a_x t^2}{2} + v_{0x}t + x_0.$$

В частности, если $a_x = 4$, $v_{0x} = 7$, $x_0 = 50$, то

$$x = 2t^2 + 7t + 50.$$

Формула $x = 2t^2 + 7t + 50$ задает функцию, которую называют *квадратичной*.

Определение

***Квадратичной функцией* называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.**

Так, $y = 3x^2 - 2x - 1$, $y = x^2 + 3x$, $y = -2x^2 + 1$, $y = x^2$, $y = -1{,}2x^2$ — квадратичные функции.

2. График квадратичной функции. Выясним сначала, что является графиком квадратичной функции $y = 2x^2 - 8x + 7$. Для этого преобразуем квадратный трехчлен $2x^2 - 8x + 7$ так:

$$2x^2 - 8x + 7 = 2\left(x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + \frac{7}{2}\right) =$$

$$= 2\left((x-2)^2 - \frac{1}{2}\right) = 2(x-2)^2 - 1.$$

Записав квадратный трехчлен $2x^2 - 8x + 7$ в виде $2(x-2)^2 - 1$, говорят, что из данного квадратного трехчлена выделили квадрат двучлена $x - 2$.

Вообще, *выделить из квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$ *квадрат двучлена значит записать его в виде* $a(x-m)^2 + n$, *где* m *и* n *— некоторые числа.*

Итак, квадратичную функцию $y = 2x^2 - 8x + 7$ можно задать формулой $y = 2(x-2)^2 - 1$. Поэтому ее график можно получить, если график функции $y = 2x^2$ параллельно перенести вдоль оси x на 2 единицы вправо, а потом вдоль оси y на 1 единицу вниз (рис. 46).

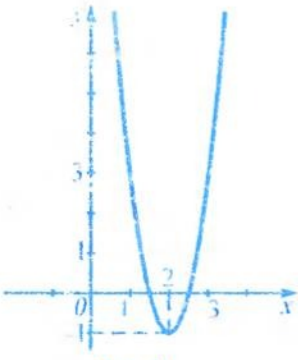


Рис. 46

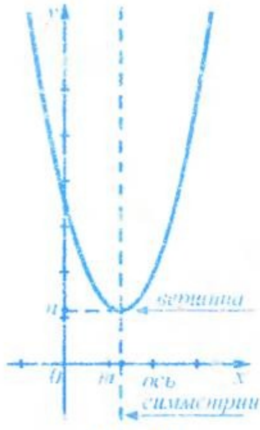


Рис. 47

Рассмотрим общий случай. Пусть имеется квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$. Выделим из квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ квадрат двучлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n,}$$

где $\boldsymbol{m = -\frac{b}{2a}, \ n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$.

Следовательно, график функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить из графика функции $y = ax^2$ при помощи двух параллельных переносов вдоль осей координат (см. рис. 47). *Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола.*

Точку $(m; n)$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, называют *вершиной* этой параболы. Ее *осью симметрии* является прямая $x = m$. *При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх; при $a < 0$ — вниз.*

Координаты вершины параболы можно найти по формулам

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{D}{4a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac,$$

или по формулам

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = am^2 + bm + c$$

(ордината n вершины параболы является значением квадратичной функции при $x = m$).

3. Построение графика квадратичной функции. Рассмотрим квадратичную функцию

$$y = x^2 + 4x + 3.$$

Так как $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 4 + 3 = (x + 2)^2 - 1$, то график этой функции можно получить из графика функции $y = x^2$ при помощи двух параллельных переносов: вдоль оси x на 2 единицы влево и вдоль оси y на 1 единицу вниз (см. рис. 48).

Параболу, являющуюся графиком функции $y = x^2 + 4x + 3$, можно построить и так:

1) находим координаты вершины параболы:

$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$ — абсцисса вершины;

$n = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = -1$ — ордината вершины.

2) находим значения функции при нескольких целых значениях x, близких к абсциссе вершины:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
y	8	3	0	–1	0	3	8

3) отмечаем найденные точки на координатной плоскости и соединяем их плавной линией. Получаем искомую параболу (рис. 49).

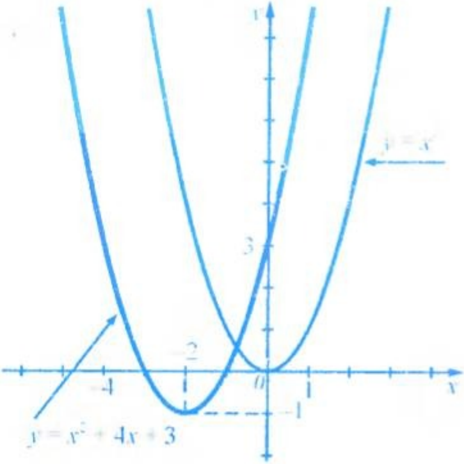


Рис. 48

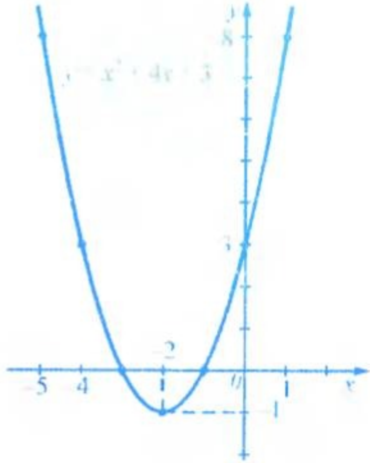
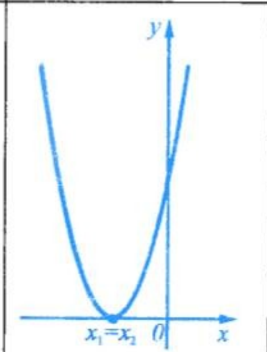
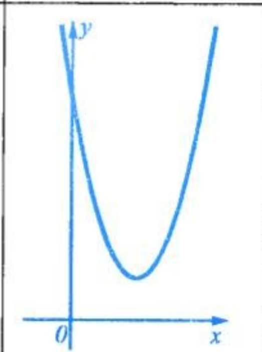
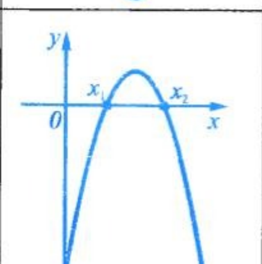
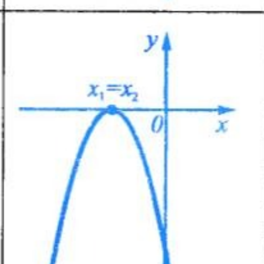
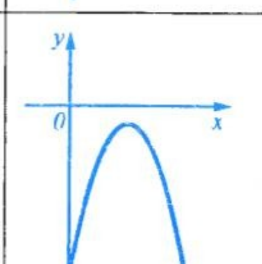


Рис. 49

4. Положение графика квадратичной функции. В таблице показано положение графика функции $y = ax^2 + bx + c$ в зависимости от знаков коэффициента a и дискриминанта D квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

При $D > 0$ парабола пересекает ось x в двух точках; при $D = 0$ — касается этой оси; при $D < 0$ — не имеет с осью x общих точек.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Построить график функции $y = -2x^2 + 8x - 9$. Используя график, найти:

а) область значений функции;

б) промежуток, на котором функция возрастает; убывает.

• Найдем координаты вершины параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2; \quad n = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 9 = -1.$$

Составим таблицу значений функции для нескольких значений x:

x	0	1	2	3	4
y	–9	–3	–1	–3	–9

Отметив точки, координаты которых представлены в таблице, на координатной плоскости и соединив их плавной линией, получаем искомый график (рис. 50).

Из графика следует: **а)** областью значений функции является промежуток $(-\infty; -1]$; **б)** функция возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$. •

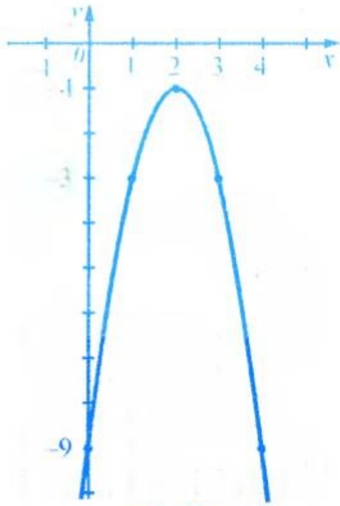


Рис. 50

Упражнение 2. Построить график функции $y = (x - 1)(x - 3)$.

• Графиком данной функции является парабола. Нулями функции $y = (x - 1)(x - 3)$ являются $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Нули параболы симметричны относительно ее оси, поэтому абсцисса ее вершины равна $m = \frac{1+3}{2} = 2$ (середине отрезка с концами в нулях функции).

Находим ординату вершины:

$$n = (2 - 1)(2 - 3) = -1.$$

Ось y парабола пересекает в точке $(0; 3)$. График функции изображен на рисунке 51. •

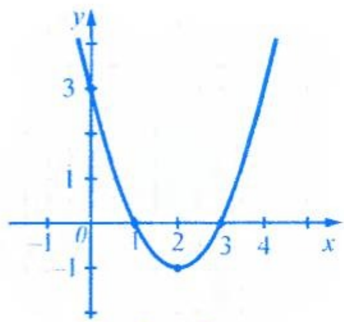


Рис. 51

Упражнение 3. Доказать, что функция $y=\frac{1}{2}x^2-3x+5$ принимает только положительные значения, и найти наименьшее значение функции.

Находим координаты вершины параболы $y=\frac{1}{2}x^2-3x+5$:

$m=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\cdot\frac{1}{2}}=3$ — абсцисса вершины; $n=\frac{1}{2}\cdot 3^2-3\cdot 3+5=\frac{1}{2}$ — ордината вершины.

Так как ветви параболы направлены вверх, то значение квадратичной функции при $x=m=3$ является наименьшим. Это наименьшее значение $n=\frac{1}{2}$ положительно, поэтому квадратичная функция принимает только положительные значения.

Устно

317. На рисунке 52 изображена парабола, являющаяся графиком некоторой квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$. Укажите:

а) знак коэффициента a;

б) координаты вершины параболы;

в) ось параболы;

г) нули квадратичной функции;

д) промежутки знакопостоянства функции;

е) промежуток, на котором квадратичная функция возрастает; убывает;

ж) наименьшее значение квадратичной функции и значение x, при котором функция принимает наименьшее значение;

з) знак коэффициента c.

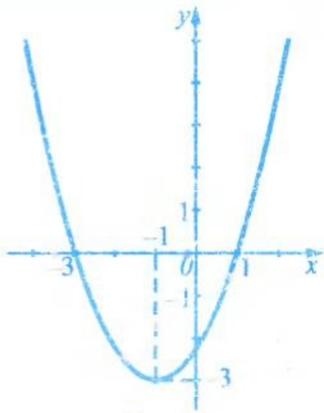


Рис. 52

318. Вверх или вниз направлены ветви параболы, являющейся графиком функции:

а) $y=2x^2-5x+4$; **б)** $y=-5x^2+2x+3$; **в)** $y=-x^2+x$?

Уровень А

319. Найдите координаты вершины параболы $y = 2x^2 - 6x + 3$. Пересекает ли эта парабола ось x?

320. Найдите нули функции $y = x^2 - 2x - 8$. Пересекает ли график этой функции ось x?

Постройте график функции:

321. **а)** $y = x^2 + 2x - 3$; **б)** $y = -x^2 + 4x$; **в)** $y = 2x^2 - 4x + 3$.

322. **а)** $y = x^2 - 2x + 2$; **б)** $y = -x^2 - 4x - 3$; **в)** $y = -2x^2 + 8x$.

Уровень Б

Постройте график функции:

323. **а)** $y = 3x^2 + 6x - 5$; **б)** $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$;

в) $y = -2x^2 - 4x + 6$; **г)** $y = (x + 1)(x - 3)$.

324. **а)** $y = 4x^2 - 4x - 3$; **б)** $y = -3x^2 - 6x$;

в) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$; **г)** $y = (x + 4)(x + 2)$.

325. Постройте график функции $y = x^2 + 6x + 5$. Используя график, найдите:

а) область значений функции;

б) все значения x, при которых функция принимает отрицательные значения;

в) промежуток, на котором функция убывает.

326. Постройте график функции $y = 4x - x^2$. Используя график, найдите:

а) область значений функции;

б) все значения x, при которых функция принимает положительные значения;

в) промежуток, на котором функция возрастает.

Найдите координаты точек пересечения прямой и параболы:

327. **а)** $3x - y = 4$; $y = 2x^2 - 6$; **б)** $2x + y = -7$; $y = -3x^2 - 9x + 3$.

328. $3x + y = -2$; $y = 4x^2 + 5x + 1$.

Решите графически уравнение:

329. **а)** $x^2 - 2x + 2 = \frac{1}{x}$; **б)** $-x^2 + 3x + 6 = \sqrt{x}$.

330. $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x=\sqrt{x}$.

331. Докажите, что функция $y=x^2+5x+7$ принимает только положительные значения. Найдите наименьшее значение этой функции.

332. При каком значении x трехчлен $-3x^2+6x+2$ принимает наибольшее значение? Найдите это наибольшее значение.

333. Найдите наименьшее значение функции $y=2x^2-6x-2$.

334. Докажите, что трехчлен $-2x^2+7x-7$ принимает только отрицательные значения. Найдите наибольшее значение этого трехчлена.

335. Докажите неравенство:

а) $3a^2-6a+4>0$; **б)** $-2c^2+8c-9<0$.

Уровень В

336. При каких значениях a и b вершиной данной параболы является данная точка A?

а) $y=x^2+bx+c$; $A(-4;2)$; **б)** $y=ax^2+bx-1$; $A\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

337. Постройте график функции:

а) $y=\frac{x^3-4x^2+x}{x}$; **б)** $y=\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-4}$;

в) $y=\frac{x^3+8}{x+2}-5$; **г)** $y=x^2-4|x|+3$;

д) $y=|2x^2-8x+6|$; **е)** $y=|-2x^2+8|x|-6|$.

338. Найдите все значения a, при которых парабола $y=1{,}5x^2+6x+2a$ расположена над осью x.

339. Под углом к горизонту брошен камень, который, двигаясь по параболе, упал через 4 с на расстоянии 24 м от начального положения. На какой высоте был камень через 1 с после броска, если наибольшая высота, на которую он поднялся. равна 6 м?

340. Чтобы оставлять на ночь коров на пастбище, пастухи решили оградить на нем участок прямоугольной формы сеткой длиной 200 м. Каковы должны быть стороны участка, чтобы ее площадь была наибольшей?

341. **а)** Найдите наименьшее значение функции $y=\sqrt{4x-2}+2x^2-2x$.

б) Решите уравнение $\sqrt{4x-2}+2x^2-2x=-0{,}5-\sqrt{2x^2-x}$.

342. **а)** Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{4}{4x^2-8x+5}$.

б) Решите уравнение $\dfrac{4}{4x^2-8x+5}=4+\sqrt{x-1}$.

Упражнения для повторения

343. Упростите выражение:

а) $\dfrac{(2a^3b)^2\cdot 4ab^2}{(2ab)^5}$; **б)** $\dfrac{2x^3y^2\cdot(-3xy^2)^3}{18x^5y^{10}}$.

344. Решите неравенство:

а) $4x-9>2x+7$; **б)** $x^2+x-1>x^2+5x+15$;

в) $\dfrac{x-3}{6}\le x-4$; **г)** $(2x-4)(x+5)<0$.

345. Решите уравнение:

а) $3x^2+2x-1=x^2-6x-9$; **б)** $x^4-4x^2-5=0$;

в)* $x^2-3|x|-4=0$; **г)*** $x|x|-4x+3=0$.

346. Два строителя, работая вместе, возвели стены дома за 20 дней. За сколько дней возвел бы стены каждый из них, работая отдельно, если известно, что первый может это сделать на 9 дней быстрее, чем второй?

347*. В некотором городе каждый десятый математик — музыкант, а каждый одиннадцатый музыкант — математик. Кого в городе больше — музыкантов или математиков?

348*. Какие значения может принимать выражение $x+\dfrac{1}{2x}$, если $4x^2+\dfrac{1}{x^2}=12$?

349*. Докажите, что уравнение $ax^2+(a+b)x+(b-a)=0$ имеет хотя бы один корень для любых значений a и b.

Задания для самопроверки № 2

Уровень 1

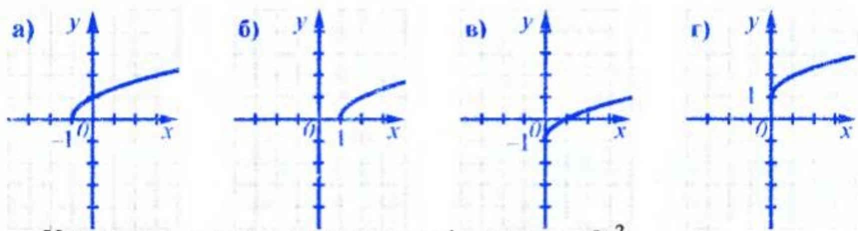
1. Чему равно значение функции $f(x) = 2x^2 - 5$ при $x = 4$:

а) 11; **б)** 3; **в)** 27; **г)** –27?

2. Нулем функции $y = 5x + 8$ является:

а) 1,6; **б)** –1,6; **в)** –16; **г)** –0,625.

3. Какой из графиков является графиком функции $y = \sqrt{x} - 1$?



4. Укажите утверждения, верные для функции $y = 3x^2$:

а) графиком функции является парабола, ветви которой направлены вниз;

б) функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$;

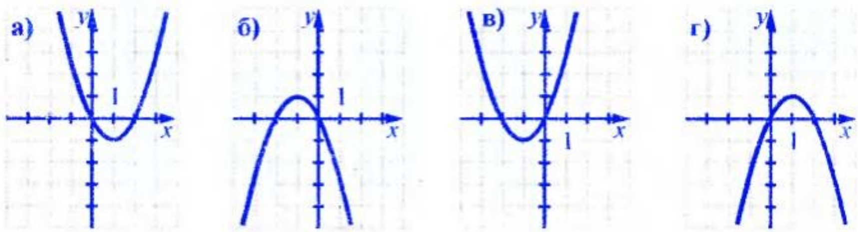
в) функция убывает на промежутке $[0; +\infty)$;

г) график функции симметричен относительно оси y.

5. Укажите координаты вершины параболы $y = x^2 - 4x + 6$:

а) (–4; 6); **б)** (4; 6); **в)** (2; 2); **г)** (–2; 18).

6. На каком рисунке изображен график функции $y = x^2 - 2x$?



Уровень 2

7. Найдите область определения функции $y = \sqrt{5 - 2x}$.

8. Найдите нули функции $y = x^2 + 6x - 16$.

9. Постройте график функции $y = (x - 2)^2 - 1$. Используя график, найдите область значений функции.

10. Проходит ли график функции $y = -2x^2$ через точку (1,5; 4,5)?

11. Постройте график функции $y = x^2 - 2x$. Используя график, найдите промежуток, на котором функция возрастает; убывает.

Уровень 3

12. Найдите область определения функции $y=\sqrt{12-2x}+\sqrt{4x+6}$.

13. Принадлежит ли число 3 области значений функции $y=x^2+15x+48$?

14. Постройте график функции $y=-2x^2+4x+6$. Используя график, найдите: **а)** область значений функции; **б)** все значения x, при которых функция принимает отрицательные значения; **в)** промежуток, на котором функция убывает.

15. При каком значении x функция $y=3x^2+12x-20$ принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

16. Докажите неравенство $3x^2-3x+1>0$.

Уровень 4

17. Найдите область определения функции $y=\sqrt{9-x}+\dfrac{\sqrt{x}}{3x^2-19x+6}$.

18. Докажите, что функция $y=\dfrac{3}{x}$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$.

19. Постройте график функции $y=|2x-4|-4$. Используя график, найдите: **а)** область значений функции; **б)** все значения x, при которых функция принимает отрицательные значения.

20. Найдите наибольшее значение функции $y=\dfrac{4}{2x^2-8x+9}$.

21. При помощи графиков функций установите, имеет ли корни уравнение $-\dfrac{1}{2}x^2+2x-1=\sqrt{x+1}$.

13. Неравенства второй степени с одной переменной

Неравенства вида

$$ax^2+bx+c>0,$$
$$ax^2+bx+c<0,$$
$$ax^2+bx+c\geq 0,$$
$$ax^2+bx+c\leq 0,$$

где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a\neq 0$, называют *неравенствами второй степени с одной переменной* (или *квадратными неравенствами*).

Например, $2x^2-3x+1>0$, $-x^2+4x+5\leq 0$ — квадратные неравенства.

Решение квадратных неравенств можно свести к нахождению промежутков, на которых квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает положительные, неположительные, отрицательные или неотрицательные значения. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить неравенство $2x^2 + x - 1 > 0$.

• Рассмотрим квадратичную функцию $y = 2x^2 + x - 1$. Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Выясним, пересекает ли парабола ось x. Для этого решим уравнение $2x^2 + x - 1 = 0$. Его корнями являются $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Итак, парабола пересекает ось x в двух точках с абсциссами -1 и $\frac{1}{2}$.

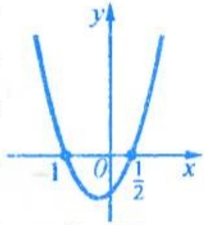


Рис. 53

Схематически изображаем параболу на координатной плоскости (рис. 53). Из построенного графика видим, что функция принимает положительные значения, если x принадлежит промежутку $(-\infty; -1)$ или промежутку $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ (на этих промежутках парабола расположена выше оси x). Следовательно, множеством решений заданного неравенства $2x^2 + x - 1 > 0$ является $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ответ. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. •

Используя схематическое изображение параболы $y = 2x^2 + x - 1$ (см. рис. 53), можно записать и множества решений следующих неравенств.

Неравенство	*Множество решений*	*Комментарий.* Во множество решений включены все значения x, при которых функция $y = 2x^2 + x - 1$ принимает:
$2x^2 + x - 1 \geq 0$	$(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$	неотрицательные значения
$2x^2 + x - 1 < 0$	$\left(-1; \frac{1}{2}\right)$	отрицательные значения
$2x^2 + x - 1 \leq 0$	$\left[-1; \frac{1}{2}\right]$	неположительные значения

Пример 2. Решить неравенство $-3x^2 + 14x - 8 \geq 0$.

• Графиком функции $y = -3x^2 + 14x - 8$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Решив уравнение $-3x^2 + 14x - 8 = 0$, получим: $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 4$. Поэтому парабола пересекает ось x в точках с абсциссами $\frac{2}{3}$ и 4. Схематически изображаем данную параболу (рис. 54). Функция принимает неотрицательные значения, если x принадлежит промежутку $\left[\frac{2}{3};\ 4\right]$. Этот промежуток и является множеством решений неравенства.

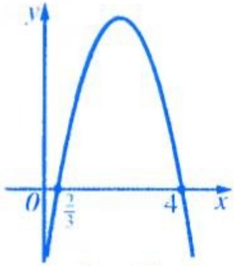


Рис. 54

Ответ. $\left[\frac{2}{3};\ 4\right]$. •

Пример 3. Решить неравенство:

а) $x^2 - 2x + 3 > 0$; **б)** $x^2 - 2x + 3 < 0$.

• Графиком функции $y = x^2 - 2x + 3$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$ не имеет корней, так как $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$. Следовательно, парабола не пересекает ось x. Схематически изображаем эту параболу (рис. 55). Функция при всех значениях x принимает положительные значения.

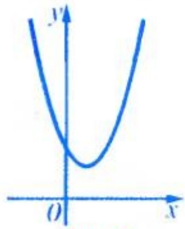


Рис. 55

Поэтому множеством решений неравенства $x^2 - 2x + 3 > 0$ является множество всех действительных чисел, то есть $(-\infty; +\infty)$, а неравенство $x^2 - 2x + 3 < 0$ решений не имеет.

Ответ. **а)** $(-\infty; +\infty)$; **б)** решений нет. •

Итог. *Чтобы решить неравенство вида*

$$ax^2 + bx + c > 0,\ \ ax^2 + bx + c < 0,\ \ ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ или } ax^2 + bx + c \leq 0,$$

где $a \neq 0$, можно рассмотреть квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ и:

1) найти нули функции;

2) если квадратичная функция имеет два нуля, то отметить их точками на оси x и через эти точки схематически провести параболу $y = ax^2 + bx + c$, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$;

если квадратичная функция имеет один нуль, то отметить его точкой на оси x и схематически провести параболу, которая касается оси x в этой точке; ветви параболы направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$;

если квадратичная функция не имеет нулей, то схематически провести параболу, расположенную в верхней полуплоскости ветвями вверх при $a > 0$, в нижней полуплоскости ветвями вниз при $a < 0$;

3) найти на оси x промежутки, на которых значения функции $y = ax^2 + bx + c$ удовлетворяют соответствующему неравенству.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Решить неравенство $3x(2 - x) > x^2 + 6x - 8$.

Перенесем слагаемые из правой части неравенства в левую, изменив их знаки на противоположные, и упростим полученное в левой части выражение: $6x - 3x^2 - x^2 - 6x + 8 > 0$; $-4x^2 + 8 > 0$. Разделим обе части последнего неравенства на -4, получим неравенство

$$x^2 - 2 < 0.$$

Графиком квадратичной функции $y = x^2 - 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Уравнение $x^2 - 2 = 0$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{2}$ и $x_2 = \sqrt{2}$. Следовательно, парабола пересекает ось x в точках с абсциссами $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. Изображаем схематически эту параболу (рис. 56). Множеством решений неравенства $x^2 - 2 < 0$, а значит, и заданного в условии неравенства, является промежуток $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Рис. 56

Ответ. $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

Упражнение 2. Найти область определения функции $y = \sqrt{4x - 2x^2}$.

Область определения функции образуют те значения x, при которых подкоренное выражение $4x - 2x^2$ принимает неотрицательные значения.

Решим неравенство $4x - 2x^2 \geq 0$. Графиком функции $y = 4x - 2x^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Уравнение $4x - 2x^2 = 0$ имеет корни: $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Следовательно, парабола пересекает ось x в точках с абсциссами 0 и 2. Изображаем схематически эту параболу (рис. 57). Неравенство $4x - 2x^2 \geq 0$ выполняется, если x принадлежит промежутку $[0; 2]$. Это и есть искомая область определения.

Рис. 57

Ответ. $[0; 2]$.

Упражнение 3. Найти область определения функции $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4} + \dfrac{x+1}{\sqrt{4-x}}$.

• Область определения функции образуют те значения x, которые являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0; \\ 4 - x > 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $x^2 + 3x - 4 = 0$ являются числа -4 и 1. Так как ветви параболы $y = x^2 + 3x - 4$ направлены вверх, то множеством решений первого неравенства системы является множество $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

Решим второе неравенство системы: $4 - x > 0$; $-x > -4$; $x < 4$. $(-\infty; 4)$ — множество решений второго неравенства.

Отметим на координатной прямой множества решений обоих неравенств.

Общие решения неравенств системы образуют множество $(-\infty; -4] \cup [1; 4)$.

Ответ. $(-\infty; -4] \cup [1; 4)$. •

Упражнение 4. Решить неравенство $\sqrt{x-1}\left(x^2 + 2x - 8\right) \geq 0$.

• Выражение $\sqrt{x-1}$ имеет смысл при $x \geq 1$. Поэтому решения данного неравенства должны принадлежать промежутку $[1; +\infty)$.

Так как множитель $\sqrt{x-1}$ принимает только неотрицательные значения, а именно: $\sqrt{x-1} = 0$ при $x = 1$, $\sqrt{x-1} > 0$ при $x > 1$, то рассмотрим два случая:

1) $x = 1$. Тогда получим верное неравенство $0 \geq 0$. Следовательно, $x = 1$ — решение неравенства.

2) $x > 1$. Тогда множитель $\sqrt{x-1}$ — положительный, и данное неравенство будет выполняться, если второй множитель неотрицательный. Имеем систему неравенств: $\begin{cases} x > 1; \\ x^2 + 2x - 8 \geq 0. \end{cases}$ Решив эту систему, найдем решения: $x \geq 2$.

Ответ. $\{1\} \cup [2; +\infty)$. •

Упражнение 5. Решить неравенство $\dfrac{x^2-4x-5}{|x-2|}\le 0.$

• Дробь в левой части неравенства имеет смысл при $x\ne 2$. Так как при $x\ne 2$ знаменатель дроби положителен, то данное неравенство будет выполняться, если $x^2-4x-5\le 0$. Множеством решений квадратичного неравенства является промежуток $[-1;\,5]$. Исключив из него число 2, получим множество решений данного неравенства: $[-1;\,2)\cup(2;\,5]$.

Ответ. $[-1;\,2)\cup(2;\,5]$. •

Устно

350. На рисунке 58 изображен график функции $y=x^2-x-2$. Назовите множества решений неравенств:

а) $x^2-x-2>0$; б) $x^2-x-2\ge 0$;
в) $x^2-x-2<0$; г) $x^2-x-2\le 0$.

351. На рисунке 59 изображен график функции $y=x^2+2x+1$. Назовите множества решений неравенств:

а) $x^2+2x+1>0$; б) $x^2+2x+1\ge 0$;
в) $x^2+2x+1<0$; г) $x^2+2x+1\le 0$.

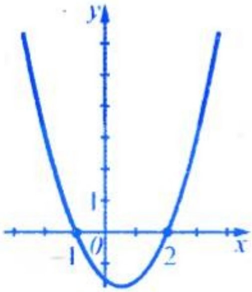


Рис. 58

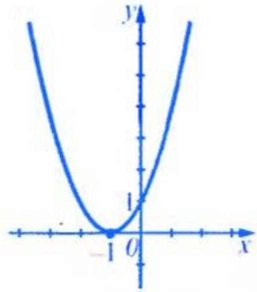


Рис. 59

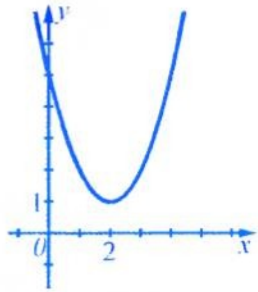


Рис. 60

352. На рисунке 60 изображен график функции $y=x^2-4x+5$. Назовите множества решений неравенств:

а) $x^2-4x+5>0$; б) $x^2-4x+5\ge 0$;
в) $x^2-4x+5<0$; г) $x^2-4x+5\le 0$.

Уровень А

Решите неравенство:

353. а) $x^2+3x-4<0$; б) $x^2+3x-4>0$; в) $2x^2-3x<0$;

г) $-x^2-2x+3>0$; д) $-2x^2+5x-3<0$; е) $2x^2-8>0$.

354. а) $x^2+6x+8\ge 0$; б) $x^2+5x-14\le 0$; в) $-x^2+6x+7\le 0$.

355. а) $x^2+x-6<0$; б) $3x^2-10x+3>0$; в) $-2x^2+4x>0$; г) $-x^2+4x-3\le 0$; д) $x^2-3x+2\ge 0$; е) $-3x^2+3\ge 0$.

Найдите множество решений неравенства:

356. а) $x^2>0$; б) $x^2\ge 0$; в) $x^2<0$; г) $x^2\le 0$.

357. а) $2x^2>18$; б) $-3x^2\ge 0$; в) $x^2<2x$; г) $-2x^2\le 3x$.

358. а) $x^2>4$; б) $x^2<1$; в) $-2x^2\ge -2$; г) $x^2\le 5x$.

Уровень Б

Решите неравенство:

359. а) $x^2-0{,}4x-0{,}96\le 0$; б) $x^2+x-1>0$;
в) $-50x^2+250x-300\ge 0$; г) $3x^2-2x+3<0$;
д) $-x^2+3x-10\le 0$; е) $-\frac{1}{3}x^2+2x-3\ge 0$.

360. а) $x^2-0{,}2x-1{,}2>0$; б) $x^2-\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}\le 0$; в) $-8x^2+40x-56<0$.

361. а) $(2x-1)(2x+1)>2(x+0{,}5)^2$;
б) $(x-3)(2x+5)<x(x+1)$;
в) $(x^2-2x)^2-(x^2-2x-6)^2>0$;
г) $(2x-1)(3x+2)-(3x-1)(x+4)\le 2x-2$.

362. а) $\frac{x^2-3x}{6}-\frac{x+1}{9}>\frac{x-14}{18}$; б) $\frac{2x-3}{12}-\frac{1-3x^2}{16}<\frac{x}{24}-\frac{7}{48}$.

363. а) $x(2x+3)\le(2x+3)(2x-1)$; б) $(3x-1)^2-(x-1)^2>4(x+4)$;
в) $\frac{x^2-1}{4}-\frac{x+3}{6}\le-\frac{2}{3}$; г) $\frac{x^2-3x+2}{6}+\frac{3-x}{9}<\frac{8x+9}{36}-\frac{1}{4}$.

364. а) Решите неравенство $8x^2-8x+3>0$.
б) Докажите неравенство $8x^2-8x+3>0$.

365. При каких значениях x квадратный трехчлен $-x^2+x-0{,}21$ принимает отрицательные значения?

366. При каких значениях x квадратный трехчлен $x^2+2x+0{,}75$ принимает неотрицательные значения?

Найдите область определения функции:

367. а) $y=\sqrt{12-4x-x^2}$; б) $y=\sqrt{3x^2+4x+1}$; в) $y=\sqrt{x^2-5x+7}$.

368. а) $y=\sqrt{x^2-2x+3}$; б) $y=\sqrt{24-10x-x^2}$.

Уровень В

369. Решите неравенство:

а) $(x^2+1)^2(x^2-10x+9)\ge 0$; б) $|x|(x^2-x-30)>0$;

в) $\sqrt{x}\,(x^2-9x-90)\le 0$; г) $\sqrt{(x-2)(2x+3)}\ge 0$;

д) $\sqrt{20x^2-41x+20}\le 0$; е) $\dfrac{1}{\sqrt{18+3x-x^2}}\ge 0$;

ж) $(2x-9)\sqrt{x^2-6x+5}>0$; з) $(x+3)\sqrt{x^2+x-12}\ge 0$;

и) $\dfrac{x^2+3x-4}{|x+1|}\le 0$; й) $\dfrac{x^2-2x-15}{(x-6)^2}>0$.

370. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2-2x-24>0; \\ 14-2x\ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3\le x^2; \\ x^2<2x+8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+x\le 6, \\ 4x-x^2\ge 0. \end{cases}$

371. Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{15-2x-x^2}}+2\sqrt{6-3x}$; б) $y=\dfrac{1+\sqrt{x^2-x-12}}{\sqrt{12-x-x^2}}$;

в) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-11x+5}}-\dfrac{1}{|x|-4}$.

372. Найдите все значения a, при которых уравнение:

а) $x^2-(a+1)x+a^2=0$ имеет два разных корня;

б) $x^2+(2a+1)x-2a-1=0$ не имеет корней;

в) $ax^2+(1-a)x+a+1=0$ имеет хотя бы один корень.

373. Найдите все значения a, при которых неравенство не имеет решений:

а) $x^2+3x+1-2a<0$; б) $x^2+3x+1-2a\le 0$; в) $ax^2-4x+a>0$.

374. Найдите все значения a, при которых неравенство $(2a-1)x^2+2ax+a+3\le 0$ выполняется при всех действительных значениях x.

Упражнения для повторения

375. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2-4c^2}{2a+4c}$; б) $\dfrac{m^4-n^2}{3m^3-3mn}$.

376. Докажите тождество $\left(x+y-\dfrac{4xy}{x+y}\right):\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x+y}=1$.

377. Постройте график уравнения:

а) $x - 2y = 4$; **б)** $-3x + 2y = -6$.

378. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + 2y = 3; \\ 3x - y = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x - 4y = 10; \\ 4x - 3y = 10; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 5x - 4y = 9; \\ 5x + 2y = 3. \end{cases}$

379*. Решите уравнение:

а) $(3x^2 + 1)^2 - 2(3x^2 + 1) - 8 = 0$; **б)** $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$.

380. За смену 2 мастера и 6 учеников изготовили 72 детали. Сколько деталей изготовил за смену один мастер и сколько один ученик, если 3 мастера и 5 учеников при той же производительности за смену могут изготовить 76 деталей?

Для тех, кто хочет знать больше

14.* Решение неравенств методом интервалов

1. Метод интервалов. Решим неравенство

$$(x + 1)(x - 2)(x - 4) > 0.$$

Для этого рассмотрим функцию

$$f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$$

и найдем значения x, при которых она принимает положительные значения. Областью определения этой функции является множество всех действительных чисел, а нулями — числа -1, 2 и 4. Нули разбивают область определения на четыре промежутка: $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; 4)$ и $(4; +\infty)$. На каждом из этих промежутков каждый из множителей произведения $(x + 1)(x - 2)(x - 4)$ имеет определенный знак. Знаки множителей и знаки произведения $(x + 1)(x - 2)(x - 4) = f(x)$ представлены в таблице.

Множитель	$(-\infty; -1)$	$(-1; 2)$	$(2; 4)$	$(4; +\infty)$
$x + 1$	−	+	+	+
$x - 2$	−	−	+	+
$x - 4$	−	−	−	+
$f(x)$	−	+	−	+

Следовательно, функция $f(x)$ принимает положительные значения на промежутках $(-1; 2)$ и $(4; +\infty)$. Поэтому множеством решений неравенства $(x + 1)(x - 2)(x - 4) > 0$ является $(-1; 2) \cup (4; +\infty)$.

Отметим на координатной прямой нули функции $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$ и ее знаки на промежутках $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; 4)$ и $(4; +\infty)$ (рис. 61). На каждом из этих промежутков функция сохраняет знак, а при переходе через значения -1, 2 и 4 (нули функции) ее знак поочередно меняется. На крайнем справа промежутке $(4; +\infty)$, как видно из таблицы, функция $f(x)$ принимает положительные значения. Поэтому знаки функции $f(x)$ на промежутках можно было найти так: отмечаем знаком «+» знак функции на крайнем справа промежутке $(4; +\infty)$, а потом, используя свойство чередования знаков, определяем знаки функции на остальных промежутках, двигаясь справа налево.

Рис. 61

Описанным способом можно найти знаки функции вида

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n),$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ — некоторые попарно различные числа, на промежутках, которые определяются нулями этой функции. Зная знаки функции на промежутках, можно записать множества решений неравенств

$$\begin{aligned} &(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) > 0,\\ &(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) < 0,\\ &(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) \geq 0,\\ &(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) \leq 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Пример 1. Решить неравенство $(x + 3)(x + 2)(x - 6) < 0$.

• Отметим на координатной прямой нули функции $f(x) = (x + 3)(x + 2)(x - 6)$ — числа –3, –2 и 6. Отметим далее знаки функции на образованных промежутках (на крайнем справа — знак «+», на остальных промежутках — такие знаки, чтобы, двигаясь справа налево, они чередовались).

Множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -3)$ и $(-2; 6)$.

Ответ. $(-\infty; -3)\cup(-2; 6)$. •

Рассмотренный в примере метод решения неравенств называют *методом интервалов*.

Чтобы решить неравенство вида (1) методом интервалов, нужно:

1) отметить на координатной прямой нули функции $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$;

2) отметить знаки функции на образованных промежутках (на крайнем справа — знак «+», на остальных промежутках — такие знаки, чтобы, двигаясь справа налево, эти знаки чередовались);

3) выбрав промежутки, на которых функция $f(x)$ принимает значения соответствующего знака, записать множество решений неравенства.

Метод интервалов можно применить при решении не только неравенств вида (1), но и неравенств, которые путем преобразований сводятся к одному из неравенств этого вида. Рассмотрим пример.

Пример 2. Решить неравенство $(1-2x)(x^2-3x-4)\le 0$.

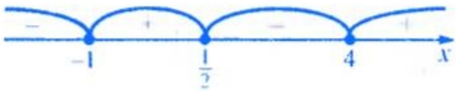
• Приведем данное неравенство к виду (1). Для этого в выражении $1-2x$ вынесем за скобки множитель -2, а квадратный трехчлен x^2-3x-4 разложим на множители:

$$-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)(x-4)\le 0.$$

Разделив обе части неравенства на -2, получим неравенство вида (1):

$$(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-4)\ge 0.$$

Отметим на координатной прямой нули функции $f(x)=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-4)$ и ее знаки на образованных промежутках.



На промежутках $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ и $(4;+\infty)$ функция $f(x)$ принимает положительные значения, а при $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$, $x=4$ — значение 0. Поэтому $f(x)\ge 0$, если x принадлежит промежутку $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$ или промежутку $[4;+\infty)$.

Ответ. $\left[-1;\frac{1}{2}\right]\cup[4;+\infty)$. •

Если в неравенствах (1) не все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются попарно различными, то рассмотренный алгоритм определения знаков функции $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ применять нельзя. Способ решения таких неравенств показан в следующем примере.

Пример 3. Решить неравенство $(x+0{,}5)(x-1)^2(x-3)^3<0$.

• Отметим на координатной прямой нули функции $f(x)=(x+0{,}5)(x-1)^2(x-3)^3$ и ее знаки на образованных промежутках.

На крайнем справа промежутке $(3;+\infty)$ все множители произведения $(x+0{,}5)(x-1)^2(x-3)^3$ являются положительными, поэтому на этом промежутке $f(x)>0$. Двигаясь справа налево при переходе через значение $x=3$, функция меняет знак, та как меняет знак множитель $(x-3)^3$, являющийся нечетной степенью двучлена $x-3$. При переходе через значение $x=1$ знак функции не меняется, так как не меняется знак множителя $(x-1)^2$, являющегося четной степенью двучлена $x-1$. При переходе через значение $x=-0{,}5$ функция меняет знак, так как меняет знак множитель $x+0{,}5$ — нечетная (первая) степень двучлена $x+0{,}5$.

Ответ. $(-0{,}5;1)\cup(1;3)$. •

2. Решение дробных рациональных неравенств. Метод интервалов можно применять и при решении дробных неравенств. Решим неравенство

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-4} > 0. \qquad (2)$$

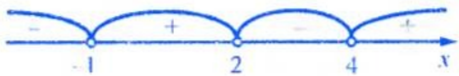
Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-4}$.

1) Найдем область определения функции: $x - 4 \neq 0$; $x \neq 4$.

2) Найдем нули функции: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

3) Отметим на координатной прямой точки, соответствующие числам -1, 2 и 4.

Знаки частного $\frac{(x+1)(x-2)}{x-4}$ на промежутках $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$, $(2; 4)$ и $(4; +\infty)$ определяем так же, как и знаки произведения $(x+1)(x-2)(x-4)$.



Функция $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-4}$ принимает положительные значения на промежутках $(-1; 2)$ и $(4; +\infty)$. Поэтому множеством решений неравенства (2) является $(-1; 2) \cup (4; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство $\frac{4-7x}{x+2} \leq -1$.

● Приведем данное неравенство к неравенству, левой частью которого является дробь, а правой — нуль:

$$\frac{4-7x}{x+2} + 1 \leq 0; \quad \frac{4-7x+x+2}{x+2} \leq 0; \quad \frac{-6x+6}{x+2} \leq 0; \quad \frac{-6(x-1)}{x+2} \leq 0; \quad \frac{x-1}{x+2} \geq 0.$$

Нулем функции $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ является $x = 1$; при $x = -2$ эта функция не определена. Отметим на координатной прямой точки, соответствующие числам -2 и 1, а также знаки функции на образованных промежутках (на крайнем справа — знак «+», на остальных промежутках — такие знаки, чтобы, двигаясь справа налево, эти знаки чередовались).

На промежутках $(-\infty; -2)$ и $(1; +\infty)$ функция $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ принимает положительные значения, а при $x = 1$ — значение 0. Поэтому множеством решений неравенства является объединение промежутков $(-\infty; -2)$ и $[1; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$. ●

Уровень В

Решите неравенство:

381. **а)** $(x-4)(x+6)<0$; **б)** $(x+1)(x+3{,}5)\ge 0$;

в) $(x-1)(x-2)(x-3)>0$; **г)** $x(x-5)(x+3)\le 0$;

д) $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)>0$.

382. **а)** $(x-2)(x-3)<0$; **б)** $(x+3)(x-0{,}5)(x-5)\ge 0$;

в) $(x-5)(x-1)(x+2)(x+4)\le 0$.

383. **а)** $(2x-1)(x+1)>0$; **б)** $(6-3x)(5x+3)\ge 0$;

в) $(4x-8)(3-x)(x+1)<0$; **г)** $-x(2x-5)(-3x+3)\le 0$.

384. **а)** $(x^2-4)(x+4)>0$; **б)** $(2-x)(9x^2-1)\le 0$.

385. **а)** $(4x-16)(2-x)\le 0$; **б)** $(3x+2)(x^2-9)>0$.

386. **а)** $\dfrac{x+1}{x-3}<0$; **б)** $\dfrac{(x-1)(x-8)}{x+2}>0$; **в)** $\dfrac{1-2x}{(x+3)(x-4)}\ge 0$.

387. **а)** $\dfrac{3}{x-1}>2$; **б)** $\dfrac{2x-1}{x+1}<1$; **в)** $\dfrac{3-x}{2x+3}\le 4$.

388. **а)** $\dfrac{x-7}{(x-1)(x-5)}>0$; **б)** $\dfrac{2x-1}{4x+1}>3$; **в)** $\dfrac{5x+3}{3-x}\le 1$.

389. **а)** $x^3-4x^2+3x>0$; **б)** $x^3-x^2-4x+4\le 0$;

в) $(x^2+6x-16)(x^2-1)<0$; **г)** $(x^2-6x+5)(x^2-4)\ge 0$.

390. **а)** $(x+8)^2(x+6)^3(x-1)\le 0$; **б)** $(x^2-1)^2(3x^2+2x-1)>0$.

391. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{(x^2-3x+3)(x^2-3x-10)}$; **б)** $y=\sqrt{(x-1)(x+2)(x^2-16)}$.

392. Решите неравенство $(x-1)(x-a)<0$ с параметром a.

Решите неравенство:

393. **а)** $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2+5x+6}<0$; **б)** $\dfrac{(x-1)(x^2-8x+12)}{2x-2}\ge 0$;

в) $\dfrac{x^2-4x-5}{(x-1)^2}<0$; **г)** $\dfrac{6-x}{(x^2-6x+10)(2x-1)}\ge 0$.

394. **а)** $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-1}<1$; **б)** $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\ge -3$;

в) $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{x+2}$; **г)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+2}>\dfrac{3}{x+1}$.

Упражнения для повторения

395. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 3; \\ 2x - 3y = -1. \end{cases}$

396*. Найдите значение выражения:

$$\frac{4}{\sqrt{8}+\sqrt{4}} + \frac{4}{\sqrt{12}+\sqrt{8}} + \frac{4}{\sqrt{16}+\sqrt{12}} + \ldots + \frac{4}{\sqrt{36}+\sqrt{32}}.$$

397. На обработку одной детали первому рабочему требуется времени на 6 мин меньше, чем второму. Сколько деталей обрабатывает второй рабочий за 7 ч, если первый за это время обрабатывает на 8 деталей больше второго?

398*. Бассейн, к которому подведены две трубы, через первую трубу наполняется водой на 5 ч быстрее, чем через вторую. Если сначала открыть вторую трубу, а через 8 ч открыть и первую, то бассейн наполнится за 18 ч. Какова емкость бассейна, если за 5 ч через первую трубу и за 4 ч через вторую трубу в сумме проходит 20 м^3 воды?

15. Системы уравнений с двумя переменными

1. Уравнения с двумя переменными. Пусть известно, что гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см. Если длину одного из катетов обозначить через x см, а второго — через y см, то получим равенство

$$x^2 + y^2 = 25^2,$$

содержащее две переменные x и y. Такое равенство, как известно, называют *уравнением с двумя переменными* (или уравнением с двумя неизвестными).

Уравнения $x^2 - y = 0$, $2x - 5y = 1$, $xy = 1$, $x + y = 3x^2y^2$ также являются уравнениями с двумя переменными.

Левой частью уравнения $x^2 - y = 0$ является многочлен второй степени, а правой — нуль. Такое уравнение называют уравнением второй степени с двумя переменными.

Уравнения $2x - 5y = 1$, $xy = 1$ и $x + y = 3x^2y^2$ являются соответственно уравнениями первой, второй и четвертой степеней.

Напомним, что *решением* уравнения с двумя переменными называют пару значений переменных, при которых уравнение превращается в верное числовое равенство. Так, уравнение $x^2 + y^2 = 25$ при $x = 3$, $y = 4$ превращается в верное числовое равенство $3^2 + 4^2 = 25$. Поэтому пара значений переменных $x = 3$, $y = 4$ является решением уравнения $x^2 + y^2 = 25$. Это решение записывают еще и так: (3; 4). Решениями уравнения $x^2 + y^2 = 25$ являются также пары (–3; 4), (4; 3), (0; 5), (–5; 0) и т. п.

Если на координатной плоскости отметить все точки, координаты которых являются решениями некоторого уравнения с двумя переменными, то получим *график* этого уравнения.

Так, графиком уравнения $2x - 5y = 1$ является прямая, графиком уравнения $x^2 + y^2 = 25$ — окружность радиуса 5 с центром в начале координат (рис. 62). Уравнения $x^2 - y = 0$ и $xy = 1$ равносильны уравнениям $y = x^2$ и $y = \dfrac{1}{x}$. Поэтому их графиками являются соответственно парабола и гипербола.

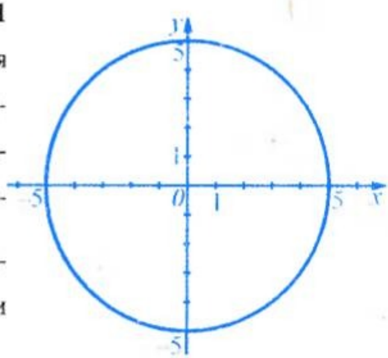


Рис. 62

2. Графический способ решения систем уравнений. В 7 классе мы рассматривали разные способы решения систем линейных уравнений: графический способ, способы подстановки, сложения. Пусть нужно решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ y = 5 - x^2, \end{cases}$$

оба уравнения которой являются уравнениями второй степени.

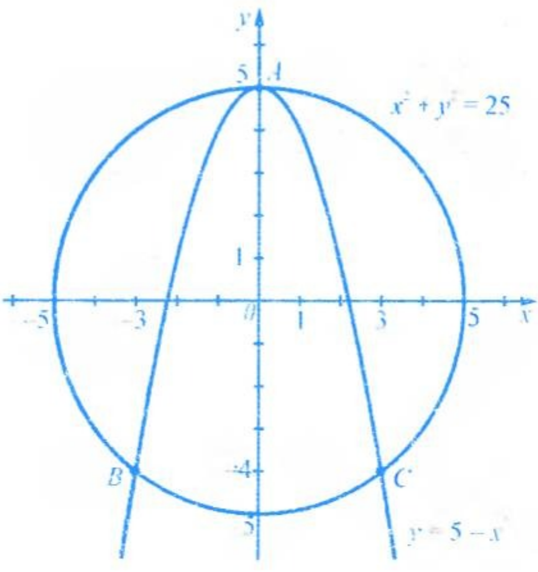


Рис. 63

Построим в одной системе координат графики обоих уравнений системы (рис. 63). Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 25$ является окружность, а графиком уравнения $y = 5 - x^2$ — парабола. Эти графики имеют 3 общих точки: $A(0; 5)$, $B(-3; -4)$ и $C(3; -4)$. Легко проверить, что координаты каждой из этих точек являются решениями как первого, так и второго уравнений системы. Поэтому система имеет 3 решения: $(0; 5)$, $(-3; -4)$ и $(3; -4)$.

Чтобы решить систему уравнений с двумя переменными графическим способом, нужно построить графики уравнений системы в одной системе координат и найти координаты общих точек этих графиков.

3. Решение систем уравнений. Если в системе уравнений с двумя переменными одно из уравнений является уравнением первой степени, то такую систему можно решить *способом подстановки.*

Пример 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 3x^2 + y^2 = 28. \end{cases}$

• Выразим из первого уравнения переменную y через переменную x:

$$-y = -3x + 2; \qquad y = 3x - 2.$$

Подставим во второе уравнение вместо y выражение $3x - 2$ и решим полученное уравнение с одной переменной x:

$3x^2 + (3x - 2)^2 = 28; \quad 3x^2 + 9x^2 - 12x + 4 - 28 = 0;$

$12x^2 - 12x - 24 = 0; \quad x^2 - x - 2 = 0; \; x_1 = -1; x_2 = 2.$

По формуле $y = 3x - 2$ находим:

$y_1 = 3x_1 - 2 = 3\cdot(-1) - 2 = -5; \qquad y_2 = 3x_2 - 2 = 3\cdot 2 - 2 = 4.$

Итак, система имеет два решения: $x_1 = -1$, $y_1 = -5$; $x_2 = 2$, $y_2 = 4$.

Ответ. $(-1; -5)$, $(2; 4)$. •

Решая систему уравнений способом подстановки, нужно:

1) выразить из некоторого уравнения системы одну переменную через другую;

2) подставить полученное выражение в другое уравнение вместо соответствующей переменной;

3) решить полученное уравнение с одной переменной;

4) найти соответствующее значение другой переменной.

Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10; \\ xy = 3. \end{cases}$

• Умножим второе уравнение на 2 и сложим с первым уравнением, получим:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 16.$$

Отсюда: $(x+y)^2 = 16$; $x + y = 4$ или $x + y = -4$.

Итак, возможны два случая.

1) $\begin{cases} x+y=4; \\ xy=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=4-x; \\ x(4-x)=3; \end{cases}$ $4x-x^2-3=0$; $x^2-4x+3=0$; $x_1=1$; $x_2=3$.

$y_1 = 4-1=3$; $y_2=4-3=1$. $(1; 3)$, $(3; 1)$ — решения системы.

2) $\begin{cases} x+y=-4; \\ xy=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=-4-x; \\ x(-4-x)=3; \end{cases}$ $-4x-x^2-3=0$; $x^2+4x+3=0$;

$x_3=-1$; $x_4=-3$. $y_3=-4-(-1)=-3$; $y_4=-4-(-3)=-1$.

$(-1; -3)$, $(-3; -1)$ — решения системы.

Ответ. $(1; 3)$, $(3; 1)$, $(-1; -3)$, $(-3; -1)$. •

Замечания. 1. Систему из примера 2 можно решать способом подстановки, выразив из второго уравнения переменную y через переменную x: $y=\frac{3}{x}$.

2. Решая систему уравнений вида $\begin{cases} x+y=a; \\ xy=b, \end{cases}$ где a и b — некоторые известные числа, можно использовать теорему, обратную теореме Виета. Так, решая пример 2, мы получили систему $\begin{cases} x+y=4; \\ xy=3. \end{cases}$ На основании упомянутой теоремы числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2-4t+3=0$. Решив уравнение, найдем: $t_1=1$; $t_2=3$. Тогда пары чисел $(1; 3)$ и $(3; 1)$ — решения данной системы.

Для тех, кто хочет знать больше

Пример 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=3; \\ 3xy+\frac{2x}{y}=14. \end{cases}$

• Положим: $xy=u$, $\frac{x}{y}=v$. Получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} u-v=3; \\ 3u+2v=14, \end{cases}$$

решением которой является $u=4$, $v=1$. Возвращаясь к замене, получим:

$$\begin{cases} xy=4; \\ \frac{x}{y}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} xy=4; \\ x=y. \end{cases}$$

Решив последнюю систему способом подстановки, найдем: $x_1 = 2$, $y_1 = 2$; $x_2 = -2$, $y_2 = -2$.

Ответ. (2; 2), (–2; –2).•

Пример 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy - x = 35; \\ xy^3 - xy^2 = 560. \end{cases}$

• Запишем данную систему так: $\begin{cases} xy - x = 35; \\ y^2(xy - x) = 560. \end{cases}$ Разделим почленно второе уравнение на первое (так как $xy - x = 35$, то $xy - x \neq 0$ и на $xy - x$ делить можно). Получим: $y^2 = 16$, откуда $y_1 = -4$, $y_2 = 4$.

Подставим эти значения y в первое уравнение системы:

$$-4x - x = 35,\ x_1 = -7;\quad 4x - x = 35,\ x_2 = 11\frac{2}{3}.$$

Ответ. (–7; –4); $\left(11\frac{2}{3}; 4\right)$.•

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Построить график уравнения $y = \sqrt{4 - x^2}$.

• Так как при допустимых значениях x выражение $\sqrt{4 - x^2}$ принимает неотрицательные значения, то $y \geq 0$. Поэтому данное уравнение равносильно таким двум условиям: $y^2 = 4 - x^2$, $y \geq 0$ или $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$. Следовательно, графиком уравнения является полуокружность радиуса 2 с центром в начале координат, находящаяся в верхней полуплоскости (рис. 64).•

Упражнение 2. Построить график уравнения $|2x - y| = 2$.

• Если модуль числа равен 2, то этим числом является 2 или –2. Итак, $2x - y = 2$ или $2x - y = -2$. Поэтому графиком уравнения являются две прямые, заданные уравнениями $2x - y = 2$ и $2x - y = -2$ (рис. 65).•

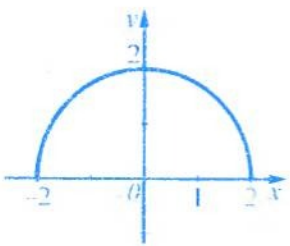


Рис. 64

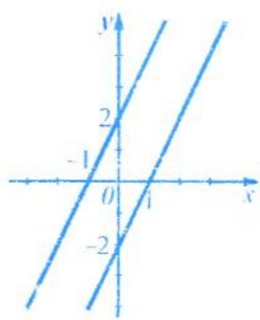


Рис. 65

Упражнение 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+2xy=5; \\ 3y-2xy=2. \end{cases}$

• Прибавим к первому уравнению системы второе уравнение, получим: $x+3y=7$, откуда $x=7-3y$. Подставив вместо x выражение $7-3y$ во второе уравнение системы, получим:

$$3y-2y(7-3y)=2;\quad 3y-14y+6y^2-2=0;$$

$$6y^2-11y-2=0;\quad y_1=-\frac{1}{6};\ y_2=2.$$

$$x_1=7-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=7\frac{1}{2};\quad x_2=7-3\cdot 2=1.$$

Ответ. $\left(7\frac{1}{2};-\frac{1}{6}\right)$, $(1;2)$. •

Устно

399. Является ли решением уравнения $x^2+y=10$ пара чисел:

а) $x=3;\ y=1$; **б)** $(-2;6)$?

400. Является ли решением системы уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=17; \\ xy=4 \end{cases}$ пара чисел:

а) $x=-1;\ y=4$; **б)** $(1;4)$?

Уровень А

Постройте график уравнения:

401. **а)** $2x-3y=6$; **б)** $x^2+y^2=9$; **в)** $2x^2-y=0$.

402. **а)** $x-2y=2$; **б)** $x^2+y^2=4$.

Решите графически систему уравнений:

403. **а)** $\begin{cases} x+y=2; \\ y=x^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x-y=2; \\ x^2+y^2=4; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x^2+y^2=1; \\ y=x^2+1. \end{cases}$

404. **а)** $\begin{cases} 2x-y=0; \\ y=x^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2+y^2=9; \\ x+y=3. \end{cases}$

Решите систему уравнений:

405. **а)** $\begin{cases} y=3x-2; \\ y=x^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x=2y+1; \\ xy+y=4; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 3x^2+y^2=7; \\ y=2x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=2; \\ xy=1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x-y=11; \\ xy=-28; \end{cases}$ е) $\begin{cases} xy+y^2=4; \\ x+y=2. \end{cases}$

406. а) $\begin{cases} y=x+1; \\ xy=x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y^2=9; \\ x+2y=9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y=2; \\ xy+2y=0. \end{cases}$

Уровень Б

Решите графически систему уравнений:

407. а) $\begin{cases} y-x^2-2x=0; \\ x-y=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y+1=0; \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2-y=0; \\ \sqrt{x}-y=0. \end{cases}$

408. а) $\begin{cases} y=x^2-2x+1; \\ y-x=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=\sqrt{x}; \\ x^2+y^2=2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+2y=7; \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

409. Используя графики уравнений, найдите количество решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=4; \\ y=x^2-2x+2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=9; \\ xy=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy=-1; \\ y=4-x^2. \end{cases}$

Решите систему уравнений:

410. а) $\begin{cases} x+y+1=0; \\ 3x^2+2xy+y=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=4; \\ x^2-3xy-2y^2=8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-5y=14; \\ 2x+3y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-y=1; \\ (x-1)(y+2)+x^2+3=2xy; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y=4; \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x+y=5; \\ \dfrac{4x}{x+y}+\dfrac{1}{x}=2. \end{cases}$

411. а) $\begin{cases} x^2+y^2=25; \\ x^2-y^2=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y+xy=10; \\ x+2y-xy=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy+2x=5; \\ xy-3y=-6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2+2x-y=5; \\ x^2+x-2y=6. \end{cases}$

412. а) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}=1; \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{8}{x-y}-\dfrac{8}{x+y}=1; \\ \dfrac{2}{x-y}+\dfrac{4}{x+y}=1. \end{cases}$

413. **а)** $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=1; \\ 2x-3y=2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2+y^2=26; \\ xy=5. \end{cases}$

414. **а)** $\begin{cases} x+y=6; \\ x^2-xy=2y^2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x-4=3y; \\ (2x+1)(y-1)=6xy; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y=1; \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=4; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x^2+xy=10; \\ x^2-xy=-2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y^2=5; \\ 2x-y-y^2=-4; \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{y}=3; \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=4; \\ 4x+3y=1; \end{cases}$ **з)** $\begin{cases} x^2+y^2=25; \\ xy=12. \end{cases}$

Уровень В

415. Постройте график уравнения:

а) $y+\sqrt{4-x^2}=0;$ **б)** $|x-y|=2;$

в) $|y|-x^2=0;$ **г)** $\dfrac{y-x^2}{(x-2)^2+(y-4)^2}=0.$

416. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy=2; \\ (x+1)^2+y=0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x-y=1; \\ (x-2)^2+y^2=25; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x|-y=0; \\ x^2+y=2; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x^2+(y-3)^2=9; \\ (x-3)^2+y^2=9. \end{cases}$

417. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy^2-x=2y; \\ xy^2-y=3x; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2-6xy+9y^2=225; \\ y^2+3xy=-35; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2+y^2=10; \\ x^2y^2=9; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x+y-2xy=3; \\ xy(x+y)=2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xy - \dfrac{y}{x} = 1; \\ 2xy - \dfrac{3y}{x} = 6; \end{cases}$

е) $\begin{cases} (2x+y)^2 - 2(2x+y) = 15; \\ 2x + 2xy + y = 11; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{2y}{x} = 3; \\ x^2 + 3xy - 5y^2 = 20; \end{cases}$

з) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{x+2y} + \dfrac{x+2y}{x-2y} = \dfrac{10}{3}; \\ 3x - 5y = 17; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8; \\ x^4 - x^2y^2 = 72; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 56; \\ x^2 + xy + y^2 = 28. \end{cases}$

418. Найдите все значения a, при которых система уравнений имеет заданное число решений:

а) $\begin{cases} y + 2x = 3; \\ 3x^2 - xy = a; \end{cases}$ 1 решение;

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ x + y = a; \end{cases}$ 2 решения;

в) $\begin{cases} y - |x| = 0; \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 2 решения;

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a; \\ xy = 1; \end{cases}$ 4 решения.

Упражнения для повторения

419. Упростите выражение:

а) $\dfrac{3ab + 6b^2}{a^2 - 4b^2}$;

б) $\dfrac{x^2 - 5}{x - \sqrt{5}}$;

в) $\dfrac{6}{a} + \dfrac{a+3}{a-3} : \dfrac{a^2 + 3a}{3a - 9}$;

г) $\dfrac{9}{3a+c} - \dfrac{3a-c}{2a-c} \cdot \left(\dfrac{18a - 9c}{9a^2 - c^2} - 2a + c\right)$.

420. Известно, что $1{,}5 < m < 1{,}7$. Оцените значение выражения:

а) $2m - 4{,}8$; б) $-3m$; в) $4{,}5 - 2m$.

421. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + px + 12 = 0$ удовлетворяют условию $x_1 - x_2 = 1$. Найдите p, если $p > 0$.

422. Котел можно наполнить водой через два крана — A и B. Наполнение котла через кран A длится на 11 мин дольше, чем через кран B. Если открыть оба крана, то котел заполнится за 0,5 ч. За какое время можно наполнить котел через один кран A?

423*. Некоторое расстояние автомобиль проехал со скоростью 60 км/ч. После этого расстояние на 75 км больше он проехал со скоростью 75 км/ч, а остальной путь, который на 135 км короче пройденного, — со скоростью 48 км/ч. Найдите весь путь, если средняя скорость автомобиля 60 км/ч.

16. Решение задач при помощи систем уравнений

Рассмотрим примеры.

Задача 1. Из двух пунктов, расстояние между которыми 18 км, вышли одновременно навстречу друг другу две группы туристов и встретились через 2 ч. Найти скорость движения каждой группы, если первой для преодоления всего пути между пунктами требуется времени на 0,9 ч больше, чем второй.

• Пусть скорость первой группы туристов x км/ч, а второй — y км/ч. Группы встретились через 2 ч, поэтому до встречи первая группа прошла путь $2x$ км, а вторая — $2y$ км. Вместе они прошли 18 км. Получаем уравнение $2x + 2y = 18$.

Чтобы пройти весь путь длиной 18 км, первой группе нужно $\frac{18}{x}$ ч, а второй — $\frac{18}{y}$ ч. Так как первой группе на это нужно времени на 0,9 ч больше, чем второй, то: $\frac{18}{x}-\frac{18}{y}=0.9.$ Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+2y=18; \\ \dfrac{18}{x}-\dfrac{18}{y}=0,9. \end{cases}$$

По условию задачи $x>0$ и $y>0$. Поэтому, умножив обе части второго уравнения на xy, получим:

$$\begin{cases} 2x+2y=18; \\ 18y-18x=0,9xy; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=9; \\ 20y-20x=xy; \end{cases} \quad \begin{cases} y=9-x; \\ 20y-20x=xy; \end{cases}$$

$20(9-x)-20x=x(9-x);$

$x^2-49x+180;$ $x_1=4;$ $x_2=45.$

Если $x=4$, то $y=9-4=5$.

Если $x=45$, то $y=9-45=-36$ — не удовлетворяет неравенству $y>0$.

Ответ. 4 км/ч; 5 км/ч. •

Задача 2. Сад и огород имеют прямоугольную форму. Длина сада на 30 м меньше длины огорода, при этом его ширина на 10 м больше ширины огорода. Найти размеры сада, если его площадь 900 м^2, а площадь огорода — 1200 м^2.

• По условию задачи составляем таблицу.

	Длина	Ширина	Площадь
Сад	x м	y м	$xy=900$
Огород	$(x+30)$ м	$(y-10)$ м	$(x+30)(y-10)=1200$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 900; \\ (x+30)(y-10) = 1200. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} xy = 900; \\ xy - 10x + 30y - 300 = 1200; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 900; \\ 900 - 10x + 30y - 300 = 1200; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 900; \\ -10x + 30y = 600; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 900; \\ x - 3y = -60; \end{cases} \quad \begin{cases} y(3y-60) = 900; \\ x = 3y - 60; \end{cases}$$

$3y^2 - 60y - 900 = 0$; $y^2 - 20y - 300 = 0$; $y_1 = -10$; $y_2 = 30$.

Значение y_1 не удовлетворяет условию задачи (ширина сада не может выражаться отрицательным числом). Поэтому: $y = 30$; $x = 3y - 60 = 3 \cdot 30 - 60 = 30$.

Ответ. 30 м; 30 м. •

Уровень А

424. За 2 кг клубники и 3 кг черешен заплатили 33 грн., а за 4 кг клубники и 2 кг черешен — 38 грн. Сколько стоит 1 кг клубники и сколько 1 кг черешен?

425. За 8 тетрадей и 5 альбомов заплатили 9 грн. Сколько стоит одна тетрадь и сколько один альбом, если 4 тетради дешевле 6 альбомов на 4 грн.?

426. Найдите стороны прямоугольника, периметр которого равен 30 см, а площадь — 56 см^2.

427. Сумма двух чисел равна 11, а их произведение — 28. Найдите эти числа.

428. Разность двух чисел равна 10, а сумма их квадратов — 82. Найдите эти числа.

429. Произведение двух чисел равно 64. Найдите эти числа, если одно из них на 12 больше другого.

430. Сумма двух чисел равна 2, а разность их квадратов — 16. Найдите эти числа.

431. Найдите стороны прямоугольника, периметр которого равен 28 дм, а диагональ — 10 дм.

432. Периметр прямоугольника равен 26 см, а сумма площадей квадратов, построенных на двух его соседних сторонах, равна 89 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

Уровень Б

433. Смешав 20-процентный и 60-процентный растворы кислоты, получили 800 г раствора, содержащего 30% кислоты. Сколько граммов каждого раствора смешали?

434. За пачку печатной бумаги и 3 альбома заплатили 25 грн. После того как бумага подешевела на 10%, а альбомы подорожали на 20%, за 3 пачки бумаги и 2 альбома заплатили 39 грн. Какова начальная цена пачки бумаги и одного альбома?

435. Известно, что 3 банки краски и 2 банки лака стоили 90 грн. После того как краска подешевела на 10%, а лак — на 20%, за 4 банки краски и 1 банку лака заплатили 60 грн. Какова была начальная цена банки краски и банки лака?

436. Из города A в город B, расстояние между которыми 210 км, одновременно выехали два автомобиля. Скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого, благодаря чему он приехал в город B на 30 мин быстрее. Найдите скорость каждого автомобиля.

437. Два экскаватора, работая вместе, вырыли котлован за 7 ч 30 мин. За какое время может вырыть котлован каждый экскаватор, работая отдельно, если одному из них нужно на это времени на 8 ч больше, чем другому?

438. Два трактора, работая вместе, вспахали поле за 2 дня. За сколько дней может вспахать все поле каждый трактор, работая отдельно, если один из них может сделать это на 3 дня быстрее, чем другой?

439. Из базы отдыха одновременно в противоположных направлениях вышли две группы туристов. Через 3 ч расстояние между ними было 21 км. Найдите скорость каждой группы, если известно, что путь длиной 6 км одна из них проходит на 30 мин быстрее другой.

440. Расстояние между городами A и B равно 480 км. Из этих городов одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Через 3 ч движения им до встречи оставалось пройти еще 60 км. Найдите скорость каждого поезда, если расстояние между городами A и B один из них проходит на 2 ч быстрее, чем второй.

441. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Через час они встретились и, не останавливаясь, продолжили ехать с предыдущими скоростями. Один из них прибыл в пункт A на 27 мин раньше, чем другой — в пункт B. Найдите скорость каждого велосипедиста, если расстояние между пунктами 36 км.

442. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, выехал мотоциклист, а через 40 мин навстречу ему из города B — автомобиль. Мотоциклист в город B и автомобиль в город A прибыли одновременно. Найдите скорости мотоциклиста и автомобиля, если мотоциклист за 3 ч проезжает на 90 км больше, чем автомобиль за 1 ч, и скорость автомобиля не превышает 120 км/ч.

443. Резервуар емкостью 25 м^3 можно наполнить водой через два крана за 2 ч. Если первые 10 м^3 воды пропустить через первый кран, а остальную часть — через второй, то резервуар будет наполнен за 4 ч. Какой объем воды проходит через каждый кран за 1 ч?

444. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 10 ч. Если сначала первый рабочий выполнит половину роботы, а потом второй — оставшуюся часть, то работа будет выполнена за 22 ч 30 мин. За какое время каждый рабочий, работая отдельно, может выполнить всю работу?

445. Каждый из двух принтеров печатает текстовый файл объемом 36 страниц. Первый принтер напечатал 6 страниц за то же время, за которое второй напечатал 5 страниц. Сколько страниц печатает каждый принтер за минуту, если первый закончил роботу на 1.5 мин быстрее второго?

446. Отец и сын могут покрасить забор, работая вместе, за 4 ч. За сколько времени может покрасить забор каждый из них, работая отдельно, если отцу для того, чтобы покрасить $\frac{2}{3}$ забора, нужно времени на 1 ч больше, чем сыну, чтобы покрасить $\frac{1}{4}$ забора?

447. Площадь прямоугольника 4200 см^2. Если длину прямоугольника увеличить на 50 см, а ширину уменьшить на 25 см, то площадь не изменится. Найдите стороны прямоугольника.

448. Несколько учеников поделили поровну между собой 90 яблок. Если бы учеников было на 3 меньше, то каждый из них получил бы на 1 яблоко больше. Сколько было учеников?

Уровень В

449. Бассейн можно наполнить водой при помощи двух насосов. Если первый насос включить на 5 ч, а потом второй — на 7 ч, то наполнится $\frac{11}{20}$ бассейна. После этого, чтобы наполнить бассейн, нужно еще 5 ч общей работы обоих насосов. За сколько времени может наполнить бассейн каждый насос, работая отдельно?

450. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 ч и второй 4 ч, оказалось, что они изготовили $\frac{5}{9}$ всех деталей. Проработав вместе еще 4 ч, они определили, что им осталось изготовить $\frac{1}{18}$ всех деталей. За сколько времени первый рабочий, работая отдельно, может изготовить партию деталей?

451. Катер за 42 мин прошел 5 км по озеру и 11 км по реке, впадающей в это озеро. Найдите скорость катера в стоячей воде, если он за 2 ч проходит по течению реки на 10 км меньше, чем за 3 ч против течения.

452. Расстояние между пристанями A и B, находящимися на реке, равно 33 км. Моторная лодка путь из A в B и назад проходит за 3 ч 20 мин. Найдите скорость течения реки, если известно, что лодка 11 км по течению реки и 9 км против течения проходит за 1 ч.

453. Несколько самосвалов перевезли щебень, предназначенный для строительства дороги, за 14 дней. Все самосвалы делали ежедневно одинаковое количество ходок, перевозя за каждую по 5 т щебня. Если бы самосвалов было на 4 больше и каждый делал каждый день на 1 ходку больше, то щебень был бы перевезен за 10 дней. Если бы самосвалов было на 10 больше и каждый делал ежедневно на 2 ходки больше, то щебень был бы перевезен за 7 дней. Сколько было самосвалов, сколько ходок выполнял каждый из них за один день и сколько тонн щебня было перевезено?

454. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми 24 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. После встречи автомобиль, выехавший из пункта A, прибыл в пункт B через 16 мин, а второй автомобиль — в пункт A через 4 мин. Найдите скорость каждого автомобиля.

Упражнения для повторения

455. Вычислите:

а) $(5^3)^4 : 5^{10}$; б) $(4^{-5})^5 \cdot 4^{23}$; в) $(4^{-1})^8 \cdot (2^{-3})^{-3}$.

456. Разложите на множители:

а) $(a-b)^2 + \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b$; б) $a^2m + b^2 - abm - ab$.

457. Докажите, что значение выражения $\frac{8a}{2a+5b} - \frac{100b^2}{4a^2-25b^2} : \left(1 - \frac{2a}{2a-5b}\right)$ равно 4 при каждом допустимом значении a и b.

458. Решите уравнение:

а) $\frac{3x-5}{8} + \frac{3x+5}{6} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{x^2+4x+4} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$.

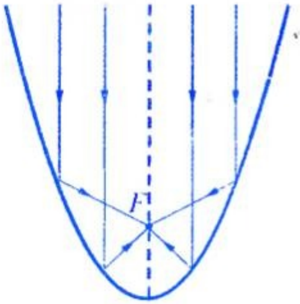
459*. Докажите неравенство:

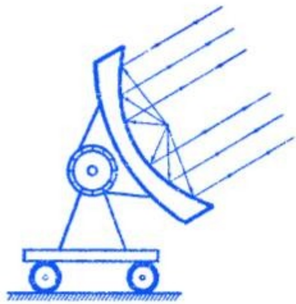
а) $2a^2 - 4ab + 4b^2 \geq 0$; б) $a^2 - 4a + b^2 - 2b + 6 > 0$;

в) $2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$; г) $a^6 + b^6 \geq a^2b^2(a^2 + b^2)$.

Интересно знать

Парабола имеет ряд интересных свойств. Представим себе, что парабола может отражать световые лучи. Если на параболу будет падать пучок лучей параллельно ее оси симметрии, то после отражения они пройдут через одну точку, которую называют фокусом параболы (на рисунке — это точка F). Наоборот, если в фокусе параболы поместить источник света, то лучи, отразившись от параболы, пойдут параллельно ее оси симметрии.





На этом свойстве параболы основано строение параболических зеркал. Поверхность такого зеркала получают вследствие вращения параболы вокруг своей оси. Параболические зеркала используют при создании прожекторов, телескопов, автомобильных фар и т. п.

При определенных условиях камень, брошенный под углом к горизонту, движется «по параболе». То же можно сказать и о пушечном снаряде.

Вопросы и упражнения для повторения § 2

1. Что называют функцией? Каковы способы задания функции?

2. Что называют областью определения и областью значений функции?

3. Что называют графиком функции?

4. Что называют нулями функции? Найдите нули функции $y = x^2 - 4$.

5. Какую функцию называют возрастающей на промежутке; убывающей? Приведите примеры.

6. Как, используя график функции $y = x^2$, построить график функции: $y = x^2 + 3$; $y = (x - 1)^2$; $y = (x - 1)^2 + 3$; $y = -x^2$?

7. Каковы свойства функции $y = ax^2$?

8. Какую функцию называют квадратичной? Что является графиком квадратичной функции и как его построить?

9. Как решают квадратные неравенства? Объясните это на примере неравенства $x^2 + 2x - 3 < 0$.

10. Как решить систему уравнений с двумя переменными графическим способом?

11. Как решить систему уравнений с двумя переменными способом подстановки?

460. Функция задана формулой $f(x) = 2x^2 - 4$.

а) Найдите: $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$.

б) Найдите значения аргумента, соответствующие значению функции: -2; 5.

в) При каких положительных значениях x значение функции в два раза больше значения аргумента?

461. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{x+1}{2x-3}$; **б)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x - 12}$; **в)** $y = \sqrt{3-5x}$;

г) $y = \sqrt{3x+12}$; **д)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$; **е)** $y = \sqrt{9-3x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x+6}}$.

462. Принадлежит ли число 12 области значений функции:

а) $y = -x + 3$; **б)** $y = -x^2 + 10$; **в)** $y = x^2 - 12x + 44$?

Постройте график функции:

463. **а)** $y = 2x - 1$; **б)** $y = -3x^2$; **в)** $y = 0{,}25x^3$, где $-2 \le x \le 2$.

464. **а)** $y = x^2 - 1$; **б)** $y = \dfrac{4}{x} - 1$; **в)** $y = -\sqrt{x} + 1$.

465. **а)** $y = (x - 1{,}5)^2$; **б)** $y = \sqrt{x+2}$; **в)** $y = \dfrac{2}{x-2}$.

466. **а)** $y = (x + 2)^2 - 2$; **б)** $y = \dfrac{1}{x-1} + 2$; **в)** $y = -\sqrt{x-3} + 2$.

467. **а)** $y = x^2 - 6x + 5$; **б)** $y = 3x^2 + 9x + 6$; **в)** $y = -2x^2 + 2x - 1$.

468. График функции $y = ax^2$ проходит через точку $A(-2; -2)$. Найдите a и постройте график функции. Проходит ли этот график через точку $B(4; -8)$?

469. График функции $y = \dfrac{k}{x-2}$ проходит через точку $M(1; 2)$. Найдите k и постройте график функции. Проходит ли этот график через точку $N(4; 1)$?

470. Постройте график функции $y = x^2 - 4x + 3$. Используя график, найдите:

а) область значений функции;

б) все значения x, при которых функция принимает отрицательные значения;

в) промежуток, на котором функция убывает.

471. Постройте график функции $y = -x^2 - 2x + 3$. Используя график, найдите:

а) область значений функции;

б) все значения x, при которых функция принимает отрицательные значения;

в) промежуток, на котором функция возрастает; убывает.

472. Постройте график функции $y = x^2 - 4$. Используя график, найдите область значений функции. Является ли данная функция четной?

Постройте график функции:

473. **а)** $y = \begin{cases} 2x - 3, \text{ если } x \le 1; \\ x^2 - 2, \text{ если } x > 1; \end{cases}$ **б)** $y = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x < 0; \\ 1 - \sqrt{x}, \text{ если } x \ge 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -4, \text{ если } x \le -2; \\ -x^2, \text{ если } -2 < x < 1; \\ x - 2, \text{ если } x \ge 1; \end{cases}$ **г)** $y = \begin{cases} -x - 1, \text{ если } x < -1; \\ \sqrt{1 - x^2}, \text{ если } -1 \le x \le 1; \\ x - 1, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

474*. **а)** $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} + x^2$; **б)** $y = x^2 + 2|x - 1|$;

в) $y = |x^2 + 4x|$; **г)** $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$;

д) $y = \dfrac{|x|}{x}$; **е)** $y = x^2 - \dfrac{x - 1}{|x - 1|}$.

475. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 3x^2 - 3x + 1$ и $y = -x + 2$; **б)** $y = x^2 - 2x - 5$ и $y = -x^2 + 4x + 3$.

476. При помощи графиков функций определите, имеет ли корни уравнение:

а) $-x - 3 = \sqrt{x + 4}$; **б)** $x^2 + 2x = \sqrt{x - 1}$; **в)** $\dfrac{4}{x - 2} = 4 - 2x$.

477. Решите графически уравнение:

а) $(x - 1)^2 = \sqrt{x - 1}$; **б)** $2 - x^2 = \sqrt{x}$; **в)** $\dfrac{6}{x - 1} = x^2 - 2x + 6$.

478*. Определите количество корней уравнения $|2|x| - 1| = x - a$ в зависимости от значений параметра.

Решите неравенство:

479. **а)** $x^2 \le 25$; **б)** $x^2 > 25$; **в)** $-x^2 + 100 \ge 0$;

г) $x^2 - 7x < 0$; **д)** $-x^2 + 3x \le 0$; **е)** $-\dfrac{1}{3}x^2 + 3x \ge 0$.

480. **а)** $x^2 - 2x - 8 > 0$; **б)** $-x^2 - 4x + 5 \le 0$; **в)** $3x^2 + 4x - 7 < 0$.

481. **а)** $(x-3)(x+3) > 2(x+3)$; **б)** $(x-2)(4x+1) < (x+1)^2 + 3$.

482. **а)** $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{6} > \frac{x^2+2x}{24}$; **б)** $\frac{1}{12}\left(x^2-4\right) - \frac{1}{16}(x-4) < -\frac{1}{24} - \frac{x}{48}$.

483. **а)** $(x-2)(x+4) < 0$; **б)** $(3x-1)(2x-4) \ge 0$;

в) $(x-8)(x-1)(x+3)(x+6) > 0$; **г)** $(4x-7)(3x+1)(2-x) \ge 0$.

484*. **а)** $(x^2 - 3x)(x^2 + 7x + 12) \le 0$; **б)** $\sqrt{(x-1)(2-x)(x+2)} \ge 0$.

485*. **а)** $(x+6)\sqrt{x^2 - x - 20} > 0$; **б)** $\frac{x+3}{\sqrt{x^2 + x - 12}} \ge 0$.

486. Найдите промежутки знакопостоянства функции $y = 2x^2 - 11x + 5$.

487. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 7x - 8 > 0; \\ 45 - 3x \ge 0. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2 - 2x \ge 3; \\ x^2 - 2x - 8 < 0. \end{cases}$

488*. Найдите все значения параметра, при каждом из которых неравенство выполняется для всех значений x:

а) $x^2 + 2x + a > 0$; **б)** $mx^2 + (m-1)x + m - 1 < 0$.

489*. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 1 = 0$ является наименьшей.

490*. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a^2 - 3a - 2 = 0$ является наибольшей?

491. Постройте график уравнения:

а) $y + x^2 - 4 = 0$; **б)** $x^2 + (y+2)^2 = 4$; **в)*** $x^2 - |y| = 4$.

492. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0; \\ x + y = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} y = 2x^2 - 1; \\ y - \sqrt{x} = 0; \end{cases}$ **в)*** $\begin{cases} |x - y| = 1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Решите систему уравнений:

493. **а)** $\begin{cases} 2x - y = 0; \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + 3y = 1; \\ x^2 + 4xy + y^2 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 4; \\ 4x + 3y = 2; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x - 2y = 3; \\ (x-2)(y+2) = x^2 + 2xy; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x+y=6; \\ \dfrac{1}{2x}+\dfrac{3}{2y}=1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x+y=3; \\ \dfrac{4}{x+2}-\dfrac{1}{y-2}=1. \end{cases}$

494*. а) $\begin{cases} x^2+xy=10; \\ y^2+xy=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=5; \\ xy-x-y+1=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3+y^3=35; \\ xy(x+y)=30; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x+y)^2-5(x+y)+4=0; \\ (x-y)^2-(x-y)-2=0. \end{cases}$

495*. При каких значениях m два уравнения $2x^2-(3m+2)x+12=0$ и $4x^2-(9m-2)x+36=0$ имеют общий корень?

496*. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 4x^2-3y^2=24; \\ y-2x+m=0 \end{cases}$ имеет только одно решение.

497. Периметр прямоугольника равен 28 см, а площадь на 12 см^2 больше площади квадрата, сторона которого равна меньшей стороне прямоугольника. Найдите стороны прямоугольника.

498. Произведение двух положительных чисел в 16 раз больше их суммы. Найдите эти числа, если первое число на 20 больше утроенного второго числа.

499. В зале было 160 мест, расположенных одинаковыми рядами. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 2 и прибавили еще один ряд, стало 210 мест. Сколько рядов стало в зале, если их количество больше количества мест в одном ряду?

500. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 150 км, одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Через два часа они встретились и, не останавливаясь, продолжили движение. Мотоциклист прибыл в пункт B на три часа раньше, чем велосипедист в пункт A. Найдите скорость велосипедиста.

501*. Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля и встретились через 2 ч. За какое время преодолеет путь между городами каждый автомобиль, если первый автомобиль за 1,5 ч и второй за 1 ч вместе преодолевают $\dfrac{2}{3}$ этого пути?

502*. Мастер и ученик, работая вместе, выполняют задание на 1 ч быстрее, чем мастер, работая один, но на 0,5 ч дольше, чем мастер и два ученика. За какое время выполнит это задание один ученик, работая отдельно?

Задания для самопроверки № 3

Уровень 1

1. Какое из чисел является решением неравенства $x^2 - 5 < 0$:

а) 3; **б)** –3; **в)** –2; **г)** 2,5?

2. Укажите множество решений неравенства $x^2 < 9$:

а) $(-\infty; 3)$; **б)** $(-\infty; -3)$;

в) $(-3; 3)$; **г)** $(-\infty; -3)\cup(3; +\infty)$.

3. Уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$ имеет корни –3 и 1. Укажите множество решений неравенства $x^2 + 2x - 3 \geq 0$:

а) $(-3; 1)$; **б)** $[-3; 1]$;

в) $(-\infty; -3]\cup[1; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -3)\cup(1; +\infty)$.

4. Какая из пар чисел является решением системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10; \\ y - 2x = 5 \end{cases}$:

а) $(3; 1)$; **б)** $(3; -1)$; **в)** $(-3; 1)$; **г)** $(-3; -1)$?

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y = 5; \\ y = x - 1 \end{cases}$ и укажите верный ответ:

а) $(-3; -4)$; $(2; 1)$; **б)** $(3; 2)$; $(-2; -3)$;

в) $(-3; -4)$; $(-2; -3)$; **г)** $(3; 2)$; $(2; 1)$.

6. Стол и 4 стула стоят 350 грн., причем стол дороже стула на 100 грн. Найдите цену стола и цену одного стула.

Пусть стол стоит x грн., а стул — y грн. Какая система уравнений соответствует условию задачи?

а) $\begin{cases} x + 4y = 350; \\ y - x = 100; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + 4y = 350; \\ x - y = 100; \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} 4x + y = 350; \\ y - x = 100; \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} 4x + y = 350; \\ x - y = 100. \end{cases}$

Уровень 2

7. Решите неравенство $x^2 - 3x - 4 > 0$.

8. Постройте график уравнения $x^2 + y^2 = 16$.

9. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} y = x^2; \\ 2x - y = 0. \end{cases}$

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 2y = 5; \\ y - x = 1. \end{cases}$

11. Найдите два числа, сумма которых равна 12, а произведение — 35.

Уровень 3

12. Найдите область определения функции $y=\sqrt{-4x^2-7x+2}$.

13. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2-6x+8>0; \\ 3x-2\le 5x+4. \end{cases}$

14. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=8; \\ x^2-y=2. \end{cases}$

15. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+4y=1; \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{5y}=-1. \end{cases}$

16. Мастер и ученик, работая вместе, могут изготовить 60 одинаковых деталей за 12 ч. Если бы мастер изготовил половину всех деталей, а после него ученик — остальные детали, то на это затратили бы 25 ч. За какое время изготовит партию деталей мастер, работая один, если известно, что он это сделает быстрее, чем ученик?

Уровень 4

17. Найдите область определения функции $y=\sqrt{6x^2+5x-4}-\dfrac{2}{\sqrt{3-2x}}$.

18. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2-(a-2)x-3a+6=0$ не имеет корней.

19. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+9y^2=13; \\ xy=2. \end{cases}$

20. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2+(y-2)^2=9; \\ y+|x|=a \end{cases}$ при $a=0$; $a=5$?

21. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист и двигался со скоростью 40 км/ч. В то же время навстречу ему из пункта B выехал велосипедист и, проехав 4 км, встретился с мотоциклистом. Когда мотоциклист прибыл в пункт B, велосипедист находился на расстоянии 15 км от пункта A. Найдите расстояние между пунктами и скорость велосипедиста.

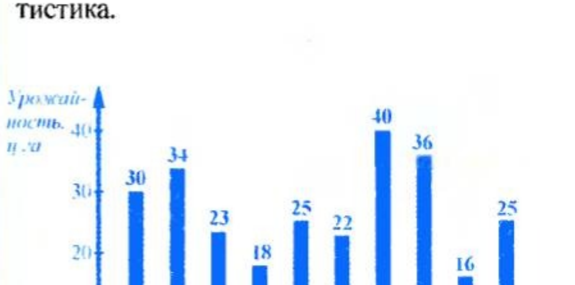
§ 3

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя применить ни одной из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой.

Леонардо да Винчи

В этом параграфе мы вспомним прикладное применение математики, а также выясним, что такое случайное событие, вероятность случайного события, что изучает математическая статистика.



17. Математическое моделирование

Вам, вероятно, уже приходилось видеть модели лодки, самолета, автомобиля, изготавливать модели куба, прямоугольного параллелепипеда. Каждая модель, в зависимости от ее предназначения, отображает определенные свойства оригинала.

Математическая модель — это описание некоторого реального объекта или процесса на языке математики.

В предыдущих классах для моделирования реальных процессов мы использовали уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, функции и т. п.

Решение задач из любой отрасли с использованием математики предусматривает следующие три этапа:

1) формулируют задачу на языке математики, то есть строят математическую модель;

2) решают полученную математическую задачу;

3) записывают математическое решение на языке, на котором была сформулирована исходная задача.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти, сколько потребуется квадратных плиток со стороной 15 см, чтобы покрыть ими пол ванной комнаты, размеры которой 3,3 м $\times$ 2,8 м.

Построим математическую модель задачи. Пусть для покрытия пола требуется x плиток. Площадь одной плитки равна $0{,}15 \cdot 0{,}15 = 0{,}0225$ (м^2), площадь x плиток — $0{,}0225x$ м^2, а площадь пола — $3{,}3 \cdot 2{,}8 = 9{,}24$ (м^2). Площадь всех плиток должна быть не меньше площади пола:

$$0{,}0225x \geq 9{,}24.$$

Полученное неравенство и является математической моделью задачи.

Решим математическую задачу, то есть неравенство:

$$0{,}0225x \geq 9{,}24; \quad x \geq 9{,}24 : 0{,}0225; \quad x \geq 410{,}(6).$$

Запишем полученный результат на языке исходной задачи: чтобы покрыть пол, нужно не менее 411 плиток.

В условии данной задачи использованы нематематические понятия. Такие задачи называют *прикладными*. Числовое значение ответа для прикладных задач в большинстве случаев бывает приближенным.

Пример 2. На реостат вывели напряжение 22 В. Когда напряжение увеличили на 10%, а сопротивление реостата уменьшили на 9 Ом, то сила тока в реостате увеличилась на 1,1 А. Найти начальное сопротивление реостата.

Построим математическую модель задачи. Пусть начальное сопротивление реостата равнялось x Ом, а начальная сила тока — y А. Так как начальное напряжение равнялось 22 В, то $22 = yx$ ($U = IR$ — закон Ома для участка цепи).

Когда напряжение стало $22 \cdot 1,1 = 24,2$ (В) (увеличили на 10%), а сопротивление стало $(x-9)$ Ом, то сила тока стала $(y + 1,1)$ А. Получаем: $24,2 = (y + 1,1)(x - 9)$.

Математической моделью задачи является система уравнений:

$$\begin{cases} xy = 22; \\ (x-9)(y+1,1) = 24,2. \end{cases}$$

Решим полученную математическую задачу.

$$\begin{cases} xy = 22; \\ (x-9)(y+1,1) = 24,2; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 22; \\ xy - 9y + 1,1x - 9,9 = 24,2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 22; \\ 22 - 9y + 1,1x - 9,9 = 24,2; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 22; \\ 1,1x - 9y = 12,1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \cdot \dfrac{1,1x - 12,1}{9} = 22; \\ y = \dfrac{1,1x - 12,1}{9}; \end{cases}$$

$$1,1x^2 - 12,1x = 198; \quad x^2 - 11x - 180 = 0;$$

$$x_1 = -9, \ x_2 = 20.$$

Число –9 условию задачи не удовлетворяет.

Запишем результат на языке исходной задачи: начальное сопротивление реостата равнялось 20 Ом.

Пример 3. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист и двигался со скоростью 20 км/ч, а через полчаса вслед за ним выехал мотоциклист и двигался со скоростью 36 км/ч. Через сколько времени после выезда велосипедиста его догонит мотоциклист?

Можно построить разные математические модели этой задачи. Построим математическую модель при помоши графиков функций. За t ч велосипедист проедет $20t$ км, а мотоциклист, двигаясь на 0,5 ч меньше, за $(t-0,5)$ ч проедет $36(t - 0,5)$ км. На рисунке 66 изображены графики функций $s = 20t$ и $s = 36(t - 0,5)$, выражающие зависимость расстояний, пройденных велосипедистом и мотоциклистом, от времени движения велосипе-

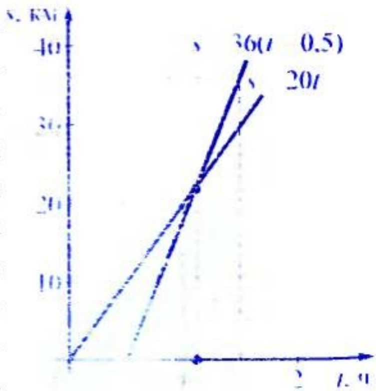


Рис. 66

педиста. Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно найти абсциссу точки пересечения графиков функций. Из рисунка находим, что $t \approx 1{,}1$ ч. Итак, мотоциклист догонит велосипедиста приблизительно через 1,1 ч после выезда велосипедиста.

Для тех, кто хочет знать больше

История науки знает немало примеров, когда в рамках удачно построенной математической модели при помощи вычислений удавалось предусмотреть существование новых физических явлений и объектов. Мы уже приводили один из таких примеров: опираясь на математические модели, астрономы Дж. Адамс (Англия) в 1845 году и У. Леверье (Франция) в 1846 году независимо друг от друга пришли к выводу о существовании неизвестной тогда еще планеты и указали ее местоположение. По расчетам У. Леверье астроном Г. Галле (Германия) нашел эту планету. Ее назвали Нептуном.

Английский физик П. Дирак в 1928 году получил уравнение движения электрона. Из решения этого уравнения следовало существование элементарной частицы, которая отличается от электрона только знаком электрического заряда. Такую частицу в 1932 году открыл физик К. Д. Андерсон (США) и назвал ее позитроном.

Метод математического моделирования играет существенную роль в корабле- и авиастроительстве, экономике и т. п.

Устно

Постройте математическую модель задачи (503–505):

503. В зале 400 мест для зрителей. Все ряды имеют одинаковое количество мест. Сколько рядов в зале и сколько мест в каждом ряду?

504. В зале 400 мест для зрителей. Число рядов на 9 меньше числа мест в каждом ряду. Сколько рядов в зале и сколько мест в каждом ряду?

505. Ученик купил несколько тетрадей по 80 к., заплатив за них меньше 3 грн. Сколько тетрадей он мог купить?

Уровень А

Постройте математическую модель задачи и решите задачу (506–525):

506. В 100 г тыквы содержится 8 мг витамина С. Сколько нужно взять тыквы, чтобы получить 100 мг витамина С?

507. Из 10 кг семян льна получают 3,7 кг масла. Сколько масла получат из 150 кг таких семян?

508. Чтобы сшить костюм, использовали 3,2 м ткани. Какое наибольшее количество таких костюмов можно сшить, имея 60 м этой же ткани?

509. Масса 100 зерен больше 80 г, а масса 50 таких же зерен не меньше 35 г. Какой может быть масса одного зерна?

510. От квадратного листа жести отрезали полосу шириной 25 см. Найдите начальные размеры листа, если площадь его части, образованной после отрезания полосы, равна 4400 см^2.

511. Автомобиль преодолевает расстояние между двумя городами за 2,2 ч, двигаясь со скоростью 60 км/ч. На сколько нужно увеличить скорость автомобиля, чтобы он преодолел это расстояние за 2 ч?

512. Из пункта *A* выехал мотоциклист, а через 1,5 ч вслед за ним — автомобиль. Скорость автомобиля равна 80 км/ч, а скорость мотоциклиста — 40 км/ч. Через какое время после своего выезда автомобиль догонит мотоциклиста?

Уровень Б

513. Шайбы изготавливают из квадратных заготовок со стороной 60 мм. Какой должна быть длина листа стали, чтобы из него можно было изготовить 52 заготовки, если ширина листа 300 мм?

514. Из прямоугольного листа жести размером 30 см × 48 см нужно изготовить открытую коробку. Для этого по углам прямоугольника вырезают квадраты, а потом загибают края листа (рис. 67). Какой должна быть сторона вырезанного квадрата, чтобы площадь дна коробки равнялась 1008 см^2?

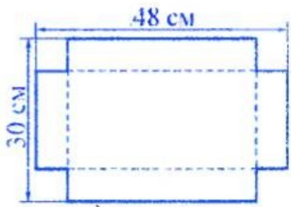


Рис. 67

515. Ширина комнаты меньше длины на 1 м и диагонали — на 2 м. Найдите площадь комнаты.

516. Компьютерный клуб планирует работать 9 ч в день и обслуживать 38 членов клуба. Обслуживание каждого посетителя клуба должно происходить ежедневно за отдельным компьютером на протяжении 1,5 ч. Какое наименьшее количество компьютеров нужно клубу, чтобы обслуживать своих посетителей?

517. Вал с меньшим диаметром делает за минуту на 400 оборотов больше и совершает один оборот на 0,2 с быстрее, чем вал с большим диаметром. Сколько оборотов делает каждый вал за минуту?

518. С первого участка собрали 2880 ц пшеницы, а со второго, площадь которого на 12 га меньше, — 2160 ц. Найдите площадь каждого участка, если известно, что с каждого гектара первого участка собрали пшеницы на 4 ц больше, чем с каждого гектара второго.

519. Катер прошел по реке путь от пристани A до пристани B и вернулся назад. Его скорость в стоячей воде 18 км/ч, а скорость течения реки — 3 км/ч. Известно, что время движения катера меньше 2 ч, но больше 1,5 ч. Каковым может быть расстояние между пристанями?

Уровень В

520. Для определения глубины подземного колодца спелеолог бросил на дно колодца камень и через 4 с услышал звук от его падения. Найдите глубину колодца, считая, что скорость звука 340 м/с, а камень при падении за первые t с пролетает $5t^2$ м.

521. Теплоход от Киева до Херсона идет 5 суток, а от Херсона до Киева — 7 суток. Сколько суток будет плыть плот от Киева до Херсона?

522. Под стоянку автомобилей нужно отгородить прямоугольный участок. В наличии есть материал для ограждения длиной 300 м. С одной стороны участок должна ограничивать заводская стена. Какими должны быть стороны участка, чтобы его площадь была наибольшей?

523. Нужно изготовить окно, имеющее форму прямоугольника, дополненного полукругом (см. рис. 68). Периметр окна должен быть равным $(4+\pi)$ м. Какими должны быть стороны прямоугольника, чтобы окно пропускало наибольшее количество света?

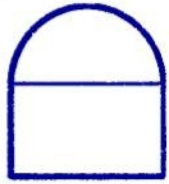


Рис. 68

524. Груз, общая масса которого больше 40 т, но меньше 60 т, должны перевезти на автомобилях, загружая их поровну. В последний момент для перевозки груза выделили на 2 автомобиля меньше, поэтому нагрузили на каждый автомобиль на 1 т груза больше, чем планировали ранее. Найдите массу груза.

525. Сеялка оборудована ящиком, вмещающим 250 кг зерна. Какой должна быть ширина захвата сеялки, чтобы при скорости 3,2 км/ч и норме высева 125 кг зерна на 1 га зерна в ящике хватило бы не больше, чем на 2 ч работы сеялки, а при скорости 4 км/ч и такой же норме высева — не меньше, чем на 1,25 ч работы?

Упражнения для повторения

526. Решить неравенство:

а) $(2{,}5x+1)(4x-3)-5x(2x+7)<4$;

б) $(3-4x)^2-(8x-1)(2x+9)-11>0$.

527. Известно, что $5 < x < 6$ и $9 < y < 10$. Оцените значение выражения:

а) $2x$; **б)** $x - y$; **в)** $x + 2y$.

528. При каких значениях k график функции $y = x^2 - 8x + 5 + k$ имеет с осью x одну общую точку?

529. Сколько миллилитров 50%-го раствора сульфатной кислоты нужно смешать с 10%-м раствором этой же кислоты, чтобы получить 200 миллилитров 25%-го раствора?

18. Процентные рассчеты. Формула сложных процентов

1. Задачи на проценты. Вы знаете, что процент — это одна сотая, то есть $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$. Тогда:

$$15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15; \quad p\% = \frac{p}{100}; \quad 100\% = \frac{100}{100} = 1.$$

Вы научились также решать основные типы задач на проценты, а именно: находить проценты от числа, число по его процентам, процентное отношение двух чисел.

Напомним:

1) *чтобы найти p% от числа a, нужно число a умножить на дробь* $\frac{p}{100}$;

2) *чтобы найти число, p% которого равно b, нужно число b разделить на дробь* $\frac{p}{100}$;

3) *чтобы найти, сколько процентов составляет число a от числа b, нужно разделить a на b и записать результат в процентах.*

Например:

1) 15% от числа 75 равно $75 \cdot \frac{15}{100} = 11{,}25$;

2) числом, 15% которого равно 75, является $75 : \frac{15}{100} = \frac{75 \cdot 100}{15} = 500$;

3) процентное отношение чисел 32 и 160 равно $\frac{32}{160} = 0{,}2 = 20\%$.

Рассмотрим более сложные задачи на проценты.

Задача 1. Зимняя куртка стоила 200 грн. Весной цену куртки снизили на 10%, но продали ее только тогда, когда новую цену снизили еще на 10%. На сколько процентов цена, по которой продали куртку, меньше начальной?

Решение. После первого снижения цену снизили на $200 \cdot 0{,}1 = 20$ (грн.), и куртка стала стоить $200 - 20 = 180$ (грн.).

После второго снижения цену уменьшили на $180 \cdot 0{,}1 = 18$ (грн.). В результате двух снижений цена куртки уменьшилась на $20 + 18 = 38$ (грн.).

38 грн. от 200 грн. составляет: $\frac{38}{200} \cdot 100\% = 19\%$.

Следовательно, начальную цену снизили на 19%.

Ответ. 19%.

При решении этой задачи нужно было находить проценты от числа и процентное отношение двух чисел. Цену куртки после снижения на 10% можно было найти так:

$$200 - 200 \cdot \frac{10}{100} = 200 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 200 \cdot 0{,}9 = 180 \text{ (грн.)}.$$

Если число а уменьшить на р%, то получим число $a\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Если число а увеличить на р%, то получим число $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Задача 2. Вкладчик снял со своего счета в банке 20% всех денег, а на следующий день снял 10% остатка. После этого на его счету осталось 360 грн. Сколько денег было на счету сначала?

Решение. Пусть на счету вкладчика сначала было x грн. После первого снятия денег на счету осталось $100\% - 20\% = 80\%$ денег начального вклада. Из новой суммы было снято $80\% \cdot 0{,}1 = 8\%$ начального вклада.

Вкладчик снял за два раза $20\% + 8\% = 28\%$ начального вклада, а на счету осталось $100\% - 28\% = 72\%$.

$$360 \text{ грн.} — 72\%$$
$$x \text{ грн.} — 100\%$$
$$x = \frac{360 \cdot 100}{72} = 500 \text{ (грн.)}.$$

Ответ. 500 грн.

Задача 3. Есть два сплава с 30 и 10-процентным содержанием меди. Сколько килограммов каждого сплава нужно взять, чтобы получить 6 кг нового сплава с 15-процентным содержанием меди?

Решение. Пусть нужно взять x кг первого сплава (с 30-процентным содержанием меди). Тогда второго сплава нужно взять $(6 - x)$ кг.

Первый сплав содержит 30% меди, а второй — 10%. Поэтому x кг первого сплава содержат $0{,}3x$ кг меди, а $(6 - x)$ кг второго сплава — $0{,}1(6 - x)$ кг меди. Новый сплав должен содержать $0{,}3x + 0{,}1(6 - x)$ килограммов меди.

С другой стороны, 6 кг нового сплава должны содержать 15%, или $6 \cdot 0{,}15 = 0{,}9$ (кг) меди. Получаем уравнение:

$$0{,}3x + 0{,}1(6 - x) = 0{,}9.$$

Решив уравнение, найдем: $x = 1{,}5$.

Итак, нужно взять 1,5 кг первого сплава и $6 - 1{,}5 = 4{,}5$ (кг) второго сплава.

Ответ. 1,5 кг; 4,5 кг. •

2. Формула простых процентов. Работникам финансовых учреждений приходится проводить расчеты, связанные с начислением процентных денег. Рассмотрим такие задачи в общем случае.

Пусть банк начисляет вкладчикам ежемесячно $p\%$ от внесенной суммы. Клиент внес вклад в размере A_0 грн. Нужно найти, какая сумма будет на его счету через n месяцев.

Начисляя каждый месяц по $p\%$ от A_0 грн., за n месяцев банк начисляет $pn\%$ от A_0 грн. или $A_0 \cdot \frac{pn}{100}$ грн. Через n месяцев клиент будет иметь на счету $A_0 + A_0 \cdot \frac{pn}{100} = A_0\left(1 + \frac{pn}{100}\right)$ (грн.).

Обозначим эту сумму через A_n, тогда получим формулу

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{pn}{100}\right),$$

которую называют *формулой простых процентов*. По этой формуле производят расчеты, связанные с начислением пени, амортизацией (износом) механизмов, изменением цены и т. п.

3. Формула сложных процентов. Пусть вкладчик внес в банк A_0 грн. под $p\%$ годовых. Сумму A_0 грн. называют *начальным капиталом*.

Через год банк начислит ему $p\%$, или $A_0 \cdot \frac{p}{100}$ грн. *процентных денег*. Тогда на счету вкладчика станет на $p\%$ денег больше, а именно:

$$A_0 + A_0 \cdot \frac{p}{100} = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ (грн.) — \textit{наращенный капитал}.}$$

За следующий год ему будут начислены $p\%$ от новой суммы. Эта сумма увеличится на $p\%$ и составит

$$A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 \text{ (грн.).}$$

Через n лет наращенный капитал составит $A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ грн.

Итак, начальный капитал A_0, положенный в банк под $p\%$ годовых, через n лет станет наращенным капиталом A_n, исчисляемым по формуле:

$$\boldsymbol{A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n},$$

которую называют *формулой сложных процентов*.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Стоимость нереализованного товара через каждые 5 дней уменьшают на 2% от начальной стоимости. Считая, что начальная стоимость составляла 400 грн., вычислить стоимость этого товара: **а)** на 6-й день; **б)** на 16-й день; **в)** на 26-й день.

● На 6-й день стоимость товара уменьшают на 2%; на 16-й день — уменьшают троекратно на 2%; на 26-й день — уменьшают пятикратно на 2%. Поэтому по формуле простых процентов получим:

а) $A_1 = 400\left(1 - \frac{2}{100}\right) = 392$ (грн.);

б) $A_3 = 400\left(1 - \frac{2 \cdot 3}{100}\right) = 376$ (грн.);

в) $A_5 = 400\left(1 - \frac{2 \cdot 5}{100}\right) = 360$ (грн.). ●

Упражнение 2. Вкладчик внес в банк 20000 грн. под 14% годовых Сколько денег будет на счету вкладчика через 3 года?

● По формуле сложных процентов находим:

$A_3 = 20000(1 + 0{,}14)^3 = 29630{,}88$ (грн.). ●

Устно

530. Найдите:

а) 20% от 10; б) 150% от 20.

531. Найдите число:

а) 10% которого равны 7; б) 50% которого равны 15.

532. Найдите процентное отношение чисел:

а) 5 и 25; б) 60 и 30.

Уровень А

533. Из молока получают 23% сливок по массе. Сколько килограммов сливок можно получить из 250 кг молока?

534. Магнитный железняк содержит 70% железа по массе. Сколько тонн железа содержат 11,7 т магнитного железняка?

535. Бронза — сплав, содержащий 85% меди и 15% олова. Сколько меди и олова нужно взять, чтобы получить 240 кг бронзы?

536. Из 800 г сырого мяса получили 520 г вареного. Сколько процентов массы потеряло сырое мясо при варке?

537. В выборах приняли участие 588 из 640 избирателей села. Сколько процентов избирателей приняли участие в выборах?

538. Сколько граммов соли нужно взять, чтобы приготовить 15%-й ее раствор, имея 340 г воды?

539. Сколько граммов воды нужно взять, чтобы приготовить 30%-й раствор соли, имея 360 г соли?

540. За несвоевременную оплату долга начисляют 3% пени за каждый день неоплаты. Какую сумму придется уплатить через 10 дней после срока уплаты 500 грн. долга?

541. Новый компьютер купили за 3200 грн. Каждый год на его амортизацию приходится 10% от начальной цены. Сколько будет стоить компьютер через 4 года?

542. Вкладчик внес в банк 2000 грн. под 11% годовых. На сколько больше внесенной суммы он сможет получить денег через 3 года?

543. Вкладчик внес в банк 1000 грн. под 10% годовых. Какая сумма будет у него на счету через 3 года?

Уровень Б

544. В январе предприятие изготовило 750 единиц продукции, в феврале — 800 единиц, в марте — 780 единиц.

а) На сколько процентов увеличилось производство продукции в феврале по сравнению с январем?

б) На сколько процентов уменьшилось производство продукции в марте по сравнению с февралем?

545. Заработную плату рабочего два раза увеличивали на одно и то же число процентов, и из суммы 800 грн. она выросла до 1058 грн. На сколько процентов увеличивали заработную плату каждый раз?

546. При какой процентной ставке в месяц от начальной суммы вклад 2000 грн. увеличится за год до 2240 грн.?

547. На вступительном экзамене по математике 15% абитуриентов не решили верно ни одной задачи, 144 абитуриента решили некоторые задачи с ошибками, а отношение тех, кто решил все задачи, к тем, кто не решил верно ни одной задачи, составляет 5 : 3. Сколько абитуриентов сдавали экзамен по математике?

548. Рис содержит 81% белков, жиров и углеводов. Белков содержит на 5% больше, а углеводов — на 74% больше, чем жиров. Сколько граммов белков, жиров и углеводов отдельно содержат 400 г риса?

549. Вкладчик внес в банк 11500 грн. Часть денег он положил под 16% годовых, а остальные — под 14% годовых. Через год сумма денег, внесенных под 16% годовых, стала равна сумме денег, внесенных под 14% годовых. Какую сумму внес вкладчик под 16% годовых?

550. Вкладчик внес в банк 3000 грн. Часть денег он положил под 16% годовых, а остальные — под 15% годовых. Через год прибыль от суммы денег, внесенных под 16% годовых, оказалась на 170 грн. больше прибыли от суммы, внесенной под 15% годовых. Сколько денег внес вкладчик под 16% годовых?

551. Чтобы получить 100 л 48%-го раствора азотной кислоты, смешали 40%-й раствор этой кислоты с 60%-м раствором. Сколько литров каждого из растворов использовали?

552. Какую минимальную сумму денег нужно внести в банк под 10% годовых, чтобы через 3 года получить больше, чем 50000 грн.?

553. Вкладчик внес в банк 40000 грн. под 10% годовых. Какую прибыль он получит через 4 года?

Уровень В

554. Пекарне нужно закупить подсолнечное масло. Одна фирма предлагает масло по 5 грн. за литр и 8% от стоимости всего купленного масла за транспортировку, а вторая — по 4,5 грн. за литр и 10% за транспортировку. В какой фирме выгоднее покупать подсолнечное масло?

555. В соответствии с требованиями агротехники зерно нужно засыпать на длительное хранение при влажности 14% (кондиционное состояние). На сколько процентов уменьшится масса собранного зерна, имеющего влажность 24%, при доведении его до кондиционного состояния?

556. Имеется 500 кг железной руды. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих 12,5% железа, процентные содержания железа в полученной и начальной рудах стали отличаться на 20%. Какая масса железа была в руде сначала?

557. Сплав золота с серебром, содержащий 5 кг серебра, сплавили с 15 кг серебра. Процентные содержания золота в начальном и полученном сплавах отличаются на 30%. Найдите массу начального сплава.

558. После усовершенствования технологии производительность труда на предприятии увеличилась на 20%. Сколько процентов составляет предыдущая производительность от новой?

559. Продолжительность рабочего дня уменьшилась с 8 ч до 7 ч. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы увеличить дневной выпуск продукции на 5%?

560. Цену товара снизили на 10%, а потом новую цену повысили на 5%. На сколько процентов изменилась начальная цена после двух переоценок?

561. Вкладчик внес в банк некоторую сумму денег. Через год ему начислили проценты, что составило 420 грн. Прибавив 580 грн., вкладчик оставил деньги еще на год. В конце следующего года снова были начислены проценты, и на счету вкладчика стало 4560 грн. Какая сумма была сначала внесена на счет, если она больше 1000 грн.?

Упражнения для повторения

562. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 2; \\ y^2 - 3 = 2xy; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3xy + x = -2; \\ 6xy + y = -2. \end{cases}$

563. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^2}$; **б)** $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}\cdot\dfrac{x^3-y^3}{y^2-x^2}:\left(1-\dfrac{1+y}{y}\right)$.

564. Сколько трехзначных чисел можно записать при помощи цифр 0, 2, 5, 9, если:

а) каждую цифру можно использовать только один раз;

б) цифры могут повторяться?

565*. Из пункта A в пункт B вышел турист и двигался со скоростью 4 км/ч. Через час вслед за ним вышел второй турист и двигался со скоростью 5 км/ч, а еще через час из пункта A выехал велосипедист, который, обогнав второго туриста, через 10 мин после этого обогнал и первого. Найдите скорость велосипедиста.

566*. Решите неравенство $|x-3|<a$.

19. Случайные события. Вероятность случайного события

1. Случайные события. В жизни мы довольно часто сталкиваемся с событиями, течение которых предвидеть невозможно. Например, подбросив монету, наперед нельзя сказать, как она упадет: вверх орлом или решкой. Вынимая наугад шарик из лототрона, нельзя сказать заранее, какое число будет на нем написано. Подойдя к остановке, нельзя предугадать, сколько минут придется ждать нужный транспорт.

Есть события, все возможные результаты которых можно предусмотреть. Так, после подбрасывания монеты обязательно произойдет одно из двух возможных событий: «выпадет орел», «выпадет решка». Заранее неизвестно, какое из этих событий произойдет, поэтому их называют *случайными событиями*.

Любое событие происходит вследствие испытания (или наблюдения). Если из партии деталей выбирают наугад 5 деталей для контроля качества, то выбор деталей — испытание, наличие среди выбранных деталей одной бракованной — событие.

События будем обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C и т. д. Будем различать элементарные и сложные события. Рассмотрим пример.

Подбрасывают игральный кубик. На его верхней грани может выпасть число 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Итак, может произойти одно из шести событий:

A_1: выпадет число 1;

A_2: выпадет число 2;

A_3: выпадет число 3;

A_4: выпадет число 4;

A_5: выпадет число 5;

A_6: выпадет число 6.

Эти события имеют следующие свойства:

1) вследствие каждого испытания одно из этих событий обязательно произойдет;

2) никакие два из них не могут произойти вместе;

3) события являются равновозможными (среди них ни одно не имеет преимуществ в появлении перед другими).

События, имеющие три таких свойства, называют *элементарными событиями*, или *случаями*.

Можно говорить о результатах подбрасывания игрального кубика, которые не являются элементарными событиями. Например, выпадение четного числа, появление числа меньше 4, появление одного из чисел 1, 2 или 3 и т. п. Такие события называют *сложными*. Каждое сложное событие можно разложить на элементарные. Пусть A — упомянутое выше сложное событие «выпадет четное число». Событие A можно разложить на элементарные события A_2, A_4, A_6 («выпадет число 2», «выпадет число 4», «выпадет число 6»). Говорят, что событию A *способствуют* 3 элементарные события A_2, A_4, A_6, или 3 случая A_2, A_4, A_6.

Достоверным называют событие, которое вследствие данного испытания обязательно должно произойти, а *невозможным* — событие, которое не может произойти.

Например, после подбрасывания игрального кубика хотя бы одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5 или 6 обязательно выпадет, а число 7 выпасть не может. Поэтому событие «выпадет одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5 или 6» является достоверным, а событие «выпадет число 7» — невозможным.

2. Вероятность случайного события. Пусть в корзине есть 40 яблок, из них 25 красных и 15 зеленых. Наугад из корзины берут одно яблоко. Обозначим буквой A событие «вынутое яблоко — красное», а буквой B — событие «вынутое яблоко — зеленое». Красных яблок больше, чем зеленых. Поэтому больше возможностей («шансов») произойти имеет событие A. Возможности осуществления событий A и B характеризуют некоторыми числами, которые определяют так.

В корзине есть 40 яблок, поэтому всех случаев взять одно яблоко — 40. Событию A способствуют 25 случаев — если вынули одно из 25 красных яблок, а событию B — 15 случаев. Возможность появления события A характеризуют числом $\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$, а события B — числом $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$. Эти числа называют *вероятностями* событий A и B. Записывают: $P(A)=\frac{5}{8}$, $P(B)=\frac{3}{8}$ (P — первая буква латинского слова *probabilities* — вероятность).

Определение **Вероятностью случайного события A называют отношение числа равновозможных случаев, способствующих событию A, к числу всех возможных случаев.**

Итак,

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где n — общее число равновозможных случаев, m — число случаев, способствующих событию A.

Если событие A является достоверным, то ему способствуют все n возможных случаев. Для такого события $m=n$ и $P(A)=\frac{n}{n}=1$.

Если событие A является невозможным, то $m=0$ и $P(A)=\frac{0}{n}=0$.

Если событие A случайное, то есть такое, которое может произойти или не произойти, то его вероятность удовлетворяет неравенству: $0<P(A)<1$.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Какова вероятность того, что после подбрасывания игрального кубика выпадет число, кратное 2?

• Пусть событие A — выпадет число, кратное 2. После подбрасывания игрального кубика может выпасть любое из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5 или 6, поэтому $n=6$. Событию A способствуют 3 случая — если выпадет число 2, 4 или 6, поэтому $m=3$. Следовательно, $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. •

Упражнение 2. В партии из 1000 деталей есть 600 деталей первого сорта, 370 — второго и 30 бракованных деталей. Какова вероятность того, что наугад выбранная деталь будет небракованной?

• Пусть событие A — выбранная деталь небракованная. В партии есть 1000 деталей, поэтому $n=1000$. Небракованных деталей есть $600+370=970$, поэтому $m=970$. Следовательно, $P(A)=\frac{970}{1000}=0{,}97$. •

Упражнение 3. В ящике лежат 5 тетрадей, из них 3 в клетку и 2 в линейку. Ученик берет наугад две тетради. Какова вероятность того, что среди них будет хотя бы одна тетрадь в линейку?

• Пусть событие A — среди выбранных тетрадей будет хотя бы одна тетрадь в линейку. Обозначим тетради в клетку: κ_1, κ_2, κ_3; тетради в линейку: $\textit{л}_1$, $\textit{л}_2$. После выбора двух тетрадей возможны следующие случаи:

κ_1, κ_2; κ_1, κ_3; $\kappa_1, \textit{л}_1$; $\kappa_1, \textit{л}_2$;

κ_2, κ_3; $\kappa_2, \textit{л}_1$; $\kappa_2, \textit{л}_2$;

$\kappa_3, \textit{л}_1$; $\kappa_3, \textit{л}_2$;

$\textit{л}_1, \textit{л}_2$.

Всех пар тетрадей, а значит, всех возможных случаев, есть 10, поэтому $n = 10$. Событию A способствуют 7 случаев ($\kappa_1, \textit{л}_1$; $\kappa_1, \textit{л}_2$; $\kappa_2, \textit{л}_1$; $\kappa_2, \textit{л}_2$; $\kappa_3, \textit{л}_1$; $\kappa_3, \textit{л}_2$; $\textit{л}_1, \textit{л}_2$), поэтому $m = 7$. Следовательно, $P(A) = \frac{7}{10} = 0,7$. •

Устно

567. Биатлонист производит 5 выстрелов по 5 мишеням. При каждом выстреле он может попасть в мишень, а может и не попасть. Какое из указанных событий является случайным; невозможным; достоверным:

а) он попадет в 4 мишени;

б) он не попадет ни в одну мишень;

в) он попадет в 6 мишеней?

568. В урне имеется 5 белых и 5 черных шаров. Белые шары имеют номера от 1 до 5, а черные — от 6 до 10. Из урны наугад вынимают один шар. Рассмотрим события:

а) вынутый шар будет иметь номер 3;

б) вынутый шар будет иметь номер 7;

в) вынутый шар будет белым;

г) номер вынутого шара будет кратен 4.

Какие из данных событий являются элементарными; сложными? Назовите все элементарные события этого испытания. Какие элементарные события (случаи) способствуют каждому из данных сложных событий?

569. Из пяти чисел 2, 3, 5, 10, 15 наугад выбирают одно число. Какова вероятность того, что выбранное число окажется:

а) числом 3; **б)** числом 15;

в) четным; **г)** нечетным;

д) однозначным; **е)** двузначным?

Уровень А

570. Для лотереи выпущены 1000 билетов, 400 из которых — выигрышные. Какова вероятность того, что один купленный билет окажется выигрышным?

571. Из урны, в которой 5 белых и 10 красных шаров, наугад вынимают один шар. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется белым.

572. В корзине имеется 3 белых гриба, 7 сыроежек и 8 маслят. Какова вероятность того, что наугад вынутый из корзины гриб будет сыроежкой?

573. Какова вероятность того, что после подбрасывания игрального кубика выпадет:

а) число 4; **б)** число 8; **в)** число, не равное 4.

574. В кошельке есть 6 монет по 5 к. и 2 монеты по 50 к. Найдите вероятность того, что наугад вынутая монета будет иметь номинал:

а) 50 к.; **б)** 5 к.; **в)** 10 к.

575. В ящике имеется 50 лампочек, из них 2 бракованные. Забрали 20 небракованных лампочек. Какова вероятность того, что после этого наугад взятая лампочка будет бракованной?

576. В вазе имеется 12 шоколадных конфет и 15 леденцов. Из нее наугад взяли 2 конфеты, которые оказались шоколадными. После этого из вазы взяли наугад еще одну конфету. Какова вероятность того, что эта конфета окажется шоколадной?

577. Партия из 60 изделий имеет 5% брака. Найдите вероятность того, что наугад взятое изделие будет бракованным. Каким будет ответ, если количество всех деталей будет равно 80? Сделайте вывод.

578. В парке растет 360 деревьев, из них $\frac{2}{9}$ — хвойные. Найдите вероятность того, что наугад указанное дерево будет хвойным. Каким будет ответ, если количество всех деревьев будет равно 450? Сделайте вывод.

Уровень Б

579. В урне имеется 25 одинаковых шаров, пронумерованных числами от 1 до 25. Из урны наугад берут один шар. Какова вероятность того, что номер шара окажется:

а) меньше 10; **б)** кратным 3;

в) кратным 2 и 3; **г)** кратным 2 или 3?

580. Найдите вероятность того, что наугад взятое двузначное число окажется:

а) больше 90; **б)** кратным 10;

в) кратным 25; **г)** меньше 10.

581. На складе есть изделия первого и второго сортов, причем изделий второго сорта в 1,5 раза больше, чем первого. Найдите вероятность того, что наугад взятое изделие окажется изделием первого сорта.

582. Качество деталей проверяют два контролера. Первый контролер проверил 55% всех деталей, а второй — 45%. Наугад берут одну деталь. Какова вероятность того, что ее проверял второй контролер?

583. В первой коробке лежат карточки с номерами от 1 до 3, а во второй — от 4 до 6. Из каждой коробки берут наугад по одной карточке. Найдите вероятность того, что сумма номеров выбранных карточек будет равна 7.

584. Из четырех чисел 2, 3, 5 и 6 наугад выбирают два числа, при помощи которых записывают правильную дробь. Какова вероятность того, что эта дробь окажется сократимой?

585. На трех карточках написано по одной букве: *М*, *О*, *С*. Карточки перемешивают и раскладывают в ряд. Какова вероятность того, что образуется слово *СОМ*?

586. Три друга купили билеты на самолет в одному ряду кресел из трех мест и случайным образом заняли эти места. Найдите вероятность того, что каждый из друзей занял свое место.

587. Для сборки телевизоров получили 900 микросхем от двух поставщиков. Вероятность того, что наугад взятая микросхема поступила от первого поставщика, равна 0,6. Сколько микросхем поступило от каждого поставщика?

588. В классе 28 учеников. Вероятность того, что наугад указанный ученик окажется девочкой, равна $\frac{3}{7}$. Сколько в классе девочек и сколько мальчиков?

Уровень В

589. Ученик забыл последние три цифры номера нужного телефона. Помня, что эти цифры разные, он набирает их наугад. Найдите вероятность того, что набранные цифры являются правильными.

590. О некотором трехзначном коде известно, что: он не содержит цифры 0, 1, 2, 3 и 4; цифры кода могут повторяться. Какова вероятность того, что наугад названный код с такими свойствами совпадет с данным?

591. На пяти карточках написано по одной букве: *Д*, *Е*, *С*, *Н*, *А*. Наугад одну за другой выбирают три карточки и раскладывают в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что образуется слово *САД*?

592. Используя цифры 1, 2, 3, 4 и 5 не более одного раза, наугад пишут некоторое трехзначное число. Найдите вероятность того, что это число окажется четным.

593. Найдите вероятность того, что наугад взятое трехзначное число будет кратным 2 или 5.

594. Партию деталей изготавливают на двух станках. Вероятность изготовления бракованной детали на первом станке равна 0,02, а на втором — 0,025. Среди 500 деталей, из которых 300 изготовлено на первом станке и 200 на втором, наугад выбирают одну деталь. Какова вероятность того, что выбранная деталь окажется бракованной?

595. В классе 29 учеников. На экскурсию в музей ходили 24 ученика, в музей и зоопарк — 16 учеников, а 2 ученика не ходили ни в музей, ни в зоопарк. Какова вероятность того, что наугад указанный ученик класса ходил на экскурсию в зоопарк?

596. Одновременно подбрасывают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут числа, сумма которых не меньше 7?

597. Монету подбрасывают четыре раза. Какова вероятность того, что «орел» выпадет: **а)** два раза; **б)** хотя бы два раза?

Упражнения для повторения

598. Постройте график функции $y = 2x^2 - 3x$.

599. Решите неравенство:

а) $x^2 - 4x - 5 \le 0$; **б)** $-4x^2 - 4x + 3 < 0$.

600. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a-49}{\sqrt{a}+7}$; **б)** $\dfrac{x-3}{x^2-x-6}$.

601. Докажите, что значения выражения $\left(\dfrac{b+3}{b-3}+\dfrac{b-3}{b+3}\right):\dfrac{2b^2+18}{9-b^2}$ не зависят от значений b.

602*. Математик шел домой по берегу реки против течения со скоростью в полтора раза большей, чем скорость течения реки, держа в руках шляпу и палку. В некоторый момент времени он бросил в реку шляпу, перепутав ее с палкой, и продолжил двигаться с той же скоростью. Через некоторое время он заметил ошибку, бросил в реку палку и побежал назад со скоростью, в два раза большей, чем шел раньше. Он догнал шляпу, вынул ее из воды и пошел против течения реки с предыдущей скоростью. Пройдя 10 мин, он увидел палку, плывшую по реке. На сколько раньше он пришел бы домой, если бы не перепутал палку со шляпой?

20. Статистические данные

1. Статистические наблюдения. Вы, вероятно, не раз слышали данные о состоянии погоды в различных уголках планеты, о результатах выборов, социальных опросов и т. п. Это *статистические данные*. Статистические данные позволяют не только охватить картину некоторого вопроса на данное время, но и планировать необходимые действия на будущее. Так, статистические данные о занятости населения позволяют определить, какое количество специалистов и какой квалификации следует готовить, в каком регионе следует строить то или иное предприятие, и т. п.

Методы сбора, обработки, интерпретации разнообразных данных изучает отдельный раздел прикладной математики — *математическая статистика.*

Пусть нужно исследовать семьи города по некоторому признаку (например, распределить семьи по количеству детей, по величине месячного материального дохода на одного члена семьи и т. п.). Для этого можно провести *сплошное* наблюдение — посетить каждую семью и выяснить интересующие нас вопросы. Можно провести выборочное наблюдение — исследовать только часть семей и по результатам исследования сделать вывод о всех семьях города. При этом совокупность семей, отобранных для наблюдения, называют *выборочной совокупностью*, или просто *выборкой.*

В общем случае *выборка* — это совокупность объектов, отобранных для наблюдения. Для того чтобы по данным выборки можно было судить о свойствах всех объектов, необходимо, чтобы выборка правильно отображала эти свойства. Это обеспечивается в первую очередь случайностью отбора, когда все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

2. Обработка статистических данных и способы их подачи. Рассмотрим примеры.

Пример 1. В отделе женской обуви в течение трех дней проводили исследование для изучения спроса на определенные размеры обуви. За эти дни было продано 22 пары обуви следующих размеров:

38; 36; 38; 37; 40; 38; 36; 35; 35; 39; 37; 40; 41; 37; 39; 36; 38; 37; 37; 38; 39; 37.

Расположим эти данные в порядке неубывания размеров: 35; 35; 36; 36; 36; 37; 37; 37; 37; 37; 37; 38; 38; 38; 38; 38; 39; 39; 39; 40; 40; 41.

Получили так называемый *ранжированный ряд* данных наблюдения. Он содержит 7 групп размеров обуви. Значение каждой группы называют *вариантой*, а число, показывающее, сколько раз встречается варианта, — *частотой* соответствующей варианты. В примере имеем такие 7 вариант:

35; 36; 37; 38; 39; 40; 41.

Варианта 35 имеет частоту 2 (35-й размер встречается два раза); варианта 38 — частоту 5; варианта 41 — частоту 1.

Результаты наблюдения удобно представить в виде такой таблицы:

Размер	35	36	37	38	39	40	41
Частота	2	3	6	5	3	2	1

Чтобы визуально охватить данные наблюдения, построим на координатной плоскости точки, абсциссы которых равны размерам обуви (вариантам), а ординаты — соответствующей частоте размера, и соединим соседние точки отрезками (рис. 69). Полученную ломаную называют *полигоном частот*.

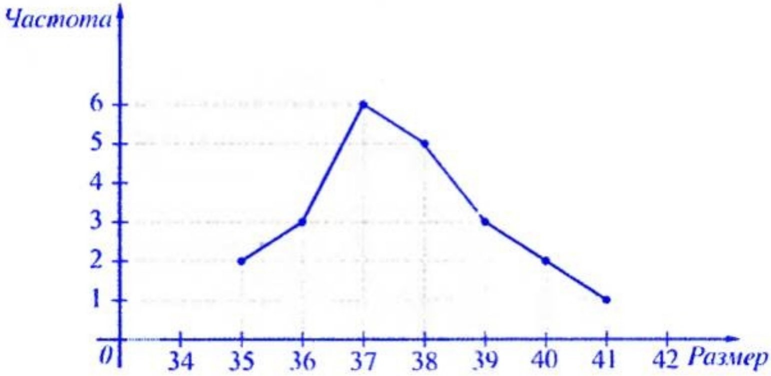


Рис. 69

Для наглядного изображения данных наблюдения можно использовать и диаграмму (рис. 70).

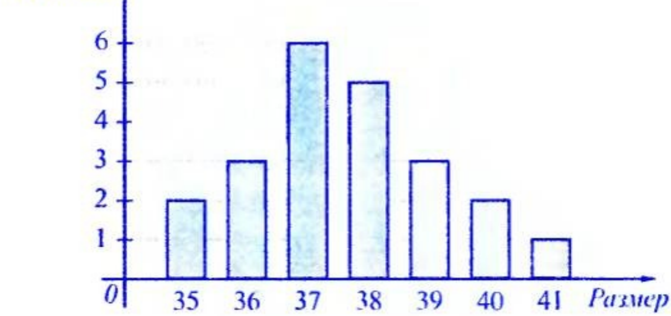


Рис. 70

Графические изображения позволяют визуально охватить всю совокупность данных и составить картину исследования в целом. Так, из рисунков 69 и 70 видно, что большим спросом пользуется женская обувь 37 и 38 размеров.

Пример 2. Рассмотрим таблицу, в которой указано, по какой цене и сколько было продано арбузов на рынке за один день.

Цена за 1 кг, грн.	1–1,2	1,2–1,4	1,4–1,6	1,6–1,8	1,8–2
Масса проданных арбузов, кг	80	100	75	55	30

По таблице определяем, что арбузов, цена которых находится в интервале от 1 грн. до 1,2 грн., было продано 80 кг. Говорят, что первой строкой таблицы заданы *интервалы* цены[1], а второй — *частоты* этих интервалов (массы арбузов, проданных по цене соответствующих интервалов).

Для графического изображения данных такого наблюдения используют *гистограмму*, которую строят так: на оси абсцисс отмечают заданные интервалы и на каждом из них, как на основании, строят прямоугольник, высота которого равна частоте соответствующего интервала (рис. 71).

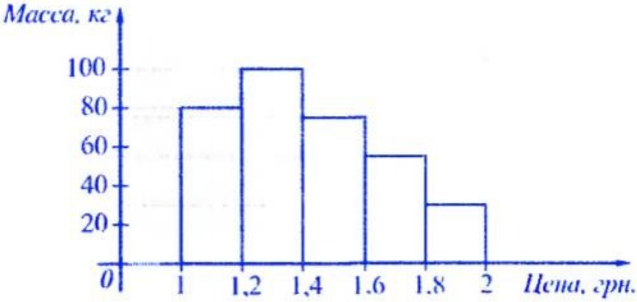


Рис. 71

Рассмотрим другой графический способ изображения данных этого наблюдения. На оси абсцисс снова отметим заданные интервалы. К серединам этих интервалов проведем перпендикуляры, длина каждого из которых равна частоте соответствующего интервала. Соединив концы соседних перпендикуляров отрезками, получим ломаную (рис. 72), которую называют *полигоном частот* интервального распределения данных.

---

[1] Интервалы цен можно задавать так: [1; 1,2); [1,2; 1,4); [1,4; 1,6); [1,6; 1,8); [1,8; 2]. При таком задании понятно, куда нужно относить значение величины, соответствующее одному из концов интервала.

Рис. 72

Итог. Данные наблюдений удобно представлять в виде таблиц и графических изображений.

Для графического изображения данных, кроме уже рассмотренных ступенчатых диаграмм, гистограмм, полигонов частот, можно использовать другие виды диаграмм (круговые, линейчатые), графики.

3. Средние значения. Рассмотрим пример.

Пример 3. В течение мая через день, наблюдая за температурой воздуха в полночь, получили следующие данные:

3° С; 4° С; 4° С; 3° С; 3° С; 5° С; 8° С; 8° С; 6° С; 8° С; 10° С; 11° С; 12° С; 11° С; 12° С; 12° С.

Найдем среднее значение температуры. Для этого сумму 16 значений температуры разделим на 16:

$$t_c = \frac{3+4+4+3+3+5+8+8+6+8+10+11+12+11+12+12}{16} = \frac{120}{16} = 7{,}5\ (°\ \text{C}).$$

Следовательно, можно сказать, что средняя температура воздуха в полночь в мае была 7,5° С.

Средним значением n данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выборки (или средним арифметическим данных выборки) называют число

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Представим результаты наблюдения за температурой воздуха в виде таблицы:

t° С	3	4	5	6	8	10	11	12
Частота	3	2	1	1	3	1	2	3

Учитывая, что значение 3° С имеет частоту 3 (повторяется три раза), значение 4° С — частоту 2 и т. д., среднюю температуру можно было найти и так:

$$t_с = \frac{3\cdot3+4\cdot2+5\cdot1+6\cdot1+8\cdot3+10\cdot1+11\cdot2+12\cdot3}{16} = \frac{120}{16} = 7{,}5\ (^\circ\ \mathrm{C}).$$

Если в выборке из n объектов варианта x_1 встречается n_1 раз, варианта x_2 — n_2 раз, ..., варианта x_k — n_k раз, то среднее значение выборки находят по формуле

$$\bar{x} = \frac{x_1n_1 + x_2n_2 + ... + x_kn_k}{n},$$

где $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Устно

603. В таблице представлены результаты опроса 258 семей о размере месячного материального дохода на одного человека:

Месячный доход семьи на одного человека, грн.	*Число семей*	*Процент семей*
До 200	34	13,2
200 – 400	52	20,2
400 – 600	72	27,9
600 – 1000	70	27,1
1000 и больше	30	11,6
Итого	258	100

а) Сколько семей имеют доход 200 – 400 гривен?

б) Сколько процентов семей имеют доход 400 – 600 гривен?

в) Какой доход имеет наибольшее количество семей?

604. На диаграмме (рис. 73) показана урожайность зерновых на опытной станции в течение 10 лет. На какой год приходится наибольшая урожайность? наименьшая?

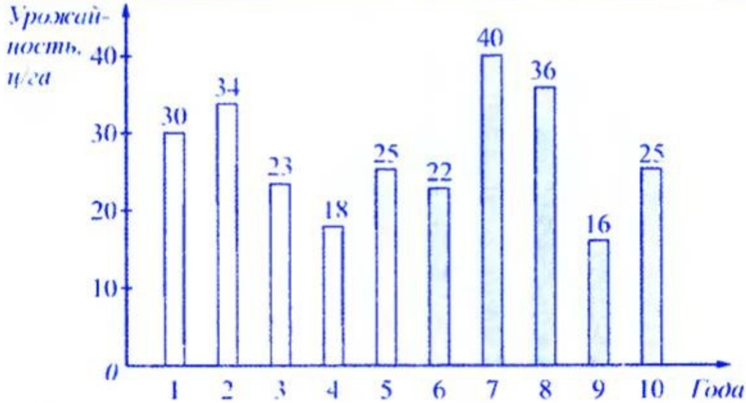


Рис. 73

Уровень А

605. В магазине за неделю были проданы костюмы следующих размеров: 48, 46, 52, 44, 48, 50, 54, 46, 44, 48, 50, 52, 52, 50, 48, 50, 48, 46, 48, 54, 50, 48, 54, 50, 48, 46, 48, 52. Запишите ранжированный ряд данных размеров. Сколько образовалось вариант? Найдите частоту каждой варианты. Составьте таблицу вариант и частот. Постройте полигон частот.

606. В 20 фермерских хозяйствах района урожайность пшеницы (в ц/га) была следующей: 35, 28, 30, 41, 30, 34, 36, 30, 38, 36, 28, 29, 32, 30, 38, 36, 41, 42, 38, 30. Запишите ранжированный ряд данных. Сколько образовалось вариант? Найдите частоту каждой варианты. Составьте таблицу вариант и частот. Постройте полигон частот.

607. Для решения задачи 6 учеников использовали времени: 12 мин; 7 мин; 9 мин; 8 мин; 10 мин; 11 мин. Сколько времени в среднем использовал один ученик для решения задачи?

608. Одни и те же детали изготавливают на двух станках, производительность которых одинакова. Количество бракованных деталей, изготовленных на каждом станке за дни рабочей недели, представлены в таблице.

Дни недели	1	2	3	4	5
1-й станок	5	8	7	4	8
2-й станок	6	6	5	7	9

Сколько бракованных деталей за день в среднем изготавливали на каждом станке? Какой из станков работает качественнее?

609. Чтобы найти среднюю массу кочана капусты, наугад взяли 20 кочанов, массы которых оказались:

2,8 кг; 2,8 кг; 2,9 кг; 3,1 кг; 3,2 кг; 3,1 кг; 3,3 кг; 3,2 кг; 3,2 кг; 2,8 кг;
3,5 кг; 3,4 кг; 3,4 кг; 3,2 кг; 2,8 кг; 3,3 кг; 3,6 кг; 3,7 кг; 3,1 кг; 3,6 кг.

Найдите среднюю массу кочана капусты.

610. При откорме 8 гусей были зафиксированы следующие приросты массы за семь дней: 410 г; 370 г; 420 г; 400 г; 380 г; 370 г; 390 г; 400 г. Найдите средний прирост массы одной птицы за эти дни.

Уровень Б

611. Выборочная проверка малых предприятий города о прибылях за год дала следующие результаты:

Годовая прибыль, тис. грн.	9	10	11	12	13	14	15
Количество предприятий	3	6	2	5	6	2	1

Постройте полигон частот полученных данных. Найдите среднюю годовую прибыль одного предприятия.

612. Учитель фиксировал количество ошибок, допущенных учениками на контрольной работе. Были получены следующие результаты:

Количество ошибок	0	1	2	3	4	5
Количество учеников	3	11	6	5	3	2

Постройте полигон частот полученных данных. Сколько ошибок в среднем приходится на одного ученика?

613. Продавец на рынке, закупив оптом лимоны, продает их поштучно по следующей цене:

50 г – 60 г — 70 к.;
60 г – 70 г — 90 к.;
70 г – 80 г — 1 грн. 10 к.;
80 г – 90 г — 1 грн. 30 к.;
90 г – 100 г — 1 грн. 40 к.;
100 г – 120 г — 1 грн. 50 к.;

Составьте таблицу данных задачи. Постройте гистограмму и полигон частот.

614. Распределение коров одного фермерского хозяйства по годовому надою молока задано таблицей:

Годовой надой, тыс. кг	1–2	2–3	3–4	4–5
Количество коров	20	8	8	4

Постройте гистограмму и полигон частот данного распределения.

615. Возрастной состав рабочих предприятия задан таблицей:

Возраст рабочего	18–28	28–38	38–48	48–58
Количество рабочих	12	20	10	8

Постройте гистограмму и полигон частот данного распределения.

616. По результатам контрольной работы ученики класса получили следующие оценки: 2 балла — 1 ученик; 3 балла — 1 ученик; 4 балла — 2 ученика; 5 баллов — 3 ученика; 6 баллов — 2 ученика; 7 баллов — 4 ученика; 8 баллов — 5 учеников; 9 баллов — 2 ученика; 10 баллов — 5 учеников; 11 баллов — 2 ученика; 12 баллов — 1 ученик. Найдите среднюю оценку за контрольную работу.

617. Спортсмен произвел 40 выстрелов по мишени и выбил 10 очков 18 раз, 9 очков — 10 раз, 8 очков — 6 раз и 7 очков — 6 раз. Сколько очков в среднем выбивал спортсмен при одном выстреле?

618. Найдите средний рост учеников вашего класса, а также средний рост учеников, которые в списке классного журнала имеют номера 1, 5, 9, ... (каждый следующий на 4 больше предыдущего). Сравните найденные средние значения.

619. За январь, февраль и март предприятие выпустило соответственно 750, 810 и 891 единиц продукции. Найдите средний месячный прирост выпуска продукции в процентах.

Упражнения для повторения

620. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, если $a>0, b>0$; б) $\dfrac{x-\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}$.

621. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6};\\ x+y=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6};\\ x^2-y^2=5.\end{cases}$

622. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2-2ax+3a-2=0$ имеет корни. Найдите эти корни.

623*. Эскалатор метро поднимает пассажира, стоящего на нем, за 1 мин. Идя по неподвижному эскалатору, пассажир поднимается за 3 мин. За какое время пассажир поднимется, идя вверх по движущемуся эскалатору?

Интересно знать

Теория вероятностей. Случайный характер событий, процессов отмечали еще в древние времена. Древнегреческий философ Эпикур (341 – 270 гг. до н. э.) считал, что случай свойственен самой природе явлений, и, следовательно, случайность объективна. Были попытки создать математический подход к изучению случайных событий, однако первые математические расчеты вероятностей появились в письменных документах только в середине XVII в.

В 1654 году вся научная (и не только) общественность Парижа заговорила о возникновении новой науки — теории вероятностей. Основы этой теории были заложены не в научной работе, а в переписке между двумя известными французскими математиками Блезом Паскалем (1623 – 1662) и Пьером Ферма (1601 – 1665) по поводу задачи, касающейся игры в кости. Вообще, к первым задачам теории вероятностей относятся задачи, связанные с азартными играми, очень популярными в средневековой Европе. С результатами Паскаля и Ферма ознакомился голландский физик и математик Христиан Гюйгенс (1629 – 1695), написавший работу «О расчетах при азартной игре». Эту работу считают первой книгой по теории вероятностей.

Решение задач, связанных с популярными азартными играми, только побуждало возникновение теории вероятностей, как в свое время измерение площадей во время земляных работ побуждало к возникновению геометрии.

Сегодня теория вероятностей развилась в универсальную теорию, находящую применение во многих сферах человеческой деятельности. Ее широко используют в экономике, транспорте, производстве, статистике, военном деле. Современное природоведение широко использует теорию вероятностей как теоретическую основу в обработке результатов наблюдений.

Математическая статистика. «Статистика знает все» — такими словами[1] начинается вторая часть романа И. Ильфа и Е. Петрова «Двенадцать стульев». Чтобы подчеркнуть значение статистики в повседневной жизни, приводят пример прогнозирования результатов президентских выборов в США в 1936 году. Тогда кандидатами на выборах были Ф. Рузвельт и А. Ландон. Редакция одного весьма почтенного журнала решила провести опрос избирателей по телефонному справочнику. По всей стране было разослано более 10 миллионов открыток с просьбой назвать фамилию будущего президента. Вскоре журнал проинформировал, что на будущих выборах президентом США с большим перевесом будет избран А. Ландон.

Параллельный опрос провели социологи Дж. Гэллап и Э. Роупер, опираясь на выборку, насчитывающую только 4 тысячи респондентов. Несмотря на то что редакция журнала опросила 10 миллионов избирателей, истратив большие средства на распространение открыток, сбор и обработку данных, ее прогноз оказался ошибочным, так как опирался на точку зрения только тех избирателей, у кого был телефон. Прогноз же социологов почти совпал с результатами выборов.

Первые статистические исследования были проведены в Англии и Германии. В середине XVII в. в Англии возникло научное направление, получившее название «политическая арифметика». Его основали У. Петти (1623 – 1687) и Дж. Граунт (1620 – 1674), которые на основании изучения информации о массовых общественных процессах пытались открыть закономерности общественной жизни. Наряду со школой «политической арифметики» в Англии развивалась школа описательной статистики, в Германии — «государствоведения». Развитие «политической арифметики» и «государствоведения» способствовало появлению науки статистики. Термин «статистика» происходит от латинского слова *status*, которое в переводе значит «состояние» (вещей, явлений).

Современную математическую статистику характеризуют как *науку о принятии решений в условиях неопределенности*. Ее задача заключается в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Вопросы и упражнения для повторения § 3

1. Приведите примеры математических моделей.

2. Назовите основные этапы решения прикладных задач.

3. Запишите формулу сложных процентов.

4. Приведите примеры случайных событий.

5. Какое событие называют достоверным? невозможным?

6. Что называют вероятностью случайного события?

7. Приведите примеры статистических наблюдений.

8. Какие существуют способы представления статистических данных?

9. Как построить полигон частот? Приведите пример.

10. Как построить гистограмму? Приведите пример.

11. Как найти среднее значение выборки?

Постройте математическую модель задачи и решите задачу (624–629):

624. Площадь комнаты 14 м^2, а ее длина на 0,5 м больше ширины. Найдите размеры комнаты.

625. Катер прошел 30 км по течению реки за 1,5 ч, а 32 км против течения — за 2 ч. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения реки.

626. Масса бетонного блока 350 кг. Сколько таких блоков может перевезти автомобиль, грузоподъемность которого 5 т?

627. Автоматический станок изготовил партию деталей. После усовершенствования станка такую же партию деталей он изготовил в 1,05 раза быстрее, так как за час изготавливал на 5 деталей больше, чем раньше. Сколько деталей в час начал изготавливать станок?

628. Военная колонна во время похода движется со скоростью 5 км/ч, растянувшись по дороге на 400 м. Командир, находящийся в хвосте колонны, посылает мотоциклиста с пакетом в голову колонны. Мотоциклист, выполнив приказ, сразу возвращается. Найдите, через какой промежуток времени после получения пакета мотоциклист вернется к командиру, если его скорость равна 25 км/ч.

629. Для каждой сельскохозяйственной культуры определяют оптимальное количество растений на 1 га. Поэтому перед посевом нужно рассчитывать норму высева — массу семян, которые необходимо высеять на 1 га поля, чтобы обеспечить нужную густоту растений. Найдите норму высева семян пшеницы, если известно, что на 1 га должно расти 6 млн растений, масса 1000 зерен составляет 40 г, чистота семян — 97%, а всхожесть — 93%.

Решите задачи.

630. Вкладчик внес в банк некоторую сумму денег и через год после начисления 15% годовых имел на счету 2300 грн. Какую сумму вкладчик внес в банк?

631. Длина первой стороны треугольника составляет 75% длины второй и на 20% больше длины третьей. Найдите длины сторон треугольника, если его периметр равен 38 см.

632. Смешали 30%-й раствор серной кислоты с 10%-м раствором этой же кислоты и получили 300 г 15%-го раствора. Сколько 10%-го раствора кислоты при этом использовали?

633. Какую сумму необходимо внести в банк под 14% годовых, чтобы через 2 года на счету было 6498 грн.?

634. Прирост выпуска продукции на заводе по сравнению с предыдущим годом за первый год составил 5%, за второй — 8%. Каким должен быть процент прироста выпуска продукции за третий год, чтобы средний годовой прирост за три года равнялся 7%?

635*. Морская вода содержит 5% соли. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской, чтобы концентрация соли уменьшилась на 70%?

636. Имеется 10000 билетов лотереи. 1250 билетов являются выигрышными. Какова вероятность того, что один приобретенный билет окажется выигрышным?

637. Есть 10 карточек, пронумерованных числами от 1 до 10. Наугад берут одну карточку. Какова вероятность того, что номер карточки окажется:

а) больше 5; **б)** меньше 15;

в) кратным 3; **г)** кратным 2 и 3?

638. В ящике лежат лампочки, из них $\frac{2}{9}$ имеют мощность 60 Вт, $\frac{4}{9}$ — мощность 100 Вт, остальные — мощность 150 Вт. Какова вероятность того, что взятая наугад лампочка будет иметь мощность 150 Вт?

639. На полке лежат тетради в клетку и в линейку, причем тетрадей в клетку в 1,2 раза больше, чем тетрадей в линейку. Найдите вероятность того, что взятая наугад тетрадь окажется тетрадью в линейку.

640. Тест состоит из 10 заданий. К каждому заданию предложено четыре варианта ответа, один из которых является верным. Ученик знает верные ответы к 9 заданиям и не знает к одному заданию, поэтому наугад выбирает для него вариант ответа. Найдите вероятность того, что ученик верно ответит на все задания теста.

641. В первой урне имеются шары с номерами от 1 до 4, а во второй — с номерами от 5 до 8. Из каждой урны наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров будет равна 9?

642. Олег записал на листе бумаги некоторое трехзначное число и сообщил, что сумма цифр числа равна 9, цифры являются нечетными и могут повторяться. Какова вероятность того, что наугад названное число с такими свойствами совпадет с числом, записанным Олегом?

643. Одновременно подбрасывают три монеты. Какова вероятность того, что выпадет:

а) три «орла»; **б)** два «орла» и «решка»?

644. На олимпиаде по математике верное решение каждой задачи оценивают 7 балами. Количества баллов, полученных учениками за решение первой задачи, следующие:

3, 0, 7, 2, 1, 0, 3, 7, 7, 5, 7, 2, 3, 4, 1, 2, 6, 7, 7, 0, 4, 5, 7, 7, 4, 2, 0, 0, 1, 3.

а) Запишите ранжированный ряд данных. Сколько образовалось вариант? Найдите частоту каждой варианты.

б) Составьте таблицу вариант и частот.

в) Постройте полигон частот.

г) Найдите среднее количество баллов, которое приходится на одного ученика.

645. Данные исследования продолжительности работы электрических лампочек приведены в таблице:

Продолжительность работы, тыс. ч.	2–2,1	2,1–2,2	2,2–2,3	2,3–2,4	2,4–2,5
Количество лампочек	2	8	8	5	2

Постройте гистограмму и полигон частот данного распределения.

646. В течение семи дней марта проводились наблюдения за температурой воздуха в полдень. Были получены следующие данные: –4° C; –4° C; –2° C; 0° C; 0° C; 1° C; 2° C. Найдите среднее значение температуры воздуха в полдень за эти дни.

647. На уроке физкультуры учитель фиксировал количество подтягиваний учеников на турнике. Были получены следующие результаты:

Количество подтягиваний	4	6	7	8	9	12	14
Количество учеников	1	2	4	4	2	1	1

Сколько подтягиваний в среднем приходится на одного ученика?

Задания для самопроверки № 4

Уровень 1

1. Отец старше сына в 5 раз. Сколько лет сыну, если им вместе 36 лет? Пусть сыну x лет. Какое из уравнений является математической моделью этой задачи?

   а) $\frac{x}{5}+x=36$; **б)** $5x+x=36$; **в)** $x+5+x=36$; **г)** $x+x-5=36$.

2. Какова скорость катера в стоячей воде, если он прошел расстояние между пристанями по течению реки за 2 ч, а против течения — за 3 ч? Скорость течения реки 2 км/ч.
   Пусть скорость катера в стоячей воде x км/ч. Какое из уравнений соответствует условию задачи?

   а) $\frac{x+2}{2}=\frac{x-2}{3}$; **б)** $3(x+2)=2(x-2)$;

   в) $2(x+2)=3(x-2)$; **г)** $3x=2x+2$.

3. Вкладчик внес в банк 900 грн. под 15% годовых. Сколько гривен будет начислено банком через год?

   а) 60 грн.; **б)** 1035 грн.; **в)** 135 грн.; **г)** 6000 грн.

4. Из сахарной свеклы при переработке получают по массе 16% сахара. Сколько требуется центнеров свеклы, чтобы получить 128 ц сахара?

   а) 800 ц; **б)** 20,48 ц; **в)** 204,8 ц; **г)** 80 ц.

5. Из коробки, в которой имеется 15 пачек чая первого сорта и 19 пачек чая второго сорта, наугад вынимают одну пачку. Какова вероятность того, что это будет пачка чая первого сорта?

   а) $\frac{15}{19}$; **б)** $\frac{15}{34}$; **в)** $\frac{19}{34}$; **г)** $\frac{34}{15}$.

6. Спортсмен пробежал по дорожке стадиона 4 круга по 400 м. На каждый круг он потратил соответственно 62 с, 64 с, 64 с, 58 с. Сколько времени в среднем тратил спортсмен на преодоление одного круга?

   а) 64 с; **б)** 63 с; **в)** 62 с; **г)** 58 с.

Уровень 2

7. Из пункта A в пункт B автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а возвращался со скоростью 90 км/ч. Всего в дороге он был 5 ч. Сколько времени ехал автомобиль из пункта A в пункт B?

8. Периметр прямоугольника 96 см. Найдите длины его сторон, если одна из них на 40% больше другой.

9. Заработную плату рабочего два раза повышали на 10%. Какой будет заработная плата рабочего после этих повышений, если начальная заработная плата была 1000 грн.?

10. В контейнере находятся кофеварки, 30 из которых белого цвета, 10 — голубого и 10 — красного. Какова вероятность того, что наугад вынутая из контейнера кофеварка будет красного цвета?

11. После взвешивания массы 10 овец оказались следующими: 35 кг, 37 кг, 34 кг, 35 кг, 40 кг, 38 кг, 37 кг, 35 кг, 36 кг, 36 кг. Запишите ранжированный ряд данных. Составьте таблицу вариант и частот.

Уровень 3

12. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 240 км, одновременно выехали два автомобиля. Если автомобили будут двигаться навстречу друг другу, то встретятся через 2 ч. Если же они будут ехать в одном направлении, то автомобиль, выехавший из пункта B, догонит автомобиль, выехавший из пункта A, через 12 ч. Найдите скорость каждого автомобиля.

13. Кусок сплава меди и цинка общей массой 72 кг содержит 45% меди. Сколько килограммов меди нужно прибавить к этому куску, чтобы получить новый сплав, содержащий 60% меди?

14. Вкладчик внес в банк 5000 грн. под 11% годовых. Какую прибыль он получит через 2 года?

15. Партию деталей изготовили трое рабочих, причем первый рабочий изготовил $\frac{2}{5}$ всех деталей, второй — $\frac{3}{10}$, третий — остальные. Какова вероятность того, что наугад взятую деталь изготовил третий рабочий?

16. Урожайность пшеницы в хозяйствах района была следующей:

Урожайность, ц/га	25–30	30–35	35–40	40–45
Количество хозяйств	5	8	7	4

Постройте гистограмму и полигон частот данного распределения.

Уровень 4

17. Два трактора, работая вместе, могут вспахать поле за 8 ч. Если один трактор вспашет сначала $\frac{1}{4}$ поля, а потом другой — остальное поле, то все поле будет вспахано за 15 ч. За сколько времени может вспахать поле каждый трактор, работая отдельно?

18. Цену товара повысили на 10%. На сколько процентов нужно уменьшить новую цену, чтобы получить начальную?

19. Какую минимальную сумму денег нужно положить в банк под 14% годовых, чтобы через 3 года получить больше 20000 грн.?

20. Одновременно подбрасывают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут числа, произведение которых меньше 15?

21. На соревновании богатырей фиксировали количество поднятий штанги массой 150 кг. Были получены следующие результаты:

Количество поднятий	4	5	6	7	8
Количество богатырей	3	2	4	4	2

Постройте полигон частот данного распределения. Сколько поднятий в среднем приходится на одного богатыря?

§ 4

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Термин «последовательность» используют, когда говорят о расположении учеников в шеренге, очередности дней недели, расположении команд в турнирной таблице и т. п.

В этом параграфе мы выясним, что такое числовая последовательность, в частности, что такое арифметическая и геометрическая прогрессии, каковы их свойства, научимся использовать свойства упомянутых прогрессий при решении прикладных задач.

1; 1; 2; 3; 5; 8; ... — последовательность

2; 5; 8; 11; 14; ... — арифметическая прогрессия (каждое число, начиная со второго, на 3 больше предыдущего)

2; 6; 18; 54; 162; ... — геометрическая прогрессия (каждое число, начиная со второго, в три раза больше предыдущего)

21. Числовые последовательности. Способы задания последовательностей

1. Числовые последовательности. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1Один подсолнух за лето «выпивает» в среднем 250 л воды. Сколько воды «выпьют» за лето 1, 2, 3, 4, 5 подсолнухов?

Получим:	Количество подсолнухов	1	2	3	4	5
	Объем воды в литрах	250	500	750	1000	1250

Во второй строке получили несколько чисел, записанных в определенном порядке, говорят, получим *последовательность чисел*: 250; 500; 750; 1000; 1250, в которой на первом месте стоит число 250, на втором — 500, на пятом — 1250.

В этом примере каждому натуральному числу от 1 до 5 включительно соответствует одного число из указанной последовательности. Итак, имеем функцию, областью определения которой является множество чисел 1, 2, 3, 4, 5.

Пример 2Записать в порядке возрастания натуральные числа, запись которых оканчивается цифрой 2.

Получим *последовательность* чисел 2; 12; 22; 32; 42; ..., в которой на первом месте стоит число 2, на втором — 12, на третьем — 22 и т. д.

Место	1	2	3	4	5	...
Число	2	12	22	32	42	...

В этом примере каждому натуральному числу n соответствует одно число из указанной последовательности. Так, натуральному числу 6 соответствует число 52 этой последовательности, числу 7 — число 62 и т. д. Следовательно, имеем функцию, областью определения которой является множество всех натуральных чисел.

Определение **Последовательностью называют функцию, заданную на множестве всех или первых n натуральных чисел.**

Числа, образующие последовательность, называют *членами последовательности*. Если последовательность имеет конечное число членов, тогда ее называют *конечной последовательностью* (пример 1). Если последовательность имеет бесконечное число членов, то ее называют *бесконечной последовательностью* (пример 2), а в записи это показывают многоточием после последнего записанного члена последовательности.

Приведем еше примеры последовательностей:

4; 8; 12; 16; ... — последовательность натуральных чисел, кратных 4;

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ... — последовательность правильных дробей с числителем 1;

$-1; -2; -3; -4; \dots$ — последовательность отрицательных целых чисел;

$0,1;\ 1,1;\ 2,1;\ 3,1$ — последовательность, состоящая из четырех членов;

$7; 7; 7; 7; \dots$ — последовательность, все члены которой равны 7.

Четвертая последовательность конечная, остальные — бесконечные.

В общем случае члены последовательности, как правило, обозначают маленькими буквами с индексами внизу. Каждый индекс указывает порядковый номер члена последовательности. Например, первый член последовательности обозначают a_1, читают «*a* первое», второй — a_2, читают «*a* второе», член последовательности с номером *n* обозначают a_n и читают «*a* энное». Саму последовательность обозначают (a_n) и записывают: $a_1; a_2; a_3; a_4; \dots$. Член a_4 называют следующим за a_3, а член a_3 — предыдущим члену a_4.

Например, рассмотрим последовательность (a_n): $1; 3; 5; \dots$ — последовательность нечетных натуральных чисел. В ней $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$; … . Член последовательности $a_2 = 3$ является предыдущим члену $a_3 = 5$ и последующим за членом $a_1 = 1$.

2. Способы задания последовательностей. Чтобы задать последовательность, нужно указать способ, при помощи которого можно найти любой ее член. Существуют различные способы задания последовательностей.

1. Последовательность можно задать *описанием* способа определения ее членов. Например, пусть задана последовательность, членами которой являются делители числа 15, записанные в порядке возрастания. Эту последовательность, описанную словами, можно записать так: 1; 3; 5; 15.

2. Конечную последовательность можно задать, *перечислив ее члены*. Например, (b_n): 54; 1; 33; 27.

3. Последовательность можно задать *таблицей*, в которой напротив каждого члена последовательности указывают его порядковый номер. Например,

n	1	2	3	4	5
a_n	-2	1	-4	1	-6

4. Последовательность можно задать *формулой*, по которой можно найти любой член последовательности, зная его номер. Например, последовательность натуральных чисел, кратных 3, можно задать формулой $a_n = 3n$; последовательность чисел, обратных натуральным, — формулой $b_n = \dfrac{1}{n}$. Такие формулы называют еще формулами *n*-го члена последовательности.

Пусть последовательность (c_n) задана формулой $c_n = 3n - n^2$. Подставляя вместо *n* натуральные числа 1, 2, 3, … , получим:

$$c_1 = 3 \cdot 1 - 1^2 = 2; \quad c_2 = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2; \quad c_3 = 3 \cdot 3 - 3^2 = 0; \dots .$$

Поэтому (c_n): 2; 2; 0; … .

5. Последовательность можно задать так: сначала указать первый или несколько первых членов последовательности, а потом — условие, по которому можно определить любой член последовательности, зная предыдущие. Такой способ задания последовательности называют *рекуррентным*.

Например, найдем несколько членов последовательности (a_n), первый член которой равен -1, второй — -3, а каждый последующий, начиная с третьего, равен произведению двух предыдущих. Получим: $a_1 = -1$; $a_2 = -3$;

$a_3 = a_1 \cdot a_2 = (-1) \cdot (-3) = 3$;

$a_4 = a_2 \cdot a_3 = (-3) \cdot 3 = -9$;

$a_5 = a_3 \cdot a_4 = 3 \cdot (-9) = -27$; и т. д.

Условия, определяющие эту последовательность, можно записать так: $a_1 = -1$; $a_2 = -3$; $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$. Формулу, при помощи которой любой член последовательности можно найти через предыдущие, называют *рекуррентной формулой*.

Рассмотренные выше последовательности являются *числовыми последовательностями*, так как их элементами являются числа. Существуют и другие последовательности. Например, последовательность передач на канале телевидения, последовательность футбольных команд в турнирной таблице и т. п. В дальнейшем будем рассматривать только числовые последовательности.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Записать шесть первых членов последовательности натуральных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 2.

• Первым натуральным числом, которое при делении на 3 дает остаток 2, является число 2. Следующим является число 5 — оно на 3 больше 2, дальше 8 — на 3 больше 5 и т. д. Поэтому получим: 2; 5; 8; 11; 14; 17.

Ответ. 2; 5; 8; 11; 14; 17. •

Упражнение 2. Записать формулу n-го члена последовательности (x_n) натуральных чисел, которые больше 8 и при делении на 9 дают остаток 7.

• Первым натуральным числом, которое больше 8 и при делении на 9 дает остаток 7, является число 16. Его можно записать так: $16 = 9 \cdot 1 + 7$. Вторым будет число 25, которое можно записать так: $25 = 9 \cdot 2 + 7$, третьим — $34 = 9 \cdot 3 + 7$ и т. д. Тогда формула n-го члена искомой последовательности (x_n) будет иметь вид: $x_n = 9n + 7$.

Ответ. $x_n = 9n + 7$. •

Упражнение 3. Последовательность задана формулой $x_n = 3n^2 - 7n$. Является ли членом этой последовательности число 6?

• Число 6 будет членом этой последовательности, если найдется такой номер n, что $x_n = 6$, то есть $3n^2 - 7n = 6$. Получаем уравнение: $3n^2 - 7n - 6 = 0$, откуда $n_1 = 3$; $n_2 = -\frac{2}{3}$. Число $-\frac{2}{3}$ не является натуральным, а поэтому не может быть номером члена последовательности. Следовательно, число 6 является третьим членом заданной последовательности.

Ответ. Да. •

Упражнение 4. Записать три первых члена последовательности (a_n), если $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$.

•При $n = 1$ по формуле $a_{n+1} = 3a_n - 2$ получим: $a_2 = 3a_1 - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$. При $n = 2$ получим: $a_3 = 3a_2 - 2 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$.

Ответ. 2; 4; 10. •

Устно

648. Дана последовательность: 0,1; 7; 0,2; 8; 0,3; 9.

а) Сколько членов имеет эта последовательность?

б) Назовите третий член последовательности.

в) Какой номер имеет член последовательности, равный 0,3?

г) Какой член последовательности является последующим за числом 8; предыдущим числу 7?

649. Дана последовательность натуральных чисел, кратных 10:

$$10;\ 20;\ 30;\ 40;\ 50;\ \ldots .$$

а) Назовите первый, четвертый и восьмой члены этой последовательности.

б) Какой номер имеет член последовательности, равный 70?

в) Какие члены последовательности находятся между числами 30 и 90?

г) Какой формулой можно задать эту последовательность?

650. Последовательность задана формулой $x_n = n + 5$. Назовите три первых члена последовательности.

651. Назовите несколько первых членов последовательности квадратов натуральных чисел.

Уровень А

652. Дана последовательность (c_n). Запишите:

а) член последовательности, последующий за c_{15}; c_k;

б) член последовательности, предыдущий c_8; c_k;

в) члены последовательности, которые находятся между c_3 и c_7; c_k и c_{k+3}.

653. Запишите первые шесть членов последовательности натуральных чисел, кратных 4. Какой номер имеет член последовательности, равный 16?

654. Запишите первые пять членов последовательности кубов натуральных чисел. Какой номер имеет член последовательности, равный 27?

655. Запишите первые пять членов последовательности натуральных чисел, которые:

а) делятся на 5;

б) при делении на 5 дают остаток 1;

в) при делении на 5 дают остаток 2.

656. Запишите первые четыре члена последовательности натуральных чисел, которые:

а) делятся на 7;

б) при делении на 4 дают остаток 3.

657. Последовательность задана формулой $a_n = 5n^2 - 1$. Найдите: a_4; a_{10}.

658. Последовательность задана формулой $b_n = 3n + 5$.

а) Найдите четыре первых члена этой последовательности; двенадцатый член.

б) Укажите номер члена последовательности, равного 20.

659. Последовательность задана формулой $c_n = 2n - 7$.

а) Найдите три первых члена этой последовательности; пятнадцатый член.

б) Какой номер имеет член последовательности, равный 193?

Уровень Б

660. Запишите все члены последовательности, заданной формулой:

а) $a_n = (-1)^n$, $1 \le n \le 7$;

б) $b_n = n^2 - 5n$, $1 \le n \le 3$;

в) $c_n = 3^{2n-3}$, $1 \le n \le 4$.

661. Последовательность задана формулой $x_n = 5 + 3n^2$. Найдите номер члена последовательности, равного: 305; 680.

662. Последовательность задана формулой $y_n = 2n^2 - 5n - 1$. Является ли членом этой последовательности число 1; число 11?

663. Последовательность задана формулой $x_n = n^2 - 7n + 1$. Является ли членом этой последовательности число -11; число 3?

664. Запишите формулу n-го члена последовательности натуральных чисел, которые больше 3 и при делении на 7 дают остаток 1; остаток 2.

665. Запишите формулу n-го члена последовательности натуральных чисел, которые больше 6 и при делении на 11 дают остаток 5; остаток 3.

Запишите пять первых членов последовательности, если:

666. **а)** $a_1 = -3$; $a_{n+1} = 2a_n + 1$; **б)** $c_1 = 2$; $c_2 = -\frac{1}{2}$; $c_{n+2} = c_n \cdot c_{n+1} - 5$;

667. **а)** $b_1 = 5$; $b_{n+1} = -2b_n$; **б)** $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + 1$.

668. Запишите рекуррентную формулу и найдите четыре первых члена последовательности, первый член которой равен –2, второй — 3, а каждый последующий, начиная с третьего, равен квадрату суммы двух предыдущих.

669. Запишите рекуррентную формулу и найдите четыре первых члена последовательности, первый член которой равен 3, а каждый последующий член, начиная со второго, равен уменьшенному на единицу квадрату предыдущего члена.

Уровень В

670. Найдите первые шесть членов последовательности, заданной формулой

$$a_n = \begin{cases} 1+\dfrac{5}{n}, \text{ если } n \text{ — четное;} \\ 2-n, \text{ если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

671. Последовательность задана формулой $b_n = 2n^2 - 13n + 1$. Найдите номера тех членов последовательности, которые не превышают 8.

672. Общий член последовательности задан формулой $x_n = \dfrac{2n}{n+1}$. При каких значениях n модуль разность $x_n - 2$ меньше 10^{-1}?

Упражнения для повторения

673. Разложите на множители трехчлен:
а) $9x^2 - 10x + 1$; **б)** $x^4 - 5x^2 - 36$.

674. Найдите область определения функции:
а) $y = \sqrt{\dfrac{1}{18-6x}}$; **б)** $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$.

675. Траншею начал рыть первый бульдозер. Через 2 ч к нему присоединился второй, и через 8 ч общей работы они вырыли 80% траншеи. За сколько времени мог бы вырыть траншею каждый бульдозер, если известно, что первому для этого требуется на 5 ч больше, чем второму?

676. Решите уравнение $x^2 + 3x + a = 0$, если a — абсцисса вершины параболы $y = (x + 10)^2 - 1$.

22. Арифметическая прогрессия и ее свойства

Среди числовых последовательностей важную роль играют последовательности, которые называют арифметической и геометрической прогрессиями.

Пример 1. Группа туристов поднималась на гору в течение 4 ч. За первый час туристы прошли 2,5 км, а за каждый следующий — на 0,5 км меньше, чем за предыдущий. Какой путь проходили туристы за каждый час движения?

За первый час туристы прошли 2,5 км, за второй — $2{,}5 - 0{,}5 = 2$ (км), за третий — $2 - 0{,}5 = 1{,}5$ (км), за четвертый — 1 км.

Получили конечную последовательность чисел: 2,5; 2; 1,5; 1, в которой каждый последующий член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом –0,5.

Пример 2. Записать последовательность натуральных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1.

Получим:

$$1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ 16;\ 19;\ 22;\ \ldots .$$

В этой последовательности любой член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 3.

Каждая из рассмотренных последовательностей является примером арифметической прогрессии.

Определение **Арифметической прогрессией называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.**

Это число называют *разностью арифметической прогрессии* и обозначают буквой d (d — начальная буква латинского слова *differentia* — разность).

Итак, если имеется арифметическая прогрессия a_1; a_2; a_3; …, то $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d$; …, то есть для любого натурального n выполняется равенство

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым ее членом, начиная со второго, и предыдущим членом равна одному и тому же числу — разности d, то есть $a_2 - a_1 = d$, $a_3 - a_2 = d$, … . Итак,

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Верно и наоборот: если в некоторой числовой последовательности разность между любым ее членом, начиная со второго, и предыдущим членом равна одному и тому же числу, то такая последовательность является арифметической прогрессией.

Арифметические прогрессии могут быть конечными (пример 1) и бесконечными (пример 2).

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и разность. Тогда каждый последующий член можно вычислить по предыдущему по *рекуррентной формуле* $a_{n+1} = a_n + d$.

В таблице приведены примеры арифметических прогрессий для некоторых значений a_1 и d.

a_1	d	Арифметическая прогрессия
1	2	1; 3; 5; 7; 9; ...
0	–2	0; –2; –4; –6; –8; ...
5	0	5; 5; 5; 5; 5; ...
1,1	–0,5	1,1; 0,6; 0,1; –0,4; –0,9; ...

Рассмотрим *свойства арифметической прогрессии*.

1. В арифметической прогрессии 1; 3; 5; 7; 9; ... каждый член, начиная со второго, является средним арифметическим двух соседних с ним членов:

$$3 = \frac{1+5}{2}; \quad 5 = \frac{3+7}{2}; \quad 7 = \frac{5+9}{2}; \dots .$$

Покажем, что такое свойство имеет любая арифметическая прогрессия.

Пусть имеется арифметическая прогрессия (a_n) с разностью d. Тогда для натуральных значений $n > 1$ выполняются равенства: $a_n - a_{n-1} = d$, $a_{n+1} - a_n = d$. Отсюда: $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$; $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$;

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

***Свойство 1.* Любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим двух соседних с ним членов.**

С этим свойством арифметической прогрессии и связано ее название.

2. Рассмотрим конечную арифметическую прогрессию (x_n), имеющую 7 членов: 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15. Найдем сумму крайних членов прогрессии и суммы членов, равноотстоящих от крайних:

$$x_1 + x_7 = 3 + 15 = 18;$$
$$x_2 + x_6 = 5 + 13 = 18;$$
$$x_3 + x_5 = 7 + 11 = 18;$$
$$x_4 + x_4 = 9 + 9 = 18.$$

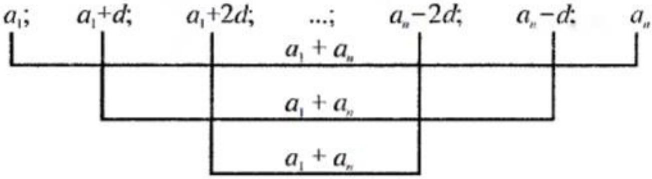
Сумма любых двух членов арифметической прогрессии, равноотстоящих от ее крайних членов, равна сумме крайних членов.

Используем эти соображения для произвольной конечной арифметической прогрессии $a_1; a_2; \ldots; a_n$ с разностью d.

Пусть $a_1 + a_n = m$. Тогда:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n = m;$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = m \text{ и т. д.}$$



Свойство 2. **Сумма любых двух членов конечной арифметической прогрессии, равноотстоящих от ее крайних членов, равна сумме крайних членов этой прогрессии.**

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Найти разность и третий член арифметической прогрессии (a_n): 1; 1,2; … .

• В этой прогрессии $a_1 = 1$, $a_2 = 1{,}2$. Поэтому:

$$d = a_2 - a_1 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2; \quad a_3 = a_2 + d = 1{,}2 + 0{,}2 = 1{,}4.$$

Ответ. 0,2; 1,4. •

Упражнение 2. Является ли последовательность чисел 3; 0; –3; –6; –9 арифметической прогрессией?

• Обозначим члены заданной последовательности:

$$a_1 = 3; \; a_2 = 0; \; a_3 = -3; \; a_4 = -6; \; a_5 = -9.$$

Найдем разность последующего и предыдущего членов последовательности:

$a_2 - a_1 = 0 - 3 = -3;$

$a_3 - a_2 = -3 - 0 = -3;$

$a_4 - a_3 = -6 - (-3) = -3;$

$a_5 - a_4 = -9 - (-6) = -3.$

Так как полученные разности равны одному и тому же числу –3, то эта последовательность является арифметической прогрессией. •

Упражнение 3. Между числами 7 и 15 вставить такое число, чтобы все три числа образовали арифметическую прогрессию.

• Пусть x — искомое число, тогда последовательность 7; x; 15 — арифметическая прогрессия. Второй член арифметической прогрессии является средним арифметическим первого и третьего членов: $x = \frac{7+15}{2} = 11$.

Ответ. 11. •

Устно

677. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) 1; 2; 3; 4; 5; ... — последовательность натуральных чисел;

б) 2; 4; 6; 8; 10; ... — последовательность четных натуральных чисел;

в) 1; 4; 9; 16; 25; ... — последовательность квадратов натуральных чисел;

г) –1; –2; –3; –4; –5; ... — последовательность отрицательных целых чисел?

678. Укажите первый член и разность арифметической прогрессии:

а) 2; 7; 12; ...; **б)** 0,7; 1; 1,3; ...;

в) 6; 5,5; 5; ...; **г)** –9; –7; –5; ... .

679. Найдите первые четыре члена арифметической прогрессии (a_n), в которой:

а) $a_1 = 5$; $d = 2$; **б)** $a_1 = 7$; $d = -2$.

680. Найдите четвертый член арифметической прогрессии:

а) 7; 11; 15; ...; **б)** 13; 10; 7; ... .

681. Найдите разность и первый член арифметической прогрессии:

а) a_1; 4; 7; ...; **б)** a_1; 5; 3; ... .

Уровень А

682. Запишите последовательность натуральных чисел, кратных 6. Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

683. Найдите разность, третий и четвертый члены арифметической прогрессии (a_n), в которой:

а) $a_1 = 5$; $a_2 = 8$; **б)** $a_1 = -2$; $a_2 = -5$;

в) $a_1 = 0,78$; $a_2 = 0,78$; **г)** $a_1 = -9,1$; $a_2 = -8,1$.

684. Найдите первые четыре члена арифметической прогрессии (a_n), в которой:

а) $a_1 = 10$; $d = 5$; **б)** $a_1 = 4,5$; $d = -0,5$.

685. Найдите разность и пятый член арифметической прогрессии:

а) 1,4; 1,7; 2; ...; **б)** –3; –2,8; –2,6; ... .

686. Найдите разность и четвертый член арифметической прогрессии:

а) 10,5; 13; 15,5; …; б) $\sqrt{2}+5$; $\sqrt{2}+3$; $\sqrt{2}+1$; … .

687. Найдите второй член арифметической прогрессии:

а) –5; a_2; –13; …; б) $\sqrt{5}$; a_2; $4-\sqrt{5}$; … .

688. Найдите шестой член арифметической прогрессии, если пятый и седьмой ее члены соответственно равны:

а) 4,8 и 7,8; б) –16,8 и 22.

689. Четвертый член арифметической прогрессии равен –15. Чему равна сумма третьего и пятого членов этой прогрессии?

690. Девятый член арифметической прогрессии равен 23. Чему равна сумма восьмого и десятого членов этой прогрессии?

Уровень Б

691. Являются ли последовательными членами арифметической прогрессии числа:

а) $7+\sqrt{5}$; $9+2\sqrt{5}$; $10+3\sqrt{5}$; б) 4; $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$; $4-4\sqrt{3}$?

692. Между числами –5 и –11 вставьте такое число, чтобы все три числа образовали арифметическую прогрессию.

693. Найдите второй и четвертый член арифметической прогрессии:

а) 1; c_2; 0,9; c_4;…; б) $-\sqrt{2}$; a_2; $3\sqrt{2}$; a_4; … .

694. Первый и четвертый член арифметической прогрессии соответственно равны 3,8 и 7,5. Найдите сумму первых четырех членов этой прогрессии.

695. Олег, Петр, Сергей и Андрей ловили рыбу. Количества пойманных ими рыбин образуют арифметическую прогрессию. Меньше всех рыбин — 9 — поймал Петр, а больше всех — 18 — Олег. Сколько рыбин поймали Сергей и Андрей вместе? Сколько всего рыбин поймали ребята?

696. При каких значениях m числа 2, $2m-30$ и $m-8$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

697. Найдите третий член арифметической прогрессии (x_n), если $x_1=7\sqrt{3}$ и $x_5=5\sqrt{3}$.

Уровень В

698. Пятый член арифметической прогрессии равен 2,5. Найдите сумму первых девяти членов этой прогрессии.

699. Числа, определяющие градусные меры углов треугольника, образуют арифметическую прогрессию. Найдите средний по величине угол треугольника.

700. Числовые значения диаметров пяти шкивов, насаженных на один вал, образуют арифметическую прогрессию. Диаметр наименьшего шкива равен 34 см, а наибольшего — 46 см. Найдите диаметры остальных трех шкивов.

Упражнения для повторения

701. Что больше: $2\sqrt{3}$ или $\sqrt{10}$?

702. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} a+4d-(a+2d)=-4; \\ (a+d)(a+3d)=-3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 3x+2y=-3; \\ x^2-y^2=-8. \end{cases}$

703. Решите уравнение:

а) $x^2+6x-7=0$; **б)** $x+6\sqrt{x}-7=0$.

704. В момент отчаливания лодки от пристани у одного из пассажиров упала в воду шляпа. Лодка, пройдя 4 км по течению, развернулась и на расстоянии 2 км от пристани настигла шляпу. Какова скорость шляпы относительно берега, если скорость лодки в стоячей воде 6 км/ч?

23. Формула *n*-го члена арифметической прогрессии

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и разность, а последующие члены можно найти по формуле $a_{n+1}=a_n+d$.

Например, найдем несколько первых членов арифметической прогрессии, в которой $a_1=4$, $d=3$.

Получим:

$$a_2=a_1+d=4+3=7;$$
$$a_3=a_2+d=7+3=10.$$

Далее можно найти a_4, a_5 и т. д.

Чтобы найти член этой прогрессии с большим порядковым номером, например, a_{50}, нужно выполнить много вычислений. Поэтому вычисление членов арифметической прогрессии по формуле $a_{n+1}=a_n+d$ часто является неудобным.

Найдем более краткий путь вычисления *n*-го члена арифметической прогрессии (a_n).

По определению арифметической прогрессии получим:

$$a_2=a_1+d;$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d.$$

Замечаем, что в этих формулах коэффициент при d на 1 меньше порядкового номера искомого члена прогрессии. Так, $a_5 = a_1 + 4d$, $a_{20} = a_1 + 19d$. Итак, можем записать:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d.}$$

Полученную формулу называют *формулой n-го члена арифметической прогрессии*.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Найти девятый член арифметической прогрессии (a_n): 5; 4,2; 3,4; ... .

• Имеем: $a_1 = 5$. Найдем разность прогрессии: $d = 4{,}2 - 5 = -0{,}8$. Тогда $a_9 = a_1 + 8d = 5 + 8 \cdot (-0{,}8) = -1{,}4$.

Ответ. $-1{,}4$. •

Упражнение 2. Найти первый член арифметической прогрессии (a_n), в которой $d = -2$, $a_8 = 93$.

• Используя формулу n-го члена арифметической прогрессии при $n = 8$, получим: $93 = a_1 + 7 \cdot (-2)$. Отсюда $a_1 = 93 + 14 = 107$.

Ответ. 107. •

Упражнение 3. Является ли число 181 членом арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 3$, $d = 5$?

• Число 181 будет членом прогрессии, если существует такое натуральное число n — порядковый номер члена прогрессии, что $a_n = 181$. Так как $a_n = a_1 + (n - 1)d$, то $181 = 3 + (n - 1) \cdot 5$. Решим полученное уравнение: $181 = 3 + 5n - 5$; $183 = 5n$; $n = 36{,}6$. Число 36,6 не является натуральным, поэтому число 181 не является членом данной арифметической прогрессии.

Ответ. Нет. •

Упражнение 4. Найти первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если сумма второго и пятого ее членов равна 20, а разность девятого и третьего членов равна 18.

• По условию имеем: $a_2 + a_5 = 20$, $a_9 - a_3 = 18$. Записав члены a_2, a_5, a_9 и a_3 по формуле n-го члена арифметической прогрессии, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 4d = 20; \\ a_1 + 8d - a_1 - 2d = 18. \end{cases} \text{ Откуда: } \begin{cases} 2a_1 + 5d = 20; \\ 6d = 18; \end{cases} \begin{cases} 2a_1 + 15 = 20; \\ d = 3; \end{cases} \quad a_1 = 2{,}5;\ d = 3.$$

Ответ. 2,5; 3. •

Уровень А

705. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n) и найдите a_{11}, если:

а) $a_1 = 11,\ d = \frac{1}{2}$;   **б)** $a_1 = -3,\ d = -4$.

706. Найдите восемнадцатый член арифметической прогрессии:

а) 1; 1,3; 1,6; ...;   **б)** 3; 1; –1; ... .

707. В арифметической прогрессии (a_n): $a_1 = 0{,}5$; $d = 2$. Найдите a_7, a_{15}.

708. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n) и найдите a_9:

а) 7,8; 8,9; 10; …;   **б)** –6; –13; –20; … .

709. Найдите первый член арифметической прогрессии, если ее разность и девятый член соответственно равны:

а) 0,5; 3;   **б)** 0,2; –2.

710. Найдите первый член арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $d = 2{,}5$; $a_{11} = 11$;   **б)** $d = -\frac{1}{9}$; $a_{100} = 0$.

Найдите порядковый номер члена a_n арифметической прогрессии, если:

711. а) $a_1 = 3$; $d = -5$; $a_n = -37$;   **б)** $a_1 = -7$; $d = 2$; $a_n = 81$.

712. а) $a_1 = 1$; $d = 7$; $a_n = 71$;   **б)** $a_1 = -20$; $d = 3$; $a_n = -2$.

Уровень Б

713. Является ли членом арифметической прогрессии –2; –5; –8; ... число –84; число –152?

714. Является ли число 130 членом арифметической прогрессии:

а) 4; 7; 10; ...;   **б)** 23; 34; 45; …?

715. Ломаная состоит из двенадцати отрезков. Длина первого отрезка равна 25 см, а каждого последующего — на 2 см меньше, чем предыдущего. Какова длина самого короткого отрезка?

716. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если ее четвертый и девятый члены соответственно равны 16 и 41.

717. Найдите разность и пятнадцатый член арифметической прогрессии, если ее третий член равен 9, а сумма пятого и девятого членов равна 2.

718. Найдите девятый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_4 = 9$, $a_{17} = -17$.

719. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (c_n), для которой $c_2 + c_8 = 10$, $c_3 + c_{14} = 31$.

720. Между числами 8 и 63 вставьте четыре числа так, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

721. Между числами 2 и –6 вставьте три числа так, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

Уровень B

722. Найдите первый отрицательный член арифметической прогрессии 72; 70,5; ... .

723. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии –90; –85,6; ... .

724. Сколько положительных членов в арифметической прогрессии 28; 27,7; ...?

725. Даны две арифметические прогрессии (x_n): 7; 26; ... и (y_n): 3; 8; ... . Найдите наименьший общий член этих прогрессий.

Упражнения для повторения

726. Принадлежит ли число –2 области значений функции $y = x^2 + 5x + 4$?

727. Решите неравенство:

а) $3n^2 - 10n + 7 > 0$; **б)** $(21 - x)(2x + 3) \geq 0$.

728. Из урны, в которой имеется 15 шаров, пронумерованных числами от 1 до 15, наугад вынимают один шар. Найдите вероятность того, что номер вынутого шара окажется делителем числа 15.

729. Докажите, что значение выражения $\sqrt{x^2 + 5xy + y^2}$ является целым числом, если $(x; y)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} x - 2y = -5; \\ 3x + y = 6. \end{cases}$

24. Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии

Пример. Найти сумму натуральных чисел от 1 до 100 включительно.

Запишем суму S данных чисел двумя способами: в порядке возрастания и в порядке убывания слагаемых и почленно сложим полученные равенства:

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \\ + \; S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 1 \\ \hline 2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 \end{array}$$

Суммы пар чисел, расположенных друг под другом в правых частях этих равенств, равны одному и тому же числу 101; таких пар 100. Поэтому

$$2S = 101 \cdot 100.$$

Отсюда $S = \dfrac{101 \cdot 100}{2} = 5050.$

Итак, сумма всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно равна 5050.

Отметим, что последовательность натуральных чисел 1; 2; ...; 99; 100 является арифметической прогрессией (a_n), в которой $a_1 = 1$; $d = 1$; $n = 100$.

Используем рассмотренный способ для вывода формулы суммы S_n первых n членов любой арифметической прогрессии a_1; a_2; …; a_n; … .

Запишем:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n;$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1.$$

Сложим почленно эти равенства, получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1).$$

По свойству 2 арифметической прогрессии сумма каждых двух членов, взятых в скобки, равна $a_1 + a_n$. Таких сум есть n, поэтому:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.} \qquad (1)$$

Если в этой формуле вместо a_n подставить выражение $a_1 + (n-1)d$, то получим:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Итак,

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) называют *формулами суммы первых n членов арифметической прогрессии.*

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Найти сумму первых девяти членов арифметической прогрессии (a_n): 3; 7; 11; ... .

● *1-й способ.* Имеем: $a_1 = 3$, $d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$. Найдем a_9: $a_9 = 3 + 8 \cdot 4 = 35$. По формуле (1) находим:

$$S_9 = \frac{3+35}{2} \cdot 9 = 171.$$

2-й способ. Зная, что $a_1 = 3$, $d = 4$, по формуле (2) находим:

$$S_9 = \frac{2 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{2} \cdot 9 = 171.$$

Ответ. 171. ●

Упражнение 2. Найти сумму нечетных натуральных чисел, не превышающих 71.

● Нечетные натуральные числа образуют арифметическую прогрессию 1; 3; 5; ..., в которой $a_1 = 1$, $d = 2$, $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$. Найдем, какой порядковый номер имеет член 71 этой прогрессии: $71 = 2n - 1$; $n = 36$. Следовательно, нужно искать сумму первых тридцати шести членов прогрессии. Имеем:

$$S_{36} = \frac{1+71}{2} \cdot 36 = 1296.$$

Ответ. 1296. ●

Упражнение 3. Найти сумму натуральных чисел не больше 105, которые при делении на 9 дают остаток 1.

● Натуральные числа, которые при делении на 9 дают остаток 1, образуют арифметическую прогрессию (a_n): 1; 10; 19; ..., в которой $a_1 = 1$, $d = 9$, $a_n = 1 + 9(n-1) = 9n - 8$. Найдем, сколько членов этой прогрессии не превышают 105. Для этого решим неравенство $a_n \le 105$:

$$9n - 8 \le 105;\ 9n \le 113;\ n \le 12\frac{5}{9}.$$

Следовательно, нужно искать сумму первых двенадцати членов прогрессии. Имеем: $a_{12} = 1 + 9 \cdot 11 = 100$; $S_{12} = \frac{1+100}{2} \cdot 12 = 606$.

Ответ. 606.

Упражнение 4 Найти первый член арифметической прогрессии (a_n), если сумма второго и двенадцатого ее членов равна 20,4, а сумма первых одиннадцати — 121.

По условию имеем: $a_2 + a_{12} = 20{,}4$; $S_{11} = 121$. Используя формулы n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии, получим систему уравнений $\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 11d = 20{,}4; \\ \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = 121. \end{cases}$ Отсюда:

$$\begin{cases} 2a_1 + 12d = 20{,}4; \\ (a_1 + 5d) \cdot 11 = 121; \end{cases} \begin{cases} a_1 + 6d = 10{,}2; \\ a_1 + 5d = 11; \end{cases} \begin{cases} d = -0{,}8; \\ a_1 + 5d = 11; \end{cases} a_1 = 15.$$

Ответ. 15.

Упражнение 5 Сколько нужно взять первых членов арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = 2$; $d = 1$, чтобы их сумма равнялась 90?

Используя формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, получим: $90 = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (n-1)}{2} \cdot n$; $180 = (n + 3) \cdot n$; $n^2 + 3n - 180 = 0$; $n_1 = -15$, $n_2 = 12$. Корень $n_1 = -15$ не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $n = 12$.

Ответ. 12.

Уровень А

730. Найдите сумму первых одиннадцати членов арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = 22$; $a_{11} = -1$; **б)** $a_1 = 5$; $a_{11} = 15$.

Найдите сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если:

731. **а)** $a_1 = 8$; $d = 4$; $n = 5$; **б)** $a_1 = -0{,}1$; $d = -0{,}1$; $n = 9$.

732. **а)** $a_1 = 1{,}5$; $d = 2$; $n = 8$; **б)** $a_1 = 5$; $d = -3$; $n = 7$.

733. Найдите суму первых десяти членов арифметической прогрессии:

а) 3; 9; 15; ...; **б)** –2,3; –2,5; –2,7; ... .

734. Найдите суму первых девяти членов арифметической прогрессии:
а) 1; 5; 9; ...; б) –1; –2; –3; ... .

735. Найдите суму первых пятидесяти натуральных чисел.

736. Найдите суму первых сорока натуральных чисел.

737. Длины сторон пятиугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите периметр пятиугольника, если длина его самой короткой стороны равна 4 см, а самой длинной — 12 см.

738. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии (a_n) равна 25. Найдите пятый член прогрессии, если $a_1 = -5$.

739. Сума первых девяти членов арифметической прогрессии равна 126, девятый член равен 54. Найдите первый член этой прогрессии.

Уровень Б

740. Найдите суму нечетных натуральных чисел не больше 81.

741. Найдите суму четных натуральных чисел не больше 100.

742. Найдите суму натуральных чисел, кратных 7 и не больше 145.

743. Найдите суму четных натуральных чисел от 24 до 120 включительно.

744. Найдите суму нечетных натуральных чисел от 17 до 117 включительно.

745. Сколько нужно взять первых членов арифметической прогрессии 16; 14; ..., чтобы их сума была равна –434?

746. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_{10} = 33$; $S_8 = 88$.

747. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 = 0$; $S_{12} = -18$.

748. Найдите суму первых десяти членов арифметической прогрессии, пятый и восьмой члены которой соответственно равны 12 и 27.

749. Девятый член арифметической прогрессии больше четвертого в три раза, а их сумма равна 20. Найдите суму первых восьми членов прогрессии.

750. Экскаватор вырыл траншею длиной 375 м, причем за первый день он вырыл 50 м, а за каждый следующий — на 5 м больше, чем за предыдущий. За сколько дней экскаватор вырыл траншею?

Уровень В

751. Найдите суму первых двадцати натуральных двузначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1.

752. Найдите сумму натуральных трехзначных чисел, кратных 4.

753. Найдите суму членов арифметической прогрессии с девятого по двадцатый включительно, если первый член прогрессии равен 5, а разность — -2.

754. Найдите сумму первых n:

а) четных натуральных чисел; **б)** нечетных натуральных чисел.

755. Найдите натуральное число, которое в 5 раз меньше суммы всех натуральных чисел, ему предшествующих.

756. Решите уравнение:

а) $6 + 11 + ... + (1 + 5n) = 111$ (n — натуральное число);

б) $(x - 1) + (x - 3) + \ldots + (x - 27) = 350$.

757. Для поливки 10 деревьев, расположенных в ряд на расстоянии 3 м друг от друга, садовник для каждого дерева отдельно приносит ведро воды из колодца, расположенного в том же ряду в 10 м от первого дерева. Сколько всего метров пройдет садовник, чтобы полить все деревья и возвратиться к колодцу?

Упражнения для повторения

758. Постройте график функции $y = -2x^2 + 8x$. Используя график, найдите:

а) область значений функции;

б) все значения x, при которых функция принимает отрицательные значения;

в) промежуток, на котором функция возрастает; убывает.

759. Сколько килограммов 9%-го и 12%-го сплавов серебра нужно взять, чтобы получить 50 кг сплава, содержащего 10,8% серебра?

760. Докажите неравенство:

а) $(2a - 1)^2 > a^2 - 1$; **б)** $a^4 + 16b \geq 8a^2\sqrt{b}$.

761. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7; \\ x + y = 2; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x - 2y = 1; \\ x^2 + 2 = y^2 + 2xy. \end{cases}$

25. Геометрическая прогрессия и ее свойства

В благоприятных условиях некоторые бактерии размножаются так, что их количество удваивается каждые 30 минут. Поэтому, если первоначально была одна бактерия, то их будет:

через 0,5 ч	2
через 1 ч	4
через 1,5 ч	8
через 2 ч	16
....	...

Во втором столбце получили последовательность чисел: 2; 4; 8; 16; ..., каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на число 2. Такая последовательность является примером *геометрической прогрессии*.

Определение **Геометрической прогрессией называют последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число.**

Это число называют *знаменателем геометрической прогрессии* и обозначают буквой q (начальная буква французского слова *qwoti* — частное).

Итак, если имеем геометрическую прогрессию b_1; b_2; b_3; ..., то $b_2 = b_1 \cdot q$; $b_3 = b_2 \cdot q$; ..., то есть для любого натурального n выполняется равенство

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Из определения геометрической прогрессии следует, что частное от деления любого ее члена, начиная со второго, на предыдущий член равно одному и тому же числу — знаменателю q, то есть: $\frac{b_2}{b_1} = q$; $\frac{b_3}{b_2} = q$; ... . Итак, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Верно и наоборот: если в некоторой последовательности частное от деления любого ее члена, начиная со второго, на предыдущий член равно одному и тому же числу, то такая последовательность является геометрической прогрессией.

Геометрические прогрессии, как и арифметические, могут быть конечными и бесконечными.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и знаменатель. Тогда каждый последующий член по предыдущему можно вычислить по *рекуррентной формуле* $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

В таблице приведены примеры геометрических прогрессий для некоторых значений b_1 и q.

b_1	q	Геометрическая прогрессия
1	3	1; 3; 9; 27; 81; ...
1	–2	1; –2; 4; –8; 16; ...
2	$\frac{1}{2}$	2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ...
–7	1	–7; –7; –7; –7; –7; ...

Рассмотрим *свойства геометрической прогрессии.*

1. В геометрической прогрессии 1; 3; 9; 27; 81; ... квадрат каждого члена, начиная со второго, равен произведению двух соседних с ним членов:

$$3^2 = 1 \cdot 9;\ \ 9^2 = 3 \cdot 27;\ \ 27^2 = 9 \cdot 81; \dots .$$

Покажем, что такое свойство имеет любая геометрическая прогрессия.

Пусть имеется геометрическая прогрессия (b_n) со знаменателем q. Тогда при $n > 1$ выполняются равенства: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = q$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Отсюда: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$;

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Свойство 1 **Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух соседних с ним членов.**

Если все члены геометрической прогрессии являются положительными числами, то из равенства $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ следует, что $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Следовательно, каждый член такой прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим двух соседних с ним членов. С этим свойством геометрической прогрессии и связано ее название.

2. Рассмотрим конечную геометрическую прогрессию (x_n), содержащую шесть членов: –1; 2; –4; 8; –16; 32. Найдем произведение крайних членов этой прогрессии и произведение членов, равноотстоящих от крайних:

$$x_1 \cdot x_6 = (-1) \cdot 32 = -32;$$

$$x_2 \cdot x_5 = 2 \cdot (-16) = -32;$$

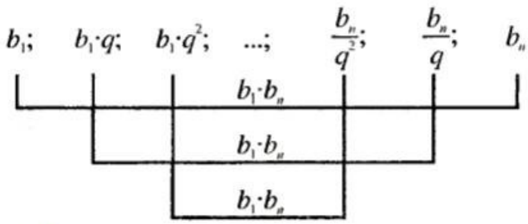
$$x_3 \cdot x_4 = (-4) \cdot 8 = -32.$$

Видим, что произведения членов прогрессии, равноотстоящих от ее крайних членов, одинаковы и равны произведению крайних членов.

Используем эти соображения для произвольной конечной геометрической прогрессии b_1; b_2; …; b_n.

Пусть $b_1 \cdot b_n = m$. Тогда:

$$b_2 \cdot b_{n-1} = b_1 q \cdot \frac{b_n}{q} = b_1 \cdot b_n = m\,,\;\; b_3 \cdot b_{n-2} = b_2 q \cdot \frac{b_{n-1}}{q} = b_2 \cdot b_{n-1} = m\,, \;\dots .$$



Свойство 2

Произведение любых двух членов конечной геометрической прогрессии, равноотстоящих от ее крайних членов, равно произведению крайних членов.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Найти знаменатель и третий член геометрической прогрессии (b_n): 1; 1,5; … .

• В этой прогрессии $b_1 = 1$, $b_2 = 1{,}5$. Поэтому:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5; \qquad b_3 = b_2 q = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25.$$

Ответ. 1,5; 2,25. •

Упражнение 2. Доказать, что последовательность 8; –4; 2; –1; $\frac{1}{2}$ является геометрической прогрессией.

• Обозначим члены последовательности: $b_1 = 8$; $b_2 = -4$; $b_3 = 2$; $b_4 = -1$; $b_5 = \frac{1}{2}$.

Найдем частные от деления последующего члена последовательности на предыдущий:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{b_4}{b_3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{b_5}{b_4} = \frac{1}{2} : (-1) = -\frac{1}{2}.$$

Так как полученные частные равны одному и тому же числу $-\frac{1}{2}$, то данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем $-\frac{1}{2}$. •

Упражнение 3. Найти второй член геометрической прогрессии: -4; b_2; -25; ... .

• Согласно свойству 1 геометрической прогрессии $b_2^2 = b_1 b_3 = (-4)\cdot(-25) = 100$. Отсюда $b_2 = 10$ или $b_2 = -10$.

Ответ. 10 или -10. •

Устно

762. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) 5; 25; 125; 625; … — последовательность натуральных степеней числа 5;

б) -3; 9; -27; 81; … — последовательность натуральных степеней числа -3;

в) 1; 8; 27; 64; … — последовательность кубов натуральных чисел?

763. Укажите первый член и знаменатель геометрической прогрессии:

а) 1; -5; 25; ...; **б)** 9; 3; 1; …;

в) -6; -6; -6; …; **г)** 7; $\frac{7}{2}$; $\frac{7}{4}$; ... .

764. Найдите первые три члена геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_1 = 3$; $q = 2$; **б)** $b_1 = 5$; $q = -2$.

765. Найдите четвертый член геометрической прогрессии:

а) 2; 6; 18; …; **б)** -9; -3; -1; … .

766. Найдите знаменатель и первый член геометрической прогрессии:

а) b_1; 4; 16; …; **б)** b_1; 6; 3; … .

Уровень А

Запишите первые четыре члена геометрической прогрессии (b_n), в которой:

767. **а)** $b_1 = \frac{1}{2}$; $q = 2$; **б)** $b_1 = \frac{81}{25}$; $q = -\frac{1}{3}$.

768. **а)** $b_1 = 4$; $q = -2$; **б)** $b_1 = -3$; $q = 0{,}2$.

769. Найдите знаменатель, третий и четвертый члены геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_1 = 5$; $b_2 = 10$; **б)** $b_1 = 3$; $b_2 = -0,3$.

770. Найдите знаменатель и пятый член геометрической прогрессии:

а) 3; 9; 27; ...; **б)** –64; 16; –4; ... .

771. Найдите знаменатель и четвертый член геометрической прогрессии:

а) 2; –6; 18; ...; **б)** 4; 2; 1; ... .

772. Найдите второй член геометрической прогрессии:

а) –36; b_2; –9; ...; **б)** 0,7; b_2; 0,063; ... .

773. Найдите пятый член геометрической прогрессии (b_n), если:

а) $b_4 = 3$; $b_6 = 75$; **б)** $b_4 = -8$; $b_6 = -18$.

774. Чему равно произведение шестого и восьмого членов геометрической прогрессии, если ее седьмой член равен: –8; 1,8?

Уровень Б

775. Являются ли последовательными членами геометрической прогрессии значения: **а)** $\operatorname{tg}\alpha$; **б)** $\sin\alpha$, где $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$?

776. Являются ли последовательными членами геометрической прогрессии числа:

а) 3^{12}; 3^{14}; 3^{16}; **б)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 1; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$?

777. Измерения прямоугольного параллелепипеда образуют геометрическую прогрессию. Найдите обьем параллелепипеда, если его наименьшее ребро равно 2,5 см, а наибольшее — 10 см.

778. Возраст отца, старшего и младшего сыновей образуют геометрическую прогрессию. Сколько лет старшему сыну, если отцу 32 года, а младшему сыну 2 года?

779. Найдите неизвестные члены конечной геометрической прогрессии:

а) 1; b_2; 49; b_4; **б)** 8; x; 2; y; $\frac{1}{2}$; **в)** b_1; $\frac{3}{2}$; b_3; $\frac{3}{8}$; b_5.

780. Между числами 1 и 3 вставьте такое число, чтобы все три числа образовали геометрическую прогрессию.

Уровень В

781. Числа 1, x, y являются одновременно последовательными членами арифметической и геометрической прогрессий. Найдите x и y.

782. Третий член геометрической прогрессии равен 2. Найдите произведение первых пяти членов этой прогрессии.

Упражнения для повторения

783. Вычислите:

а) $\dfrac{2^{-7}\cdot 2^5}{2^{-3}}$; б) $\dfrac{3^{20}-5\cdot 3^{19}}{9^9}$.

784. Решите неравенство:

а) $1-2(x-1)<6-5x$; б) $\dfrac{x-1}{3}>1-\dfrac{x+2}{6}$.

785. Одна сторона прямоугольника в три раза больше, а вторая на 4 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь квадрата, если она на 10 см^2 больше площади прямоугольника.

786. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2-2ax+4a>0$ выполняется для всех значений x.

26. Формула n-го члена геометрической прогрессии

Чтобы задать геометрическую прогрессию (b_n), достаточно указать ее первый член и знаменатель, а следующие члены можно найти по формуле $b_{n+1}=b_n\cdot q$.

Например, запишем несколько первых членов геометрической прогрессии, в которой $b_1=5$, $q=2$:

$$b_2=5\cdot 2=10;$$

$$b_3=10\cdot 2=20;$$

....

Далее можно найти b_4, b_5 и т. д.

Чтобы найти член этой прогрессии с большим порядковым номером, например, b_{50}, нужно выполнить много вычислений. Поэтому вычисление членов геометрической прогрессии по формуле $b_{n+1}=b_n\cdot q$ часто является неудобным.

Найдем более краткий путь вычисления n-го члена геометрической прогрессии (b_n) со знаменателем q.

По определению геометрической прогрессии имеем:

$$b_2=b_1q;$$

$$b_3=b_2q=b_1q\cdot q=b_1q^2;$$

$$b_4=b_3q=b_1q^2\cdot q=b_1q^3.$$

Замечаем, что в этих формулах показатель степени числа q на единицу меньше порядкового номера искомого члена прогрессии. Так, $b_5 = b_1q^4$; $b_{20} = b_1q^{19}$. Итак, можем записать:

$$\boldsymbol{b_n = b_1q^{n-1}}.$$

Полученную формулу называют *формулой n-го члена геометрической прогрессии.*

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Найти шестой член геометрической прогрессии (b_n): 2; 10; 50; ... .

• Имеем: $b_1 = 2$; $q = 10 : 2 = 5$. Тогда $b_6 = b_1 \cdot q^5 = 2 \cdot 5^5 = 6250$.

Ответ. 6250.•

Упражнение 2. Найти первый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_7 = 32$, $q = -2$.

• Используя формулу $b_n = b_1q^{n-1}$ при $n = 7$, получим:

$$32 = b_1(-2)^6; \quad 32 = b_1 \cdot 64; \quad b_1 = 0{,}5.$$

Ответ. 0,5.•

Упражнение 3. Найти знаменатель геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_7 = -12$, $b_9 = -108$.

• Используя формулу n-го члена геометрической прогрессии, получим: $b_9 = b_1q^8 = -108$, $b_7 = b_1q^6 = -12$. Отсюда:

$$\frac{b_1q^8}{b_1q^6} = \frac{-108}{-12}; \; q^2 = 9; \; q = -3 \text{ или } q = 3.$$

Ответ. –3 или 3.•

Уровень А

787. Найдите четвертый член геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_1 = 6$; $q = 2$;

б) $b_1 = -2$; $q = 0{,}1$;

в) $b_1 = \frac{1}{3}$; $q = -3$;

г) $b_1 = -64$; $q = \frac{1}{2}$.

788. Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

а) b_5, если $b_1 = 2$; $q = \frac{1}{2}$; **б)** b_3, если $b_1 = 36$; $q = \frac{1}{3}$;

в) b_4, если $b_1 = 1$; $q = -2$; **г)** b_3, если $b_1 = 100$; $q = 3$.

789. Найдите шестой член геометрической прогрессии:

а) $-32; 16; -8; \ldots;$ **б)** $\frac{1}{2}; 1; 2; \ldots$.

790. Найдите пятый член геометрической прогрессии:

а) $1; 3; 9; \ldots;$ **б)** $2; -4; 8; \ldots$.

Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), в которой:

791. **а)** $b_6 = 243$; $q = 3$; **б)** $b_5 = -\frac{5}{32}$; $q = \frac{1}{2}$.

792. **а)** $b_7 = 128$; $q = 2$; **б)** $b_5 = \frac{3}{625}$; $q = -\frac{1}{5}$.

793. Заполните таблицу, если (b_n) — геометрическая прогрессия.

b_1	q	n	b_n
3	3	3	
0,6		3	5,4
	−2	9	256

794. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_5 = 32$, $b_3 = 8$; **б)** $b_6 = -27$; $b_8 = -243$.

795. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_4 = 10$, $b_2 = 0{,}1$.

Уровень Б

796. Найдите первый член геометрической прогрессии, если ее четвертый и шестой члены соответственно равны 9 и 81.

797. Третий член геометрической прогрессии с положительным знаменателем равен 16, а сумма первых двух членов равна 12. Найдите пятый член прогрессии.

798. Найдите шестой член геометрической прогрессии (x_n), если $x_1 + x_3 = 10$, $x_2 = -4$.

799. В квадрат со стороной 8 см вписан квадрат, вершинами которого являются середины сторон данного квадрата. Во второй квадрат таким же образом вписан третий квадрат и т. д. Докажите, что числовые значения площадей этих квадратов образуют геометрическую прогрессию, и найдите площадь пятого квадрата.

800. В равносторонний треугольник, сторона которого 24 см, вписан другой треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника. Во второй треугольник таким же образом вписан третий треугольник и т. д. Докажите, что числовые значения периметров этих треугольников образуют геометрическую прогрессию, и найдите периметр пятого треугольника.

Уровень В

801. Найдите четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, в которой разность между первым и вторым членами равна 28, а разность между четвертым и третьим членами равна –252.

802. Три числа образует конечную геометрическую прогрессию. Сумма второго и третьего чисел равна 4. Если первое число умножить на $\frac{5}{9}$, то новая тройка чисел образует конечную арифметическую прогрессию. Найдите члены геометрической прогрессии.

803. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если к первым двум числам прибавить по 1, а к третьему и четвертому — соответственно 4 и 13, то новая четверка чисел образует арифметическую прогрессию. Найдите числа, образующие геометрическую прогрессию.

Упражнения для повторения

804. Упростите выражение:

а) $\frac{x^3y^2c}{2y}\cdot\frac{4c^3}{yx^7}$;

б) $\frac{a^3+b^3}{m^2-n^2}:\frac{a^2-ab+b^2}{(m+n)^2}$.

805. Решите неравенство:

а) $\frac{16x+5}{x}\geq 0$;

б) $(x+3)^2-64<0$.

806. При каких значениях m один из корней уравнения $8x^2-6x+m=0$ в два раза больше другого?

807. *Из Бахшалийской рукописи* . Найдите натуральное число, которое при увеличении на 5 и уменьшении на 11 дает полные квадраты.

27. Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии

Пусть b_1; b_2; b_3; ... — геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен q. Обозначим через S_n сумму первых n членов этой прогрессии, то есть

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (1)$$

Умножив обе части этого равенства на q, получим:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q.$$

По определению геометрической прогрессии: $b_1 q = b_2$; $b_2 q = b_3$; ...; $b_{n-1} q = b_n$. Тогда:

$$S_n q = b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_n q. \qquad (2)$$

Вычтем почленно из равенства (1) равенство (2), получим:

$$S_n - S_n q = b_1 + \underline{b_2 + b_3 + \ldots + b_n} - \left(\underline{b_2 + b_3 + \ldots + b_n} + b_n q\right) = b_1 - b_n q;$$

$$S_n (1 - q) = b_1 - b_n q.$$

Если $q \neq 1$, то

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}}. \qquad (3)$$

Учитывая, что $b_n = b_1 q^{n-1}$, получим $S_n = \dfrac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q}$. Итак,

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}} \text{ или } \boldsymbol{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}}. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) называют *формулами суммы первых n членов геометрической прогрессии.*

При $q = 1$ каждый член геометрической прогрессии равен b_1, поэтому $S_n = n \cdot b_1$.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Найти сумму восьми первых членов геометрической прогрессии (b_n): 3; –6; 12; ... .

• Имеем: $b_1 = 3$; $q = \dfrac{-6}{3} = -2$. Тогда по формуле $S_n = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ находим: $S_8 = \dfrac{3 \cdot (1 - (-2)^8)}{1 + 2} = \dfrac{3 \cdot (1 - 256)}{3} = -255.$

Ответ. –255. •

7 Кравчук В. Алгебра. 9 кл. Учебник

Упражнение 2. Найти первый член геометрической прогрессии (b_n), если четвертый ее член в три раза больше третьего, а сумма первых пяти членов равна –12,1.

• Так как $b_4 = 3b_3$, то $q = 3$. По условию $S_5 = -12{,}1$, поэтому:

$$-12{,}1 = \frac{b_1(1-3^5)}{1-3}; \quad -12{,}1 = 121b_1; \quad b_1 = -0{,}1.$$

Ответ. –0,1. •

Уровень А

808. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_1 = -3$; $q = 2$; **б)** $b_1 = 0{,}5$; $q = -2$.

Найдите сумму первых n членов геометрической прогрессии (b_n), в которой:

809. **а)** $b_1 = -1$; $q = -5$; $n = 5$; **б)** $b_1 = -64$; $q = -\frac{1}{2}$; $n = 8$.

810. **а)** $b_1 = -4$; $q = 3$; $n = 4$; **б)** $b_1 = 1$; $q = -2$; $n = 6$.

811. Найдите суму первых шести членов геометрической прогрессии:

а) $2; -1; \frac{1}{2}; \ldots$; **б)** $-5; 10; -20; \ldots$.

812. Найдите суму первых пяти членов геометрической прогрессии:

а) $3; -6; 12; \ldots$; **б)** $0{,}2; 0{,}6; 1{,}8; \ldots$.

Уровень Б

813. Найдите первый член геометрической прогрессии со знаменателем $-\frac{1}{2}$, если сумма первых восьми ее членов равна $1\frac{21}{64}$.

814. Найдите первый член геометрической прогрессии, в которой $q = \frac{1}{2}$, $S_7 = 254$.

815. Найдите сумму членов геометрической прогрессии (b_n) с третьего по восьмой включительно, если:

а) $b_1 = 2$; $q = 3$; **б)** $b_1 = -16$; $q = 0{,}5$.

816. Найдите суму членов геометрической прогрессии (b_n) с четвертого по восьмой включительно, если $b_1 = 5$; $q = -2$.

817. Докажите, что последовательность, заданная формулой $x_n = 2 \cdot 3^n$, является геометрической прогрессией, и найдите сумму первых шести ее членов.

Уровень В

818. Разность между пятым и третьим членами геометрической прогрессии равна 36, а разность между третьим и первым — 9. Найдите сумму первых восьми членов этой прогрессии.

819. Три числа, сума которых равна 21, образуют арифметическую прогрессию. Если из второго числа вычесть 1, к третьему прибавить 1, а первое число оставить без изменения, то новая тройка чисел образует геометрическую прогрессию. Найдите числа, образующие геометрическую прогрессию.

820. Найдите восьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 3$ и при некотором натуральном n выполняются равенства $b_n = 96$, $S_n = 189$.

821. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии с положительным знаменателем равна 14, а сумма членов с третьего по пятый включительно — 3,5. Найдите сумму первых пяти членов прогрессии.

Упражнения для повторения

822. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-2} - \dfrac{1}{\sqrt{6}+2}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}$.

823. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 5$; б) $y = x^2 + 6x + 10$.

824. Решите неравенство:

а) $5x + m \geq 0$; б) $\dfrac{2x-1}{x+m} \leq 0$,

где m — сумма первых пяти членов арифметической прогрессии: 1; –2; –5; ... .

825. На заводе для изготовления одного электродвигателя типа A используют 2 кг меди и 1 кг свинца, а на изготовление одного электродвигателя типа B — 3 кг меди и 2 кг свинца. Сколько электродвигателей каждого типа было изготовлено на заводе, если известно, что всего использовали 130 кг меди и 80 кг свинца?

28 Сумма бесконечной геометрической прогрессии, в которой $|q| < 1$

Пусть стороны прямоугольника $ABCD$ равны 1 см и 4 см (рис. 74). Его площадь равна $1 \cdot 4 = 4$ (см^2).

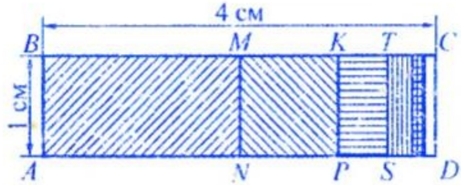


Рис. 74

Найдем площадь этого прямоугольника иначе.

Отрезком MN, соединяющим середины противоположных сторон BC и AD прямоугольника, разделим его пополам. Площади образованных прямоугольников $ABMN$ и $NMCD$ равны по 2 см^2 каждая. Образованный справа прямоугольник снова разделим пополам, соединив середины K и P противоположных сторон. Площади образованных прямоугольников $NMKP$ и $PKCD$ равны по 1 см^2 каждая. Аналогично образованный прямоугольник $PKCD$ снова разделим пополам отрезком TS на два прямоугольника с площадями по $\frac{1}{2}$ см^2 и т. д.

Найдем сумму площадей прямоугольников $ABMN$, $NMKP$, $PKTS$ и т. д. Числовое значение суммы площадей этих прямоугольников равно суме чисел $2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \ldots$. Последовательность $2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \ldots$ является бесконечной геометрической прогрессией, первый член которой равен 2, а знаменатель — $\frac{1}{2}$.

Найдем сумму первых n членов этой прогрессии:

$$S_n = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}} = 4\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 4-\frac{1}{2^{n-2}}.$$

Если число n слагаемых суммы S_n неограниченно увеличивается, то значение дроби $\frac{1}{2^{n-2}}$ приближается к нулю, а разность $4-\frac{1}{2^{n-2}}$ приближается к числу 4, говорят: *стремится к числу* 4. Число 4 называют *суммой бесконечной геометрической прогрессии* $2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \ldots$ и записывают $2+1+\frac{1}{2}+\ldots=4$.

Итак, сумма площадей прямоугольников $ABMN$, $NMKP$, $PKTS$ и т. д. равна 4 см^2, то есть равна площади прямоугольника $ABCD$.

Обобщим рассмотренный пример.

Пусть b_1; b_2; b_3; … — любая бесконечная геометрическая прогрессия, в которой $|q| < 1$.

Сумму первых n членов этой прогрессии вычисляют по формуле $S_n = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q}$. Преобразуем выражение в правой части последнего равенства: $S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$. Так как $|q| < 1$, то при неограниченном увеличении n множитель q^n стремится к нулю, а значит, к нулю стремится и произведение $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$. Тогда сумма S_n стремится к числу $\frac{b_1}{1-q}$.

Число $\frac{b_1}{1-q}$ называют *суммой бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем* $|q| < 1$ и записывают: $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = \frac{b_1}{1-q}$. Обозначим эту сумму через S. Тогда

$$\boldsymbol{S = \frac{b_1}{1-q}}.$$

Полученную формулу называют *формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии, в которой* $|q| < 1$.

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Найти сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n): 6; –2; … .

• По условию $b_1 = 6$; $b_2 = -2$. Тогда $q = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$. Имеем геометрическую прогрессию, в которой $|q| < 1$. По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ находим:

$$S = \frac{6}{1+\frac{1}{3}} = 6 : \frac{4}{3} = 6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Ответ. 4,5. •

Уровень А

826. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), в которой:

а) $b_1 = 7;\ q = -\dfrac{1}{2};$ **б)** $b_1 = -100;\ q = \dfrac{1}{50}.$

Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

827. **а)** $3;\ 1;\ \dfrac{1}{3};\ \ldots;$ **б)** $-10;\ -4;\ -\dfrac{8}{5};\ \ldots;$

в) $32;\ -16;\ 8;\ \ldots;$ **г)** $4{,}2;\ 0{,}84;\ 0{,}168;\ \ldots\ .$

828. **а)** $1;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4};\ \ldots;$ **б)** $9;\ -3;\ 1;\ \ldots;$

в) $-6;\ -4;\ -\dfrac{8}{3};\ \ldots;$ **г)** $2;\ 1{,}5;\ 1{,}125;\ \ldots\ .$

829. *Задача Архимеда.* Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии $1 + \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 + \ldots\ .$

Уровень Б

830. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

а) $3\sqrt{7};\ \sqrt{7};\ \ldots;$ **б)** $2+\sqrt{3};\ -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2};\ \ldots\ .$

Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, в которой:

831. **а)** $q = \dfrac{3}{5};\ S = 50;$ **б)** $q = -\dfrac{1}{2};\ S = 28.$

832. **а)** $q = \dfrac{1}{7};\ S = -14;$ **б)** $q = \dfrac{5}{6};\ S = 96.$

833. Найдите знаменатель q ($|q| < 1$) геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 80,\ S = 100.$

Найдите сумму, если слагаемые являются членами бесконечной геометрической прогрессии:

834. **а)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} + \ldots;$ **б)** $x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \ldots\ (|x| < 1).$

835. **а)** $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{3^3} + \ldots;$ **б)** $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ (|a| < 1).$

836. Найдите число членов арифметической прогрессии, первый член которой равен 5, а разность — 1, если сумма всех ее членов равна сумме бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$, второй и третий члены которой соответственно равны $15\frac{3}{7}$ и $13\frac{11}{49}$.

Уровень В

837. Сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$ равна 3, а сумма квадратов ее членов равна 4,5. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

838. *Задача Ферма.* Докажите, что если S — сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$, то $\frac{S}{S-b_1} = \frac{b_1}{b_2}$.

839. В квадрат со стороной 4 см вписана окружность, в окружность вписан квадрат, а в квадрат снова вписана окружность и т. д. Найдите:

а) сумму площадей всех квадратов;

б) сумму длин всех окружностей.

Упражнения для повторения

840. Упростите выражение $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}} \cdot \frac{a^3b^3}{a+b}$ и найдите его значение при $a = 2^{-1}$, $b = 3^{-1}$.

841. Из последовательности натуральных чисел, кратных 3 и не превышающих 100, наугад выбирают одно число. Найдите вероятность того, что это число окажется кратным 5.

842. Бригада рабочих за несколько дней изготовила 400 деталей. Если бы рабочие изготавливали за день на 20 деталей больше, то закончили бы работу на один день раньше. Сколько деталей изготавливали рабочие за один день?

843*. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} ax+3y=5; \\ 2x-y=4 \end{cases}$ не имеет решений?

29. Решение задач, связанных с арифметической и геометрической прогрессиями

1. Вычисление сумм. Изучая арифметическую и геометрическую прогрессии, мы вычисляли суммы первых n их членов. Известно также, как найти сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$. Однако существуют задачи, решая которые приходится искать суммы чисел, не образующих ни арифметическую, ни геометрическую прогрессии. Такие суммы иногда можно найти, преобразовав определенным образом их слагаемые.

Пример 1. Найти сумму $1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+...+13\frac{1}{128}$.

● Обозначим эту сумму через S и запишем ее так:

$$S=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(3+\frac{1}{4}\right)+\left(5+\frac{1}{8}\right)+...+\left(13+\frac{1}{128}\right)=$$

$$=(1+3+5+...+13)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{128}\right).$$

В первых скобках записана сумма членов арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = 1$, $d = 2$. Найдем, каким по счету членом этой прогрессии является число 13:

$$13 = a_1 + (n-1)\cdot d;\quad 13 = 1 + (n-1)\cdot 2;\quad n = 7.$$

Итак, в первых скобках записана сумма первых семи членов арифметической прогрессии.

Во вторых скобках записана сумма первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Используя формулы суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий, находим:

$$S=\frac{1+13}{2}\cdot 7+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1-\frac{1}{2}}=49+\frac{127}{128}=49\frac{127}{128}.$$

Ответ. $49\frac{127}{128}$. ●

2. Обращение бесконечных периодических десятичных дробей в обыкновенную дробь. Рассмотрим пример.

Пример 2. Записать число 0,(7) в виде обыкновенной дроби.

● Бесконечную десятичную дробь 0,(7) = 0,777... запишем в виде такой суммы: 0,(7) = 0,7 + 0,07 + 0,007 + ... Слагаемые 0,7; 0,07; 0,007; ... — члены бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 0,7 и знаменателем $q = 0{,}1$ ($|q| < 1$). Сумма этой прогрессии: $S = \dfrac{0{,}7}{1-0{,}1} = \dfrac{0{,}7}{0{,}9} = \dfrac{7}{9}$. Поэтому $0{,}(7) = \dfrac{7}{9}$.

Ответ. $\dfrac{7}{9}$. •

3. Решение уравнений. Рассмотрим пример.

Пример 3. Решить уравнение

$$4x + 7x + \ldots + 25x = 290,$$

в котором коэффициенты 4, 7, … , 25 образуют арифметическую прогрессию.

• Запишем уравнение так:

$$(4 + 7 + \ldots + 25) \cdot x = 290.$$

В скобках записана сумма первых членов арифметической прогрессии, в которой $a_1 = 4$, $d = 3$. Найдем количество членов. Пусть число 25 является ее n-м членом. По формуле n-го члена $25 = 4 + (n-1)\cdot 3$, откуда получим:

$$21 = (n-1)\cdot 3; \quad 7 = n - 1; \quad n = 8.$$

Итак, в скобках записана сумма первых 8 членов арифметической прогрессии. Тогда получим:

$$\frac{4+25}{2}\cdot 8 \cdot x = 290; \quad 29 \cdot 4x = 290; \quad x = 2{,}5.$$

Ответ. 2,5. •

Примеры решения упражнений

Упражнение 1. Записать число 3,1(23) в виде обыкновенной дроби.

• Число $3{,}1(23) = 3{,}12323\ldots$ запишем в виде такой суммы:

$$3{,}1(23) = 3 + 0{,}1 + 0{,}023 + 0{,}00023 + \ldots .$$

Слагаемые 0,023; 0,00023; ... — члены бесконечной геометрической прогрессии с первым членом 0,023 и знаменателем $q = 0{,}01$ ($|q| < 1$). Сумма этой прогрессии равна: $S = \dfrac{0{,}023}{1-0{,}01} = \dfrac{0{,}023}{0{,}99} = \dfrac{23}{990}$. Поэтому

$$3{,}1(23) = 3 + \frac{1}{10} + \frac{23}{990} = 3\frac{122}{990} = 3\frac{61}{495}.$$

Ответ. $3\dfrac{61}{495}$. •

Упражнение 2. Решить уравнение:

$$(x^2-x)+(x^2-3x)+(x^2-5x)+...+(x^2-71x)=-1260.$$

• Запишем уравнение в виде:

$$(x^2+x^2+x^2+...+x^2)-(1+3+5+...+71)\cdot x=-1260.$$

Во вторых скобках записана сумма первых n членов арифметической прогрессии, в которой $a_1=1$, $d=2$. Найдем n. Пусть число 71 является ее n-м членом. По формуле n-го члена $71 = 1 + (n-1)\cdot 2$, откуда $n = 36$. Учитывая, что в первых скобках записана сумма тридцати шести слагаемых, каждый из которых равен x^2, получим:

$$36x^2-\frac{1+71}{2}\cdot 36\cdot x=-1260;\quad 36x^2-36\cdot 36x+1260=0;$$

$$x^2-36x+35=0;\qquad x_1=1;\ x_2=35.$$

Ответ. 1; 35. •

Упражнение 3. Найти сумму $9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{n\ \text{раз}}$.

• Обозначим данную сумму через S. Записав слагаемые в виде $9=10-1$, $99=10^2-1$, $999=10^3-1$ и т. д., получим:

$$S=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+...+(10^n-1)=$$

$$=(10+10^2+10^3+...+10^n)-n.$$

В скобках записана сумма первых n членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1=10$, $q=10$. Поэтому:

$$S=\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n=\frac{10^{n+1}-10-9n}{9}$$

Ответ. $\frac{10^{n+1}-10-9n}{9}$. •

Уровень Б

Запишите в виде обыкновенной дроби число:

844. **а)** 0,(6); **б)** 1,(3); **в)** 3,(12); **г)** 0,(25); **д)** 1,2(3); **е)** 0,1(13); **ж)** 5,25(7); **з)** 0,13(24).

845. **а)** 0,(15); **б)** 3,(7); **в)** 6,1(3); **г)** 2,24(1); **д)** 0,02(5); **е)** 1,1(20).

Вычислите сумму:

846. а) $1\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}+1\frac{1}{8}+\ldots+1\frac{1}{512}$;

б) $\left(2^2-1^2\right)+\left(4^2-3^2\right)+\ldots+\left((2n)^2-(2n-1)^2\right)$.

847. $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}+8\frac{1}{2}+\ldots+128\frac{1}{2}$.

Решите уравнение:

848. $(2x-100)+(4x-100)+\ldots+(18x-100)=x^2-100$.

849. $x+3x+5x+\ldots+21x=x^2+120$.

850. Шар катится по пологому желобу. За первую секунду он прошел 0,2 м, а за каждую последующую — на 0,1 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние прошел шар за девятую секунду?

851. Свободно падающее тело за первую секунду проходит 4,9 м, а за каждую последующую — на 9.8 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние пройдет тело за шестую секунду после начала падения?

852. После реконструкции станков в цеху за первый день изготовили 40 деталей, а далее в течение месяца начали изготавливать каждый день на 3 детали больше, чем за предыдущий день. За какой день работы будет изготовлено 100 деталей? За сколько дней в цеху будет изготовлено 178 деталей?

853. При торможении автомобиль за первую секунду проехал 15 м, а за каждую последующую — на 3 м меньше, чем за предыдущую. Найдите тормозной путь автомобиля.

854. В треугольнике ABC провели среднюю линию A_1C_1 параллельно стороне AC. В треугольнике A_1BC_1 снова провели среднюю линию A_2C_2 параллельно A_1C_1, и т. д. Найдите высоту шестого треугольника, проведенную с вершины B, если высота BH треугольника ABC равна 16 см.

Уровень В

855. Найдите сумму, где n — натуральное число:

а) $\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$; б) $1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\ldots+n\cdot2^n$;

в) $1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ раз}}$.

Указания. **а)** Запишите слагаемые в виде разности двух дробей. Например, $\frac{2}{3\cdot5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$. **б)** Обозначьте сумму через S. Найдите $2S$, а потом разность $2S-S$.

856. Решите уравнение:

а) $1 + x + x^2 + x^3 + ... = 3$ $(|x| < 1)$;

б) $(1+3+...+(2x-1))+\left(3,5+5+...+\dfrac{3x+4}{2}\right)=105$, x — натуральное.

857. Докажите неравенство, где n — натуральное число:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}<1$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}<\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2}$.

858. Два тела движутся навстречу друг другу из двух точек, расстояние между которыми 127 м. Первое тело движется равномерно со скоростью 5 м/с. Второе, которое начало двигаться на 3 с позже первого, за первую секунду прошло 5 м, а за каждую последующую — на 2 м больше, чем за предыдущую. Сколько времени будет двигаться второе тело до встречи?

859. Атмосферное давление уменьшается на 10% с увеличением высоты на 700 м. Каково атмосферное давление на высоте 2,8 км, если на вершине Эльбруса (высота над уровнем моря 5600 м) оно равно 50 кПа?

Упражнения для повторения

860. Найдите область определения функции $y=\sqrt{x+m}$, где m — наибольший корень уравнения $x^2-4x-12=0$.

861. Найдите целые решения системы неравенств $\begin{cases} 2n-3<3n+5; \\ 6-n>4(n+3). \end{cases}$

862*. При каких значениях a уравнение $x-6=3(x-a)$ имеет отрицательный корень?

863. Вкладчик внес в банк некоторую сумму под 15% годовых и через 2 года имел на счету 2645 грн. Какую сумму внес вкладчик в банк?

Интересно знать

Слово «*прогрессия*» происходит от латинского слова «*progressio*» и значит «*движение вперед*» (как и слово «прогресс»). Впервые этот термин встречается в работах римского ученого Боэция (V–VI в.).

Прогрессии как частные виды числовых последовательностей встречаются в папирусах II тысячелетия до н. э. Первые задачи на прогрессии, дошедшие до нас, связаны с хозяйственной деятельностью, а именно — с распределением продуктов, разделом наследства и т. п.

Древнейшей задачей на прогрессии считают задачу из египетского папируса Ахмеса Райнда о распределении 100 мер хлеба между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько больше первого, на сколько третий получил больше второго и т. д. В этой задаче речь идет об арифметической прогрессии, сумма первых пяти членов которой равна 100.

В одной из задач этого папируса представлена формула первого члена арифметической прогрессии, которую в современной символике записывают так:

$$a = \frac{S}{n} - (n-1)\frac{d}{2},$$

где a — первый член, n — число членов, S — сума первых n членов, d — разность прогрессии. Убедитесь, что эта формула верна.

С вычислением суммы членов арифметической прогрессии связана такая интересная история. У известного немецкого математика Карла Гаусса (1777–1875) еще в школе обнаружились блестящие математические способности. Как-то учитель предложил ученикам найти сумму первых ста натуральных чисел. Едва он успел прочитать условие задачи, как маленький Гаусс поднял руку: «Готово». Весь класс был поражен скоростью, с которой он провел подсчет. Как считал Гаусс?

Издавна большой популярностью пользуется задача-легенда, которая относится к началу нашей эры. Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя игры в шахматы, своего подданного Сету, чтобы наградить его за изобретение. Когда изобретателю предложили самому выбрать награду, он попросил за первую клетку шахматной доски дать ему 1 зерно пшеницы, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 и т. д. Оказалось, что царь не смог выполнить просьбу Сеты. За последнюю, 64-ю, клетку шахматной доски пришлось бы отдать 2^{63} зерен пшеницы, а за все клетки — количество зерен, равное сумме членов геометрической прогрессии: 1; 2; 2^2; 2^3; ...; 2^{63}. Эта сумма равна $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$. Такое количество зерен пшеницы можно собрать с площади, приблизительно в 2000 раз больше площади всей поверхности Земли.

Вопросы и упражнения для повторения § 4

1. Приведите примеры последовательностей.
2. Что называют арифметической прогрессией? Приведите примеры арифметических прогрессий.
3. Как найти разность арифметической прогрессии?
4. Сформулируйте свойства арифметической прогрессии.
5. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии.
6. По каким формулам вычисляют сумму первых n членов арифметической прогрессии?
7. Что называют геометрической прогрессией? Приведите примеры геометрических прогрессий.
8. Как найти знаменатель геометрической прогрессии?
9. Сформулируйте свойства геометрической прогрессии.
10. Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии.
11. По каким формулам вычисляют сумму первых n членов геометрической прогрессии?
12. По какой формуле находят сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$?

864. Найдите члены последовательности (a_n) с третьего по шестой включительно, если:

а) $a_n = 4 - 3n^2$; б) $a_n = 3 \cdot (-2)^n$.

865. Последовательность задана формулой $x_n = n^2 - 6$. Является ли членом этой последовательности число 138; число 150?

866. Запишите первые четыре члена последовательности (a_n), если:

а) $a_1 = -5$; $a_{n+1} = 2a_n + 3$; б) $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 2a_n$.

867. Найдите порядковые номера членов последовательности $a_n = n^2 - 5n$, для которых выполняется неравенство $a_n + 6 \leq 0$.

868*. Найдите наименьший член последовательности $x_n = 2n - 5$, для которого выполняется неравенство $|x_n - 7| \leq 3{,}2$.

869. Являются ли числа -12, -11, -9 последовательными членами арифметической прогрессии?

870. Найдите разность и четвертый член арифметической прогрессии:

а) 15; 19; 23; ...; б) 1,2; $-1{,}3$; $-3{,}8$... .

871. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n):

а) 13; 1; -11; ...; б) -4; $-3{,}5$; -3; ... .

872. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_3 = 16$; $a_7 = 4$; б) $a_4 = 10$; $a_{21} = -24$.

873. В арифметической прогрессии (x_n): $x_2 = -8$; $x_9 = 27$. Найдите x_5.

874. Найдите периметр пятиугольника, если известно, что длина одной его стороны равна 7 см, а каждой последующей — на 2 см больше предыдущей.

875. Автомобиль после старта за первую секунду прошел 1,75 м, а затем увеличивал скорость, проходя за каждую последующую секунду на 3,5 м больше, чем за предыдущую. Каков путь прошел автомобиль за 5 с?

876. Заполните таблицу, если (a_n) — арифметическая прогрессия:

a_1	d	a_n	n	S_n
0,1	0,2			22,5
	–0,6	9,5	17	
		–2,5	11	0

877. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_3 = 6$; $a_8 = 26$.

878. Сколько нужно взять членов арифметической прогрессии –100; –80; …, чтобы их сумма была равна 600?

879. Разность арифметической прогрессии равна 2,1, а сумма первых пяти ее членов равна 0,5. Найдите:

а) первый член прогрессии; б) пятый член прогрессии.

880. Найдите сумму членов арифметической прогрессии 7; 21; 35; ... с девятого по двадцать первый включительно.

881. Найдите сумму всех:

а) натуральных чисел от 11 по 101 включительно;

б) двузначных чисел, не превышающих 75;

в) натуральных чисел, кратных 3 и не превышающих 121;

г) нечетных натуральных чисел, не превышающих 125;

д) четных натуральных чисел от 70 по 170 включительно;

е) двузначных чисел, которые при делении на 7 дают остаток 1.

882. Найдите сумму первых шести членов арифметической прогрессии с первым членом x и разностью y, если (x; y) — решение системы уравнений $\begin{cases} 2x+5y=-6; \\ x+3y=-4. \end{cases}$

883. Являются ли последовательными членами геометрической прогрессии числа 2; 0,8; 0,32?

884. Найдите знаменатель и четвертый член геометрической прогрессии:

а) 5; 20; 80; ...; б) 1,6; 0,4; 0,1; ... .

885. Найдите пятый член геометрической прогрессии:

а) 1; –3; …; б) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; … .

886. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 = \frac{9}{25}$; $b_5 = \frac{81}{625}$.

887. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_8 = -\frac{1}{64}$; $q = -\frac{1}{2}$.

888*. Найдите четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, если сумма крайних членов равна –126, а сума средних — –30.

889*. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника равен 1 см. Гипотенуза этого треугольника является катетом другого равнобедренного прямоугольного треугольника и т. д. Найдите длину гипотенузы десятого такого треугольника.

890*. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию с положительной разностью, равна 51. Если из этих чисел вычесть соответственно числа 1, 7 и 8, то получим три числа, образующие геометрическую прогрессию. Найдите числа, образующие арифметическую прогрессию.

891*. Три числа, из которых первое больше третьего на 9, являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если из второго числа вычесть 7, к третьему прибавить 13, а первое оставить без изменений, то новая тройка чисел образует арифметическую прогрессию. Найдите числа, образующие геометрическую прогрессию.

892. Найдите суму бесконечной геометрической прогрессии:

а) 1,5; 0,5; …; б) $3-\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}-3}{2}$; … .

893. Первый член и сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$ соответственно равны 16 и 9,6. Запишите три первых члена этой прогрессии.

894. Запишите в виде обыкновенной дроби число:

а) 0,(8); б) 0,(12); в) 51,(3); г) 14,(1);

д) 1,3(2); е) 0,4(3); ж) 0,1(12); з) 24,35(2).

895. Рассмотрите рисунок 75. На биссектрисе OK угла xOy отмечена точка $M(8; 8)$. Из точки M на оси координат опущены перпендикуляры MA и MB, в результате чего образовался квадрат $OBMA$. Из точки M_1, которая является серединой диагонали OM, снова опущены перпендикуляры на оси координат и снова образовался квадрат, и т. д. Найдите:

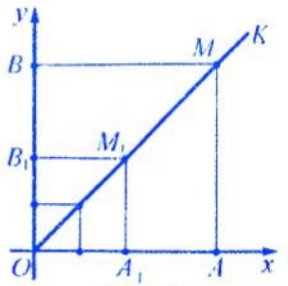


Рис. 75

а) площадь шестого квадрата;

б) сумму площадей всех таких квадратов;

в) сумму периметров всех таких квадратов.

896. Дан треугольник ABC со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с таким же коэффициентом подобия, и т. д. Найдите:

а) сумму периметров всех таких треугольников;

б) суму площадей всех таких треугольников.

897*. Найдите сумму, где n — натуральное число:

а) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$;

б) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}$.

898*. Решите уравнение:

а) $1-x+x^2-x^3+\ldots=5\ \ (|x|<1)$;

б) $1+4+7+\ldots+(3x-2)=145$, x — натуральное число.

899. Постройте график функции $y=(x-m)^2$, если m — первый положительный член арифметической прогрессии: -81; -77; ... .

900. Решите неравенство $x^2-3x+m>0$, если m — первый член геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_3=16$, $q=-2$.

Задания для самопроверки № 5

Уровень 1

1. Найдите разность арифметической прогрессии 5; –2; –9; … .

а) –3; **б)** 3; **в)** –7; **г)** 7.

2. Найдите пятый член арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -5$; $d = 3$.

а) –7; **б)** 7; **в)** –17; **г)** 17.

3. Найдите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 2$; $a_9 = -6$.

а) 4; **б)** 18; **в)** –18; **г)** –4.

4. Найдите четвертый член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = -2$; $q = \frac{1}{2}$.

а) $\frac{1}{4}$; **б)** $-\frac{1}{4}$; **в)** 4; **г)** –4.

5. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = -5$; $q = 2$.

а) 160; **б)** 155; **в)** –160; **г)** –155.

6. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_1 = 2$; $q = \frac{1}{3}$.

а) $\frac{1}{3}$; **б)** 3; **в)** 6; **г)** $\frac{4}{3}$.

Уровень 2

7. Найдите десятый член арифметической прогрессии:

а) 10,2; 8,2; …; **б)** –3,5; –5,5; … .

8. Найдите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии (x_n), если $x_1 = 2$, $d = -3$.

9. Найдите четвертый член геометрической прогрессии 3; $-\frac{3}{2}$; … .

10. Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии –4; –8; … .

11. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: 12; 4; $\frac{4}{3}$; … .

Уровень 3

12. Является ли число –32 членом арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = -8$; $d = -2,4$?

13. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 + a_6 = -12,6$; $a_5 - a_2 = -9$.

14. Найдите сумму всех двузначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 2.

15. Найдите первый член и сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), если $b_7 = 192$; $q = 2$.

16. Запишите в виде обыкновенных дробей числа: 0,(4); 5,(53).

Уровень 4

17. Найдите число положительных членов арифметической прогрессии 91; 89,5; … .

18. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_5 = 1$; $S_6 = -1,2$.

19. Решите уравнение: $105 - (7 + 12 + ... + (2 + 5x)) = 20$, где x — натуральное число.

20. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 13, а третий ее член больше первого на 8. Найдите знаменатель этой прогрессии.

21. Три числа, из которых третье равно –8, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо третьего числа взять –6, то новая тройка чисел образует арифметическую прогрессию. Найдите числа, образующие геометрическую прогрессию.

ЗАДАЧИ ЗА КУРС АЛГЕБРЫ 9 КЛАССА

901. Сравните числа:

а) $\frac{2}{7}$ и 0,3; **б)** $-\frac{5}{6}$ и –0,85; **в)** 0,7(4) и $\frac{7}{9}$; **г)** 1,19 и $1\frac{2}{9}$.

902. Докажите, что $\sqrt{7}-\sqrt{5} > \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

903. Выделяя из трехчлена квадрат двучлена, докажите неравенство:

а) $a^2 - a + 3 > 0$; **б)** $4b^2 - 4b + 1{,}9 > 0$.

904. Докажите неравенство:

а) $y^4 + 2y^2 - 4y > -2$; **б)** $y^2 + 8y + x^2 \geq 8(x - 4)$;

в) $(a^2 - b^2)^2 \geq 4ab(a - b)^2$; **г)** $2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$.

905. Докажите неравенство:

а) $(a - 1)^4 + (b - 1)^4 \geq 2(a - 1)^2(b - 1)^2$; **б)** $(a^3 + 1)(a + 4) \geq 8a^2$, где $a \geq 0$;

в) $1+a+a^2+a^3 \geq 4a\sqrt{a}$; **г)** $\sqrt{b}+\frac{1}{4\sqrt{b}} \geq 1$.

906. Докажите, что если $a < b$, то $a < \frac{a+b}{2} < b$.

907. Известно, что $2 < a < 4$, $5 < b < 6$. Оцените значения выражений $a + b$, $a - b$, ab, $\frac{a}{b}$.

908*. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Докажите, что если бриллиант разделить на несколько частей, то его стоимость уменьшится.

909*. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы двух его противоположных сторон.

910*. Докажите, что в любом треугольнике наименьшей является та высота, которая проведена к наибольшей стороне.

Решите неравенство:

911. **а)** $2(1 - 3x) > 7 - x$;

б) $-20(x + 3) \geq 2(3 - 10x)$;

в) $1{,}7 \leq 0{,}3(4x - 2) + 0{,}5(1 - 3x) + 2{,}7x$;

г) $0{,}9(1 + x) > 1{,}3(x - 5) - 0{,}2(10x - 1) + 2{,}4$.

912. **а)** $\frac{3x-4}{5} - 2 + x > 4$; **б)** $\frac{8-3x}{6} - \frac{2x-5}{4} > 1$;

в) $5(x-1)(x+1) - 7x > 5x^2$; **г)** $(3x-2)^2 + 14 \leq 9x^2 + 11$.

913. Найдите наименьшее целое число, являющееся решением неравенства $7(2x-3)-4(6+x)>-19$.

914. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{4-5x}$; б) $\sqrt{-(4x-7)}$; в) $\frac{\sqrt{6+x}}{x}$?

915. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x\le 1-3(x+2); \\ 2x>4-(x+7); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x-5}{4}<\frac{x-1}{3}; \\ 3(x-5)+1>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (2x-1)^2\ge(2x-1)(2x+1); \\ x^2+4<x(x-2). \end{cases}$

916. Решите двойное неравенство:

а) $-2\le 1-5x<4$; б) $0{,}9\le 3-2x\le 1{,}5$; в) $4<3(x-4)\le 5$.

917*. Решите неравенство:

а) $|4x-9|<3$; б) $|12-5x|\ge 3$; в) $|7-8x|>-6$; г) $|x|+|x+2|>3$.

918. При каких значениях x значения выражения $7-4x$ принадлежат промежутку:

а) $(-\infty; -1]$; б) $(-2; 3)$; в) $(0; 2]$; г) $[4; +\infty)$?

919. При каких значениях аргумента значения функции $y=\frac{1}{4}(5x-1)$ принадлежат промежутку $(-\infty; 3]$?

920. При каких значениях x значение дроби $\frac{9-7x}{2}$ не меньше соответствующего значения дроби $\frac{1-3x}{3}$?

921*. При каких значениях a уравнение имеет положительный корень:

а) $\frac{x-4}{5}=\frac{x-2a}{2}$; б) $\frac{3x-9}{4}=\frac{a-x}{3}-1$?

922. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2x-3}+\frac{1}{x-1{,}5}$; б) $\sqrt{4x-8}+\sqrt{12-3x}$; в) $\frac{\sqrt{2x-7}}{x-5}$?

923. Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{2x}{x^2+2x-3}$; б) $y=\sqrt{12-4x}$; в) $y=\sqrt{x^2-4x-12}$;

г) $y=\frac{x-2}{\sqrt{-x^2+7x-12}}$; д) $y=\sqrt{4-3x-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$; е) $y=\sqrt{\frac{3-x}{2x-7}}$.

924. Принадлежит ли число 5 области значений функции $y=2x^2-2x+9$?

Постройте график функции:

925. **а)** $y = 2\sqrt{x} - 1$; **б)** $y = \dfrac{1}{x-3}$; **в)** $y = \dfrac{2}{x+2} + 2$;

г) $y = 2(x + 1)^2 - 2$; **д)** $y = 1 - \sqrt{x-1}$; **е)** $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x+4}$.

926. **а)** $y = x^2 - 3x + 2$; **б)** $y = 2x^2 + 4x + 2$; **в)** $y = -3x^2 + 6x + 5$.

927. График функции $y = x^2 + a$ пересекает ось y в точке $M(0; -4)$. Найдите a и постройте график функции. Проходит ли этот график через точку $N(3; 5)$?

928. Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 6$. Используя график, найдите:

а) область значений функции;

б) промежутки знакопостоянства функции;

в) промежуток, на котором функция возрастает; убывает.

929. Является ли данная функция четной; нечетной?

а) $y = 5 - x^2$; **б)** $y = -2x^3$; **в)** $y = x^2 + x$.

Постройте график функции:

930. **а)** $y = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{если } x \le -1; \\ x^2 - 2x - 2, & \text{если } x > -1; \end{cases}$ **б)** $y = \begin{cases} 4x + 16, & \text{если } x < -2; \\ 2x^2, & \text{если } -2 \le x \le 1; \\ 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

931*. **а)** $y = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x+1}$; **б)** $y = x^2 + \dfrac{|x-1|}{x-1}$;

в) $y = |x^2 - 5x + 4|$; **г)** $y = |x^2 - 5|x| + 4|$.

932. При помощи графиков функций определите, имеет ли корни уравнение:

а) $x^2 + 4x + 1 = \sqrt{x}$; **б)** $-x^2 + 2x = \sqrt{x - 0,5}$.

933. Решите графически уравнение:

а) $-\sqrt{x-1} = x^2 - 5$; **б)** $x^2 - 2x + 1 = -\dfrac{4}{x}$.

934*. Найдите количество корней уравнения $|2|x| - x^2| = b$ в зависимости от значений параметра.

Решите неравенство:

935. **а)** $x^2 \le 121$; **б)** $x^2 > 2,25$;

в) $x^2 - 1,5x < 0$; **г)** $x^2 - 5x - 36 > 0$;

д) $-2x^2 + 4x + 6 \le 0$; **е)** $5x^2 + 3x - 14 \ge 0$.

936. **а)** $(2x + 1)^2 + 2 < (4x - 3)(2x + 3)$; **б)** $(x - 4)(x + 4) \ge (2x + 5)(x - 4)$;

в) $\frac{x^2+2x}{4} > x+2;$ г) $x^2 - \frac{1}{12}(4x+3) \le \frac{1}{12} - \frac{x+1}{4}.$

937. а) $(2x-1)(x+2) < 0;$ б) $(x-1)(x-4)(x+10) \ge 0;$

в) $x(x-1{,}2)(x+1{,}5)(x+2) > 0;$ г) $(4-x)(3x+15)(2+x) \ge 0.$

938*. а) $(x^2-x-2)(x^2+x-2) \le 0;$ б) $(x^2-3x+3)(x^2-3x+2) > 0.$

939. а) $\frac{x^2+2x}{x-1} > 0;$ б) $\frac{3x-4}{x+2} < 2;$

в) $\frac{x+5}{x-1} + 1 > x;$ г) $\frac{3}{x+4} - \frac{2}{x-2} < 1.$

940*. а) $\frac{x^2+5x+6}{x+2} > 0;$ б) $\frac{(x-4)(x^2+x-20)}{(x+4)(x^2+x-42)} \le 0.$

941*. а) $|2x-5|\sqrt{x^2-7x+10} \le 0;$ б) $(x+2)\sqrt{15-2x-x^2} \ge 0.$

942. Дана функция $f(x) = 4x^2 - 9x + 5$. Найдите все значения x, при которых:

а) $f(x) > 0;$ б) $f(x) \le 0.$

943. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x > x^2; \\ 9 - 4{,}5x \ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 3x \le 70; \\ 2x + 24 < x^2. \end{cases}$

944. Найдите все значения a, при которых уравнение $x^2 + 2ax + 3a + 10 = 0$ не имеет корней.

945*. Найдите все значения b, при которых неравенство $bx^2 + 4x + b - 3 < 0$ выполняется при всех действительных значениях x.

946. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = 2 - x^2; \\ x + y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + \sqrt{x} = 1; \\ y - x^2 = -1; \end{cases}$ в)* $\begin{cases} y = \big||x| - 2\big|; \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

Решите систему уравнений:

947. а) $\begin{cases} x - 2y = 0; \\ x^2 + (y-2)^2 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 1; \\ x^2 + 3xy = -2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - y = 4; \\ \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y-1} = 4; \\ x + 2y = 2. \end{cases}$

948*. а) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 4; \\ 4y^2 + xy = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1; \\ xy + 3x + 3y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^4 - y^4 = 3; \\ x^2 + y^2 = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 5(x-y); \\ x^2 - 2x - y^2 = 4. \end{cases}$

949*. При каких значениях m система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-4y=0; \\ y=|x|-m \end{cases}$ имеет три решения?

950*. Найдите все значения параметра, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=1; \\ (x-a)^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$ имеет только одно решение.

951. Сумма квадратов двух положительных чисел на 0,5 больше их удвоенной суммы. Найдите эти числа, если первое число на 2 меньше утроенного второго числа.

952. Вокруг спортивной площадки, имеющей форму прямоугольника, проложена дорожка шириной 3 м. Найдите размеры площадки, если ее площадь и площадь дорожки равны 216 м^2 каждая.

953. Расстояние от пункта A до пункта B теплоход проходит за 3 ч, а расстояние от B до A — за 4 ч. Найдите скорость теплохода в стоячей воде, если 12 км по течению реки и 6 км против течения он проходит за 50 мин.

954. Два трактора разной мощности, работая вместе, могут вспахать поле за 4 дня. Если один трактор вспашет $\frac{2}{3}$ поля, а другой — остальную часть, то все поле будет вспахано за 8 дней. За сколько дней может вспахать поле каждый трактор, работая отдельно?

955. Одна труба наполняет бассейн на 2 ч дольше, а другая — на 4,5 ч дольше, чем наполняют его две трубы, открытые одновременно. За какое время может наполнить бассейн каждая труба отдельно?

956*. По двум сторонам прямого угла в направлении к его вершине движутся два тела. В начальный момент тело A находилось на расстоянии 60 м от вершины, а тело B — на расстоянии 80 м. Через 3 с расстояние между A и B равнялось 85 м. Найдите скорость каждого тела, если вершины угла они достигли одновременно.

957*. Из двух городов навстречу друг другу вышли два поезда, причем второй поезд вышел на 1 ч позже первого. Встретились поезда посередине пути между городами. Через 2 ч после выхода первого поезда расстояние между ними составляло $\frac{7}{12}$ расстояния между городами. За какое время каждый поезд пройдет путь между городами?

958*. Сумма двух трехзначных чисел, записанных теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 1252. Найдите эти числа, если сума цифр каждого из них равна 14, а сума квадратов цифр равна 84.

959. Альпинист поднялся на вершину горы за 12 ч. Вторую половину пути он шел со скоростью, которая на 0,5 км/ч меньше скорости на первой половине. Спускаясь той же дорогой, альпинист проходил за час на 2 км больше, чем идя первую половину пути вверх, и затратил на спуск 2 ч 40 мин. Какой путь прошел альпинист, поднимаясь на вершину горы?

960. На соревнованиях по спортивному ориентированию после финиша $\frac{6}{25}$ всех спортсменов на дистанции оставалось больше 37 спортсменов, а после финиша $\frac{7}{25}$ всех спортсменов — меньше 37 спортсменов. Сколько спортсменов принимало участие в соревнованиях?

961. Вкладчик внес в банк 4000 грн. под 15% годовых. Какая сумма будет у него на счету через 3 года?

962. Лом стали двух сортов содержит 5% и 40% никеля. Сколько потребуется лома каждого сорта, чтобы получить 140 т стали, содержащей 30% никеля?

963. За стол и четыре стула заплатили 220 грн. После того как столы подешевели на 5%, а стулья — на 10%, за два стола и шесть стульев заплатили 352 грн. Какой была начальная цена одного стола и одного стула?

964. На двух станках обрабатывают одинаковые детали. Производительность первого станка на 40% больше производительности второго. Сколько деталей было обработано за смену на каждом станке отдельно, если первый работал в эту смену 6 ч, второй — 7 ч, и они вместе обработали 616 деталей?

965. В цветочном магазине есть 30 роз красного цвета и 15 — белого. Какова вероятность того, что взятая наугад роза будет красного цвета?

966. Из 11 футболок с номерами от 1 до 11 наугад берут одну футболку. Найдите вероятность того, что номер взятой футболки будет:

а) четным числом; **б)** нечетным числом;

в) простым числом; **г)** составным числом.

967. Найдите вероятность того, что взятое наугад трехзначное число будет иметь все одинаковые цифры.

968. На улице Назария Яремчука в последовательности возрастания номеров расположены следующие дома: трехэтажный, одноэтажный, двухэтажный, пятиэтажный, девятиэтажный, пятиэтажный, двухэтажный, одноэтажный, одноэтажный, двухэтажный, одноэтажный, пятиэтажный, пятиэтажный, девятиэтажный.

а) Запишите ранжированный ряд данных. Сколько образовалось вариант? Найдите частоту каждой варианты.

б) Составьте таблицу вариант и частот.

в) Постройте полигон частот.

969. В фермерских хозяйствах района урожайность ржи была следующей:

Урожайность, ц с га	20–25	25–30	30–35	35–40
Количество хозяйств	6	12	9	3

Постройте гистограмму и полигон частот данного распределения.

670. Массы 10 арбузов соответственно равны: 4,8 кг; 3,9 кг; 5,2 кг; 4,1 кг; 4,2 кг; 4,1 кг; 5,3 кг; 5,2 кг; 4,2 кг; 4,8 кг. Найдите среднюю массу одного арбуза.

971. Найдите первые пять членов последовательности, заданной формулой:

а) $a_n = (-5)^n \cdot n$; **б)** $b_n = 3n^2 - 5n + 1$.

972. Найдите первые шесть членов последовательности (x_n), заданной рекуррентной формулой: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_{n+1} = 3x_{n-1} + 2x_n$.

973. Найдите такое число x, чтобы числа $x + 2$, $3 - 2x$ и $4x$ были последовательными членами арифметической прогрессии.

974. Последовательность, заданная формулой $a_n = 5n - 7$, является арифметической прогрессией. Найдите:

а) первый член и разность прогрессии;

б) сумму первых двенадцати членов прогрессии.

975. Во время летней акции распродажи зимних шапок предприниматель каждый день снижал цену шапки на 5% ее начальной стоимости — 200 грн. Сколько шапок продал предприниматель, если каждый день он продавал по 2 шапки и за весь реализованный товар выручил 2640 грн.?

976. В арифметической прогрессии (a_n): $a_6 = 0{,}8$; $a_{11} = 2{,}8$. Найдите:

а) первый член и разность прогрессии;

б) двадцать первый член прогрессии;

в) сумму первых шестнадцати членов прогрессии.

977. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии меньше суммы последующих пяти членов на 50. На сколько десятый член прогрессии больше второго члена?

978. Альпинист, поднимаясь на гору, за первый час достиг высоты 400 м, а за каждый последующий час поднимался на 25 м меньше, чем за предыдущий. За какое время он достигнет высоты 1750 м?

979*. Числа a^2, b^2 и c^2, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, являются последовательными членами арифметической прогрессии. Докажите, что числа $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$ и $\frac{1}{b+c}$ также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

980. Найдите знаменатель и первый член геометрической прогрессии, если:

а) $b_2 = \frac{\sqrt{5}}{7}$; $b_3 = \frac{7\sqrt{5}}{5}$; **б)** $b_3 = -7$; $b_5 = -63$.

981. Запишите формулу общего члена последовательности по известным первым членам:

а) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; ...; **б)** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{8}$; ...;

в) $\frac{1}{101}$; $\frac{4}{102}$; $\frac{9}{103}$; $\frac{16}{104}$; ...; **г)** 2; 5; 10; 17; ... .

982. Найдите все такие числа m, чтобы числа $\sqrt{5}m$, $4m-2$ и $5\sqrt{5}m$ были последовательными членами геометрической прогрессии.

983. Найдите первый член и сумму первых шести членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_7 = 128$, $q = -2$.

984. Каждый из пяти листов бумаги разрезали на 5 частей, потом каждую из получившихся частей снова разрезали на 5 частей и т. д. Сколько частей бумаги получат после четырех разрезаний?

985. Сумма трех первых членов арифметической прогрессии равна 54. Если из второго члена вычесть 9, а из третьего — 6, то новые три члена образуют геометрическую прогрессию. Найдите первые три члена арифметической прогрессии.

986*. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если третий, четвертый и шестой ее члены являются последовательными членами арифметической прогрессии.

987. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии: $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{4}$; ... .

988. Запишите в виде обыкновенной дроби число:

а) 3,10(3); **б)** 0,0(85).

989. Решите уравнение:

а) $(3+2x)+(4+4x)+(5+6x)+...+(20+36x)=549$;

б) $(\sqrt{3}x+1)+(\sqrt{3}x+2)+...+(\sqrt{3}x+17)=255$.

990. Найдите сумму:

а) $1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+...+\sin^n\frac{\pi}{6}+...$;

б) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{3}{5^2}\right)+...+\left(\frac{2}{3^n}+\frac{3}{5^n}\right)+...$.

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

К § 1. Неравенства

991. Докажите неравенство:

а) $(a+b)^4 \le 8(a^4+b^4)$; **б)** $a+b \le \dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}$, где $a>0$, $b>0$;

в) $(a^2-b^2)(a^4-b^4) \le (a^3-b^3)^2$; **г)** $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \ge (a^3+b^3)^2$.

992. Докажите, что для любого действительного значения a выполняется неравенство $3(a^4+a^2+1) \ge (a^2+a+1)^2$.

993. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c, произведение которых равно 1, выполняется неравенство $ab+bc+ca+a+b+c \ge 6$.

994. Докажите, что $(1+a_1)(1+a_2)\ \dots\ (1+a_n) \ge 2^n$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — положительные числа и $a_1a_2\ \dots\ a_n = 1$.

995. Какое из двух чисел больше: $\dfrac{10^{2000}+1}{10^{2001}+1}$ или $\dfrac{10^{2001}+1}{10^{2002}+1}$?

996. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство:

а) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}<1$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}-1$;

в) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{2n} \ge \dfrac{1}{2}$;

г) $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dots+\dfrac{1}{n^2}<2$.

997. Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство:

а) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n}$; **б)** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$.

998. Для положительных чисел a и b и отрицательного числа c ($c \ne -a$) выполняются неравенства $a \le b$ и $ac \le bc$. Докажите, что для этих чисел выполняется равенство $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}=0$.

999. Докажите, что при любых значениях x и y соответствующие значения выражений x^3+y^3 и $x+y$ имеют одинаковые знаки.

1000. Пусть $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}$ (квадратный корень повторяется n раз). Докажите, что:

а) $a_n < 2$; б) $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$; в) $\dfrac{2 - a_n}{2 - a_{n-1}} > \dfrac{1}{4}$.

1001. Решите уравнение с двумя неизвестными: $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} + \dfrac{y+1}{\sqrt{y}} = 4$.

1002. Числа 1, 2, ... , 9 разбили на три группы по три числа в каждой. Пусть M — наибольшее из произведений чисел одной группы. Докажите, что $M \geq 72$.

1003. Четыре рыбака — A, B, C и D — ловили рыбу. Рыбаки B и D поймали вместе такое же количество рыбы, как A и C. Рыбак A поймал больше рыбы, чем рыбак C, но A с D поймали меньше рыбы, чем B и C. Сколько рыбы поймал каждый рыбак, если рыбак B поймал 3 рыбины?

1004. Несколько ребят собирали грибы. Один из них нашел 6 грибов, а остальные — по 13 грибов. В следующий раз количество ребят было другим, и один из них нашел 5 грибов, а остальные — по 10 грибов. Сколько ребят собирали грибы в первый раз и сколько во второй, если количество собранных грибов в обоих случаях было одинаковым? Известно, что это число больше 100 и меньше 200.

1005. Решите неравенство с параметром:

а) $a\sqrt{x} > 0$; б) $(b^2 - b - 6)x \leq b^2 + 3b + 2$.

1006. Решите неравенство:

а) $|x-2| + |x-3| \geq |x-4|$; б) $\left|\dfrac{2x-1}{x}\right| < 1$.

1007. При каких значениях a система неравенств $\begin{cases} x(x-1) \leq x^2 - 2a; \\ a - x \geq 2 \end{cases}$ имеет единственное решение?

1008. Докажите, что система неравенств $\begin{cases} x - 2 \leq a^2; \\ x > 2a \end{cases}$ имеет решение при любых значениях a.

К § 2. Квадратичная функция

1009. Постройте график функции:

а) $y = 2\sqrt{x^2} - x^2 - 1$; б) $y = |x^2 - 1| - \dfrac{|x-1|}{x-1}$;

в) $y = \left|\dfrac{x^3 - 1}{x - 1} - 3x\right|$; г) $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x+1} + 2}$.

1010. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a^2 - 3a - 2 = 0$ является наибольшей?

1011. Найдите значение x, при котором выражение $(x-1)^2 + (x-2)^2 + ... + (x-10)^2$ принимает наименьшее значение.

1012. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 4} - |x - 1|$.

1013. Решите неравенство $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 \geq 0$.

1014. При каких значениях a неравенство $(x - a)(x - a - 2) > 0$ выполняется при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $x^2 - 4x + 3 < 0$?

1015. Параболы $y = x^2 - (2a + 1)x + 1$ и $x = y^2 - (2b + 1)y - 1$ пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.

1016. Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| + 2$. При каких значениях x выполняется неравенство $x^2 - 3|x| + 2 > 1$?

1017. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2\sqrt{2}(a-3)x + a^2 - 3a - 2 = 0$ имеет хотя бы один корень.

1018. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2 - 2(a-1)x + 4a < 0$ выполняется при всех $0 < x < 1$.

1019. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{x+1} = |x| + a$ в зависимости от значений a?

1020. При каких значениях a уравнение $-x^2 + 2x - a = |1 - |x||$ не имеет корней?

1021. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x(x+y) = 80; \\ x(2x-3y) = 80; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x - 3y + 9; \\ 2x^2 + 2y^2 = 5x - 7y + 19; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 4; \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19; \\ (xy + 8)(x + y) = 2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1 = 2y; \\ |x| = 1 - y^2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14; \\ x^2 + y^2 + xy = 84; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0; \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160; \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x(y+z) = 5; \\ y(z+x) = 10; \\ z(x+y) = 13; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2; \\ x + y + 2z = 8; \\ z^2 - xy = 1. \end{cases}$

1022. Найдите все значения a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=25; \\ ax-y=3a-4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

1023. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-4ax-2y=3-4a^2; \\ x^2+y^2-2ax-2y=-a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

1024. Сколько решение имеет система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=8; \\ (y-ax)(y-a\sqrt{2})=0 \end{cases}$ в зависимости от значений a?

1025. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y=|2x-1|+|5-2x|; \\ y=a \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

1026. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x|+|y|=a; \\ |x-y|+|x+y|=2 \end{cases}$ имеет четыре решения.

1027. Двое рабочих, работая вместе, изготовили 150 деталей. Если бы оба рабочих работали с производительностью первого рабочего, то для изготовления этих деталей им нужно было бы времени на 0,5 ч меньше. Если бы они работали с производительностью второго рабочего, то для изготовления деталей им потребовалось бы времени на 0,75 ч больше. Сколько деталей изготавливал за час каждый рабочий?

1028. К бассейну подведено три трубы. Если открыть одновременно первую и вторую трубы, то бассейн наполнится водой за 2,4 ч, если первую и третью — за 3 ч, если вторую и третью — за 4 ч. За какое время наполнится бассейн, если одновременно открыть все три трубы?

1029. Резервуар объемом 1000 л наполняется водой через две трубы. Первые 800 л наполняются через обе трубы, потом 120 л — только через первую трубу, а последние 80 л — только через вторую. При этом время наполнения на 2 ч больше времени наполнения при двух открытых трубах и на 13 ч меньше времени наполнения только через вторую трубу. Сколько литров воды протекает через первую трубу за час?

1030. Два пешехода идут навстречу друг другу из пунктов A и B. Первый вышел из пункта A на 1 ч позже, чем второй из пункта B, и при встрече оказалось, что он прошел на 6 км меньше, чем второй. Не останавливаясь, пешеходы продолжили свое движение, и первый прибыл в пункт B через 2,5 ч, а второй — в A через 0,8 ч после встречи. Найдите скорость каждого пешехода.

1031. Имеются два двузначных числа. Если к первому числу приписать справа второе число, а потом еще цифру 0, то получим пятизначное число, которое при делении на квадрат второго числа дает неполное частное 39 и остаток 575. Если к первому числу приписать справа второе число, то получим четырехзначное число, которое на 1287 больше четырехзначного числа, которое получим, если ко второму числу припишем справа первое число. Найдите эти двузначные числа.

1032. В реку впадает приток. Катер отходит от пункта A, расположенного на притоке, идет по течению 80 км до впадения притока в реку в пункте B, а потом идет вверх по реке до пункта C. На путь от A до C он затратил 18 ч, на обратный путь — 15 ч. Найдите расстояние от B до C, если известно, что скорость катера в стоячей воде 18 км/год, а скорость течения реки 3 км/ч.

1033. Мастер и ученик за 3 дня изготовили партию деталей, выделяя для этого ежедневно по несколько часов. В первый день, работая вместе, они изготовили 14 деталей. Во второй день работал только ученик. Он изготовил 14 деталей, проработав на 5 ч больше, чем в первый день. На третий день робота продолжалась столько времени, сколько и во второй, но сначала работали мастер и ученик вместе, изготовив 21 деталь, а потом — только мастер, изготовив 20 деталей. Сколько деталей за час изготавливал мастер и сколько ученик?

К § 3. Элементы прикладной математики

1034. Група учеников участвовала в лыжном кроссе. Процент учеников, выполнивших норматив, оказался в пределах от 94,2% до 94,4%. Найдите наименьшее возможное количество учеников, участвовавших в кроссе.

1035. Моторная лодка прошла по реке из пункта A в пункт B и вернулась назад. Если бы скорость лодки в стоячей воде была в два раза больше, то на этот путь лодка затратила бы времени на 60% меньше. Найдите отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения реки.

1036. Проанализировав работу двух предприятий за 4 года, было установлено, что они изготовили одинаковое количество продукции за первый год, а также за четвертый год. На первом предприятии прирост выпуска продукции за каждый год был равен 10%. Прирост выпуска продукции на втором предприятии по сравнению с предыдущим годом составил: за второй год 5%, за третий — 10%. Найдите процент прироста выпуска продукции за четвертый год на втором предприятии.

1037. В сосуде содержится V кг p-процентного раствора соли. Из сосуда выливают a кг смеси и доливают столько же воды, образованный раствор перемешивают. Такую процедуру повторяют 5 раз. Найдите процентное содержание соли в образованном растворе.

1038. Из двух кусков металла массой 1 кг и 2 кг, содержащих медь, сделали два новых куска: первый массой 0,5 кг содержит 40% меди, а второй — массой 2,5 кг содержит 88% меди. Найдите процентное содержание меди в первоначальных кусках.

1039. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 60% алюминия, 15% меди и 25% магния, второй — 30% меди и 70% магния, третий — 45% алюминия и 55% магния. Из этих сплавов изготовили новый сплав, содержащий 20% меди. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание алюминия может быть в новом сплаве?

1040. Скорость течения реки больше скорости течения притока. Из пункта A, расположенного в месте впадения притока в реку, одновременно отправляются два катера: первый вверх по реке, а второй — по притоку. Пройдя по 10 км, катера сразу отправляются в обратный путь. Какой из катеров первым прибудет в пункт A: плывущий по реке или плывущий по притоку, если скорость катеров в стоячей воде одинакова?

1041. Два спортсмена бегают по одной круговой дорожке. Первый спортсмен пробегает каждый круг на 5 с быстрее, чем второй. Если спортсмены начнут пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, то окажутся рядом через 30 с. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общего старта в противоположных направлениях?

К § 4. Числовые последовательности

1042. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые:

а) кратны 3;

б) при делении на 5 дают остаток 1;

в) не делятся ни на 2, ни на 3.

1043. Верно ли, что сумма всех трехзначных чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 3, равна сумме трехзначных чисел, которые делятся на 6?

1044. Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_7 + a_8 + a_9 = 12$.

1045. Могут ли числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ быть членами одной арифметической прогрессии?

1046. Положительные числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Верно ли, что числа $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ также образуют арифметическую прогрессию?

1047. Известно, что при любом натуральном n сумма первых n членов некоторой арифметической прогрессии вычисляют по формуле $S_n = 4n^2 - 3n$. Найдите третий член прогрессии.

1048. Сумму первых n членов последовательности вычисляют по формуле $S_n = 3n^2$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией, и найдите ее разность.

1049. Сумма четырех первых членов конечной арифметической прогрессии равна 56, а сумма четырех последних — 112. Найдите число членов прогрессии, если первый ее член равен 11.

1050. Найдите число членов конечной арифметической прогрессии, в которой отношение суммы первых семи членов к сумме последних семи членов равно $\frac{2}{5}$, а отношение второго члена к первому — 2.

1051. Имеются три арифметических прогрессии, первые члены которых равны нулю, а разности — соответственно 931, 63 и 1083. Найдите номер наименьшего, отличного от нуля, члена первой прогрессии, который встречается в двух других прогрессиях.

1052. Имеются три арифметических прогрессии, первые члены которых равны нулю, а разности — соответственно 400, 9604 и 30625. Четвертая прогрессия построена из последовательных общих членов первых трех. Найдите ее разность.

1053. Найдите четыре целых числа, образующие арифметическую прогрессию, если наибольшее из них равно сумме квадратов всех остальных.

1054. При каких значениях a уравнение $1+2+\ldots+x=\frac{a+2x}{2}$ имеет натуральный корень?

1055. Решите уравнение $x^3+x^2-a=0$, если известно, что его корни являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

1056. Найдите все значения p и r, при которых уравнение $x^3+px^2-x+r=0$ имеет три корня, образующие арифметическую прогрессию с разностью 1.

1057. Найдите три положительных числа, образующие геометрическую прогрессию и в сумме составляющие 21, если сумма обратных им чисел равна $\frac{7}{12}$.

1058. Найдите сумму всех разных знаменателей геометрических прогрессий, в которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих.

1059. Три положительные числа образуют арифметическую прогрессию. Третье число больше первого на 14. Если третье число заменить его суммой с первым, а другие два числа оставить без изменений, то получим геометрическую прогрессию. Найдите сумму чисел арифметической прогрессии.

1060. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если третье число уменьшить на 64, то получим числа, образующие арифметическую прогрессию. Если же потом второй член новой прогрессии уменьшить на 8, то получим геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

Логические задачи

1061. На крайних клетках полосы 1×20 стоят белая и черная фишки. Максим, а за ним Олег по очереди передвигают свою фишку на одну или две клетки вперед либо назад, если это возможно (перескакивать через фишку нельзя). Проигрывает тот, кто не может передвинуть свою фишку. Как должен играть Олег, чтобы победить?

1062. Учебник состоит из трех разделов. Номера последних страниц всех разделов являются четными трехзначными числами, в записи которых использованы девять разных цифр, кроме нуля. Какое наибольшее количество страниц может содержать второй раздел учебника?

1063. При дворе короля Артура собрались 6 рыцарей. Известно, что каждый из них имеет среди присутствующих не более двух врагов. Докажите, что рыцарей можно разместить за Круглым Столом так, что ни один из них не будет сидеть рядом со свои врагом.

1064. Можно ли множество первых 100 натуральных чисел разбить на 25 групп так, чтобы в каждой группе было по 4 числа, одно из которых равнялось бы среднему арифметическому трех остальных чисел?

1065. На столе лежат монеты по 25 копеек без наложения. Докажите, что найдется монета, касающаяся не более трех других монет.

1066. Во все клетки таблицы 25×25 вписаны некоторые числа. За один шаг можно изменять знаки всех чисел любой строки или любого столбца. Можно ли за несколько таких шагов добиться того, чтобы суммы чисел каждой строки и каждого столбца были неотрицательными?

ОТЕЧЕСТВЕННЫЕ МАТЕМАТИКИ

Виктор Яковлевич Буняковский
(1804 – 1889)

Известное неравенство Коши — Буняковского — не единственное значительное достижение Виктора Буняковского. Ввиду весомого вклада в развитие теории вероятностей, статистики, математического анализа он был избран почетным членом всех университетов царской России. Петербургская Академия наук присуждала премии имени Буняковского — за наилучшие работы по математике.

Родился Виктор Буняковский в городе Бар (Винницкая обл.). Его отец — подполковник конно-польского уланского полка — умер, когда сыну шел 5-й год. Начальное образование Виктор Буняковский получил в Москве в доме графа Тормасова, который был другом его отца. В 1820 году 16-летний Буняковский вместе с сыном гр. Тормасова поехал за границу. Сначала он брал частные уроки в Кобурге, потом переехал в Лозанну, где посещал лекции по математике в академии, затем на протяжении двух лет учился в Париже, где в то время преподавали такие известные ученые, как Лаплас, Фурье, Пуассон, Коши, Ампер и другие. Там же в 1824 году успешно защитил докторскую диссертацию и получил степень доктора математических наук Парижского университета.

В 1826 году Виктор Буняковский переехал в Петербург, где почти 40 лет преподавал математику и механику в гражданских и военных учебных заведениях, в частности в Петербургском университете. На протяжении 25 лет (1864 – 1889) был вице-президентом Петербургской Академии наук.

Виктор Буняковский — автор более 100 научных работ из разных разделов математики, в частности, теории чисел, математического анализа, теории вероятностей, статистики. Его «Лексикон математики» стал основой установления российской математической терминологии. Виктора Буняковского считают отцом теории вероятностей в царской России, так как его «Основы математической теории вероятностей» были первым полным пособием по теории вероятностей на русском языке.

Юрий Алексеевич Митропольский
(1917 – 2008)

Юрий Митропольский — известный ученый в области математического анализа. Академик Национальной академии наук Украины (1961), заслуженный деятель науки УССР (1967), лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники (1996), Герой Украины (2007).

В 1958 – 1988 гг. возглавлял Институт математики Академии наук Украины.

Юрий Митропольский родился 3 января 1917 года в селе Шишаки (Гоголевский район Полтавской области). В 1932 году экстерном окончил семилетку в Киеве и пошел работать на Киевский консервный завод. В 1938 году окончил 10-й класс средней школы и тогда же поступил в Киевский государственный университет имени Т. Г. Шевченко на механико-математический факультет.

В годы Великой Отечественной войны Юрий Митропольский был на фронте. За боевые заслуги награжден двумя орденами Красной Звезды и медалями. После демобилизации, с 1946 года, работал в Академии наук Украины: сначала сотрудником в Институте строительной механики АН УССР; потом в Институте математики АН УССР прошел путь от старшего научного сотрудника до директора института. Одновременно с работой в Институте математики он возглавлял в президиуме Академии наук Украины ряд отделений: физико-математических наук, математики, механики и кибернетики, математики и механики. Был действительным членом ряда иностранных Академий наук.

Научные результаты Юрия Митропольского вошли в многочисленные фундаментальные отечественные и иностранные издания. Он автор свыше 750 научных работ, среди которых — 53 монографии, изданные на многих языках мира.

Научную работу ученый успешно совмещал с педагогической. Почти 40 лет Юрий Митропольский читал лекции на механико-математическом факультете родного университета. Среди его учеников — 25 докторов и более 100 кандидатов физико-математических наук.

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Числа

1. *Натуральные* числа: 1, 2, 3, 4, ... Множество натуральных чисел обозначают буквой N.

2. Натуральные числа, противоположные им числа и число 0 (нуль) образуют множество *целых* чисел: ..., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, ... Множество целых чисел обозначают буквой Z.

3. Целые и дробные числа образуют множество *рациональных* чисел. Обозначают это множество буквой Q.

Любое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное. Рациональные числа можно представить также в виде бесконечных периодических десятичных дробей. Например:

$$5=\frac{5}{1}=5{,}00...=5{,}(0);\ \frac{1}{4}=0{,}2500...=0{,}25(0);$$

$$-\frac{2}{3}=-0{,}66...=-0{,}(6);\ 2\frac{5}{6}=\frac{17}{6}=2{,}833...=2{,}8(3).$$

4. Рациональные и иррациональные числа образуют множество *действительных* чисел. Обозначают это множество буквой R.

Иррациональные числа можно представить в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.

Например: $\sqrt{2}=1{,}41421...;\ \pi=3{,}14159...;\ 2{,}010010001...$.

Степени

5. Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a.

Степенью числа a с показателем 1 называют само число a.

$$a^n=\underbrace{aa...a}_{n} \text{ при } n\in N,\ n>1;\quad a^1=a.$$

6. Степень числа a, не равного 0, с нулевым показателем равна 1.

$$a^0=1\ (a\neq 0).$$

7. Если $a\neq 0$ и n — натуральное число, то

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Например: $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$; $5^{-1}=\frac{1}{5}$. Запись 0^{-2} не имеет смысла.

8. *Свойства степени с целым показателем*:

для любого $a \neq 0$ и произвольных целых m и n выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn};$$

для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и произвольного целого n выполняются равенства:

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Выражения. Тождественные преобразования выражений

9. Выражения, составленные из чисел, знаков действий и скобок, называют числовыми.

Выражения, составленные из чисел, переменных, знаков действий и скобок, называют выражениями с переменными.

Например: 1,5; $7+3^2$; $(32-2{,}7)\cdot 0{,}32$ — числовые выражения; a; ab^2; $-18c^3$; $3a+10$ — выражения с переменными.

10.

$\frac{b}{4}+a^3$ *Целое выражение*	$\frac{4}{b}+a^3$ *Дробное выражение*
Рациональные выражения	

Целое выражение не содержит действия деления на выражение с переменной.

11.

$7ab^2$ — *одночлен*	$7ab^2+c+1$ — *многочлен*
Целые выражения	

12. Два выражения называют *тождественно равными*, если при любых допустимых для них значениях переменных их соответствующие значения равны.

Равенство, верное при всех допустимых значениях переменных, входящих в него, называют *тождеством*.

Замену одного выражения тождественно равным ему выражением называют *тождественным преобразованием выражения*.

13. Перемножим одночлены $-3a^2b$ и $4ab^3$:

$$-3a^2b \cdot 4ab^3 = (-3 \cdot 4) \cdot (a^2a) \cdot (bb^3) = -12a^3b^4.$$

Возведем одночлен $-5a^2b$ в куб:

$$(-5a^2b)^3 = (-5)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = -125a^6b^3.$$

14. Сложим многочлены $4a^2 - 6a + 5$ и $-2a^2 + 3a + 2$:

$$(4a^2 - 6a + 5) + (-2a^2 + 3a + 2) = 4a^2 - 6a + 5 - 2a^2 + 3a + 2 = 2a^2 - 3a + 7.$$

Вычтем из многочлена $4x^2 - 4x + 7$ многочлен $2x^2 - 3x + 5$:

$$(4x^2 - 4x + 7) - (2x^2 - 3x + 5) = 4x^2 - 4x + 7 - 2x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - x + 2.$$

15. Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно одночлен умножить на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Например: $2a(a^2 - 3a + 4) = 2a \cdot a^2 + 2a \cdot (-3a) + 2a \cdot 4 = 2a^3 - 6a^2 + 8a$.

16. Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Например: $(2a^2 + b^2)(2a - b) = 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot (-b) + b^2 \cdot 2a + b^2 \cdot (-b) =$
$= 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3$.

17. Формулы сокращенного умножения:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2;$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

18. *Способы разложения многочленов на множители*:

а) вынесение общего множителя за скобки:

$$2a^2b - 8ab^2 = 2ab \cdot a - 2ab \cdot 4b = 2ab(a - 4b);$$

б) группировка:

$$b^2n + y^2 - bny - by = (b^2n - bny) + (y^2 - by) = bn(b - y) +$$
$$+ y(y - b) = bn(b - y) - y(b - y) = (b - y)(bn - y);$$

в) по формулам:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; $\qquad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$; $\qquad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

19. *Основное свойство дроби.* Для любых чисел a, b и c, где $b \neq 0$ и $c \neq 0$, выполняется равенство: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

20. Сложение дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}.$$

Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями:

$$\frac{a^{\backslash d}}{b}\pm\frac{c^{\backslash b}}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

21. Умножение дробей:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Деление дробей:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

22. *Квадратным корнем* из числа a называют такое число, квадрат которого равен a.

Арифметическим квадратным корнем из числа a (обозначают $\sqrt{a}$) называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Например, $\sqrt{0,36}=0,6$, так как число 0,6 неотрицательное и $0,6^2=0,36$.

Равенство $\sqrt{a}=b$ является верным, если выполняются два условия:

1) $b\geq 0$; 2) $b^2=a$.

23. Свойства арифметического квадратного корня:

1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ \ (a\geq 0, b\geq 0)$; **2)** $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ \ (a\geq 0, b>0)$;

3) $\sqrt{a^2}=|a|$; **4)** $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $(a\geq 0)$.

Уравнения и их системы

24. Равенство с неизвестным значением переменной называют *уравнением с одной переменной*, или *уравнением с одним неизвестным*.

Значение переменной, при котором уравнение превращается в верное числовое равенство, называют *корнем*, или *решением* уравнения.

Решить уравнение значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Множество значений переменной, при которых имеют смысл выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, называют *областью допустимых значений* (сокращенно ОДЗ) уравнения.

25. Два уравнения называют *равносильными*, если они имеют одни и те же корни. Два уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

Основные свойства уравнений

1) Если в некоторой части уравнения выполнить тождественное преобразование, не изменяющие ОДЗ, то получим уравнение, равносильное данному.

2) Если некоторое слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

3) Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

26. Уравнение вида $ax = b$, где a и b — некоторые известные числа, а x — переменная, называют *линейным уравнением с одной переменной.*

	Коэффициенты	Корни
$ax = b$ — линейное уравнение	$a \neq 0$	$\frac{b}{a}$ — единственный корень
	$a = 0$ и $b \neq 0$	корней нет
	$a = 0$ и $b = 0$	корнем является любое число (уравнение имеет бесконечное множество корней)

27. Уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые известные числа (коэффициенты уравнения), x и y — переменные, называют *линейным уравнением с двумя переменными.*

Решением линейного уравнения с двумя переменными называют пару значений переменных, при которых уравнение превращается в верное числовое равенство.

28. Если нужно найти общее решение двух уравнений, то говорят, что нужно решить *систему уравнений.*

$$\begin{cases} ax + by = c; \\ mx + ny = k \end{cases} \text{— система линейных уравнений.}$$

Решением системы линейных уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, при которых каждое уравнение системы превращается в верное числовое равенство.

Если $\frac{a}{m} \neq \frac{b}{n}$, то система имеет одно решение;

если $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} \neq \frac{c}{k}$, то система не имеет решений;

если $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{k}$, то система имеет бесконечное множество решений.

29. Способы решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными.

а) *Способ подстановки.*

Например: $\begin{cases} 2x + y = 3; \\ 3x - 2y = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 3x - 2(3 - 2x) = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 7x = 14; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2; \\ y = -1. \end{cases}$

б) *Способ сложения.*

Например: $\begin{cases} 3x + 4y = 12; \\ 2x - 3y = -26; \end{cases} \begin{vmatrix} \times 2 \\ \times(-3) \end{vmatrix}$ $\begin{cases} 6x + 8y = 24; \\ -6x + 9y = 78; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 4y = 12; \\ 17y = 102; \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + 4 \cdot 6 = 12; \\ y = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4; \\ y = 6. \end{cases}$

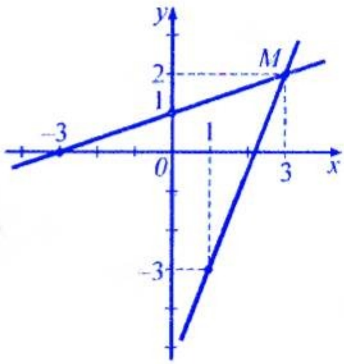
в) *Графический способ.*

Например: $\begin{cases} 5x - 2y = 11; \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

Строим графики обоих уравнений системы.

$5x - 2y = 11$		
x	1	3
y	-3	2

$x - 3y = -3$		
x	0	-3
y	1	0



$M(3; 2)$ — точка пересечения графиков.
Решение системы — $(3; 2)$.

30. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые известные числа, причем $a \neq 0$, называют *квадратным уравнением*.
Неполные квадратные уравнения:

а) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$; $x(ax + b) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -\dfrac{b}{a}$;

б) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$; $x^2 = -\dfrac{c}{a}$; если $-\dfrac{c}{a} > 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$; если $-\dfrac{c}{a} < 0$, то корней нет;

в) $ax^2 = 0$; $x = 0$ (или $x_1 = 0$; $x_2 = 0$).

31. Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

Формула корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

32. *Теорема Виета.* Если x_1, x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$.

Если x_1, x_2 — корни полного квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

33. Если x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

34. Система двух уравнений с двумя переменными.

$\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 3x^2 + y^2 = 28; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3x - 2; \\ 3x^2 + (3x-2)^2 = 28; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3x - 2; \\ 12x^2 - 12x - 24 = 0; \end{cases}$

$x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $y_1 = -5$; $y_2 = 4$.

Решения системы: $(-1; -5)$; $(2; 4)$.

Числовые неравенства

35. Число a больше числа b, если разность $a - b$ — число положительное; число a меньше числа b, если разность $a - b$ — число отрицательное; число a равно числу b, если разность $a - b$ равна нулю.

36. *Свойства числовых неравенств*:

1) если $a < b$, то $b > a$;

2) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;

3) если $a < b$ и m — любое число, то $a + m < b + m$;

4) если $a < b$ и $m > 0$, то $am < bm$;

5) если $a < b$ и $m < 0$, то $am > bm$;

6) если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;

7) если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c, d — положительные числа, то $ac < bd$;

8) если $a < b$, где a, b — положительные числа, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

9) если $a < b$, где a, b — положительные числа, n — натуральное число, то $a^n < b^n$.

Неравенства с одной переменной

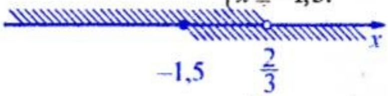
37. Неравенства вида $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$, где a, b — некоторые известные числа, а x — переменная, называют *линейными неравенствами с одной переменной*.

38. Решение линейных неравенств с одной переменной.

1)	$5x > 12$; $x > 2{,}4$.	 $(2{,}4; +\infty)$.
2)	$-3x \geq 9$; $x \leq -3$.	 $(-\infty; -3]$.
3)	$0 \cdot x < 2$.	Множество всех действительных чисел: $(-\infty; +\infty)$.
4)	$0 \cdot x < -1$.	Решений нет.

39. Решение систем линейных неравенств с одной переменной.

$$\begin{cases} 3x+4<6; \\ 2x+7\geq 4; \end{cases} \begin{cases} 3x<6-4; \\ 2x\geq 4-7; \end{cases} \begin{cases} 3x<2; \\ 2x\geq -3; \end{cases} \begin{cases} x<\dfrac{2}{3}; \\ x\geq -1{,}5. \end{cases}$$



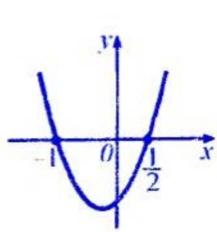
$$-1{,}5 \leq x < \frac{2}{3}, \text{ или } \left[-1{,}5;\ \frac{2}{3}\right).$$

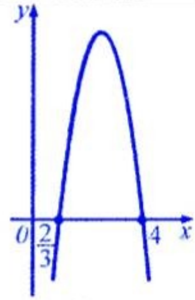
40. Неравенства вида

$$ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c<0,$$
$$ax^2+bx+c\geq 0,\ ax^2+bx+c\leq 0,$$

где x — переменная, a, b, c — некоторые известные числа, причем $a \neq 0$, называют *неравенствами второй степени с одной переменной*, или *квадратными неравенствами*.

41. Решение квадратных неравенств.

1)	*Неравенство*	*Множество решений*	*График функции* $y = 2x^2 + x - 1$
	$2x^2+x-1>0$	$(-\infty; -1)\cup\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$	
	$2x^2+x-1\geq 0$	$(-\infty; -1]\cup\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$	
	$2x^2+x-1<0$	$\left(-1; \frac{1}{2}\right)$	
	$2x^2+x-1\leq 0$	$\left[-1; \frac{1}{2}\right]$	

2)	*Неравенство*	*Множество решений*	*График функции* $y = -3x^2 + 14x - 8$
	$-3x^2 + 14x - 8 > 0$	$\left(\frac{2}{3}; 4\right)$	
	$-3x^2 + 14x - 8 \geq 0$	$\left[\frac{2}{3}; 4\right]$	
	$-3x^2 + 14x - 8 < 0$	$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (4; +\infty)$	
	$-3x^2 + 14x - 8 \leq 0$	$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup [4; +\infty)$	
3)	*Неравенство*	*Множество решений*	*График функции* $y = x^2 - 2x + 3$
	$x^2 - 2x + 3 > 0$	$(-\infty; +\infty)$	
	$x^2 - 2x + 3 \geq 0$	$(-\infty; +\infty)$	
	$x^2 - 2x + 3 < 0$	решений нет	
	$x^2 - 2x + 3 \leq 0$	решений нет	

Функции

42. Переменную y называют функцией от переменной x, если *каждому* значению переменной x соответствует *одно* значение переменной y. При этом переменную x называют *независимой переменной*, или *аргументом*, а переменную y — *зависимой переменной*, или *функцией*; записывают $y = f(x)$.

43. Множество значений, которые принимает независимая переменная (аргумент), называют *областью определения* функции; множество значений, которые принимает зависимая переменная (функция), называют *областью значений* функции. Область определения функции $y = f(x)$ обозначают $D(f)$ или $D(y)$, а область значений — $E(f)$ или $E(y)$.

44. Значения аргумента, при которых значение функции равно нулю, называют *нулями* функции.

45. Функцию называют *возрастающей* на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функцию называют *убывающей* на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

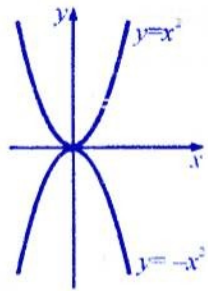
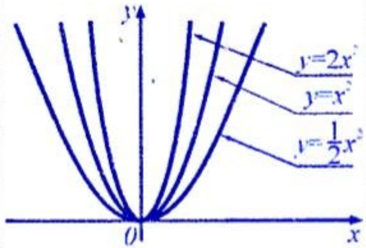
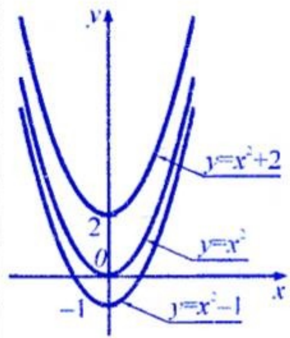
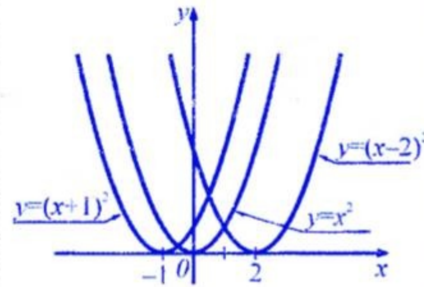
46. Функцию $y = f(x)$ называют *четной*, если для любого значения x из области ее определения значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство: $f(-x) = f(x)$.

Функцию $y = f(x)$ называют *нечетной*, если для любого значения x из области ее определения значение $-x$ также принадлежит области определения и выполняется равенство: $f(-x) = -f(x)$.

47. Свойства функций.

Функция	Область определения	Область значений	Нули	Четность	Возрастание, убывание	График
$y = kx + b,\ k \neq 0$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x = -\frac{b}{k}$	при $b \neq 0$, — ни четная, ни нечетная; при $b = 0$, — нечетная	при $k > 0$, — возрастающая; при $k < 0$, — убывающая	прямая
$y = \frac{k}{x},\ k \neq 0$	$(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$	нет	нечетная	при $k > 0$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; при $k < 0$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	гипербола
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$x = 0$	четная	убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$	парабола
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$x = 0$	ни четная, ни нечетная	возрастающая	ветвь параболы

48. Преобразования графиков функций.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>График функции
$y=-f(x)$
симметричен
графику функции
$y=f(x)$
относительно оси x</td>
<td>График функции
$y=af(x)$, где $a>0$,
получается из графика
функции $y=f(x)$
путем растяжения или
сжатия к оси x</td>
<td>График функции
$y=f(x)\pm n$
получается из графика
функции $y=f(x)$
путем параллельного
переноса вдоль оси y</td>
<td>График функции
$y=f(x\pm m)$
получается из графика
функции $y=f(x)$
путем параллельного
переноса вдоль оси x</td>
</tr>
</table>

Проценты

49. *Процент* — это одна сотая: $1\% = 0{,}01$.
При решении задач на проценты можно использовать следующие утверждения и формулы:

1) чтобы найти $p\%$ от числа, нужно это число умножить на дробь $\frac{p}{100}$;

2) чтобы найти число, $p\%$ которого равно b, нужно число b разделить на дробь $\frac{p}{100}$;

3) чтобы найти, сколько процентов составляет число a от числа b, нужно разделить a на b и записать результат в процентах;

4) $A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ — формула сложных процентов; A_0 — начальный капитал, A_n — наращенный капитал за n лет, p — годовые проценты.

Вероятность случайного события

50. Вероятностью случайного события A называют отношение числа равновозможных случаев, способствующих событию A, к числу всех возможных случаев: $P(A)=\frac{m}{n}$, где n — общее число равновозможных случаев, m — число случаев, способствующих событию A.

Прогрессии

51. *Арифметической прогрессией* называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.
Арифметическая прогрессия (a_n):

$$a_1;\ a_2 = a_1 + d;\ a_3 = a_2 + d;\ \ldots,\ a_{n+1} = a_n + d;\ \ldots .$$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — формула n-го члена арифметической прогрессии;

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$, $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n$ — формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии.

52. *Геометрической прогрессией* называют последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число.
Геометрическая прогрессия (b_n):

$$b_1;\ b_2 = b_1\cdot q;\ b_3 = b_2\cdot q;\ \ldots,\ b_{n+1} = b_n\cdot q;\ \ldots .$$

$b_n = b_1q^{n-1}$ — формула n-го члена геометрической прогрессии;

$S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ — формула суммы первых n членов геометрической прогрессии;

$S = \frac{b_1}{1-q}$ — формула суммы бесконечной геометрической прогрессии, в которой $|q| < 1$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

§ 1

26. а) 0; 7; **б)** $-1\frac{3}{7}$; 4. **27. а)** 37; **б)** 0. **28.** 14 лет. **29.** 26 лет. **52. а)** –3; 3; **б)** –3,75; 4. **53. а)** (–2; 7); **б)** (2; 5). **54.** 120 л, 80 л. **55.** 5 и 7, 10 и 3 или 0 и 11 тетрадей. **78.** *Указание*. Используя равенство $a^2 + 2ab + b^2 = 1$ и неравенство $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, докажите сначала, что $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$. **81.** 40 и 60 яиц. **82.** 1440 учебников. **102. а)** Корней нет; **б)** 6. **103. а)** 7; **б)** 5; **в)** –2. **104.** 1500 грн. **105.** 120 цветов. **114. а)** $x \leq -10$; **б)** $x < 2{,}5$; **в)** $a > -\frac{1}{4}$; **г)** $x > -1$. **115. а)** $x < -9$; **б)** $y \geq 0$; **в)** $z < 19$; **г)** $y \leq 2{,}5$. **116. а)** $x \geq 0$; **б)** $x < 0$; **в)** $x \leq 14$; **г)** $x \geq 3\frac{1}{3}$. **117. а)** $x \geq 0$; **б)** $x < \frac{1}{2}$; **в)** $x > 1$; **г)** $x > 17$. **118. а)** $x < -8$; **б)** $x > 1{,}25$; **в)** $x \leq -4$. **119. а)** $x < 1$; **б)** $x \leq -1{,}5$. **120. а)** $\left[-1\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$; **б)** (–1; 0,4); **в)** (–0,5; 5,5]; **г)** (0; 16). **121. а)** (–4; –1,5); **б)** $\left[-\frac{2}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$; **в)** $\left(-\frac{2}{3}; 9\frac{1}{3}\right]$; . **г)** (–21; –13]. **122. а)** (0,4; 3,2); **б)** $(-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. **123. а)** [3; 4]; **б)** $(-\infty; -1) \cup (1{,}5; +\infty)$. **124.** Больше 3,5 см и меньше 10 см. **125.** Больше 23,5 см. **126. а)** (0; 6); **б)** $(-\infty; -11] \cup [0; +\infty)$; **в)** (–6,5; –2,5); **г)** решений нет. **128. б)** –4; $1\frac{1}{3}$; **в)** –3,5. **129.** 2 км/ч. **130.** 53. **131.** $\frac{1}{3}$. **133. а)** $x > \frac{2}{3}$; **б)** решений нет; **в)** любое число; **г)** решений нет. **134. а)** Решений нет; **б)** $x \geq 2{,}9$; **в)** любое число; **г)** $x < 4$. **135. а)** $x < 2\frac{2}{11}$; **б)** $y \leq -3\frac{3}{5}$; **в)** $a < 1{,}6$; **г)** $x \geq 18$. **136. а)** $x > 0$; **б)** $a < -1\frac{5}{7}$; **в)** $x > 12$; **г)** $x \leq 4\frac{4}{9}$. **137.** $x > 1\frac{1}{4}$. **138.** $x \leq \frac{7}{8}$. **139. а)** $[3; +\infty)$; **б)** $[-3; +\infty)$; **в)** $(-\infty; 5]$; **г)** $(-\infty; 3{,}5]$. **140. а)** $[4; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 0{,}5]$. **141. а)** $y \leq \frac{1}{3}$; **б)** любое число; **в)** решений нет; **г)** $a < 16{,}5$. **142. а)** Решений нет; **б)** решений нет; **в)** любое число; **г)** $y > 2$. **143. а)** $x < 8$; **б)** $x > -9$. **144. а)** $x < -1$; **б)** $x > -4{,}5$. **145.** $x > -5\frac{1}{6}$. **146.** $y > -1\frac{1}{3}$. **147. а)** $\left[\frac{9}{11}; +\infty\right)$; **б)** $(-\infty; 4]$; **в)** $[22; +\infty)$. **148.** Меньше 10,5 см. **149.** Меньше $7\frac{1}{3}$ см. **150.** Не больше чем на 36 км. **151. а)** $x \leq 2(1 - a)$; **б)** $x \leq a - \frac{1}{2}$. **152. а)** Если $a < -2$, то $x < \frac{1}{a+2}$; если $a = -2$, то решений нет; если $a > -2$, то $x > \frac{1}{a+2}$; **б)** если $a < -1{,}5$, то $x < \frac{a}{2a+3}$; если $a = -1{,}5$, то x —

любое число; если $a > -1{,}5$, то $x > \frac{a}{2a+3}$. **153.** Нет. **154.** Да, например, $a = -3$. **155. а)** $(-1; 4)$; **б)** $(2{,}7; 0{,}2)$. **156.** 125 грн. **157.** 13 и 6; 67 и 66. **158.** 23 фазана, 12 кроликов. **166. а)** $(-\infty; -7)$; **б)** решений нет; **в)** $(-\infty; -2]$; **г)** $(2{,}25; +\infty)$. **167. а)** $\left(3\frac{1}{6}; +\infty\right)$; **б)** $\left(\frac{3}{7}; 3\frac{1}{3}\right)$; **в)** $[6{,}7; +\infty)$. **168. а)** $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right)$; **б)** решений нет; **в)** $\left(-\infty; -\frac{5}{7}\right]$. **169. а)** $\left(-4; 1\frac{5}{6}\right]$; 1; **б)** $[2; 5]$; 5; **в)** $(-3; 4)$; 3. **170. а)** 1; 2; 3; 4; **б)** 4; 5; 6; 7; 8; **в)** таких решений нет. **171. а)** $(2; +\infty)$; **б)** $\left[1\frac{2}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$; **в)** $(-\infty; -6)$; **г)** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. **172. а)** Решений нет; **б)** $\left(1\frac{3}{5}; 12\frac{1}{7}\right)$. **173. а)** $(-\infty; 8]$; **б)** $(-\infty; 11)$; **в)** $[0{,}6; 13]$; **г)** решений нет. **174. а)** $(-6; 8]$; **б)** $(-\infty; 1{,}5)$. **175. а)** Решений нет; **б)** $(7; 12{,}5)$. **176. а)** $(-\infty; -0{,}7)$; **б)** $(-1{,}4; 3)$. **177.** $-2\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$. **178.** $\left(-2\frac{3}{4}; 1\frac{3}{4}\right)$. **179. а)** $(-1; 3)$; **б)** $(-\infty; -2{,}5] \cup [1; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$; **г)** $[0{,}5; 2)$. **180. а)** $(2; 2{,}5)$; **б)** $(-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$. **181. а)** $[-5; 3]$; **б)** $(-\infty; 1{,}25]$. **182. а)** $-9 \le x \le 0{,}6$; **б)** $x \ge 8$. **183.** От 53 км/ч до 55 км/ч. **184. а)** $\left(-\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$; **б)** $(1; 7)$; **в)** $(-\infty; 2]$; **г)** $\left(-\infty; 1\frac{2}{3}\right)$. **185. а)** Если $a \le 2{,}5$, то $x < a$, если $a > 2{,}5$, то $x < 5 - a$; **б)** если $a \le -3$, то решений нет; если $a > -3$, то $\frac{1-a}{4} \le x < \frac{8+a}{5}$. **186.** От 40% до 50%. **189.** $k = -1$. **190.** 1; 2; 3. **194.** Если будет двигаться по течению и против течения реки. **195.** В реке с быстрым течением. **197. а)** $-7 < a - 2b < -5{,}5$; **б)** $1{,}1 < \frac{a}{5} + 3b < 1{,}44$. **198.** $6{,}1 < l < 6{,}2$. **201. а)** $x > 2{,}5$; **б)** $x \le -1{,}2$; **в)** $x > -5{,}6$; **г)** $y < -6{,}4$. **202. а)** $y < 1{,}4$; **б)** $a < 1{,}2$; **в)** $x \ge -9\frac{1}{3}$; **г)** любое число. **203. а)** $(-15; 21)$; **б)** $(-\infty; -8] \cup [1; +\infty)$; **в)** $(-\infty; +\infty)$; **г)** решений нет. **204. а)** 1; 2; 3; 4; **б)** 1; 2; 3; 4; 5; 6. **205.** $x < \frac{9}{22}$. **206. а)** $a < 0$; **б)** $a < -2\frac{1}{3}$; **в)** $a < 1{,}5$; **г)** $a > -1\frac{1}{3}$. **207.** 7 тетрадей. **208.** Больше 89,6 км/ч. **209. а)** $\left(-\frac{1}{7}; +\infty\right)$; **б)** $\left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; **в)** решений нет; **г)** $(-\infty; 0{,}5]$; **д)** решений нет; **е)** $(-\infty; -7)$; **ж)** $[1{,}75; +\infty)$; **з)** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{6}{7}\right)$. **210. а)** $(0; +\infty)$; **б)** решений нет; **в)** $(0; 2)$; **г)** $(-9; -6)$. **211. а)** $\left[0; \frac{1}{7}\right)$; **б)** $(5; +\infty)$. **212. а)** $[-4; -2)$; **б)** $(-7; -1)$; **в)** $(-4; 6]$; **г)** $(-20; -13)$. **213. а)** $[1{,}5; 2]$; **б)** $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$; **в)** $(-3; 0)$; **г)** $(-\infty; 1] \cup (3{,}5; +\infty)$; **д)** $(-3; 3)$; **е)** $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. **214.** От 6 м до 6,5 м. **215.** От 5,2 м до 5,4 м.

Задания для самопроверки № 1

1. в). **2.** а), г). **3.** б). **4.** г). **5.** б). **6.** в). **7. а)** $2\frac{1}{3} > 2\frac{2}{7}$; **б)** $-0,5 > -\frac{5}{9}$. **9.** $7,6 < P < 8,0$; $3,57 < S < 3,96$. **11. а)** $(-4; +\infty)$; **б)** $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **12.** $(-4; 2,5)$. **14. а)** $6 \le x + y \le 8$; **б)** $10,5 \le 3x - 0,5y \le 14$. **15. а)** $(-\infty; +\infty)$; **б)** $(11; +\infty)$. **16.** $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$. **17. а)** $[0,8; +\infty)$; **б)** $(10; +\infty)$. **18.** 21,6 км $< S <$ 28,8 км. **20. а)** $0,11 \le a^2 - b^2 \le 0,33$; **б)** $1,2 \le \frac{a}{b} \le 1,75$. **21. а)** $\left[-1; 1\frac{1}{3}\right]$; **б)** $(-\infty; -1)\cup(0; +\infty)$. **22.** 2; 3; 4; 5. **23. а)** $\left[-3; 1\frac{1}{3}\right]$; **б)** $\left[1\frac{1}{3}; 2\right)\cup(2; +\infty)$. **24.** Первый.

§ 2

228. в) $[8; +\infty)$; **г)** $(-\infty; 2]$. **229. в)** $(-\infty; 4]$; **г)** $[-4; +\infty)$. **232. а)** 1; 4; **б)** −3; 3. **233.** −2; 1. **235.** $(-8; 0)$; $(0; 16)$. **236. а)** $(-\infty; -3)\cup(-3; 2)\cup(2; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 2)\cup(2; 3)\cup(3; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -4]$; **г)** $(-\infty; 0,25]$; **д)** $(-3; +\infty)$; **е)** $[0; +\infty)$. **237. а)** $(-\infty; -9)\cup(-9; 1)\cup(1; +\infty)$; **б)** $\left(-\infty; 1\frac{1}{3}\right]$; **в)** $[-0,2; +\infty)$. **240. а)** −7; 1; **б)** −3; **в)** таких значений x не существует. **241. а)** −1; 3; **б)** 1; **в)** таких значений x не существует. **246. а)** $\left[-\frac{2}{3}; 10\right)$; **б)** $\left(-\frac{2}{3}; 3\right)\cup(3; +\infty)$. **250. б)** −2,5; $-\sqrt{2}$. **251. б)** При $a > 6$ — два корня; при $a < 6$ — корней нет; уравнение не может иметь только один корень. **252.** 12 грн.; 8 грн. **253.** Наполнится за 10 мин. **254. а)** −2; −1; **б)** −3; 75; **в)** −1,5; −1. **255.** −3; 3. **259. е)** Нулей нет. **260. б)** −4; 2; **в)** −0,5. **265. б)** −1; 3; **в)** 1. **266. б)** −2. **269. г)** Ни четная, ни нечетная; **д)** нечетная; **е)** четная. **270. г)** Ни четная, ни нечетная; **д)** четная; **е)** нечетная. **273. б)** 1. **275. б)** $a = 1$ или $a = -1$; корни: −2, 0 и 2. **277. а)** 2; **б)** 14; **в)** 3; **г)** 4. **279.** 90 км/ч. **289. а)** $[-1; +\infty)$; **б)** $(-4; -2)$; **в)** $(-\infty; -3]$. **290. а)** $[-4; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 0)\cup(4; +\infty)$; **в)** $[2; +\infty)$. **292. а)** 1; 4; **б)** −2; 3. **293.** 1. **295.** $a = 1$. **296.** При $a < 0$ или $a = 1$ — два корня; при $a = 0$ — три корня; при $0 < a < 1$ — четыре корня; при $a > 1$ — корней нет. **297. а)** $(a-3)(b+2)$; **б)** $(x+y)(x-2)$. **298.** 11,25. **299.** $x^2 + 6x - 2 = 0$. **300.** 72 км/ч. **308.** Да. **315.** $\frac{a+2b}{3}$ км/ч. **316.** $\frac{3ab}{2a+b}$ км/ч. **325. а)** $[-4; +\infty)$; **б)** $(-5; -1)$; **в)** $(-\infty; -3]$. **326. а)** $(-\infty; 4]$; **б)** $(0; 4)$; **в)** $(-\infty; 2]$. **327. а)** $(2; 2)$; $(-0,5; -5,5)$;

б) (1; –9); $\left(-3\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **328.** (–0,5; –0,5); (–1,5; 2,5). **329. а)** 1; **б)** 4. **330.** 0; 4. **332.** $x = 1$; 5 — наибольшее значение. **333.** –6,5. **334.** –0,875. **336. а)** $b = 8$; $c = 18$; **б)** $a = -1\frac{1}{3}$; $b = 2\frac{2}{3}$. **338.** $a > 3$. **339.** 4,5 м. **340.** 50 м; 50 м. **341. а)** –0,5. *Указание*. Найдите значение x, при котором наименьшее значение принимает квадратный трехчлен $2x^2 - 2x$, и докажите, что при этом же значении x наименьшее значение принимает и данная функция. **б)** 0,5. **342. а)** 4; **б)** 1. **343. а)** $\frac{a^2}{2b}$; **б)** $-\frac{3x}{y^2}$. **344. а)** $x > 8$; **б)** $x < -4$; **в)** $x \geq 4{,}2$; **г)** $-5 < x < 2$. **345. а)** –2; **б)** $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; **в)** –4; 4; **г)** 1; 3; $-2-\sqrt{7}$. **346.** 36 и 45 дней. **347.** Музыкантов. **348.** –2; 2.

Задания для самопроверки № 2

1. в). **2.** б). **3.** в). **4.** б), г). **5.** в) **6.** а). **7.** $(-\infty; 2{,}5]$. **8.** –8; 2. **9.** $[-1; +\infty)$ — область значений. **10.** Нет. **11.** Возрастает на промежутке $[1; +\infty)$; убывает на промежутке $(-\infty; 1]$. **12.** $[-1{,}5; 6]$. **13.** Да. **14. а)** $(-\infty; 8]$; **б)** $x < -1$ или $x > 3$; **в)** $[1; +\infty)$. **15.** $x = -2$; –32 — наименьшее значение. **17.** $\left[0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 6\right) \cup (6; 9]$. **19. а)** $[-4; +\infty)$; **б)** (0; 4). **20.** 4. **21.** Не имеет.

353. а) (–4; 1); **б)** $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$; **в)** (0; 1,5); **г)** (–3; 1); **д)** $(-\infty; 1) \cup (1{,}5; +\infty)$; **е)** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. **354. а)** $(-\infty; -4] \cup [-2; +\infty)$; **б)** $[-7; 2]$; **в)** $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$. **355. а)** (–3; 2); **б)** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$; **в)** (0; 2); **г)** $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$; **д)** $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; **е)** $[-1; 1]$. **358. а)** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; **б)** (–1; 1); **в)** $[-1; 1]$; **г)** $[0; 5]$. **359. а)** $[-0{,}8; 1{,}2]$; **б)** $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$; **в)** $[2; 3]$; **г)** решений нет; **д)** $(-\infty; +\infty)$; **е)** 3. **360. а)** $(-\infty; -1) \cup (1{,}2; +\infty)$; **б)** решений нет; **в)** $(-\infty; +\infty)$. **361. а)** $(-\infty; -0{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$; **б)** (–3; 5); **в)** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$; **г)** $\left[\frac{6-2\sqrt{6}}{3}; \frac{6+2\sqrt{6}}{3}\right]$. **362. а)** $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; **б)** $\left(-1\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **363. а)** $(-\infty; -1{,}5] \cup [1; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; **в)** $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$; **г)** (1; 4). **364. а)** $(-\infty; +\infty)$. **365.** $x < 0{,}3$ или $x > 0{,}7$. **366.** $x \leq -1{,}5$ или $x \geq -0{,}5$. **367. а)** $[-6; 2]$; **б)** $(-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; **в)** $(-\infty; +\infty)$. **368. а)** $(-\infty; +\infty)$; **б)** $[-12; 2]$. **369. а)** $(-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -5) \cup (6; +\infty)$; **в)** $[0; 15]$; **г)** $(-\infty; -1{,}5] \cup [2; +\infty)$; **д)** 0,8; 1,25; **е)** (–3; 6); **ж)** $(5; +\infty)$; **з)** $\{-4\} \cup [3; +\infty)$; **и)** $[-4; -1) \cup (-1; 1]$; **к)** $(-\infty; -3) \cup (5; 6) \cup (6; +\infty)$. **370. а)** $(-\infty; -4) \cup (6; 7]$;

б) $(-2;-1]\cup[3;4)$; **в)** $[0;2]$. **371. а)** $(-5;2]$; **б)** $(-4;-3]$; **в)** $(-\infty;-4)\cup(-4;0{,}5)\cup(5;+\infty)$. **372. а)** $-\frac{1}{3}<a<1$; **б)** $-2{,}5<a<-0{,}5$; **в)** $\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}\le a\le\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$. **373. а)** $a\le-\frac{5}{8}$; **б)** $a<-\frac{5}{8}$; **в)** $a\le-2$. **374.** $a\le\frac{-5-\sqrt{37}}{2}$. **375. а)** $\frac{a-2c}{2}$; **б)** $\frac{m^2+n}{3m}$. **378. а)** $(1;1)$; **б)** $(1;-2)$; **в)** $(1;-1)$. **379. а)** -1; 1; **б)** -6; -4; -1; 1. **380.** 12 и 8 деталей. **381. а)** $(-6;4)$; **б)** $(-\infty;-3{,}5]\cup[-1;+\infty)$; **в)** $(1;2)\cup(3;+\infty)$; **г)** $(-\infty;-3]\cup[0;5]$; **д)** $(-\infty;-4)\cup(-2;1)\cup(3;+\infty)$. **382. а)** $(2;3)$; **б)** $[-3;0{,}5]\cup[5;+\infty)$; **в)** $[-4;-2]\cup[1;5]$. **383. а)** $(-\infty;-1)\cup(0{,}5;+\infty)$; **б)** $[-0{,}6;2]$; **в)** $(-1;2)\cup(3;+\infty)$; **г)** $(-\infty;0]\cup[1;2{,}5]$. **384. а)** $(-4;-2)\cup(2;+\infty)$; **б)** $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]\cup[2;+\infty)$. **385. а)** $(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$; **б)** $\left(-3;-\frac{2}{3}\right)\cup(3;+\infty)$. **386. а)** $(-1;3)$; **б)** $(-2;1)\cup(8;+\infty)$; **в)** $(-\infty;-3)\cup[0{,}5;4)$. **387. а)** $(1;2{,}5)$; **б)** $(-1;2)$; **в)** $(-\infty;-1{,}5)\cup[-1;+\infty)$. **388. а)** $(1;5)\cup(7;+\infty)$; **б)** $(-0{,}4;-0{,}25)$; **в)** $(-\infty;0]\cup(3;+\infty)$. **389. а)** $(0;1)\cup(3;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-2]\cup[1;2]$; **в)** $(-8;-1)\cup(1;2)$; **г)** $(-\infty;-2]\cup[1;2]\cup[5;+\infty)$. **390. а)** $\{-8\}\cup[-6;1]$; **б)** $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$. **391. а)** $(-\infty;-2]\cup[5;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-4]\cup[-2;1]\cup[4;+\infty)$. **392.** Если $a<1$, то $(a;1)$; если $a=1$, то решений нет; если $a>1$, то $(1;a)$. **393. а)** $(-3;-2)\cup(2;5)$; **б)** $(-\infty;1)\cup(1;2]\cup[6;+\infty)$; **в)** $(-1;1)\cup(1;5)$; **г)** $(0{,}5;6]$. **394. а)** $(-5;-1)\cup(1;+\infty)$; **б)** $(-\infty;-1)\cup\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup(1;+\infty)$; **в)** $(-2;2)$; **г)** $(-2;-1)\cup(0;2)$. **395.** $(1;1)$. **396.** 4. **397.** 20 деталей. **398.** 60 м^3. **404. а)** $(0;0)$; $(2;4)$; **б)** $(0;3)$; $(3;0)$. **405. а)** $(1;1)$; $(2;4)$; **б)** $(3;1)$; $(-3;-2)$; **в)** $(1;2)$; $(-1;-2)$; **г)** $(1;1)$; **д)** $(4;-7)$; $(7;-4)$; **е)** $(0;2)$. **406. а)** $(0;1)$; **б)** $(9;0)$; $(5;2)$; **в)** $(1;0)$; $(-2;-6)$ **407. а)** $(1;3)$; $(-2;0)$; **б)** $(-1;2)$; $(1;2)$; **в)** $(0;0)$; $(1;1)$. **408. а)** $(0;1)$; $(3;4)$; **б)** $(1;1)$; **в)** $(-3;-1)$; $(3;-1)$; $(-1;3)$; $(1;3)$. **409. а)** Два; **б)** четыре; **в)** три. **410. а)** $(-2;1)$; $(5;-6)$; **б)** $(8;2)$; $(2;-1)$; **в)** $(3;-1)$; $\left(-6\frac{1}{3};5\frac{2}{9}\right)$; **г)** $(-1;-3)$; $(2;3)$; **д)** $(2;2)$; $(10;-6)$; **е)** $(1;3)$; $\left(\frac{5}{6};3\frac{1}{3}\right)$. **411. а)** $(-4;-3)$; $(4;-3)$; $(-4;3)$; $(4;3)$; **б)** $(4;1)$; $(2;2)$; **в)** $(1;3)$; $\left(7\frac{1}{2};-1\frac{1}{3}\right)$; **г)** $(-4;3)$; $(1;-2)$. **412. а)** $(1;1)$; **б)** $(6;2)$. **413. а)** $(1;0)$; $(-0{,}2;-0{,}8)$; **б)** $(1;5)$; $(5;1)$; $(-1;-5)$; $(-5;-1)$. **414. а)** $(4;2)$; **б)** $(1;-1)$; $(1{,}75;-0{,}75)$; **в)** $(2;1)$; $(0{,}25;-0{,}75)$; **г)** $(-2;-3)$; $(2;3)$; **д)** $\left(-\frac{4}{9};-2\frac{1}{3}\right)$; $(1;2)$; **е)** $(3;3)$; **ж)** $(1;-1)$; $\left(-\frac{5}{7};1\frac{2}{7}\right)$; **з)** $(3;4)$; $(4;3)$; $(-3;-4)$; $(-4;-3)$. **417. а)** $(0;0)$; $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{5};-\sqrt{5}\right)$; **б)** $(12;-1)$; $(-12;1)$; $(4{,}5;-3{,}5)$; $(-4{,}5;3{,}5)$; **в)** $(3;1)$; $(3;-1)$; $(-3;1)$; $(-3;-1)$; $(1;3)$; $(1;-3)$; $(-1;3)$; $(-1;-3)$; **г)** $(1;-2)$; $(-2;1)$; $(2-\sqrt{3{,}5};2+\sqrt{3{,}5})$; $(2+\sqrt{3{,}5};2-\sqrt{3{,}5})$; **д)** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-2\sqrt{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};2\sqrt{3}\right)$; **е)** $(1;3)$; $(1{,}5;2)$; **ж)** $(4;2)$; $(-4;-2)$; **з)** $(4;-1)$; $\left(9\frac{5}{7};2\frac{3}{7}\right)$; **и)** $(3;1)$; $(3;-1)$; $(-3;1)$; $(-3;-1)$;

к) (4; 2); (–2; –4). **418. а)** $a = -0{,}45$; **б)** $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$; **в)** $a > 0$; **г)** $a > 2$. **419. а)** $\frac{3b}{a-2b}$; **б)** $x+\sqrt{5}$; **в)** $\frac{9}{a}$; **г)** $3a - c$. **421.** 7. **422.** 66 мин. **423.** 415 км. **424.** 6 грн.; 7 грн. **425.** 50 к.; 1 грн. **426.** 7 см; 8 см. **427.** 4; 7. **428.** 9 и –1 или 1 и –9. **429.** 16 и 4 или –4 и –16. **430.** 5 и –3. **431.** 8 дм; 6 дм. **432.** 8 см; 5 см. **433.** 600 г; 200 г. **434.** 10 грн.; 5 грн. **435.** 10 грн.; 30 грн. **436.** 70 км/ч; 60 км/ч. **437.** 20 ч; 12 ч. **438.** 3 дня; 6 дней. **439.** 4 км/ч; 3 км/ч. **440.** 80 км/ч; 60 км/ч. **441.** 20 км/ч; 16 км/ч. **442.** 60 км/ч; 90 км/ч. **443.** 5 м^3 и 7,5 м^3 или 6,25 м^3 и 6,25 м^3. **444.** 15 ч; 30 ч. **445.** 4,8 ст/мин; 4 ст/мин. **446.** 6 ч; 12 ч. **447.** 70 см; 60 см. **448.** 18 учеников. **449.** 25 ч; 20 ч. **450.** 18 ч. **451.** 25 км/ч. **452.** 2 км/ч. **453.** 20 самосвалов; 6 ходок; 8400 т. **454.** 60 км/ч; 120 км/ч. **456. б)** $(a-b)(am-b)$. **458. а)** $\frac{1}{3}$; **б)** 1. **460. в)** 2. **461. д)** $(-\infty; 3)\cup(4; +\infty)$; **е)** $(-3; 3]$. **475. а)** (1; 1); $\left(-\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$; **б)** (–1; –2); (4; 3). **477. а)** 1; 2; **б)** 1; **в)** 2. **478.** При $a < -1$ или $-0{,}5 < a < 0{,}5$ — два корня; при $a = -1$ или $a = -0{,}5$ — три корня; при $-1 < a < -0{,}5$ — четыре корня; при $a = 0{,}5$ — один корень; при $a > 0{,}5$ — корней нет. **479. а)** $[-5; 5]$; **б)** $(-\infty; -5)\cup(5; +\infty)$; **в)** $[-10; 10]$; **г)** $(0; 7)$; **д)** $(-\infty; 0]\cup[3; +\infty)$; **е)** $[0; 9]$. **480. а)** $(-\infty; -2)\cup(4; +\infty)$; **б)** $(-\infty; -5]\cup[1; +\infty)$; **в)** $\left(-2\frac{1}{3}; 1\right)$. **481. а)** $(-\infty; -3)\cup(5; +\infty)$; **б)** $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. **482. а)** $(-2; 4)$; **б)** $(-0{,}5; 1)$. **483. а)** $(-4; 2)$; **б)** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]\cup[2; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -6)\cup(-3; 1)\cup(8; +\infty)$; **г)** $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]\cup\left[1\frac{3}{4}; 2\right]$. **484. а)** $[-4; -3]\cup[0; 3]$; **б)** $(-\infty; -2]\cup[1; 2]$. **485. а)** $(-6; -4)\cup(5; +\infty)$; **б)** $(3; +\infty)$. **486.** На промежутках $(-\infty; 0{,}5)$ и $(5; +\infty)$ функция принимает положительные значения, на промежутке $(0{,}5; 5)$ — отрицательные значения. **487. а)** $(-\infty; -1)\cup(8; 15]$; **б)** $(-2; -1]\cup[3; 4)$. **488. а)** $a > 1$; **б)** $m < -\frac{1}{3}$. **489.** $a = 1$. **490.** $a = 3$. **493. а)** (–3; –6); (1; 2); **б)** (1; 0); (4; –1); **в)** (2; –2); (4,4; –5,2); **г)** (1; –1); $\left(\frac{2}{3}; -1\frac{1}{6}\right)$; **д)** (2; 2); (0,75; 4,5); **е)** (0; 3); (4; –1). **494. а)** (–2; –3); (2; 3); **б)** (1; 2); (2; 1); (1; –2); (–2; 1); **в)** (2; 3); (3; 2); **г)** (0; 1); (3; 1); (1,5; 2,5); (1,5; –0,5). **495.** $m = 3$. **496.** $m = 4$, $m = -4$. **497.** 6 см, 8 см или 1 см, 13 см. **498.** 80; 20. **499.** 21 ряд. **500.** 25 км/ч. **501.** 3 ч; 6 ч. **502.** 6 ч.

Задания для самопроверки № 3

1. в). **2.** в). **3.** в). **4.** г). **5.** а). **6.** б). **7.** $(-\infty; -1)\cup(4; +\infty)$. **9.** (0; 0); (2; 4). **10.** (–3; –2); (1; 2). **11.** 5; 7. **12.** $\left[-2; \frac{1}{4}\right]$. **13.** $[-3; 2)\cup(4; +\infty)$. **14.** (2; 2); (–2; 2). **15.** (5; –1); (–0,2; 0,3). **16.** 20 ч. **17.** $\left(-\infty; -1\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right)$. **18.** $-10 < a < 2$. **19.** (2; 1); (–2; –1); $\left(3; \frac{2}{3}\right)$; $\left(-3; -\frac{2}{3}\right)$. **20.** 2 решения при $a = 0$; 3 решения при $a = 5$. **21.** 20 км; 10 км/ч.

§ 3

508. 18 костюмов. **509.** От 0,7 г до 0,8 г включительно. **510.** 80 см × 80 см. **511.** На 6 км/ч. **512.** 1,5 ч. **513.** 66 см. **514.** 3 см. **515.** 12 м^2. **516.** 7 компьютеров. **517.** 600 об/мин; 200 об/мин. **518.** 120 га и 108 га или 72 га и 60 га. **519.** От 13,125 км до 17,5 км. **520.** ≈72 м. **521.** 35 суток. **522.** 75 м; 150 м. **523.** 2 м; 1 м. **524.** 49,5 т. **525.** От 3,125 м до 4 м включительно. **526. а)** $x > -\frac{2}{11}$; **б)** $x < \frac{7}{94}$. **528.** $k = 11$. **529.** 75 мл. **535.** 204 кг; 36 кг. **536.** 35%. **537.** 91,875%. **538.** 60 г. **539.** 840 г. **540.** 650 грн. **541.** 1920 грн. **542.** 735,26 грн. **543.** 1331 грн. **544. а)** $6\frac{2}{3}$%; **б)** 2,5%. **545.** 15%. **546.** 1%. **547.** 240 абитуриентов. **548.** ≈90 г; ≈ 85 г; ≈149 г. **549.** 5700 грн. **550.** 2000 грн. **551.** 60 л; 40 л. **552.** 37566 грн. **553.** 18564 грн. **554.** Во второй фирме. **555.** ≈11,6%. **556.** 212,5 кг. **557.** 25 кг или 10 кг. **558.** $83\frac{1}{3}$ %. **559.** 20%. **560.** Уменьшилась на 5,5%. **561.** 3000 грн. **562. а)** (1; –1); (–1; –3); **б)** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$; $\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **563. б)** y. **565.** 20 км/ч или 7 км/ч. **566.** Если $a \le 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $3 - a < x < 3 + a$. **573. б)** 0; **в)** $\frac{5}{6}$. **574. а)** $\frac{1}{4}$; **б)** $\frac{3}{4}$; **в)** 0. **575.** $\frac{1}{15}$. **576.** $\frac{2}{5}$. **577.** $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{20}$. **578.** $\frac{2}{9}$; $\frac{2}{9}$. **579. а)** $\frac{9}{25}$; **б)** $\frac{8}{25}$; **в)** $\frac{4}{25}$; **г)** $\frac{16}{25}$. **580. а)** $\frac{1}{10}$; **б)** $\frac{1}{10}$; **в)** $\frac{1}{30}$; **г)** 0. **581.** $\frac{2}{5}$. **582.** $\frac{9}{20}$. **583.** $\frac{1}{3}$. **584.** $\frac{1}{3}$. **585.** $\frac{1}{6}$. **586.** $\frac{1}{6}$. **587.** 540 и 360 микросхем. **588.** 12 девочек и 16 мальчиков. **589.** $\frac{1}{720}$. **590.** $\frac{1}{125}$. **591.** $\frac{1}{60}$. **592.** $\frac{2}{5}$. **593.** $\frac{3}{5}$. **594.** $\frac{11}{500}$. **595.** $\frac{19}{29}$. **596.** $\frac{7}{12}$. **597. а)** $\frac{3}{8}$; **б)** $\frac{11}{16}$. **599. а)** [–1; 5]; **б)** (–∞; –1,5)∪(0,5; +∞). **600. а)** $\sqrt{a} - 7$; **б)** $\frac{1}{x+2}$. **602.** 37,5 мин. **609.** 3,2 кг. **610.** 392,5 г. **611.** 11,6 тыс. грн. **612.** 2 ошибки. **616.** 7,5 баллов. **617.** 9 очков. **619.** 9%. **620. а)** $\sqrt{\frac{a}{b}}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. **621. а)** (2; 3); (3; 2); **б)** (–3; –2); (3; 2). **622.** $a \le 1$ или $a \ge 2$; $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 3a + 2}$. **623.** 45 с. **625.** 18 км/ч; 2 км/ч. **626.** До 14 блоков. **627.** 105 деталей. **628.** 2 мин. **629.** ≈266 кг. **630.** 2000 грн. **631.** 12 см; 16 см; 10 см. **632.** 225 г. **633.** 5000 грн. **634.** 8%. **635.** 70 кг. **637. а)** $\frac{1}{2}$; **б)** 1; **в)** $\frac{3}{10}$; **г)** $\frac{1}{10}$. **638.** $\frac{1}{3}$. **639.** $\frac{5}{11}$. **640.** $\frac{1}{4}$. **641.** $\frac{1}{4}$. **642.** $\frac{1}{10}$. **643. а)** $\frac{1}{8}$; **б)** $\frac{3}{8}$. **646.** –1° С. **647.** 8 подтягиваний.

Задания для самопроверки № 4

1. б). **2.** в). **3.** в). **4.** а). **5.** б). **6.** в). **7.** 3 ч. **8.** 28 см; 20 см. **9.** 1210 грн. **10.** $\frac{1}{5}$. **12.** 70 км/ч; 50 км/ч. **13.** 27 кг. **14.** 1160,5 грн. **15.** $\frac{3}{10}$. **17.** 24 ч и 12 ч или 20 ч и 13 ч 20 мин. **18.** $9\frac{1}{11}\%$. **19.** 13500 грн. **20.** $\frac{23}{36}$. **21.** 6 поднятий.

§ 4

656. а) 7; 14; 21; 28; **б)** 3; 7; 11; 15. **659. а)** –5; –3; –1; 23; **б)** 100. **661.** 10; 15. **662.** Нет; да. **663.** Да; нет. **664.** $7n+1$; $7n+2$. **665.** $11n+5$; $11n+3$. **666. а)** –3; –5; –9; –17; –33; **б)** 2; $-\frac{1}{2}$; –6; –2; 7. **667. а)** 5; –10; 20; –40; 80: **б)** 1; 2; 4; 7; 12. **669.** $b_1=3$; $b_{n+1}=b_n^2-1$; 3; 8; 63; 3968. **670.** 1; $3\frac{1}{2}$; –1; $2\frac{1}{4}$; –3; $1\frac{5}{6}$. **671.** 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. **672.** $n>19$. **673. а)** $(9x-1)(x-1)$; **б)** $(x-3)(x+3)(x^2+4)$. **674. а)** $(-\infty;3)$; **б)** $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$. **675.** 25 ч; 20 ч. **676.** –5; 2. **684. а)** 10; 15; 20; 25; **б)** 4,5; 4; 3,5; 3. **685. а)** 0,3; 2,6; **б)** 0,2; –2,2. **686. а)** 2,5; 18; **б)** –2; $\sqrt{2}-1$. **688. а)** 6,3; **б)** 2,6. **690.** 46. **691. а)** Нет; **б)** да. **693. а)** 0,95; 0,85; **б)** $\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$. **695.** 27 рыбин; 54 рыбины. **696.** $m=18$. **697.** $6\sqrt{3}$. **698.** 22,5. **699.** 60°. **700.** 37 см, 40 см, 43 см. **702. а)** $a=3$, $d=-2$; $a=5$; $d=-2$; **б)** (1; –3), (–4,6; 5,4). **703. а)** –7; 1; **б)** 1. **704.** 2 км/ч. **707.** 12,5; 28,5. **708. а)** $a_n=7{,}8+1{,}1(n-1)$; 16,6; **б)** $a_n=-6-7(n-1)$; –62. **710. а)** –14; **б)** 11. **712. а)** 11; **б)** 7. **713.** Нет; да. **714. а)** Да; **б)** нет. **715.** 3 см. **717.** –2; –15. **718.** –1. **719.** –7; 3. **720.** 19; 30; 41; 52. **721.** 0; –2; –4. **722.** –1,5. **723.** 2,4. **724.** 94. **725.** 83. **728.** $\frac{4}{15}$. **732. а)** 68; **б)** –28. **734. а)** 153; **б)** –45. **736.** 820. **737.** 40 см. **738.** 15. **739.** –26. **740.** 1681. **741.** 2550. **742.** 1470. **743.** 3528. **744.** 3417. **745.** 31. **746.** –3; 4. **747.** –3. **748.** 145. **749.** 48. **750.** 6 дней. **751.** 770. **752.** 123300. **753.** –264. **754. а)** $n(n+1)$; **б)** n^2. **755.** 11. **756. а)** 6; **б)** 39. **757.** 470 м. **758. а)** $(-\infty;8]$; **б)** $x<0$ или $x>4$; **в)** $(-\infty;2]$; $[2;+\infty)$. **759.** 20 кг; 30 кг. **761. а)** (3; –1); (5; –3); **б)** (–1; –1); (7; 3). **771. а)** –3; –54; **б)** 0,5; 0,5. **773. а)** –15 или 15; **б)** –12 или 12. **774.** 64; 3,24. **775. а)** Да: **б)** нет. **776. а)** Да; **б)** да. **777.** 125 см^3. **778.** 8 лет. **779. а)** $b_2=7$; $b_4=343$ или $b_2=-7$; $b_4=-343$; **б)** $x=4$; $y=1$ или $x=-4$; $y=-1$; **в)** $b_1=3$; $b_3=\frac{3}{4}$; $b_5=\frac{3}{16}$ или $b_1=-3$; $b_3=-\frac{3}{4}$; $b_5=-\frac{3}{16}$. **780.** $-\sqrt{3}$ или $\sqrt{3}$. **781.** $x=1$; $y=1$.

782. 32. **783. а)** 2; **б)** –6. **784. а)** $(-\infty; 1)$; **б)** $(2; +\infty)$. **785.** 25 см^2. **786.** $0 < a < 4$. **790. а)** 81; **б)** 32. **792. а)** 2; **б)** 3. **794. а)** –2 или 2; **б)** –3 или 3. **795.** –10 или 10. **796.** $-\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{3}$. **797.** 64. **798.** –64 или $-\frac{1}{4}$. **799.** 4 см^2. **800.** 4,5 см. **801.** 7; –21; 63; –189 или –14; –42; –126; –378. **802.** 0,9; 1,5; 2,5 или 9; 3; 1. **803.** –3; –6; –12; –24. **804. а)** $\frac{2c^4}{x^4}$; **б)** $\frac{(a+b)(m+n)}{m-n}$. **805. а)** $\left(-\infty; -\frac{5}{16}\right] \cup (0; +\infty)$; **б)** $(-11; 5)$. **806.** $m = 1$. **807.** 20. **810. а)** –160; **б)** –21. **812. а)** 33; **б)** 24,2. **813.** 2. **814.** 128. **815. а)** 6552; **б)** –7,875. **816.** –440. **817.** 2184. **818.** 765 или –255. **819.** 12; 6; 3 или 3; 6; 12. **820.** 384. **821.** 15,5. **822. а)** 2; **б)** 1. **824. а)** $[5; +\infty)$; **б)** $\left[\frac{1}{2}; 25\right)$. **825.** 20 и 30 электродвигателей. **829.** $1\frac{1}{3}$. **830. а)** $4{,}5\sqrt{7}$; **б)** $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$. **831. а)** 20; **б)** 42. **832. а)** –12; **б)** 16. **833.** $\frac{1}{5}$. **834. а)** 1; **б)** $\frac{x^2}{1+x^2}$. **835. а)** $\frac{3}{4}$; **б)** $\frac{1}{1-a}$. **836.** 12. **837.** 2; $\frac{1}{3}$. **839. а)** 32 см^2; **б)** $(8+4\sqrt{2})\pi$ см. **840.** $\frac{1}{36}$. **841.** $\frac{2}{11}$. **842.** 80 деталей. **843.** $a = -6$. **844. д)** $1\frac{7}{30}$; **е)** $\frac{56}{495}$; **ж)** $5\frac{58}{225}$; **з)** $\frac{437}{3300}$. **845. а)** $\frac{5}{33}$; **б)** $3\frac{7}{9}$; **в)** $6\frac{2}{15}$; **г)** $2\frac{217}{900}$; **д)** $\frac{23}{900}$; **е)** $1\frac{119}{990}$. **846. а)** $9\frac{511}{512}$; **б)** $n(2n+1)$. **847.** 259. **848.** 10; 80. **849.** 1; 120. **850.** 1 м. **851.** 53,9 м. **852.** 21; 4. **853.** 45 м. **854.** 0,5 см. **855. а)** $\frac{2n}{2n+1}$; **б)** $2^{n+1}(n-1)+2$; **в)** $\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$. **856. а)** $\frac{2}{3}$; **б)** 7. **858.** 7 с. **859.** ≈76,2 кПа. **860.** $[-6; +\infty)$. **861.** –7; –6; –5; –4; –3; –2. **862.** $a < 2$. **863.** 2000 грн. **864. а)** –23; –44; –71; –104; **б)** –24; 48; –96; 192. **865.** Да, нет. **866. а)** –5; –7; –11; –19; **б)** 3; 5; 19; 85. **867.** 2; 3. **868.** 5. **870. а)** 4; 27; **б)** –2,5; –6,3. **871. а)** $a_n = 13 - 12(n-1)$; **б)** $a_n = -4 + 0{,}5(n-1)$. **872. а)** –3; **б)** –2. **873.** 7. **874.** 55 см. **875.** 43,75 м. **877.** 160. **878.** 15. **879. а)** –4,1; **б)** 4,3. **880.** 2639. **881. а)** 5096; **б)** 2805; **в)** 2460; **г)** 3969; **д)** 6120; **е)** 741. **882.** –18. **884. а)** 4; 320; **б)** $\frac{1}{4}$; 0,025. **885. а)** 81; **б)** $\frac{1}{2\sqrt{10}}$. **886.** $-\frac{3}{5}$ или $\frac{3}{5}$. **887.** $1\frac{21}{64}$. **888.** –1; –5; –25; –125. **889.** 32 см. **890.** 6; 17; 28. **891.** –3; 6; –12. **892. а)** $2\frac{1}{4}$; **б)** $\frac{6-2\sqrt{2}}{3}$. **893.** 16; $-\frac{32}{3}$; $\frac{64}{9}$. **894. а)** $\frac{8}{9}$; **б)** $\frac{4}{33}$; **в)** $51\frac{1}{3}$; **г)** $14\frac{1}{9}$; **д)** $1\frac{29}{90}$; **е)** $\frac{13}{30}$; **ж)** $\frac{37}{330}$; **з)** $24\frac{317}{900}$. **895. а)** $\frac{1}{16}$; **б)** $85\frac{1}{3}$; **в)** 64. **896. а)** 84 см; **б)** 112 см^2. **897. а)** $\frac{n}{4n+1}$; **б)** $2-\frac{n+2}{2^n}$. **898. а)** –0,8; **б)** 10. **900.** $(-\infty; +\infty)$.

Задания для самопроверки № 5

1. в). **2.** б). **3.** в). **4.** б). **5.** г). **6.** б). **7. а)** –7,8; **б)** –21,5. **8.** –20. **9.** $-\frac{3}{8}$.
10. –124. **11.** 18. **12.** Да. **13.** 1,2; –3. **14.** 1635. **15.** 3; 381. **16.** $\frac{4}{9}$; $5\frac{53}{99}$. **17.** 61. **18.** 108.
19. 5. **20.** –1,4 или 3. **21.** –18; –12; –8 или –2; –4; –8.

Задачи за курс алгебры 9 класса

911. а) $(-\infty; -1)$; **б)** решений нет; **в)** $\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$; **г)** $(-3; +\infty)$. **912. а)** $(4,25; +\infty)$; **б)** $\left(-\infty; 1\frac{7}{12}\right)$; **в)** $\left(-\infty; -\frac{5}{7}\right)$; **г)** $\left[\frac{7}{12}; +\infty\right)$. **913.** 3. **915. а)** $\left(-1; -\frac{5}{6}\right]$; **б)** $\left(4\frac{2}{3}; 5\frac{1}{2}\right)$; **в)** $(-\infty; -2)$. **916. а)** $(-0,6; 0,6]$; **б)** $[0,75; 1,05]$; **в)** $\left(5\frac{1}{3}; 5\frac{2}{3}\right]$. **917. г)** $(-\infty; -2,5)\cup$ $\cup(0,5; +\infty)$. **919.** $x \le 2,6$. **920.** $x \le 1\frac{2}{3}$. **921. а)** $a > 0,8$; **б)** $a > -3,75$. **922. а)** $x > 1,5$; **б)** $2 \le x \le 4$; **в)** $3,5 \le x < 5$; $x > 5$. **923. а)** $(-\infty; -3)\cup(-3; 1)\cup(1; +\infty)$; **б)** $(-\infty; 3]$; **в)** $(-\infty; -2]\cup[6; +\infty)$; **г)** $(3; 4)$; **д)** $(0; 1]$; **е)** $[3; 3,5)$. **924.** Нет. **932. а)** Нет; **б)** да. **933. а)** 2; **б)** –1. **934.** При $b < 0$ корней нет; при $b = 0$ — 3 корня; при $0 < b < 1$ — 6 корней; при $b = 1$ — 4 корня; при $b > 1$ — 2 корня. **936. а)** $(-\infty; -2)\cup(1,5; +\infty)$; **б)** $[-1; 4]$; **в)** $(-\infty; -2)\cup(4; +\infty)$; **г)** $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$. **937. а)** $(-2; 0,5)$; **б)** $[-10; 1]\cup[4; +\infty)$; **в)** $(-\infty; -2)\cup(-1,5; 0)\cup(1,2; +\infty)$; **г)** $(-\infty; -5]\cup[-2; 4]$. **938. а)** $[-2; -1]\cup[1; 2]$; **б)** $(-\infty; 1)\cup(2; +\infty)$. **939. а)** $(-2; 0)\cup(1; +\infty)$; **б)** $(-2; 8)$; **в)** $(-\infty; -1)\cup(1; 4)$; **г)** $(-\infty; -4)\cup$ $\cup(2; +\infty)$. **940. а)** $(-3; -2)\cup(-2; +\infty)$; **б)** $(-7; -5]\cup(-4; 6)$. **941. а)** $\{2; 5\}$; **б)** $\{-5\}\cup[-2; 3]$. **942. а)** $x < 1$; $x > 1,25$; **б)** $1 \le x \le 1,25$. **943. а)** $(0; 2]$; **б)** $[-7; -4)\cup(6; 10]$. **944.** $-2 < a < 5$. **945.** $b < -1$. **946. а)** $(-1; 1)$; $(2; -2)$; **б)** $(1; 0)$; **в)** $(-2; 0)$; $(0; 2)$; $(2; 0)$. **947. а)** $(2; 1)$; $(-0,4; -0,2)$; **б)** $(-1; 1)$; $(2; -1)$; **в)** $(2; 2)$; $\left(\frac{4}{9}; -2\frac{2}{3}\right)$; **г)** $(-2; 2)$; $(-0,5; 1,25)$. **948. а)** $(2; 0)$; $(-2; 0)$; $(4; -1)$; $(-4; 1)$; **б)** $(-5; -8)$; $(2; -1)$; **в)** $\left(\sqrt{2}; 1\right)$; $\left(\sqrt{2}; -1\right)$; $\left(-\sqrt{2}; 1\right)$; $\left(-\sqrt{2}; -1\right)$; **г)** $(-2; -2)$; $\left(3\frac{5}{8}; -1\frac{3}{8}\right)$. **949.** $m = 0$. **950.** $a = 0$; $a = 4$. **951.** 2,5 и 1,5. **952.** 18 м; 12 м. **953.** 21 км/ч. **954.** 6 дней; 12 дней. **955.** 5 ч; 7,5 ч. **956.** 3 м/с; 4 м/с. **957.** 8 ч; 6 ч. **958.** 824 и 428. **959.** 8 км. **960.** 50 спортсменов. **961.** 6083,5 грн. **962.** 40 т; 100 т. **963.** 100 грн.; 30 грн. **964.** 336 деталей; 280 деталей.

965. $\frac{2}{3}$. **966. а)** $\frac{5}{11}$; **б)** $\frac{6}{11}$; **в)** $\frac{5}{11}$; **г)** $\frac{5}{11}$. **967.** $\frac{1}{100}$. **973.** $x=\frac{4}{9}$. **974. б)** 306. **976. а)** –1,2; 0,4; **б)** 6,8; **в)** 28,8. **977.** 16. **978.** 5 ч. **982.** $m=-2$; $m=\frac{2}{9}$. **983.** 2; –42. **984.** 3125 частей. **985.** 3, 18, 33 или 27, 18, 9. **986.** 1; $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **987.** $2\sqrt{2}$. **989. а)** 1; **б)** $2\sqrt{3}$. **990. а)** 2; **б)** $1\frac{3}{4}$.

Задачи повышенной сложности

996. в) *Решение.* При $n=1$ имеем неравенство $\frac{1}{1+1}\geq\frac{1}{2}$, являющееся верным. При $n>1$ используем метод усиления. Так как $\frac{1}{n+1}>\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2}>\frac{1}{2n}$, ..., $\frac{1}{n+n}>\frac{1}{2n}$, то $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}\cdot n=\frac{1}{2}$; **г)** *Указание.* $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, где $n>1$. **1001.** $x=1$; $y=1$. *Указание.* Докажите, что $\frac{x+1}{\sqrt{x}}\geq 2$ при $x>0$, причем $\frac{x+1}{\sqrt{x}}=2$ только при $x=1$. **1003.** 2, 3, 1 и 0 рыбин. **1004.** 14 и 18 мальчиков. **1005. а)** Если $a\leq 0$, то решений нет; если $a>0$, то $x>0$; **б)** если $b<-2$ или $b>3$, то $x\leq\frac{b+1}{b-3}$; если $b=-2$ или $b=3$, то x — любое число; если $-2<b<3$, то $x\geq\frac{b+1}{b-3}$. **1006. а)** $(-\infty;\ 1]\cup[3;\ +\infty)$; **б)** $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **1007.** $a=-2$. **1010.** $a=3$. **1011.** $x=5{,}5$. **1012.** $\frac{1}{3}$. **1013.** $(-\infty;\ -3]\cup\{-1\}\cup[1;\ +\infty)$. **1014.** $a\leq-1$ или $a\geq 3$. **1016.** $x<-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ или $x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **1017.** $a\leq 4$ или $a\geq 5$. **1018.** $a\leq-1{,}5$. **1019.** При $a<-1$ или $a=1$ — один корень; при $-1\leq a<1$ — два корня; при $a>1$ — корней нет. **1020.** $a>1$. **1021. а)** (8; 2); (–8; –2); **б)** (1; 2); (–2,5; –1,5); **в)** (1; 3); (3; 1); **г)** (–2; 3); (3; –2); **д)** (0; 1); **е)** (2; 8); (8; 2); **ж)** (2; 3); (–2; –3); **з)** (8; 2); (–8; –2); (5; –8,5); (–5; 8,5); **и)** $\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2};6\right)$; $\left(-\frac{2}{3};-\frac{3}{2};-6\right)$; **к)** (3; 1; 2), (1; 3; 2). *Указание.* **к)** Сложив первое уравнение системы с третьим уравнением, умноженным сначала на 2, а потом на –2, получим: $x-y=\pm2$; $x+y=\pm2z$. **1022.** $a=-0{,}75$. **1023.** $a=-3$; $a=-1$; $a=1$; $a=3$. *Указание.* Систему можно записать в виде $\begin{cases}(x-2a)^2+(y-1)^2=4;\\(x-a)^2+(y-1)^2=1.\end{cases}$ Первое уравнение системы определяет окружность радиуса $r_1=2$ с центром в точке $O_1(2a;\ 1)$, а второе уравнение — окружность радиуса $r_2=1$ с центром в точке $O_2(a;\ 1)$. Система будет иметь одно решение тогда и только тогда, когда $O_1O_2 = r_1 + r_2$ (внешнее касание окружностей) или $O_1O_2 = r_1 - r_2$ (внутреннее касание). **1024.** При $|a| > 2$ или $a = 0$, — 2 решения; при $|a| = 2$ или $|a| = \sqrt{3}$. — 3 решения; при остальных значениях a — 4 решения. **1025.** $a = 4$. **1026.** $a = 1$ или $a = 2$. **1027.** 30 и 20 деталей. **1028.** 2 ч. **1029.** 60 л. **1030.** 4 км/ч; 5 км/ч. **1031.** 48; 35. **1032.** 210 км. **1033.** 5 и 2 детали. **1034.** 35 учеников. **1035.** 2. **1036.** $15\frac{5}{21}$%. **1037.** $p\left(1-\frac{a}{V}\right)^5$%. **1038.** 40%; 100%. **1039.** 15%; 40%. **1040.** Катер, плывущий по притоку. **1041.** 6 с. **1044.** 60. **1045.** Не могут. **1047.** 17. **1048.** 6. **1049.** 11. **1050.** 13. **1051.** 172. **1052.** 24010000. **1053.** –1; 0; 1; 2 или 0; 0; 0; 0. **1054.** $a = k(k-1)$, где k — натуральное число. **1055.** $-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (при $a = \frac{2}{27}$). **1056.** $r = 0$, $p = 0$. *Указание.* Если $a-1$, a, $a+1$ — искомые корни, то имеет место тождество $(x-(a-1))(x-a)(x-(a+1)) = x^3 + px^2 - x + r$. **1057.** 3, 6, 12. **1058.** 1. **1059.** 42. **1060.** $\frac{4}{9}$, $\frac{52}{9}$, $\frac{676}{9}$ или 4, 20, 100. **1062.** 744 страницы. **1064.** Нет. **1066.** Да.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Василий Ростиславович Кравчук
Мария Васильевна Пидручная
Галина Михайловна Янченко

АЛГЕБРА

Учебник для 9 класса

Рекомендован Министерством образования и науки Украины (приказ №56 от 02.02.2009 года)

Издано за счет государственных средств.
Продажа запрещена

Редакторы: *Ярослав Гапюк, Ярослав Гринчишин, Сергей Мартынюк*
Литературное редактирование *Оксаны Давыдовой, Маргариты Бильчук*
Обложка *Светланы Демчак*

Подписан в печать 27.07.2009. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. 16 усл. печ. лист., 15,97 уч.-изд. лист. Тираж 61049.
Заказ №09-368.

Редакция газеты «Підручники і посібники». Свидетельство ТР 189 от 10.01.96.
46020, г. Тернополь, ул. Полесская, 6а. Тел. 8-(0352)-43-10-31, 43-15-15, 43-10-21.
Факс 8-(0352)-43-10-31. E-mail: pp@pp.utel.net.ua
www.pp.unel.net.ua