А.Г.Мерзляк
В.Б.Полонський
М.С.Якір

7

ГЕОМЕТРІЯ

ГІМНАЗІЯ

УДК 373:513
ББК 22.151.0я721
М52

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ISBN 978-966-8319-71-6

Любі семикласники!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **геометрію**. Зверніть увагу, що у слів «географія» і «геометрія» однакова частина — «гео», що в перекладі з грецької означає «земля». Проте якщо на уроках географії в шостому класі ви дійсно займалися землеописом («графія» — грецькою «опис»), то на уроках геометрії вам не доведеться займатися землемірянням («метрео» — грецькою «міряти»).

Геометрія — одна з найдавніших наук. Її назву можна пояснити тим, що зародження і розвиток геометрії були тісно пов'язані з різноманітною практичною діяльністю людини: розміткою меж земельних ділянок, будівництвом шляхів, зрошувальних каналів, будівель та інших споруд, тобто геометрія, як кажуть у таких випадках, була *прикладною наукою*. Поступово, крок за кроком людство накопичувало знання, і геометрія перетворилася на красиву та досконалу, строгу та послідовну математичну теорію. Знайомитися з цією наукою і вчитися застосовувати набуті знання на практиці ви й будете на уроках геометрії.

Знати геометрію надзвичайно важливо. Дійсно, подивіться навкруги — усюди геометрія, точніше, **геометричні фігури**: відрізки, трикутники, прямокутники, прямокутні паралелепіпеди, кулі тощо.

а) б)

Рис. 1. *а*) Готель «Салют» (м. Київ); *б*) адміністративна будівля (м. Лондон)

Рис. 2. Сирецька телевізійна башта (м. Київ)

Без глибоких геометричних знань не могли з'явитися складні будівельні конструкції (рис. 1, 2), кораблі та літаки (рис. 3) і навіть дитячий конструктор та узори вишиванок (рис. 4). Створення узорів потребує від майстрині мати уявлення про такі геометричні поняття, як симетрія і паралельне перенесення. Не знаючи геометрії, неможливо стати хорошим інженером-конструктором, токарем, столяром, ученим, архітектором, дизайнером, модельєром, спеціалістом з комп'ютерної графіки тощо. Узагалі, знання з геометрії — важлива складова людської культури.

Геометрія — дуже цікавий предмет. Ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся, чому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

а) б)

Рис. 3. *а*) На стапелях Миколаївського суднобудівного заводу; *б*) літак АН-225 («Мрія»)

а)

б)

Рис. 4. *а*) Дитячий конструктор; *б*) узор вишиванки

Підручник розділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)).

Кожний пункт завершує особлива рубрика, яку ми назвали «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте». У ній зібрано задачі, для розв'язання яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни. Вони розвивають «геометричний зір» та інтуїцію.

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії геометрії. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги!

Ми вважаємо, що в межах загальноосвітньої школи неможливо реалізувати формально-логічний принцип побудови курсу геометрії: покласти в основу систему аксіом, а далі будувати викладення дедуктивно, тобто доводити теореми логічно строго, базуючись на аксіомах і раніше доведених фактах. Це, скоріш за все, можна пояснити тим, що кількість учнів (особливо семикласників), схильних до дедуктивного мислення, обмежена. Насправді більшості притаманний наочно-образний тип мислення. Тому для дитини апеляція до наочної очевидності цілком природна і виправдана.

Виходячи зі сказаного, в основу даного підручника покладено **наочно-дедуктивний принцип у поєднанні з частковою аксіоматизацією.**

Ми вважаємо, що мета вивчення геометрії в школі — це не тільки розвиток логічного мислення і вміння проводити доведення. Автори підручника ставлять більш широку мету: уточнити уявлення про елементарні геометричні об'єкти (точка, пряма, промінь, відрізок, кут), ознайомити з найважливішими властивостями базових фігур елементарної геометрії (трикутник, коло, чотирикутник тощо), розвинути потребу в доведенні, тобто закласти основи дедуктивного і евристичного мислення, а головне — **навчити учнів застосовувати властивості геометричних фігур у процесі розв'язування практичних і теоретичних задач**.

Сподіваємося, що ви оціните цей підручник як такий, що допоможе у реалізації даних цілей.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Давайте перетворимо шкільний курс геометрії на зрозумілий і привабливий предмет.

Бажаємо творчого натхнення і терпіння!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° — завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ — завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ — завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} — задачі для математичних гуртків і факультативів;

О━ — задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

⊙ — доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;

⊖ — доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;

⊛ — доведення теореми, не обов'язкове для вивчення;

▲ — закінчення доведення теореми.

Хоча геометрія — це новий шкільний предмет, проте на уроках математики ви вже знайомилися з азами цієї мудрої науки. Так, усі геометричні фігури, зображені на рисунку 5, вам добре відомі.

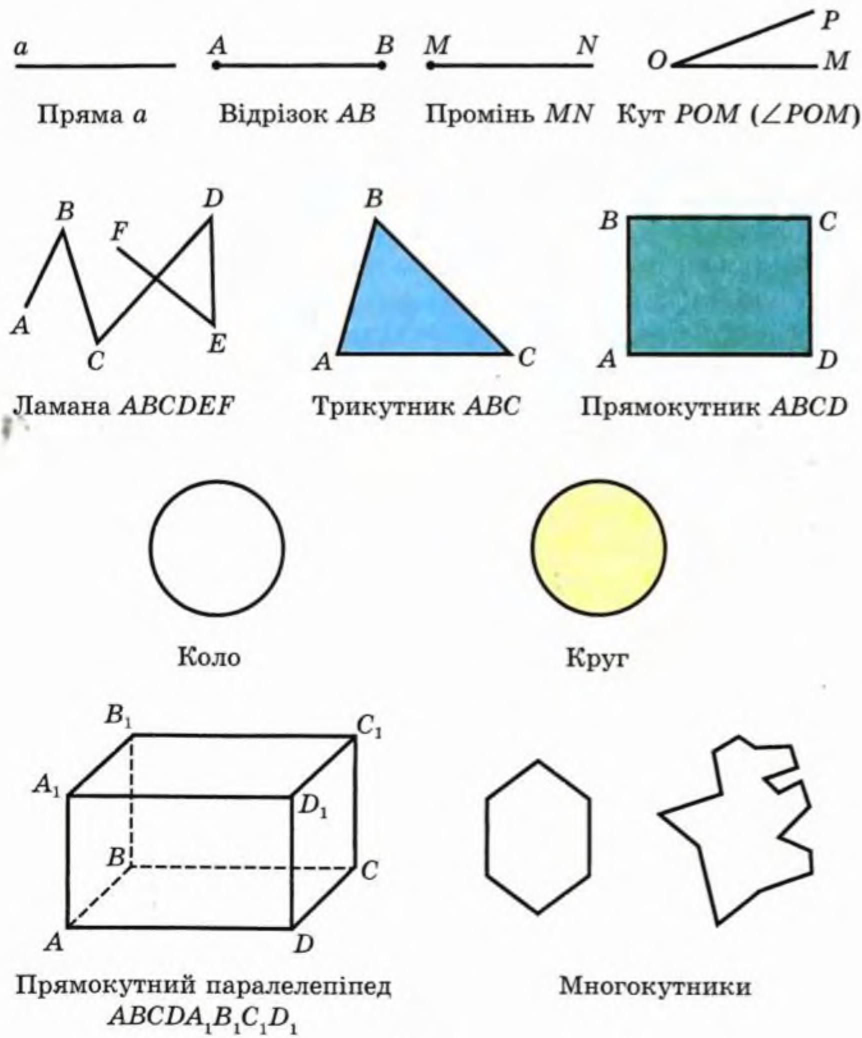


Рис. 5

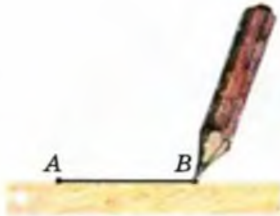


Рис. 6

Рис. 7

Ви вмієте за допомогою лінійки сполучати дві точки, отримуючи відрізок (рис. 6), за допомогою циркуля будувати коло (рис. 7), за допомогою лінійки і косинця будувати

Рис. 8

перпендикулярні та паралельні прямі (рис. 8), вимірювати довжину відрізка і будувати відрізок заданої довжини за допомогою лінійки з міліметровими поділками (рис. 9),

Рис. 9

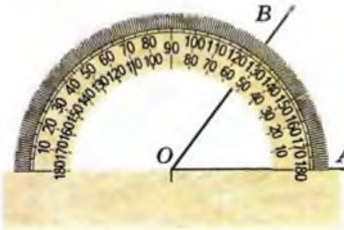


Рис. 10

знаходити величину кута і будувати кут заданої величини за допомогою транспортира (рис. 10), класифікувати трикутники (див. форзац).

Однак знати тільки «вигляд» фігури або вміти виконувати прості побудови — це лише початкові знання *науки про властивості геометричних фігур*, тобто *геометрії*.

При вивченні *систематичного курсу* геометрії ви поступово в певній послідовності вивчатимете властивості геометричних фігур, а отже, і самі фігури, як знайомі, так і нові. Це означає, що ви маєте навчитися за одними властивостями фігури встановлювати, а головне, **доводити** інші її властивості.

Шкільний курс геометрії традиційно поділяється на **планіметрію** і **стереометрію**. Планіметрія вивчає фігури на площині («планум» у перекладі з латинської — «площина»). У стереометрії вивчають фігури в просторі («стереос» у перекладі з грецької — «просторовий»).

Отже, ми приступаємо до вивчення планіметрії.

НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ §1

У цьому параграфі розглядаються знайомі вам з попередніх класів геометричні фігури, а саме: точки, прямі, відрізки, промені й кути.

Ви дізнаєтесь більше про властивості цих фігур. Деякі з цих властивостей навчитеся доводити. Слова «означення», «теорема», «аксіома» стануть для вас звичними, зрозумілими і часто вживаними.

1. Точки і прямі

Точка — найпростіша геометрична фігура. Це єдина фігура, яку неможливо розбити на частини. Наприклад, кожна з фігур, зображених на рисунку 11, розбита на частини. І навіть про фігуру, зображену на рисунку 12, яка складається з двох точок, можна сказати, що вона складається з двох частин: точки A і точки B.

Рис. 11

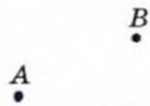


Рис. 12

На рисунку 13 зображено пряму a і дві точки A і B. Говорять, що *точка A належить прямій a*, або *точка A лежить на прямій a*, або *пряма a проходить через точку A* і, відповідно, *точка B не належить прямій a*, або *точка B не лежить на прямій a*, або *пряма a не проходить через точку B*.

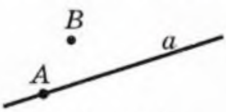


Рис. 13

Пряма — це геометрична фігура, яка має певні властивості.

Основна властивість прямої. **Через будь-які дві точки[1] можна провести пряму, і до того ж тільки одну.**

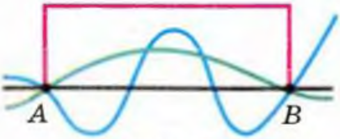


Рис. 14

Чому ця властивість прямої — основна?

Через точки A і B можна провести багато різних *ліній* (рис. 14). Пряма ж задається цими точками однозначно. У цьому й полягає суть основної властивості прямої.

Ця властивість дозволяє позначати пряму, називаючи дві будь-які її точки. Так, пряму, проведену через точки M і N, називають «пряма MN» (або «пряма NM»).

[1] Тут і далі, кажучи «дві точки», «три точки», «дві прямі» тощо, будемо вважати, що ці точки, прямі різні. Випадок їх суміщення будемо обумовлювати окремо.

Якщо треба пояснити зміст якогось поняття (терміна), то використовують **означення**. Наприклад:

1) годинником називають прилад для вимірювання часу;
2) геометрія — це наука, яка вивчає властивості фігур.

Означення є і в геометрії.

Означення. **Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.**

На рисунку 15 зображено прямі a і b, які перетинаються в точці O.

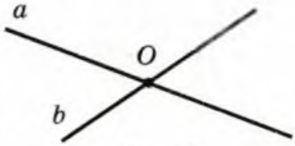


Рис. 15

Часто справедливість (істинність) якого-небудь факту доводиться встановлювати за допомогою *логічних міркувань*.

Розглянемо таку задачу. Відомо, що всі мешканці Геометричної вулиці — математики. Євген живе за адресою вул. Геометрична, 5. Чи є Євген математиком?

За умовою задачі Євген живе на Геометричній вулиці. А оскільки всі мешканці цієї вулиці математики, то Євген — математик.

Наведені в цій задачі логічні міркування називають **доведенням** того факту, що Євген — математик.

У математиці твердження, істинність якого встановлюється за допомогою доведення, називають **теоремою**.

Теорема 1.1. ***Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.***

Доведення. ⊙ Нехай прямі a і b, що перетинаються, крім спільної точки A, мають ще одну спільну точку B (рис. 16). Тоді через дві точки A і B проходять дві прямі. А це суперечить основній властивості прямої. Отже, припущення про існування другої точки перетину прямих a і b неправильне. ▲

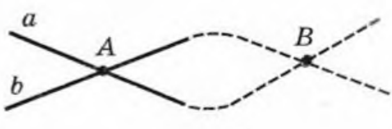


Рис. 16

1. Яку фігуру не можна розбити на частини?
2. Сформулюйте основну властивість прямої.
3. Яка властивість прямої дозволяє позначити її, називаючи будь-які дві точки прямої?
4. Для чого використовують означення?
5. Які дві прямі називають такими, що перетинаються?
6. Як називають твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення?
7. Сформулюйте теорему про перетин двох прямих.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1.° Проведіть пряму, позначте її буквою m. Позначте точки A і B, які лежать на цій прямій, і точки C, D, E, які не лежать на ній.

2.° Позначте точки M і K та проведіть через них пряму. Позначте на цій прямій точку E. Запишіть усі можливі позначення отриманої прямої.

3.° Проведіть прямі a і b так, щоб вони перетиналися. Позначте точку їх перетину буквою C. Чи належить точка C прямій a? прямій b?

4.° Позначте три точки так, щоб вони не лежали на одній прямій, і через кожну пару точок проведіть пряму. Скільки утворилося прямих?

5.° Позначте: 1) чотири точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій; 2) п'ять точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій.

6.• Проведіть три прямі так, щоб кожні дві з них перетиналися. Позначте точки перетину цих прямих. Скільки можна отримати точок перетину?

7.• Позначте 4 точки так, щоб при проведенні прямої через кожні дві з них на рисунку утворилося:

1) 1 пряма;
2) 4 прямих;
3) 6 прямих.

Проведіть ці прямі.

ВПРАВИ

8.° Користуючись рисунком 17:

1) визначте, чи перетинаються прямі a і MK;
2) укажіть усі позначені точки, які належать прямій a; прямій MK;
3) укажіть усі позначені точки, які не належать прямій a; прямій MK;
4) укажіть усі позначені точки, які належать прямій a, але не належать прямій MK.

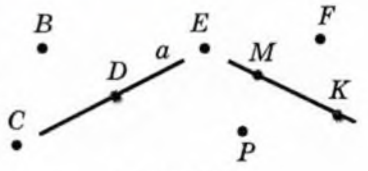


Рис. 17

9.° Користуючись рисунком 18, укажіть:

1) які з позначених точок належать прямій p, а які не належать їй;
2) яким прямим належить кожна з точок A, B, C, D і E;
3) які прямі проходять через кожну з точок C, B і A;
4) у якій точці перетинаються прямі k і p, m і k;
5) у якій точці перетинаються три прямі.

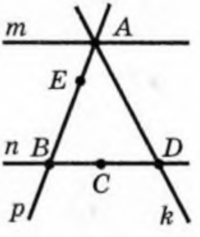


Рис. 18

10.° Точка C належить прямій AB. Чи є різними прямі AB і AC? Відповідь обґрунтуйте.

11.° Провели 4 прямі, кожні 2 з яких перетинаються, причому через кожну точку перетину проходить тільки 2 прямі. Скільки точок перетину при цьому утворилося?

12.•• Як треба розташувати 6 точок, щоб вони визначали 6 прямих?

13.•• Дану пряму перетинають 4 прямі. Скільки може бути точок перетину цих прямих з даною?

14.•• Провели 4 прямі, кожні 2 з яких перетинаються. Скільки точок перетину може утворитися?

15.•• Провели 5 прямих, кожні 2 з яких перетинаються. Яка найменша можлива кількість точок перетину цих прямих? Яка найбільша кількість точок перетину може бути?

16.* Чи можна провести 6 прямих і позначити на них 11 точок так, щоб на кожній прямій було позначено рівно 4 точки?

17.* На площині проведено 3 прямі. На першій прямій позначено 5 точок, на другій — 7 точок, а на третій — 3 точки. Яка найменша кількість точок може бути позначена?

18.* Чи можна позначити кілька точок і провести кілька прямих так, щоб на кожній прямій лежало рівно 3 позначені точки і через кожну точку проходило рівно 3 з проведених прямих?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

19. З фігур, що мають вигляд, як на рисунку 19, складіть квадрат.

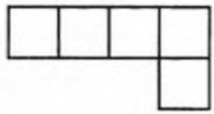


Рис. 19

2. Відрізок і його довжина

На рисунку 20 зображено пряму a, яка проходить через точки A і B. Ці точки обмежують частину прямої a, яку виділено червоним кольором. Таку частину прямої разом з точками A і B називають **відрізком**, а точки A і B — **кінцями** цього відрізка.

Зрозуміло, що для будь-яких двох точок M і N існує *єдиний* відрізок, для якого ці точки є кінцями (рис. 21), тобто *відрізок своїми кінцями задається однозначно*. Тому відрізок на рисунку 21 позначають так: MN або NM (читають: «відрізок MN» або «відрізок NM»).

На рисунку 22 зображено відрізок AB і точку X, яка належить цьому відрізку, проте не збігається з жодним його кінцем. Точку X називають **внутрішньою** точкою відріз-

Рис. 20

Рис. 21

Рис. 22

Рис. 23

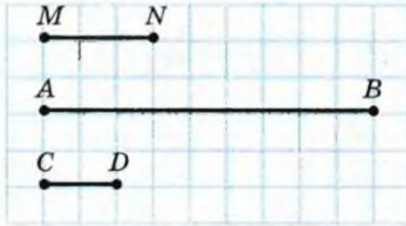


Рис. 24

ка AB. У такому випадку також кажуть, що точка X **лежить між** точками A і B.

Таким чином, відрізок AB складається з точок A і B, а також усіх точок прямої AB, які лежать між точками A і B.

Означення. **Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити.**

На рисунку 23 зображено рівні відрізки AB і CD. Пишуть: $AB = CD$.

Ви знаєте, що кожний відрізок має певну довжину і для її вимірювання треба обрати **одиничний відрізок**. За одиничний можна обрати будь-який відрізок.

Наприклад, вважатимемо відрізок MN на рисунку 24 одиничним. Цей факт записують так: $MN = 1$ од. Тоді довжину відрізка AB вважають рівною 3 одиницям довжини і записують $AB = 3$ од. або просто $AB = 3$ і кажуть: «відрізок AB дорівнює 3». Для відрізка CD маємо: $CD = \frac{2}{3}$.

На практиці найчастіше використовують такі одиничні відрізки: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Залежно від вибору одиниці довжини змінюється **числове значення довжини** відрізка. Наприклад, на рисунку 25 $AB = 17$ мм, або $AB = 1{,}7$ см, або $AB = 0{,}17$ дм і т. д.

У виробництві та в побуті використовують різноманітні прилади для вимірювання довжини відрізка: лінійку з поділками (*а*), рулетку (*б*), штангенциркуль (*в*), мікрометр (*г*), польовий циркуль (*д*) (рис. 26).

Зрозуміло, що *рівні відрізки мають рівні довжини*, і навпаки, *якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.*

Рис. 25

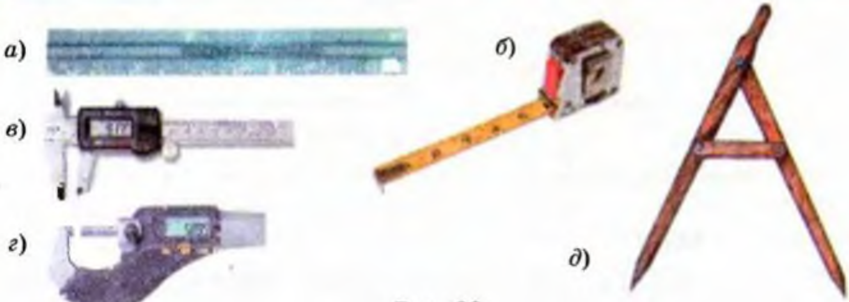


Рис. 26

Якщо довжина відрізка AB більша за довжину відрізка MN, як, наприклад, на рисунку 24, то говорять, що відрізок AB більший за відрізок MN, і записують $AB > MN$.

Надалі, говорячи «сума відрізків», матимемо на увазі суму довжин цих відрізків.

Основна властивість довжини відрізка. **Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB, то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB, тобто**

$$AB = AC + CB.$$

Якщо точка C не належить відрізку AB, то

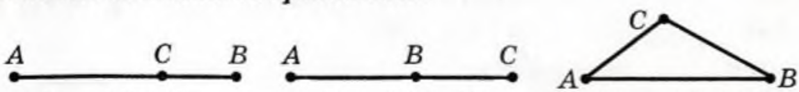
$$AB < AC + CB.$$

На рисунку 27 проілюстровано цю властивість, суть якої полягає в тому, що найкоротший шлях з точки A до точки B проходить уздовж відрізка AB. Тому природно прийняти таке

Означення. **Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB.**

Якщо точки A і B збігаються, то відстань між ними вважають рівною нулю.

Теорема 2.1. ***Якщо три точки A, B і C такі, що виконується рівність $AB = AC + CB$, то точка C є внутрішньою точкою відрізка AB.***



$AB = AC + CB$ $\quad$ $AB < AC + CB$ $\quad$ $AB < AC + CB$

Рис. 27

Доведення. ⊙ Нехай точка C не є внутрішньою точкою відрізка AB. За домовленістю, яку прийнято в п. 1 (див. сноску на с. 12), точки A, B і C різні, тобто точка C не збігається з жодним кінцем відрізка AB. Отже, точка C не належить відрізку AB. Тоді з основної властивості довжини відрізка випливає нерівність $AB < AC + CB$, яка суперечить умові. Отже, припущення, що точка C не є внутрішньою точкою відрізка AB, неправильне. ▲

Означення. Серединою відрізка AB називають таку його точку C, що $AC = CB$.

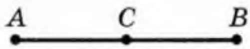


Рис. 28

На рисунку 28 точка C — середина відрізка AB.

Приклад. Точки A, B і C належать одній прямій, $AB = 8$ см, відрізок AC на 2 см довший за відрізок BC. Знайдіть відрізки AC і BC[1].

Рис. 29

Розв'язання. В умові не вказано, яке взаємне розміщення даних точок на прямій. Тому розглянемо три можливих випадки.

1) Точка B — внутрішня точка відрізка AC (рис. 29). Тоді відрізок AC довший за відрізок BC на довжину відрізка AB, тобто на 8 см. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

2) Точка C — внутрішня точка відрізка AB (рис. 30). У цьому випадку $AC + BC = AB$. Нехай $BC = x$ см, тоді $AC = (x + 2)$ см. Маємо:

$$x + 2 + x = 8;$$
$$x = 3.$$

Рис. 30

Отже, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см.

3) Точка A — внутрішня точка відрізка BC (рис. 31). У цьому випадку $AB + AC = BC$ і тоді $AC < BC$. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

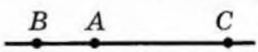


Рис. 31

Відповідь: $AC = 5$ см, $BC = 3$ см.

---

[1] Тут і далі замість «Знайдіть довжину відрізка...» говоритимемо просто «Знайдіть відрізок...».

1. Скільки існує відрізків, кінцями яких є дві дані точки?
2. З яких точок складається відрізок *AB*?
3. Які два відрізки називають рівними?
4. Які довжини мають рівні відрізки?
5. Що можна сказати про відрізки, які мають рівні довжини?
6. Сформулюйте основну властивість довжини відрізка.
7. Чи можна будь-який відрізок вибрати за одиничний?
8. Що називають відстанню між двома точками?
9. Чому дорівнює відстань між двома точками, що збігаються?
10. Сформулюйте умову того, що точка *C* є внутрішньою точкою відрізка *AB*.
11. Яку точку називають серединою відрізка *AB*?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

20.° Позначте дві точки A і B та проведіть через них пряму. Позначте точки C, D і E, які належать відрізку AB, і точки F, M і K, які не належать відрізку AB, але належать прямій AB.

21.° Проведіть пряму і позначте на ній 3 точки. Скільки утворилося відрізків?

22.° Позначте на прямій точки A, B, C і D так, щоб точка C лежала між точками A і B, а точка D — між точками B і C.

23.° Позначте на прямій точки A, B і C так, щоб виконувалась: 1) рівність $AC = AB + BC$; 2) нерівність $AC < AB + BC$.

24.° Порівняйте на око відрізки AB і CD (рис. 32). Перевірте свій висновок вимірюванням.

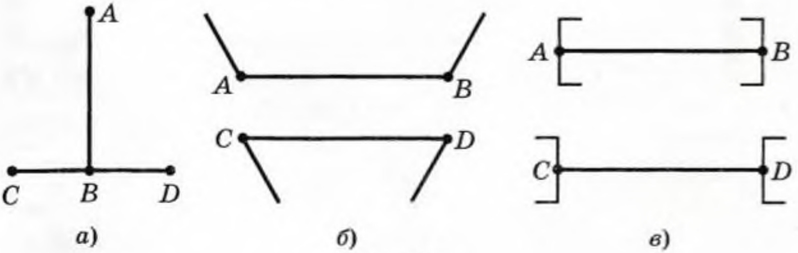


Рис. 32

25.° Порівняйте на око відрізки AB і BC (рис. 33). Перевірте свій висновок вимірюванням.

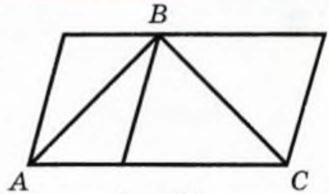


Рис. 33

ВПРАВИ

26.° Назвіть усі відрізки, які зображено на рисунку 34.

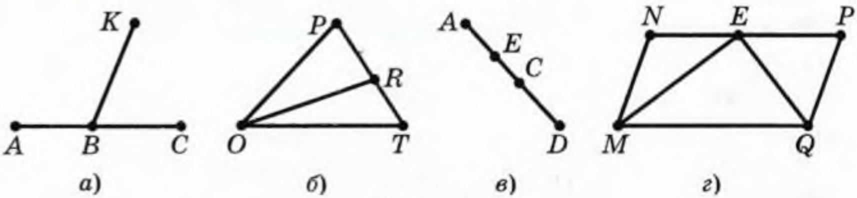


Рис. 34

27.° Знайдіть довжину кожного з відрізків, зображених на рисунку 35, якщо одиничний відрізок дорівнює відрізку: 1) AB; 2) MN.

28.° Яка з точок, позначених на рисунку 36, лежить між двома іншими? Запишіть відповідну рівність, яка випливає з основної властивості довжини відрізка, для відрізків ME, MP і EP.

29.° Між якими точками лежить точка B (рис. 37)? Для кожного випадку запишіть відповідну рівність, яка випливає з основної властивості вимірювання відрізків.

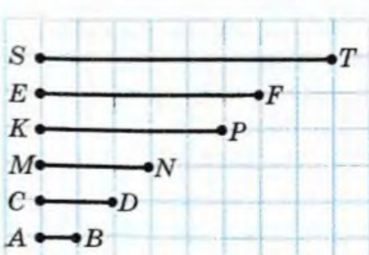


Рис. 35

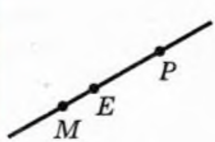


Рис. 36

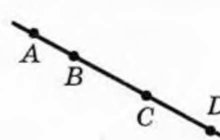


Рис. 37

30.° Точка D — внутрішня точка відрізка ME. Знайдіть:

1) відстань між точками M і E, якщо $MD = 1{,}8$ дм, $DE = 2{,}6$ дм;
2) довжину відрізка MD, якщо $ME = 42$ мм, $DE = 1{,}5$ см.

31.° Точки A, B і C розміщено так, що $AC + AB = BC$. Чи лежить якась з цих точок між двома іншими? Якщо так, то вкажіть, яка саме, і зробіть рисунок.

32.° Точки A, B і C лежать на одній прямій (рис. 38). Які з наступних тверджень правильні:

1) $AB + BC = AC$;
2) $AC + AB > BC$;
3) $AB + BC > AC$;
4) $AC - AB = BC$?

Рис. 38

33.° Чи лежать точки P, R і T на одній прямій, якщо:

1) $PR = 1{,}8$ см, $PT = 3{,}4$ см, $RT = 1{,}6$ см;
2) $PR = 2{,}4$ см, $PT = 5{,}6$ см, $RT = 8{,}2$ см?

У випадку позитивної відповіді вкажіть, яка точка лежить між двома іншими. Відповідь обґрунтуйте.

34.° Чи може точка E лежати між точками C і D, якщо $CE = 6{,}3$ см, $ED = 2{,}7$ см, $CD = 8{,}9$ см? Відповідь обґрунтуйте.

35.° Точка K є серединою відрізка MN. Чи можна сумістити накладанням:

1) відрізки MK і KN; 2) відрізки MK і MN?

36.° Точка K — середина відрізка MN, точка E — середина відрізка KN, $EN = 5$ см. Знайдіть довжини відрізків MK, ME і MN.

37.° Точка C — внутрішня точка відрізка AB, довжина якого дорівнює 20 см. Знайдіть довжини відрізків AC і BC, якщо:

1) довжина відрізка AC на 5 см більша за довжину відрізка BC;
2) довжина відрізка AC у 4 рази менша від довжини відрізка BC;
3) $AC : BC = 9 : 11$.

38.° Точка K належить відрізку CD, довжина якого дорівнює 28 см. Знайдіть довжини відрізків CK і KD, якщо:

1) довжина відрізка CK на 4 см менша від довжини відрізка KD;

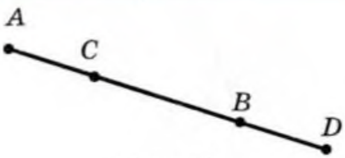


Рис. 39

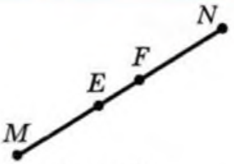


Рис. 40

Рис. 41

2) довжина відрізка CK у 6 разів більша за довжину відрізка KD;

3) $CK : KD = 3 : 4$.

39.• Відрізки AB і CD рівні (рис. 39). Доведіть, що відрізки AC і BD теж рівні.

40.• Відрізки ME і FN рівні (рис. 40). Доведіть, що $MF = EN$.

41.• Точка C ділить відрізок AB, довжина якого дорівнює a, на два нерівних відрізки. Знайдіть відстань між серединами відрізків AC і BC.

42.• Точки A, B і C лежать на одній прямій. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $AB = 24$ см, $AC = 32$ см. Скільки розв'язків має задача?

43.•• На прямій m (рис. 41) знайдіть таку точку C, щоб сума відстаней від неї до точок A і B була найменшою. Відповідь обґрунтуйте.

44.•• На прямій позначено точки A, B і C так, що $AB = 15$ см, $AC = 9$ см. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і AC.

45.•• Довжина відрізка EF дорівнює 12 см. Знайдіть на прямій EF усі точки, для яких сума відстаней до кінців відрізка EF дорівнює: 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 10 см.

46.•• Через точки A і B проведено пряму. Де на цій прямій лежить точка C, відстань від якої до точки B у 2 рази більша за її відстань від точки A?

47.•• Відрізок, довжина якого дорівнює 32 см, поділили на три нерівних відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 18 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.

48.* Яку найменшу кількість внутрішніх точок треба позначити на відрізках, зображених на рисунку 42, щоб на кожному з них було по дві позначені внутрішні точки?

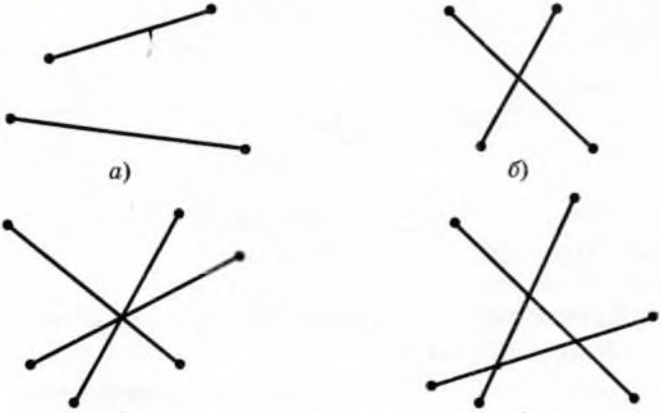


Рис. 42

49.* Скільки точок треба позначити між точками A і B, щоб разом з відрізком AB утворилося 6 відрізків?

50.* На шкалі лінійки позначено лише 0 см, 5 см і 13 см (рис. 43). Як, користуючись цією лінійкою, можна побудувати відрізок завдовжки: 1) 3 см; 2) 2 см; 3) 1 см?

51.* На шкалі лінійки позначено лише 0 см, 7 см і 11 см. Як, користуючись цією лінійкою, можна побудувати відрізок завдовжки:

1) 8 см; 2) 5 см?

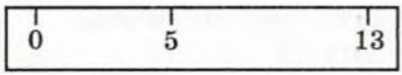


Рис. 43

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

52. З прямокутників розмірами 1×1, 1×2, 1×3, ..., 1×13 складіть прямокутник, кожна сторона якого більша за 1.

3. Промінь. Кут. Вимірювання кутів

Проведемо пряму AB і позначимо на ній довільну точку O. Ця точка розбиває пряму на дві частини, які виділено на рисунку 44 різними кольорами. Кожну з цих частин разом з точкою O називають **променем** або **півпрямою**. Точку O називають **початком** променя.

Рис. 44

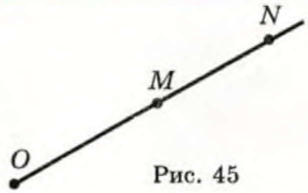


Рис. 45

Кожний з променів, які зображено на рисунку 44, складається з точки O і всіх точок прямої AB, що *лежать по один бік від точки O*.

Це дає можливість позначати промінь двома його точками: першою обов'язково вказують початок променя, другою — будь-яку іншу точку, яка належить променю. Так, промінь з початком у точці O (рис. 45) можна позначити OM або ON.

Промені OA і OB (рис. 44) доповнюють один одного до прямої. Також можна сказати, що об'єднанням цих променів є пряма.

О з н а ч е н н я. **Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають д о п о в н я л ь н и м и.**

Наприклад, промені BC і BA — доповняльні (рис. 46). Їх об'єднанням є пряма AC. Зауважимо, що, об'єднавши промені CA і AC, ми також отримаємо пряму AC. Проте ці промені не вважають доповняльними: у них немає спільного початку.

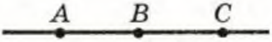


Рис. 46

На рисунку 47, *а* зображено фігуру, яка складається з двох променів OA і OB, що мають спільний початок. Ця фігура ділить площину на дві частини, які виділено різни-

а)

б)

Рис. 47

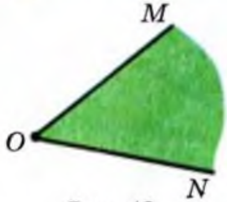


Рис. 48

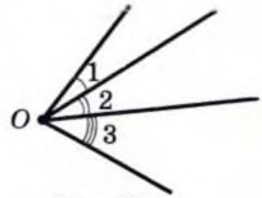


Рис. 49

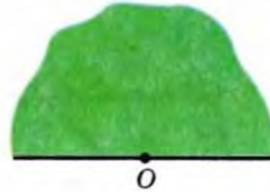


Рис. 50

ми кольорами. Кожну з цих частин разом з променями OA і OB називають **кутом**.

Промені OA і OB називають **сторонами** кута, а точку O — **вершиною** кута.

Як бачимо, кути на рисунку 47, *а* зовні суттєво відрізняються. Ця відмінність визначена такою властивістю. На променях OA і OB оберемо довільні точки M і N (рис. 47, *б*). Відрізок MN належить «зеленому» куту, а «синьому» куту належать лише кінці відрізка.

Надалі, говорячи «кут», матимемо на увазі лише той, який містить будь-який відрізок з кінцями на його сторонах. Ситуації, коли розглядатимуться кути, для яких ця умова не виконується, будуть спеціально обумовлені.

Є кілька способів позначення кутів. Кут на рисунку 48 можна позначити так: $\angle MON$, або $\angle NOM$, або просто $\angle O$.

На рисунку 49 зображено кілька кутів, які мають спільну вершину. Тут позначення кута однією буквою може призвести до плутанини. У таких випадках кути зручно позначати за допомогою цифр: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (читають відповідно: «кут один», «кут два», «кут три»).

Означення. **Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим** (рис. 50).

Рис. 51

Будь-яка пряма ділить площину на дві **півплощини**, для яких ця пряма є **межею** (рис. 51). Вважають, що пряма належить кожній з двох півплощин, для яких вона є межею. А оскільки сторони розгорнутого кута утворюють пряму, то можна сказати, що розгорнутий кут — це півплощина, на межі якої позначено точку — вершину кута.

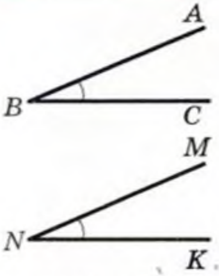


Рис. 52

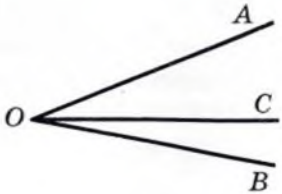


Рис. 53

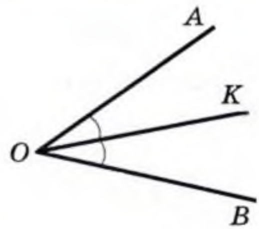


Рис. 54

Означення. **Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити.**

На рисунку 52 зображено рівні кути ABC і MNK. Пишуть: $\angle ABC = \angle MNK$.

Зрозуміло, що всі розгорнуті кути рівні.

На рисунку 53 зображено кут AOB і промінь OC, який належить цьому куту, проте відмінний від його сторін. Говорять, що *промінь OC проходить між сторонами кута AOB* і ділить його на два кути AOC і COB.

Означення. **Бісектрисою кута називають промінь з початком у його вершині, який ділить цей кут на два рівних кути.**

На рисунку 54 промінь OK — бісектриса кута AOB. Отже, $\angle AOK = \angle KOB$.

Ви знаєте, що кожний кут має величину і для її вимірювання треба обрати одиницю виміру — **одиничний кут.** Обрати його можна, наприклад, так: розділимо розгорнутий кут на 180 рівних кутів (рис. 55). Кут, утворений двома сусід-

Рис. 55

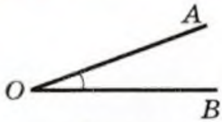


Рис. 56

німи променями, приймають за одиничний і називають **градусом**. Записують 1°.

Наприклад, градусна міра (величина) кута AOB (рис. 56) дорівнює 20° (цей факт легко встановити за допомогою транспортира). У цьому випадку говорять: «кут AOB дорівнює 20°» і записують $\angle AOB = 20°$.

Очевидно, що градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°, або коротко: розгорнутий кут дорівнює 180°.

На практиці, крім транспортира, використовують також прилади спеціального призначення: астролябію (рис. 57), теодоліт (рис. 58) — для вимірювання на місцевості, бусоль (рис. 59) — в артилерії, секстант (рис. 60) — у морській справі.

Рис. 57

Рис. 58

Рис. 59

Рис. 60

Для більш точних результатів вимірювання кутів використовують частини градуса. $\frac{1}{60}$ градуса дорівнює одній мінуті (1′), тобто $1° = 60'$. $\frac{1}{60}$ мінути називають секундою (1″), отже, $1' = 60''$. Наприклад, запис $23°15'11''$ означає, що градусна міра кута становить 23 градуси 15 мінут 11 секунд.

Існують також інші одиниці виміру кутів: наприклад, у морській справі користуються одиницею 1 румб ($11^\circ 15'$).

Означення. **Кут, градусна міра якого дорівнює 90°, називають прямим. Кут, градусна міра якого менша від 90°, називають гострим. Кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°, називають тупим.**

На рисунку 61 зображено кути кожного з трьох видів.

Гострий кут

Прямий кут

Тупий кут

Рис. 61

Зрозуміло, що *рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.*

Якщо величина кута ABC більша за величину кута MNP, то говорять, що «кут ABC більший за кут MNP», і записують $\angle ABC > \angle MNP$.

Надалі, говорячи «сума кутів», матимемо на увазі суму величин цих кутів.

Основна властивість величини кута. **Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB, то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$** (рис. 62).

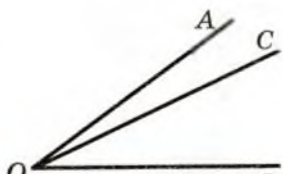


Рис. 62

У цьому пункті ви ознайомилися з деякими приладами для вимірювання кутів. На рисунку 63 зображено старовинний кутомірний прилад астролябію (у перекладі з грецької — «хапання зірки»). Багато століть саме такий прилад допомагав мореплавцям знаходити шлях, а астрономам — визначати положення зірок.

Рис. 63

Приклад. На рисунку 64 $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118^\circ$. Знайдіть кут AMB[1].

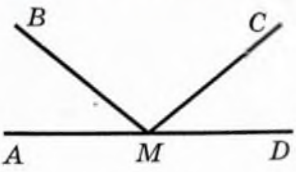


Рис. 64

Розв'язання.

$\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$,

$\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC$.

Оскільки $\angle AMC = \angle DMB$, то $\angle AMB = \angle DMC$.

$\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180^\circ$.

Тоді $2\angle AMB + 118^\circ = 180^\circ$; $\angle AMB = 31^\circ$.

Відповідь: 31°.

1. Як називають фігуру, утворену точкою прямої та однією з частин, на які ця точка ділить пряму? Як при цьому називають дану точку?
2. Як позначають промінь?
3. Які два промені називають доповняльними?
4. Як називають фігуру, утворену двома променями зі спільним початком та однією з частин, на які ці промені ділять площину? Як при цьому називають дані промені? їх спільний початок?
5. Як позначають кут?
6. Який кут називають розгорнутим?
7. Як називають частини, на які пряма ділить площину?
8. Які два кути називають рівними?
9. Що називають бісектрисою кута?
10. У яких одиницях вимірюють кути?
11. Яка градусна міра розгорнутого кута?
12. Як називають кут, градусна міра якого дорівнює 90°?
13. Який кут називають гострим?
14. Який кут називають тупим?
15. Які величини мають рівні кути?
16. Що можна сказати про кути, які мають рівні величини?
17. Сформулюйте основну властивість величини кута.

[1] Тут і далі замість «Знайдіть градусну міру кута...» говоритимемо просто «Знайдіть кут...».

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

53.° Проведіть два промені AB і AC так, щоб вони мали спільний початок і не були доповняльними. Побудуйте до кожного з цих променів доповняльний. Позначте і запишіть усі утворені промені.

54.° Проведіть відрізок AB і два промені AB і BA. Чи є ці промені доповняльними? Відповідь обґрунтуйте.

55.° Накресліть кут MNE і проведіть промені NA і NC між його сторонами. Запишіть усі кути, що утворилися.

56.° Проведіть промені OA, OB, OC і OD так, щоб промінь OC проходив між сторонами кута AOB, а промінь OD — між сторонами кута BOC.

57.• Накресліть два промені так, щоб спільна частина їх була: 1) точкою; 2) відрізком; 3) променем.

ВПРАВИ

58.° Пряма EF перетинає прямі AB і CD (рис. 65). Укажіть:
1) усі промені, що утворилися, з початком у точці M;
2) усі пари доповняльних променів з початком у точці K.

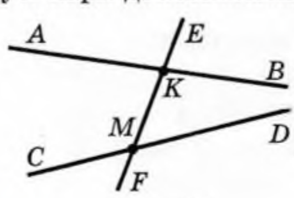


Рис. 65

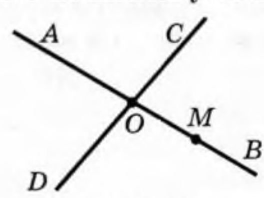


Рис. 66

59.° Запишіть усі промені, які зображено на рисунку 66. Укажіть, які з них є доповняльними променями з початком у точці O.

60.° Чи можна кут, який зображено на рисунку 67, позначити:

1) $\angle ABC$;
2) $\angle ACD$;
3) $\angle ADC$;
4) $\angle DCA$;
5) $\angle ACE$;
6) $\angle BCD$;
7) $\angle BDE$;
8) $\angle ECD$?

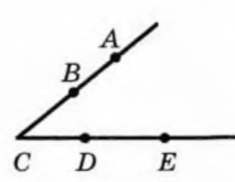


Рис. 67

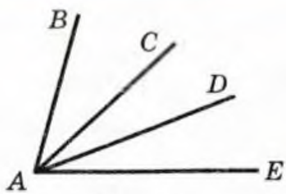


Рис. 68

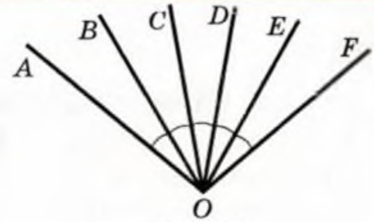


Рис. 69

61.° Назвіть усі кути, які зображено на рисунку 68.

62.° На рисунку 69 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$.

1) Який промінь є бісектрисою кута AOC? кута DOF? кута BOF?

2) Бісектрисою яких кутів є промінь OC?

63.° Промінь OC — бісектриса кута AOB. Чи можна сумістити:

1) кути AOC і BOC; 2) кути AOC і AOB?

64.° Промінь BD ділить кут ABC на два кути. Знайдіть:

1) кут ABC, якщо $\angle ABD = 54^\circ$, $\angle CBD = 72^\circ$;

2) кут CBD, якщо $\angle ABC = 158^\circ$, $\angle ABD = 93^\circ$.

65.° Промінь OP проходить між сторонами кута MOK. Знайдіть кут MOP, якщо $\angle MOK = 172^\circ$, $\angle POK = 85^\circ$.

66.° Чи правильне твердження:

1) будь-який кут, що менший від тупого, — гострий;

2) кут, що менший від розгорнутого, — тупий;

3) половина тупого кута — гострий кут;

4) сума двох гострих кутів більша за прямий кут;

5) половина розгорнутого кута більша за будь-який гострий кут;

6) кут, що більший за прямий, — тупий?

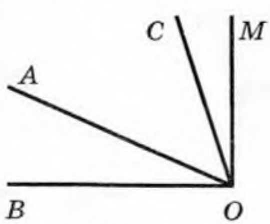


Рис. 70

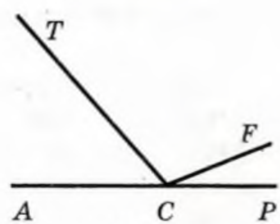


Рис. 71

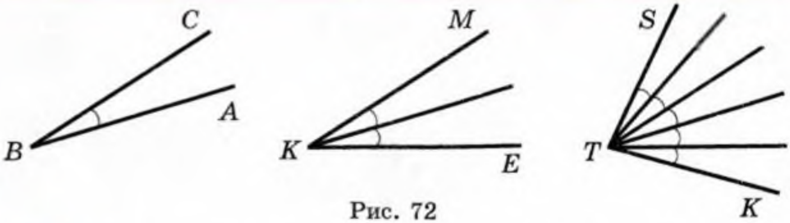


Рис. 72

67.• З вершини прямого кута BOM (рис. 70) проведено два промені OA і OC так, що $\angle BOC = 74^\circ$, $\angle AOM = 62^\circ$. Знайдіть кут AOC.

68.° З вершини розгорнутого кута ACP (рис. 71) проведено два промені CT і CF так, що $\angle ACF = 158^\circ$, $\angle TCP = 134^\circ$. Знайдіть кут TCF.

69.° Кут CEF дорівнює 152°, промінь EM проходить між його сторонами, кут CEM на 18° більший за кут FEM. Знайдіть кути CEM і FEM.

70.° Промінь AK належить куту BAD. Знайдіть кути BAK і DAK, якщо кут BAK у 7 разів менший від кута DAK і $\angle BAD = 72^\circ$.

71.° На рисунку 72 рівні кути позначено дужкою. Знайдіть кожний із зображених кутів, якщо за одиничний кут взято: 1) кут ABC; 2) кут MKE.

72.• Точки A, B і C розміщено так, що $AB = 3{,}2$ см, $AC = 4{,}8$ см, $BC = 8$ см. Чи є промені AB і AC доповняльними?

73.• На рисунку 73 кут ABC — прямий, $\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC$, промені BD і BK — бісектриси кутів ABE і FBC відповідно. Знайдіть кут DBK.

74.• На рисунку 74 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$, промінь OB — бісектриса кута AOC, промінь OE — бісектриса кута DOF, $\angle BOE = 72^\circ$. Знайдіть кут AOF.

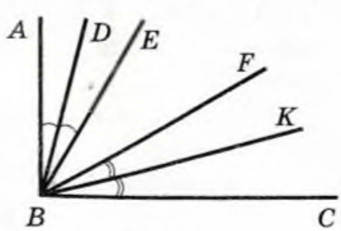


Рис. 73

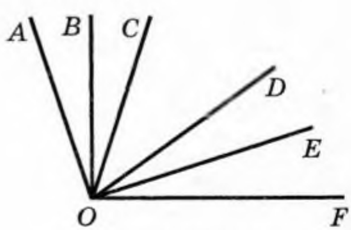


Рис. 74

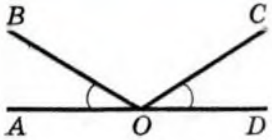


Рис. 75

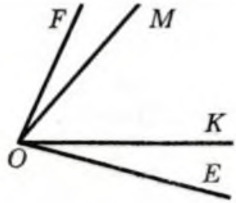


Рис. 76

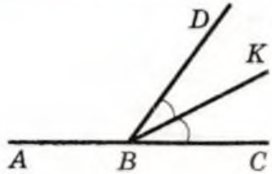


Рис. 77

75.• На рисунку 75 $\angle AOB = \angle DOC$. Чи є ще на цьому рисунку рівні кути? Відповідь обґрунтуйте.

76.• Кути FOK і MOE рівні (рис. 76). Чи рівні кути FOM і KOE?

77.• Промінь BK є бісектрисою кута CBD, $\angle ABK = 146^\circ$ (рис. 77). Знайдіть кут CBD.

78.• Промінь BK є бісектрисою кута CBD, $\angle CBD = 54^\circ$ (рис. 77). Знайдіть кут ABK.

79.• На скільки градусів повертається за 1 хв: 1) хвилинна стрілка? 2) годинна стрілка?

80.• Знайдіть кут між стрілками годинника, якщо вони показують: 1) 3 год; 2) 6 год; 3) 4 год; 4) 11 год; 5) 7 год.

81.•• Кут ABC дорівнює 30°, кут CBD — 80°. Знайдіть кут ABD. Скільки розв'язків має задача?

82.•• Знайдіть кут MOK, якщо $\angle MON = 120^\circ$, $\angle KON = 43^\circ$. Скільки розв'язків має задача?

83.•• Промінь, проведений з вершини прямого кута, ділить його на два кути. Доведіть, що кут між бісектрисами кутів, що утворилися, дорівнює 45°.

84.•• Як, маючи шаблон кута, який дорівнює 70°, побудувати кут, який дорівнює 40°?

85.•• Як, маючи шаблон кута, який дорівнює 40°, побудувати кут, який дорівнює: 1) 80°; 2) 160°; 3) 20°?

86.* Як, використовуючи шаблон кута, який дорівнює 13°, побудувати кут, який дорівнює 2°?

87.* Як побудувати кут, який дорівнює 1°, використовуючи шаблон кута, який дорівнює: 1) 19°; 2) 7°?

88.* Проведіть 6 прямих, що перетинаються в одній точці. Чи правильно, що серед кутів, які при цьому утворилися, є кут, який менший від 31°?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

89. Не відриваючи олівця від паперу, проведіть через 9 точок (рис. 78) 4 відрізки (повертатися у вихідну точку не обов'язково).

Рис. 78

4. Суміжні і вертикальні кути

Означення. **Два кути називають суміжними, якщо у них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.**

На рисунку 79 кути MOE і EON — суміжні.

Теорема 4.1. ***Сума суміжних кутів дорівнює* 180°.**

Доведення. ⊙ Нехай кути AOC і COB — суміжні (рис. 80). Треба довести, що $\angle AOC + \angle COB = 180°$.

Оскільки кути AOC і COB суміжні, то промені OA і OB є доповняльними. Тоді $\angle AOB$ — розгорнутий. Отже, $\angle AOB = 180°$. Промінь OC належить куту AOB. За основною властивістю величини кута маємо: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180°$. ▲

Означення. **Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.**

На рисунку 81 кути AOB і COD — вертикальні.

Очевидно, що при перетині двох прямих утворюються дві пари вертикальних кутів. На рисунку 81 кути AOC і BOD — також вертикальні.

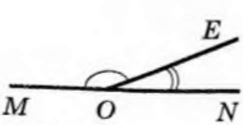


Рис. 79

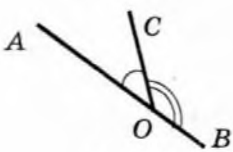


Рис. 80

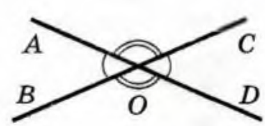


Рис. 81

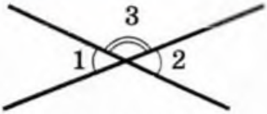


Рис. 82

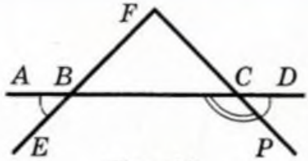


Рис. 83

Теорема 4.2. ***Вертикальні кути рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 82 кути 1 і 2 — вертикальні. Треба довести, що $\angle 1 = \angle 2$.

Кожний з кутів 1 і 2 суміжний з кутом 3. Тоді $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ і $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Звідси $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3$ і $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3$. Градусні міри кутів 1 і 2 рівні, а отже, рівні й самі кути. ▲

Приклад. На рисунку 83 $\angle ABE = \angle DCP$. Доведіть, що $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$.

Розв'язання. $\angle DCP + \angle BCP = 180^\circ$, оскільки $\angle DCP$ і $\angle BCP$ — суміжні;

$\angle DCP = \angle ABE$ за умовою;

кути ABE і FBC рівні як вертикальні.

Отже, $\angle DCP = \angle FBC$, і тоді $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$.

?

1. Які два кути називають суміжними?
2. Чому дорівнює сума суміжних кутів?
3. Які два кути називають вертикальними?
4. Сформулюйте теорему про властивість вертикальних кутів.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

90.° Накресліть три кути: гострий, прямий і тупий. Для кожного з них побудуйте суміжний кут.

91.° Накресліть два нерівних суміжних кути так, щоб їх спільна сторона була вертикальною.

ВПРАВИ

92.° Укажіть пари суміжних кутів (рис. 84).

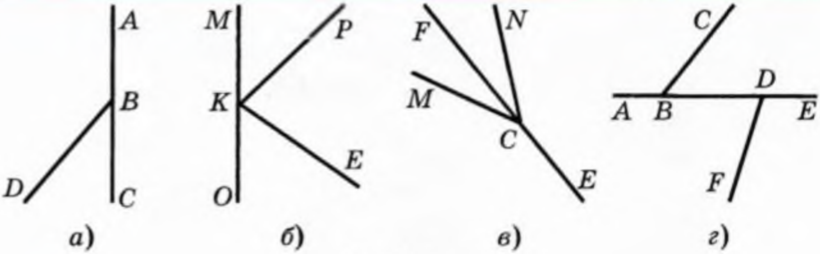


Рис. 84

93.° Чи є кути ABC і DBE вертикальними (рис. 85)?

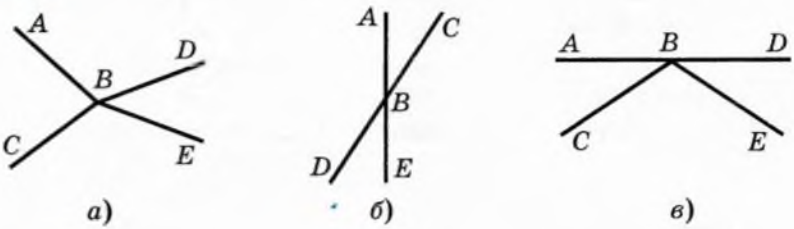


Рис. 85

94.° Скільки пар суміжних кутів зображено на рисунку 86? Назвіть їх. Укажіть пари вертикальних кутів.

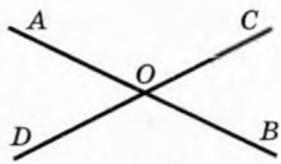


Рис. 86

95.° Чи можуть два суміжних кути дорівнювати: 1) 24° і 156°; 2) 63° і 107°? Відповідь обґрунтуйте.

96.° Знайдіть кут, суміжний з кутом:

1) 29°; 2) 84°; 3) 98°; 4) 135°.

97.° Чи може пара суміжних кутів складатися:

1) з двох гострих кутів; 3) з прямого і тупого кутів;

2) з двох тупих кутів; 4) з прямого і гострого кутів?

98.° Один із суміжних кутів — прямий. Яким є другий кут?

99.° Знайдіть кут, суміжний з кутом ABC, якщо:

1) $\angle ABC = 36^\circ$;

2) $\angle ABC = 102^\circ$.

100.° Знайдіть кути 2, 3 і 4 (рис. 87), якщо $\angle 1 = 42^\circ$.

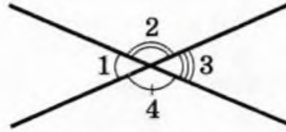


Рис. 87

101.° Знайдіть суміжні кути, якщо:
1) один з них на 70° більший за другий;
2) один з них у 8 разів менший від другого;
3) їх градусні міри відносяться як 3 : 2.

102.° Знайдіть суміжні кути, якщо:
1) один з них у 17 разів більший за другий;
2) їх градусні міри відносяться як 19 : 26.

103.° Чи є правильним твердження:
1) для кожного кута можна побудувати тільки один вертикальний кут;
2) для кожного кута можна побудувати тільки один суміжний кут;
3) якщо кути рівні, то вони вертикальні;
4) якщо кути не рівні, то вони не вертикальні;
5) якщо кути не вертикальні, то вони не рівні;
6) якщо два кути суміжні, то один з них гострий, а другий — тупий;
7) якщо два кути суміжні, то один з них більший за другий;
8) якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то вони суміжні;
9) якщо сума двох кутів не дорівнює 180°, то вони не суміжні;
10) якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні;
11) якщо суміжні кути рівні, то вони прямі;
12) якщо рівні кути мають спільну вершину, то вони вертикальні;
13) якщо два кути мають спільну сторону, то вони суміжні?

104.° Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 140°. Доведіть, що ці кути вертикальні.

105.° Знайдіть кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо:
1) сума двох з них дорівнює 106°;
2) сума трьох з них дорівнює 305°.

106.° Знайдіть кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо різниця двох з них дорівнює 64°.

107.° Три прямі перетинаються в одній точці (рис. 88). Знайдіть суму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

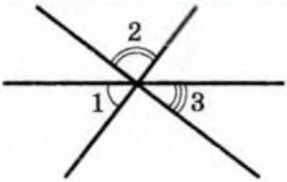


Рис. 88

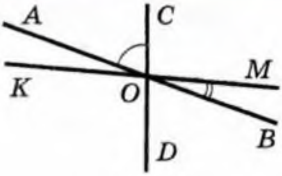


Рис. 89

108.$^{\bullet}$ Прямі AB, CD і MK перетинаються в точці O (рис. 89), $\angle AOC = 70^\circ$, $\angle MOB = 15^\circ$. Знайдіть $\angle DOK$, $\angle AOM$ і $\angle AOD$.

109.$^{\bullet}$ Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

110.$^{\bullet}$ Знайдіть кут між бісектрисами вертикальних кутів.

111.$^{\bullet}$ Кути ABF і FBC — суміжні, $\angle ABF = 80^\circ$, промінь BD належить куту ABF, $\angle ABD = 30^\circ$. Знайдіть кут між бісектрисами кутів DBF і FBC.

112.$^{\bullet}$ Кути AOB і BOC — суміжні, промінь OD — бісектриса кута AOB, кут BOD на 18° менший від кута BOC. Знайдіть кути AOB і BOC.

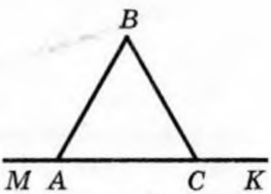


Рис. 90

113.$^{\bullet}$ Знайдіть суміжні кути MKE і PKE, якщо кут FKE на 24° більший за кут PKE, де промінь KF — бісектриса кута MKE.

114.$^{\bullet}$ На рисунку 90 $\angle MAB + \angle ACB = 180^\circ$. Доведіть, що $\angle MAB = \angle KCB$.

115.$^{\bullet}$ На рисунку 91 $\angle MBC = \angle BEF$. Доведіть, що $\angle ABE + \angle BED = 180^\circ$.

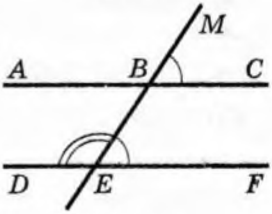


Рис. 91

116.$^{\bullet\bullet}$ Два кути мають спільну сторону, а їх сума дорівнює 180°. Чи є ці кути суміжними?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

117. Розріжте фігуру, зображену на рисунку 92, на 6 частин двома прямими.

Рис. 92

5. Перпендикулярні прямі

При перетині двох прямих a і b утворилося 4 кути (рис. 93). Легко показати (зробіть це самостійно), що коли один з кутів прямий (наприклад, кут 1), то й кути 2, 3 і 4 теж прямі.

О з н а ч е н н я. **Дві прямі називають п е р п е н д и к у л я р н и м и, якщо при перетині вони утворюють прямі кути.**

На рисунку 93 прямі a і b — перпендикулярні. Пишуть: $a \perp b$ або $b \perp a$.

Рис. 93

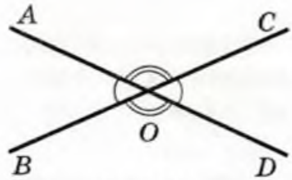


Рис. 94

На рисунку 94 прямі AD і BC не перпендикулярні. Вони при перетині утворили пару рівних гострих кутів і пару рівних тупих кутів. Величину гострого кута називають **кутом між прямими** AD і BC.

Якщо прямі перпендикулярні, то вважають, що кут між ними дорівнює 90°.

О з н а ч е н н я. **Два відрізки називають п е р п е н д и к у л я р н и м и, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.**

На рисунку 95 відрізки AB і CD — перпендикулярні. Пишуть: $AB \perp CD$.

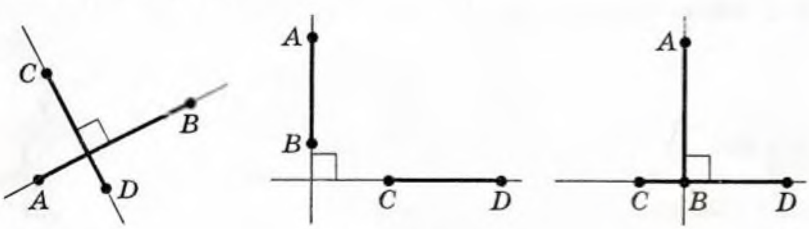


Рис. 95

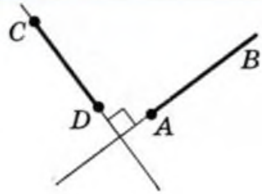


Рис. 96

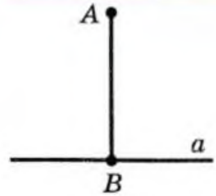


Рис. 97

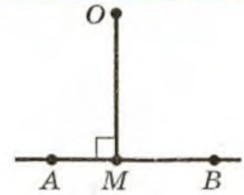


Рис. 98

Так само можна розглядати перпендикулярність двох променів, променя і відрізка, прямої і променя, відрізка і прямої. Наприклад, на рисунку 96 зображено перпендикулярні відрізок CD і промінь AB.

На рисунку 97 зображено пряму a і перпендикулярний до неї відрізок AB, кінець B якого належить прямій a. У такому випадку говорять, що з точки A на пряму a **опущено перпендикуляр** AB. Точку B називають **основою перпендикуляра** AB.

Довжину перпендикуляра AB називають **відстанню від точки A до прямої a**. Якщо точка A належить прямій a, то природно вважати, що відстань від точки A до прямої a дорівнює нулю.

На рисунку 98 зображено перпендикуляр OM, який опущено з точки O на пряму AB. Точка M, його основа, належить відрізку AB (променю AB). У таких випадках довжину цього перпендикуляра також називають відстанню від точки O до відрізка AB (променя AB)[1].

Якщо точка належить відрізку (променю), то природно вважати, що відстань від цієї точки до відрізка (променя) дорівнює нулю.

Опустимо з точки A на пряму a перпендикуляр AB (рис. 99). Нехай X — довільна точка прямої a, відмінна від точки B. Відрізок AX називають **похилою**, проведеною з точки A до прямої a.

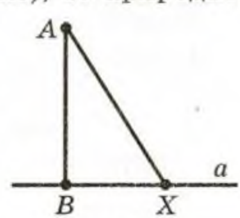


Рис. 99

Теорема 5.1. ***Через кожну точку прямої проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної.***

[1] Випадок, коли точка M не належить відрізку AB, буде розглядатися в курсі геометрії старших класів.

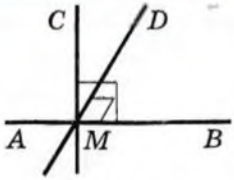


Рис. 100

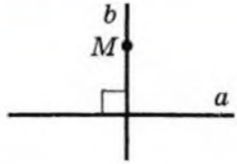


Рис. 101

Доведення. ⊙ Позначимо на прямій AB довільну точку M і побудуємо прямий кут CMB (рис. 100). Тоді $CM \perp AB$.

Припустимо, що через точку M проходить ще одна пряма MD, відмінна від CM і перпендикулярна до прямої AB.

Розглянемо випадок, коли промінь MD належить куту CMB. Тоді за основною властивістю величини кута $\angle CMB = \angle CMD + \angle DMB$. Звідси $\angle CMB > \angle DMB$. Насправді $\angle CMB = \angle DMB = 90^\circ$. Отже, наше припущення неправильне.

Аналогічно розглядається випадок, коли промінь MC належить куту DMB. ▲

Ви вмієте через довільну точку M, яка не належить прямій a, проводити пряму b, перпендикулярну до прямої a (рис. 101). Те, що пряма b єдина, доведемо в п. 7.

?

1. Якщо при перетині двох прямих один з утворених кутів прямий, то якими є решта кутів?
2. Які дві прямі називають перпендикулярними?
3. Яким символом позначають перпендикулярні прямі?
4. Як читають запис $m \perp n$?
5. Які два відрізки називають перпендикулярними?
6. Що називають відстанню від точки до прямої?
7. Скільки через кожну точку прямої можна провести прямих, перпендикулярних до даної?
8. Що називають кутом між двома прямими, які перетинаються?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

118.$^\circ$ Перерисуйте в зошит рисунок 102. Проведіть через точку M пряму, перпендикулярну до прямої a.

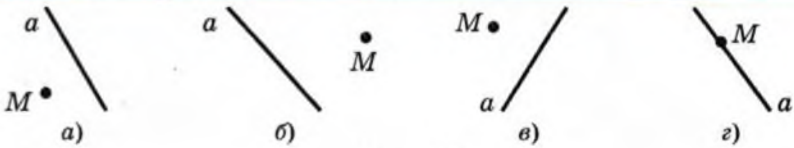


Рис. 102

119.° Проведіть пряму d і позначте точку M, яка їй не належить. За допомогою косинця проведіть через точку M пряму, перпендикулярну до прямої d.

120.° Проведіть пряму c і позначте на ній точку K. Користуючись косинцем, проведіть через точку K пряму, перпендикулярну до прямої c.

121.° Накресліть кут ABK, який дорівнює: 1) 73°; 2) 146°. Позначте на промені BK точку C і проведіть через неї прямі, перпендикулярні до прямих AB і BK.

122.° Накресліть два перпендикулярних відрізки так, щоб вони:

1) перетиналися;
2) не мали спільних точок;
3) мали спільний кінець.

123.° Накресліть два перпендикулярних промені так, щоб вони:

1) перетиналися;
2) не мали спільних точок.

ВПРАВИ

124.° На рисунку 103 прямі AC і DK — перпендикулярні. Чи перпендикулярні:

1) відрізки AB і BK;
2) відрізки BC і DF;
3) промені BC і BK;
4) відрізок AB і промінь FD?

125.° Чи може кут між прямими дорівнювати:

1) 1°;
2) 80°;
3) 90°;
4) 92°;
5) 101°?

126.• Доведіть, що коли бісектриси кутів AOB і BOC перпендикулярні, то точки A, O і C лежать на одній прямій.

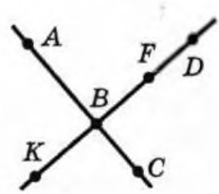


Рис. 103

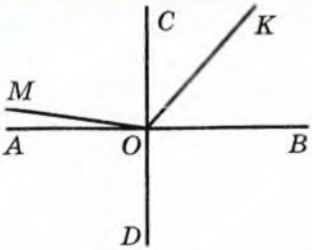


Рис. 104

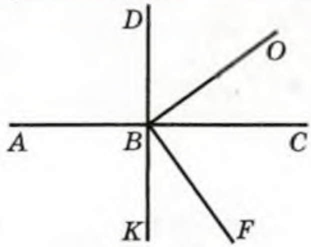


Рис. 105

127.• На рисунку 104 $AB \perp CD$, $\angle COK = 42^\circ$, $\angle MOC + \angle BOK = 130^\circ$. Знайдіть: 1) $\angle MOK$; 2) $\angle MOD$.

128.• На рисунку 105 $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54^\circ$. Знайдіть кут ABF.

129.• Кут ABC дорівнює 160°, промені BK і BM проходять між сторонами цього кута і перпендикулярні до них. Знайдіть кут MBK.

130.• На рисунку 106 $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Доведіть, що $\angle ABD = \angle FBK$.

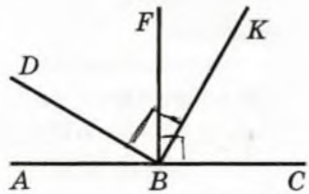


Рис. 106

131.• На рисунку 106 $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Доведіть, що $BF \perp AC$.

132.•• З вершини кута ABC, який дорівнює 70°, проведено промені BD і BF так, що $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, промені BD і BC належать куту ABF. Знайдіть кути DBF і ABF.

133.* Користуючись косинцем і шаблоном кута 17°, побудуйте кут, який дорівнює: 1) 5°; 2) 12°.

134.* Користуючись косинцем і шаблоном кута 20°, побудуйте кут, який дорівнює 10°.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

135. На рисунку 107 пряма перетинає всі сторони восьмикутника. Чи може пряма перетинати всі сторони тринадцятикутника, не проходячи через жодну з його вершин?

Рис. 107

6. Аксіоми

У попередніх пунктах було доведено п'ять теорем. Щоразу, доводячи нову властивість фігури, ми спиралися на раніше відомі геометричні факти. Наприклад, при доведенні теореми про вертикальні кути була використана властивість суміжних кутів. Керуючись цим принципом, доводитимемо ще багато нових теорем. Проте вже зараз, на початковому етапі вивчення геометрії, виникає природне запитання: якщо властивості геометричних фігур вивчають за принципом «нове зі старого», то повинні існувати найперші (початкові) факти, і на чому засноване їх доведення? Адже до них ніяких істинних тверджень немає. Розв'язати цю проблему можна єдиним способом: прийняти перші властивості без доведення. Так і роблять математики. Ці властивості називають **аксіомами**.

За аксіоми обирають твердження, які прості, очевидні, не викликають сумнівів. Адже недарма слово «аксіома», що походить від грецького «*аксіос*», означає «гідне визнання».

Деякі аксіоми були сформульовані в попередніх пунктах. Вони називалися о с н о в н и м и в л а с т и в о с т я м и і надруковані **синім** кольором. Частину аксіом ми не виділяли якимось спеціальним чином, а просто формулювали як наочно очевидні твердження. Зокрема, у п. 2 було сформульовано аксіоми:

для будь-яких двох точок *M* і *N* існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями і **кожний відрізок має певну довжину**

Ми спиралися й на деякі інші істинні твердження, прийняті без доведення, тобто по суті на аксіоми, але сформульовані в неявному вигляді. Наприклад, у п. 1, описуючи рисунок 13, ми фактично використали таку аксіому:

якою б не була пряма, існують точки, які належать цій прямій, і точки, які не належать їй

Аксіоми використовують не тільки в математиці. Нерідко в повсякденному житті будь-яке істинне твердження

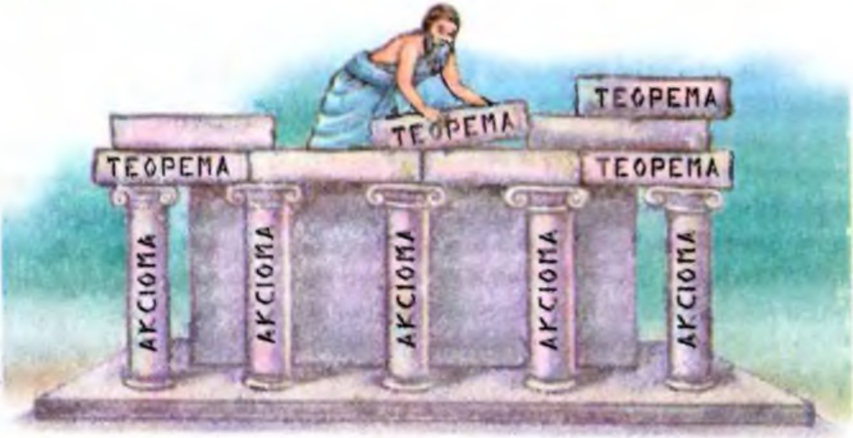


Рис. 108

називають аксіомою. Наприклад, кажуть: «Після березня настане квітень. Це аксіома».

Аксіоми виникають не лише на основі практики або спостережень.

Для будь-якого громадянина України Конституція — це список аксіом. Тому аксіому можна розглядати як закон або правило. Проте закони (правила гри) приймають, тобто вони виникають у результаті домовленості людей між собою. Отже, і аксіоми геометрії можна також розглядати як затверджені правила, на підставі яких геометри, як муляри, зводять будівлю науки (рис. 108).

Тоді у вас може виникнути запитання: «Невже геометрію можна сприймати як гру, наприклад таку, як шахи?» Певною мірою — так. Проте при цьому слід розуміти, що шахові правила, а отже, й сама гра виникли завдяки людській фантазії. Разом з тим геометричні правила (аксіоми) виникли з практики і спостережень. Тому геометрія, на відміну від шахів, застосовується дуже широко.

Якщо ви оберете фах математика, то зможете ознайомитися із зовсім іншими геометріями, які відрізняються від тієї, яку ви вивчаєте в школі, тим, що вони побудовані на аксіомах-фантазіях.

З ІСТОРІЇ ГЕОМЕТРІЇ

Коли і де виникли перші геометричні відомості? Фахівці не відповідають на це запитання однозначно. Деякі вважають, що першовідкривачами були єгипетські та вавілонські землеміри, які жили за 4000 років до нашої ери, інші припускають, що геометрія зародилась у Стародавньому Єгипті 5000 років тому.

Стародавній папірус

Може здаватися дивним, але питання, коли виникла **наука геометрія**, не викликає суперечок. Історики відповідають не з точністю до тисячоліть, а одностайні в думці, указуючи VI ст. до н. е. Така одностайність, на перший погляд, може здивувати: адже до VI ст. до н. е. народи стародавнього світу накопичили величезний обсяг геометричних знань. Наприклад, цілком очевидно, що без геометричного досвіду єгиптяни не подарували б світові одне із «семи чудес» — піраміди. І все ж таки, чому велика кількість геометричних фактів нерівносильна існуванню геометричної науки?

Єгипетські піраміди

Геометрія стала наукою лише тоді, коли її істини почали встановлювати завдяки доведенню.

Поява «доказової геометрії» пов'язана з іменем першого із «семи мудреців» — Фалеса Мілетського[1] (біля 625–547 рр. до н. е.) — філософа, ученого, купця і державного діяча.

Фалес Мілетський

Задовго до Фалеса було відомо, що вертикальні кути рівні, що діаметр ділить круг на дві рівні частини. Ніхто

[1] Мілет — порт у Малій Азії на узбережжі Егейського моря.

Евклід

в істинності цих фактів не сумнівався. А Фалес довів їх, тим самим прославивши себе.

У VI–III ст. до н. е. завдяки вченим Стародавньої Греції, таким як Піфагор, Евдокс, Архіт, Теєтет, Евклід, Архімед, геометрія з прикладної науки перетворилася на математичну теорію.

Книгу, за якою вчили геометрію понад 2000 років, без перебільшення можна назвати великою. Вона має назву «Начала», її автором є Евклід (біля 365–300 рр. до н. е.). На жаль, про самого Евкліда мало що відомо. У таких випадках особистість обростає легендами, одна з яких дуже повчальна. Цар Птолемей I запитав Евкліда, чи існує більш простий шлях пізнання геометрії, ніж викладений у «Началах». Евклід відповів: «У геометрії немає царських шляхів».

А який же шлях у геометрію обрав Евклід у своїх «Началах»? Аксіоматичний. У фундаменті науки — список найпростіших фактів. Їх називають постулатами[1] й аксіомами. Потім на їх основі шляхом логічних міркувань доводять усі інші властивості — теореми.

Постулатів у Евкліда п'ять. Наведемо перші чотири.

I постулат. Потрібно, щоб від кожної точки до будь-якої іншої точки можна було провести пряму лінію.

II постулат. І щоб кожну пряму можна було необмежено продовжити.

III постулат. І щоб з будь-якого центра можна було описати коло будь-яким радіусом.

IV постулат. І щоб усі прямі кути були рівні.

Про п'ятий постулат ми розкажемо після п. 14.

За популярністю з «Началами» Евкліда може зрівнятися хіба що Біблія. Так, ще наприкінці XIX ст. у ряді євро-

[1] Від латинського *postulatum* — вимога.

пейських країн геометрію викладали за спрощеними виданнями «Начал».

І зараз геометрія, яку вивчають у школі, багато в чому наслідує ідеям Евкліда.

«Начала» Евкліда

ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - аксіома, теорема, означення;
  - прямі, що перетинаються;
  - рівні відрізки і рівні кути;
  - доповняльні промені;
  - розгорнутий кут, прямий кут, гострий кут, тупий кут;
  - бісектриса кута;
  - суміжні і вертикальні кути;
  - перпендикулярні прямі, відрізки, промені;
  - перпендикуляр;
  - відстань від точки до прямої;

- ви вивчили:
  - основну властивість прямої;
  - основні властивості довжини відрізка і величини кута;
  - теореми про властивості прямих, що перетинаються, суміжних і вертикальних кутів;
  - теорему про єдиність прямої, яка перпендикулярна до даної прямої і проходить через її задану точку;

- ви ознайомилися:
  - з одиницями виміру довжини відрізка і величини кута;
  - з приладами для вимірювання довжини відрізка і величини кута;

- ви дізналися, як будується наука геометрія.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

1. Скільки прямих визначають 3 точки, які не лежать на одній прямій?

А) 2; Б) 4; В) 3; Г) 1.

2. Скільки можна провести відрізків, які містять 2 задані точки?

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) безліч.

3. Точка M є внутрішньою точкою відрізка PQ. Яке з наступних тверджень є правильним?

А) $PM + MQ = PQ$; В) $MQ = PQ + PM$;
Б) $PQ > PM + MQ$; Г) $PM = PQ + MQ$.

4. Точка C не належить прямій AB. Яке з наступних тверджень є неправильним?

А) $AC < AB + CB$; В) $AB = AC + CB$;
Б) $CB < AB + AC$; Г) $AB < AC + CB$.

5. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Скільки існує на прямій AB точок, для яких сума відстаней до кінців відрізка AB дорівнює 14 см?

А) Безліч; Б) 1; В) 2; Г) жодної.

6. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Скільки існує на прямій AB точок, для яких сума відстаней до кінців відрізка AB дорівнює 12 см?

А) Жодної; Б) 2; В) безліч; Г) 1.

7. Два промені є доповняльними, якщо:

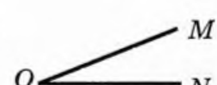
А) вони мають спільний початок;

Б) їх об'єднанням є пряма і вони мають спільний початок;

В) вони належать одній прямій;

Г) їх об'єднанням є пряма.

8. Яке позначення кута, зображеного на рисунку, є неправильним?



А) $\angle O$; Б) $\angle OMN$; В) $\angle MON$; Г) $\angle NOM$.

9. Яке з наступних тверджень є неправильним?

А) Суміжні кути мають спільну вершину;

Б) суміжні кути мають спільну сторону;

В) завжди один з суміжних кутів гострий, а другий — тупий;

Г) якщо кути AOC і COB – суміжні, то промені OA і OB — доповняльні.

10. Яке з наступних тверджень є неправильним?

А) Вертикальні кути рівні;

Б) якщо кути рівні, то вони вертикальні;

В) вертикальні кути мають спільну вершину;

Г) сторони вертикальних кутів утворюють дві пари доповняльних променів.

11. Яке з наступних тверджень є правильним?

А) Перпендикулярні відрізки завжди мають спільну точку;

Б) перпендикулярні промені завжди мають спільну точку;

В) перпендикулярні прямі завжди мають спільну точку;

Г) перпендикулярні промінь і відрізок завжди мають спільну точку.

ТРИКУТНИКИ §2

Як, не накладаючи трикутники один на одний, дізнатися, що вони рівні? Які особливі властивості притаманні рівнобедреному і рівносторонньому трикутникам? Яку «конструкцію» має теорема? На ці й багато інших запитань ви знайдете відповіді в цьому параграфі.

7. Рівні трикутники. Висота, медіана, бісектриса трикутника

Розглянемо три точки A, B, C, які не лежать на одній прямій. Сполучимо їх відрізками AB, BC, CA. Утворена фігура обмежує частину площини, виділену на рисунку 109 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками AB, BC і CA називають **трикутником**. Точки A, B, C називають **вершинами**, а відрізки AB, BC, CA — **сторонами** трикутника.

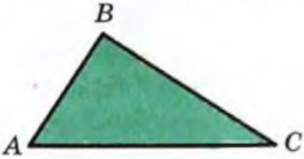


Рис. 109

Трикутник називають і позначають за його вершинами. Трикутник, зображений на рисунку 109, позначають так: ΔABC, або ΔBCA, або ΔACB і т. д. (читають: «трикутник ABC, трикутник BCA» і т. д.). Кути BAC, ABC, BCA (рис. 110) називають **кутами трикутника** ABC.

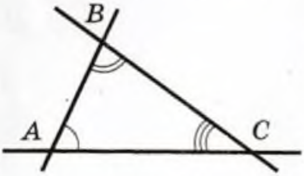
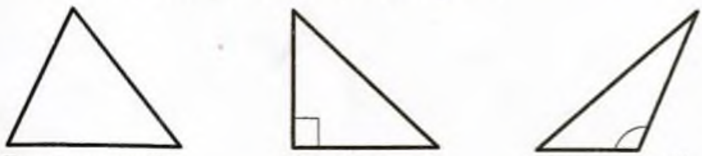


Рис. 110

У трикутнику ABC, наприклад, кут B називають *кутом, протилежним стороні* AC, кути A і C — *кутами, прилеглими до сторони* AC, сторону AC — *стороною, протилежною куту* B, сторони AB і AC — *сторонами, прилеглими до кута* A (рис. 110).

Означення. **Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін.**

Означення. **Трикутник називають прямокутним, якщо один з його кутів прямий; тупокутним — якщо один з його кутів тупий. Якщо всі кути гострі, то трикутник називають гострокутним** (рис. 111).



Гострокутний трикутник

Прямокутний трикутник

Тупокутний трикутник

Рис. 111

Теорема 7.1 (нерівність трикутника). ***Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.***

Доведення. ⊙ Розглянемо $\triangle ABC$ (рис. 109). Точка C не належить відрізку AB. Тоді за основною властивістю довжини відрізка $AB < AC + CB$. Аналогічно доводять інші дві нерівності: $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$. ▲

З доведеної теореми випливає, що коли один з трьох даних відрізків не менший від суми двох інших відрізків, то ці відрізки не можуть слугувати сторонами трикутника (рис. 112).

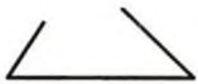


Рис. 112

У п. 23 буде показано, що коли будь-який з трьох даних відрізків менший від суми двох інших, то ці відрізки можуть слугувати сторонами трикутника.

Означення. **Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити.**

На рисунку 113 зображено рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Записують: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Ці трикутники можна сумістити так, що вершини A і A_1, B і B_1, C і C_1 збігатимуться. Тоді можна записати: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Ті сторони і ті кути, які суміщаються при накладанні трикутників, називають **відповідними сторонами** і **відповідними кутами**. Так, на рисунку 113 кути A і A_1, сторони AC і A_1C_1 — відповідні.

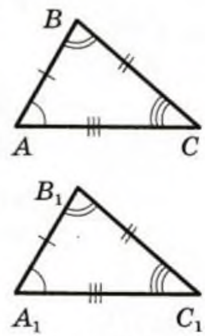


Рис. 113

Зазвичай на рисунках рівні сторони позначають однаковою кількістю рисочок, а рівні кути — однаковою кількістю дужок. На рисунку 113 у такий спосіб позначено відповідні сторони і кути.

Зауважимо, що в рівних трикутниках проти відповідних кутів лежать відповідні сторони, і навпаки: проти відповідних сторін лежать відповідні кути.

Те, що для кожного трикутника існує рівний йому трикутник, забезпечує така

Основна властивість рівності трикутників. **Для даного трикутника ABC і променя A_1M існує трикутник $A_1B_1C_1$, рівний трикутнику ABC, такий, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ і сторона A_1B_1 належить променю A_1M, а вершина C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої A_1M** (рис. 114).

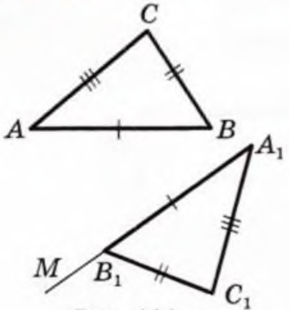


Рис. 114

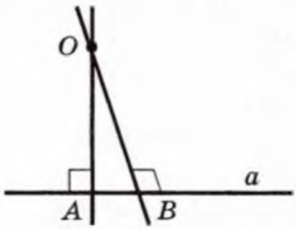


Рис. 115

Теорема 7.2. ***Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної.***

Доведення. Розглянемо пряму a і точку O, яка їй не належить (рис. 115). Припустимо, що через точку O проходять дві прямі OA і OB, перпендикулярні до прямої a.

За основною властивістю рівності трикутників існує трикутник O_1AB, який дорівнює трикутнику OAB (рис. 116).

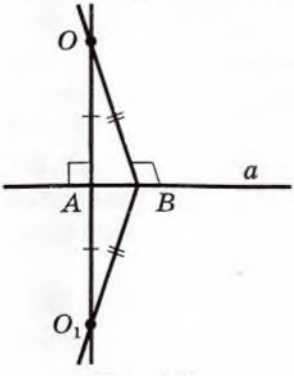


Рис. 116

Тоді $\angle OAB = \angle O_1AB = 90^\circ$. Звідси $\angle OAO_1 = 180^\circ$, а отже, точки O, A, O_1 лежать на одній прямій. Аналогічно доводять, що точки O, B, O_1 також лежать на одній прямій. Тоді прямі OA і OB мають дві точки перетину: O і O_1. А це суперечить теоремі 1.1. Отже, наше припущення неправильне. ▲

Можливо, ви помітили, що означення рівних відрізків, рівних кутів і рівних трикутників дуже схожі. Тому доцільно прийняти таке

Означення. **Дві фігури називають рівними, якщо їх можна сумістити.**

На рисунку 117 зображено рівні фігури Φ_1 і Φ_2. Пишуть: $\Phi_1 = \Phi_2$.

Зрозуміло, що будь-які дві прямі (два промені, дві точки) рівні.

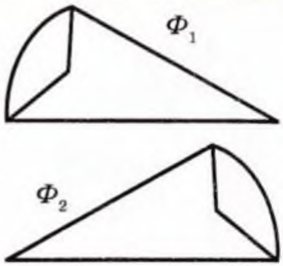


Рис. 117

Означення. **Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.**

На рисунку 118 відрізки BB_1 і CC_1 — висоти трикутника ABC.

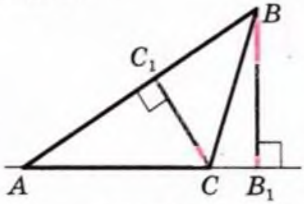


Рис. 118

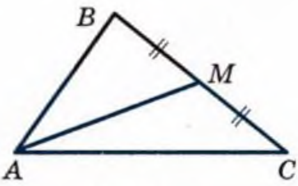


Рис. 119

Означення. **Відрізок, який сполучає вершину трикутника з серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.**

На рисунку 119 відрізок AM — медіана трикутника ABC.

Означення. **Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.**

На рисунку 120 відрізок BL — бісектриса трикутника ABC.

Надалі, говорячи «бісектриса кута трикутника», матимемо на увазі бісектрису трикутника, проведену з вершини цього кута.

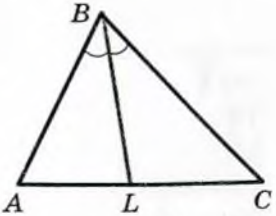


Рис. 120

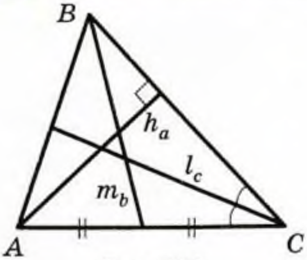


Рис. 121

Зрозуміло, що кожний трикутник має три висоти, три медіани і три бісектриси.

Часто довжини сторін, протилежних кутам A, B, C, позначають відповідно a, b, c. Довжини висот позначають h_a, h_b, h_c, медіан — m_a, m_b, m_c, бісектрис — l_a, l_b, l_c. Індекс показує, до якої сторони проведено відрізок (рис. 121).

1. Як називають і позначають трикутник?
2. Що називають периметром трикутника?
3. Які є види трикутників залежно від виду їх кутів?
4. Який трикутник називають прямокутним? тупокутним? гострокутним?
5. Як формулюють теорему про нерівність трикутника?
6. Які два трикутники називають рівними?
7. Як називають ті пари сторін і пари кутів рівних трикутників, які суміщаються при накладанні?
8. Які дві фігури називають рівними?
9. Що називають висотою трикутника?
10. Що називають медіаною трикутника?
11. Що називають бісектрисою трикутника?
12. Скільки кожний трикутник має висот? медіан? бісектрис?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

136.° Накресліть трикутник:
1) гострокутний; 2) прямокутний; 3) тупокутний.
Проведіть з кожної вершини трикутника висоту.

137.° Перерисуйте в зошит рисунок 122, проведіть висоту, спільну для всіх трьох зображених трикутників. У якого з них ця висота розміщена поза трикутником?

138.° Перерисуйте в зошит трикутники, зображені на рисунку 123, проведіть у кожному з них усі три висоти.

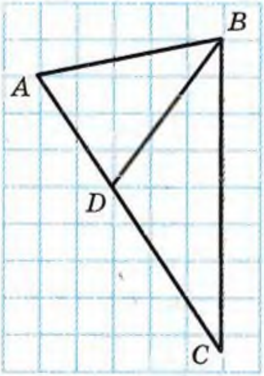


Рис. 122

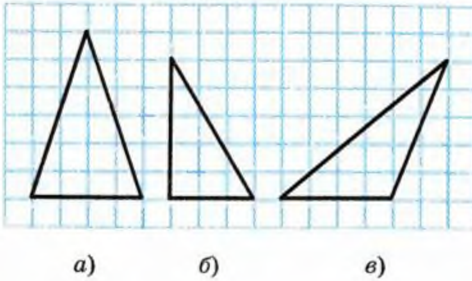


Рис. 123

139.° Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його медіани.

140.° Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його бісектриси.

ВПРАВИ

141.° Накресліть довільний трикутник, позначте його вершини буквами M, K і E. Укажіть:

1) сторону, протилежну куту M;
2) кут, протилежний стороні MK;
3) сторони, прилеглі до кута K;
4) кути, прилеглі до сторони KE.

142.° Назвіть сторони, вершини, кути трикутника CEF (рис. 124). Укажіть:

1) кут, протилежний стороні CF;
2) кути, прилеглі до сторони CE;
3) сторону, протилежну куту E;
4) сторони, прилеглі до кута F.

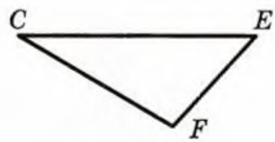


Рис. 124

143.° Одна із сторін трикутника в 5 разів менша від другої і на 25 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 74 см.

144.° Сторони трикутника відносяться як $5:7:11$, а сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 80 см. Обчисліть периметр трикутника.

145.° Периметр трикутника дорівнює 48 см, а довжини його сторін відносяться як 7 : 9 : 8. Знайдіть сторони трикутника.

146.° Чи можуть сторони трикутника дорівнювати:

1) 6 см, 5 см, 12 см;
2) 6 см, 5 см, 11 см?

147.° Трикутники APK і MCE рівні, кути A і C відповідні, $PK = 10$ см. Знайдіть сторону ME.

148.° Трикутники ABC і DEF рівні, сторони AB і DE, BC і DF відповідні, $\angle B = 32°$. Знайдіть $\angle D$.

149.° Трикутники ABC і KTM рівні, кути A і M, B і K відповідні, $\angle C = 40°$, $MK = 5$ см. Знайдіть кут T і сторону AB.

150.° Чи є правильним твердження:

1) якщо трикутники рівні, то їх периметри теж рівні;
2) якщо периметри двох трикутників рівні, то й самі трикутники рівні?

151.° Які з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — завжди належать трикутнику?

152.° Який з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — може:

1) не належати трикутнику;
2) збігатися з його стороною?

Укажіть вид трикутника, для якого це можливо.

153.° 1) Чи може одна висота трикутника належати йому, а дві інші — ні?

2) Чи може тільки одна висота трикутника збігатися з його стороною?
3) У якому трикутнику три висоти перетинаються в його вершині?

154.• Периметр трикутника дорівнює 30 см. Чи може одна з його сторін дорівнювати:

1) 20 см; 2) 15 см?

155.• Довжини двох сторін трикутника дорівнюють 7 см і 9 см. Чи може периметр цього трикутника дорівнювати:

1) 20 см; 2) 32 см; 3) 18 см?

156.• Чи існує трикутник, одна із сторін якого на 2 см менша від другої і на 6 см менша від третьої, а периметр дорівнює 20 см?

157.• Медіана BD трикутника ABC розбиває його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 32 см і 36 см. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $BD = 10$ см.

158.• Медіана трикутника, периметр якого дорівнює 60 см, розбиває його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 36 см і 50 см. Чому дорівнює довжина цієї медіани?

159.* Одна сторона трикутника дорівнює 2,8 см, а друга — 0,6 см. Знайдіть третю сторону цього трикутника, якщо її довжина, виражена в сантиметрах, дорівнює цілому числу.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

160. На рисунку 125 $KP = PE = EF = FT = 2$ см. Які рівні відрізки є ще на цьому рисунку? Знайдіть їх довжини.

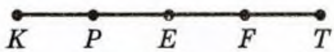


Рис. 125

161. Промінь BD розбиває кут ABC, який дорівнює 72°, на два кути ABD і CBD так, що $\angle ABD = 5\angle CBD$. Промінь BK проходить так, що промінь BA є бісектрисою кута DBK. Визначте градусну міру і вид кута DBK.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

162. Розріжте кожну з фігур, зображених на рисунку 126, на дві рівні фігури (розрізати необов'язково вздовж ліній сітки).

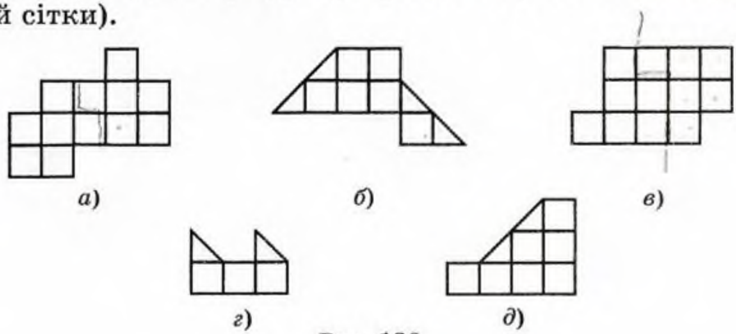


Рис. 126

8. Перша і друга ознаки рівності трикутників

Якщо для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ виконуються шість умов $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, то очевидно, що ці трикутники сумістяться при накладанні, а отже, вони рівні.

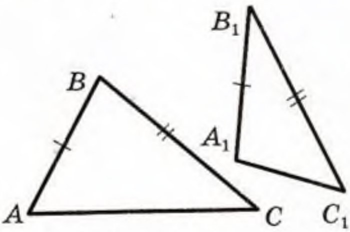


Рис. 127

Спробуємо зменшити кількість умов. Наприклад, залишимо лише дві рівності: $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$. Зрозуміло, що трикутники не обов'язково виявляться рівними (рис. 127).

Як же скоротити список вимог до мінімуму, зберігаючи при цьому рівність трикутників? На це запитання відповідають теореми, які називають **ознаками рівності трикутників**.

Теорема 8.1 (перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами і кутом між ними). ***Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. ⊙ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 128). Доведемо, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

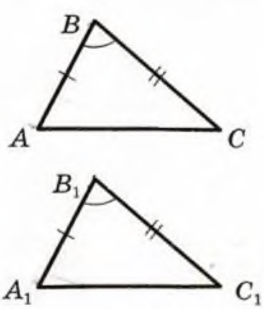


Рис. 128

Накладемо ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, щоб промінь BA сумістився з променем B_1A_1, а промінь BC сумістився з променем B_1C_1. Це можна зробити, тому що за умовою $\angle B = \angle B_1$. Оскільки за умовою $BA = B_1A_1$ і $BC = B_1C_1$, то при такому накладанні сторона BA суміститься зі стороною B_1A_1, а сторона BC — зі стороною B_1C_1. Отже, ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, тобто вони рівні. ▲

Означення. **Пряму, яка перпендикулярна до відрізка і проходить через його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка.**

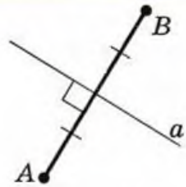


Рис. 129

На рисунку 129 пряма a є серединним перпендикуляром відрізка AB.

Теорема 8.2. ***Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.***

Доведення. ⊙ Нехай X — довільна точка серединного перпендикуляра a відрізка AB, точка M — середина відрізка AB. Треба довести, що $XA = XB$.

Якщо точка X збігається з точкою M (а це можливо, оскільки X — довільна точка прямої a), то $XA = XB$. Якщо точки X і M не збігаються, то розглянемо трикутники AXM і BXM (рис. 130). У цих трикутниках $AM = MB$, оскільки M — середина AB. Сторона XM — спільна, $\angle AMX = \angle BMX = 90^\circ$. Отже, $\Delta AXM = \Delta BXM$ за першою ознакою рівності трикутників. Тоді відрізки XA і XB рівні як відповідні сторони рівних трикутників. ▲

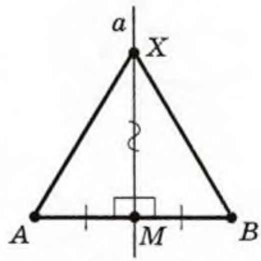


Рис. 130

Теорема 8.3 (друга ознака рівності трикутників: за стороною і двома прилеглими до неї кутами). ***Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. ⊙ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 131). Доведемо, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

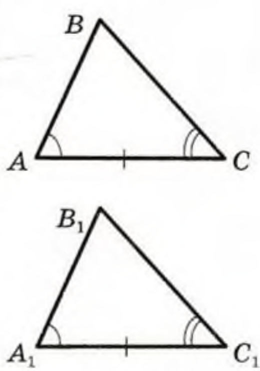


Рис. 131

Накладемо ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, щоб точка A сумістилася з точкою A_1, відрізок AC — з відрізком A_1C_1 (це можливо, тому що $AC = A_1C_1$) і точки B і B_1 лежали в одній півплощині відносно прямої A_1C_1. Оскільки $\angle A = \angle A_1$ і $\angle C = \angle C_1$, то промінь AB суміститься з променем A_1B_1, а промінь CB — з променем C_1B_1. Звідси точка B — спільна точка променів AB і CB — суміститься з точкою B_1 — спільною точкою променів A_1B_1 і C_1B_1. Тоді ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, тобто вони рівні. ▲

Приклад. На рисунку 132 точка O — середина відрізка BD, $\angle ABO = \angle CDO$. Доведіть, що $BC = AD$.

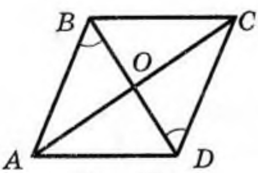


Рис. 132

Розв'язання. Розглянемо ΔAOB і ΔCOD. $BO = OD$, оскільки точка O — середина відрізка BD. $\angle ABO = \angle CDO$ за умовою. $\angle AOB$ і $\angle COD$ рівні як вертикальні. Отже, $\Delta AOB = \Delta COD$ за стороною і двома прилеглими кутами.

Розглянемо ΔABC і ΔADC.

$AB = CD$, $\angle BAC = \angle DCA$, оскільки $\Delta AOB = \Delta COD$. AC — спільна сторона. Отже, $\Delta ABC = \Delta ADC$ за двома сторонами і кутом між ними.

Тоді $BC = AD$.

1. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників.
2. Яку пряму називають серединним перпендикуляром відрізка?
3. Яку властивість мають точки серединного перпендикуляра?
4. Сформулюйте другу ознаку рівності трикутників.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

163.° За допомогою лінійки і транспортира побудуйте трикутник, дві сторони якого дорівнюють 3 см і 6 см, а кут між ними — 40°.

164.° За допомогою лінійки і транспортира побудуйте трикутник, дві сторони якого дорівнюють 3 см і 4 см, а кут між ними — 90°. Укажіть вид цього трикутника.

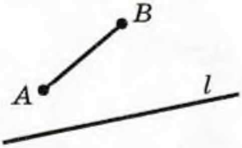


Рис. 133

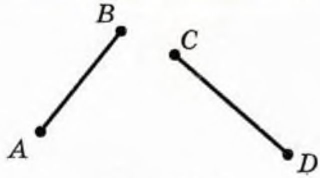


Рис. 134

165.° За допомогою лінійки і транспортира побудуйте трикутник, одна сторона якого дорівнює 3 см, а кути, що прилягають до цієї сторони, — 100° і 20°. Укажіть вид цього трикутника.

166.° За допомогою лінійки і транспортира побудуйте трикутник, одна сторона якого дорівнює 6 см, а кути, що прилягають до цієї сторони, — 90° і 45°.

167.° Перерисуйте в зошит рисунок 133. За допомогою косинця і лінійки знайдіть на прямій l точку, рівновіддалену від кінців відрізка AB.

168.° Перерисуйте в зошит рисунок 134. За допомогою косинця і лінійки знайдіть точку, рівновіддалену від точок A і B та C і D.

ВПРАВИ

169.° На рисунку 135 $AC = DC$, $BC = EC$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta DEC$.

170.° На рисунку 136 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta ADC$.

171.° На рисунку 137 $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 7$ см, $\angle C = 34°$. Знайдіть відрізок BC і кут A.

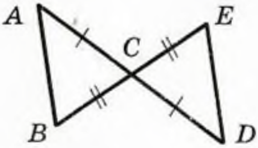


Рис. 135

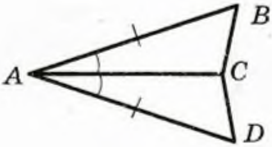


Рис. 136

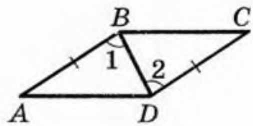


Рис. 137

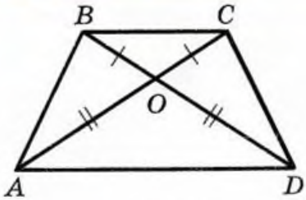


Рис. 138

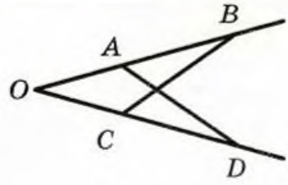


Рис. 139

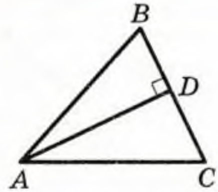


Рис. 140

172.° На рисунку 138 $AO = OD$, $BO = OC$. Знайдіть сторону CD і кут OCD трикутника OCD, якщо $AB = 8$ см, $\angle OBA = 43^\circ$.

173.° Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (рис. 139). Довести: $\angle OAD = \angle OCB$.

174.° Дано: $AD \perp BC$, $BD = CD$ (рис. 140). Довести: $AB = AC$.

175.° З точок A і B, які лежать в одній півплощині відносно прямої a і на однаковій відстані від неї, опущено на цю пряму перпендикуляри AC і BD. Знайдіть кут ACB, якщо $\angle ADC = 25^\circ$.

176.° Відрізки AD і BC перетинаються в точці O і діляться цією точкою навпіл. Знайдіть кут ACD, якщо $\angle ABC = 64^\circ$, $\angle ACO = 56^\circ$.

177.° На рисунку 141 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, O — середина BD. Доведіть, що $\Delta ABO = \Delta CDO$.

178.° На рисунку 142 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть сторони AD і CD трикутника ADC.

179.° На рисунку 143 $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Доведіть, що $\Delta BCO = \Delta EFO$.

180.° На рисунку 144 $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle BAC = \angle DCA$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta ADC$.

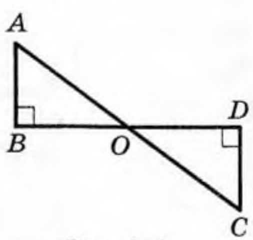


Рис. 141

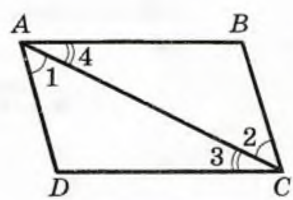


Рис. 142

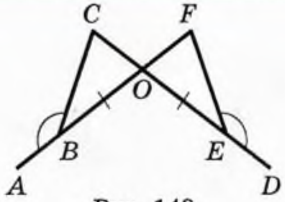


Рис. 143

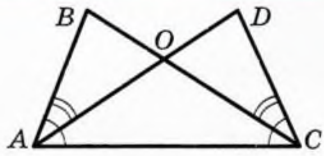


Рис. 144

181.° На сторонах кута з вершиною в точці B позначено точки A і C, а на його бісектрисі — точку D таку, що $\angle ADB = \angle CDB$. Доведіть, що $AB = BC$.

182.° Через точку M, яка належить бісектрисі кута з вершиною в точці O, проведено пряму, яка перпендикулярна до цієї бісектриси і перетинає сторони даного кута в точках A і B. Доведіть, що $AM = MB$.

183.• На рисунку 145 $\triangle ABC = \triangle ADC$. Доведіть, що $\triangle ABK = \triangle ADK$.

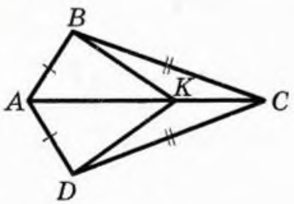


Рис. 145

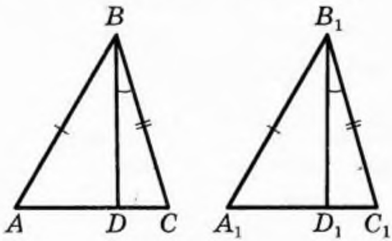


Рис. 146

184.• На рисунку 146 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle DBC = \triangle D_1B_1C_1$.

185.• На рисунку 147 $\triangle MKO = \triangle MPO$. Доведіть, що $\triangle KOE = \triangle POE$.

186.• На рисунку 148 $BM \perp AD$, $CK \perp AD$, $BM = CK$, $AM = KD$. Доведіть, що $\triangle ABD = \triangle ACD$.

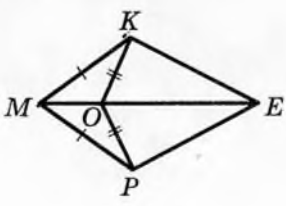


Рис. 147

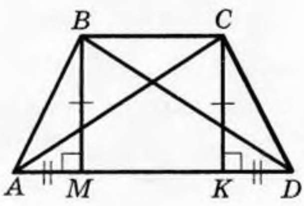


Рис. 148

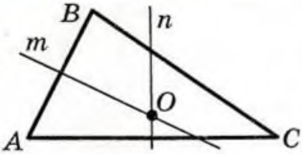


Рис. 149

187.[•] Доведіть, що в рівних трикутниках бісектриси відповідних кутів рівні.

188.[•] Доведіть, що в рівних трикутниках медіани, проведені до відповідних сторін, рівні.

189.[•] На продовженні медіани AM трикутника ABC за точку M відкладено відрізок MK, який дорівнює AM. Знайдіть відстань від точки K до вершини C, якщо $AB = 6$ см.

190.[•] Відрізки AB і CD перетинаються в точці O і діляться точкою перетину навпіл. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta ABD$.

191.[•] На рисунку 149 прямі m і n — серединні перпендикуляри сторін AB і AC трикутника ABC. Доведіть, що точка O рівновіддалена від усіх вершин даного трикутника.

192.[•] Для знаходження відстані від точки B до дзвіниці A, яка розташована на іншому березі річки (рис. 150), за допомогою віх, рулетки і астролябії позначили на місцевості точки C, D і E так, що B, C і D лежать на одній прямій, причому точка C є серединою відрізка BD, намітили пряму AE, яка проходить через точку C, причому $\angle ABC = \angle CDE$. Потім, вимірявши одну із сторін трикутника CDE, визначили відстань від B до A. Яку сторону виміряли? Відповідь обґрунтуйте.

193.[•] Для визначення ширини озера (рис. 151) на його березі позначили точки A і B, а потім ще точки C, D і O так,

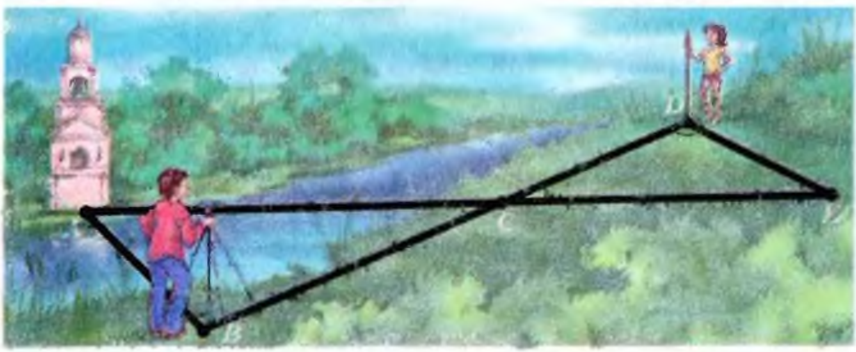


Рис. 150

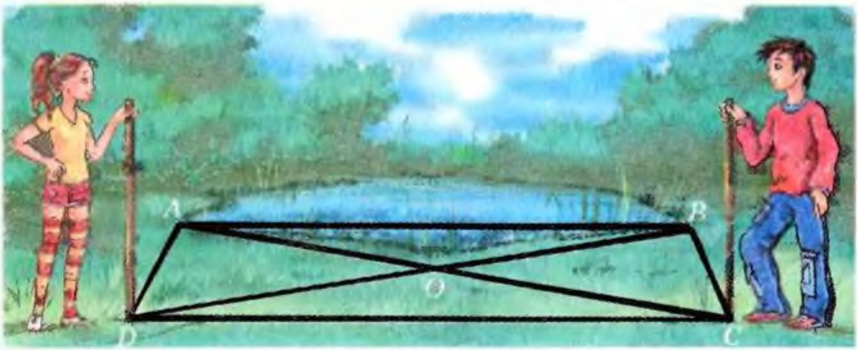


Рис. 151

що точка O — спільна середина відрізків AC і BD. Як тепер можна визначити ширину озера? Відповідь обґрунтуйте.

194.•• Доведіть рівність двох трикутників за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, та кутом між цією стороною і медіаною.

195.•• Доведіть рівність двох трикутників за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою цього кута.

196.•• Доведіть рівність двох трикутників за кутом, бісектрисою цього кута і кутом, який утворює бісектриса з протилежною стороною.

197.•• Серединний перпендикуляр сторони BC трикутника ABC перетинає його сторону AB у точці D. Знайдіть довжину відрізка AD, якщо $CD = 4$ см, $AB = 7$ см.

198.•• Серединний перпендикуляр сторони AB трикутника ABC перетинає його сторону BC у точці M. Знайдіть довжину сторони AC трикутника ABC, якщо $BC = 16$ см, а периметр трикутника AMC дорівнює 26 см.

199.•• На рисунку 152 $OA = OD$. Доповніть умову задачі однією вимогою так, щоб можна було стверджувати, що $\Delta AOC = \Delta BOD$:

1) за першою ознакою рівності трикутників;
2) за другою ознакою рівності трикутників.

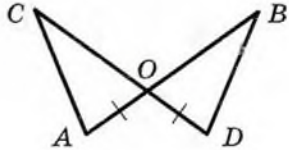


Рис. 152

200.•• Відрізки AB і CD перетинаються в точці O і діляться цією точкою навпіл. На відрізку AC позначено точку M, а на відрізку BD — точку K так, що $AM = BK$. Доведіть, що:

1) $OM = OK$;

2) точки M, O і K лежать на одній прямій.

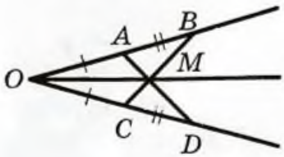


Рис. 153

201.•• На одній стороні кута з вершиною в точці O (рис. 153) позначено точки A і B, а на другій — точки C і D так, що $OA = OC$, $AB = CD$. Доведіть, що промінь OM є бісектрисою кута BOD, де M — точка перетину прямих AD і BC.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

202. Чи є правильним твердження: якщо через кожні дві з трьох даних точок провести пряму, то одержимо три прямі?

203. Промені OD і OF — бісектриси суміжних кутів AOB і BOC відповідно, $\angle AOD : \angle FOC = 2:7$. Знайдіть $\angle AOD$ і $\angle FOC$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

204. Розділіть кожну з фігур, що зображено на рисунку 154, уздовж ліній сітки на 4 рівні частини так, щоб у кожній частині було тільки одне коло.

Рис. 154

9. Рівнобедрений трикутник та його властивості

Означення. **Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають рівнобедреним.**

На рисунку 155 зображено рівнобедрений трикутник ABC, у якого $AB = BC$.

Рівні сторони трикутника називають **бічними** сторонами, а третю сторону — **основою** рівнобедреного трикутника.

Вершиною рівнобедреного трикутника називають спільну точку його бічних сторін (точка B на рисунку 155). При цьому кут B називають **кутом при вершині**, а кути A і C — **кутами при основі** рівнобедреного трикутника.

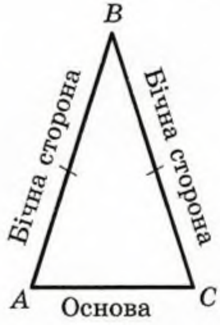


Рис. 155

Означення. **Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім.**

На рисунку 156 зображено рівносторонній трикутник ABC. Рівносторонній трикутник — окремий вид рівнобедреного трикутника.

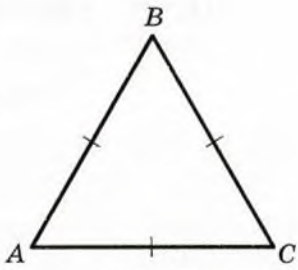


Рис. 156

Теорема 9.1. ***У рівнобедреному трикутнику:* 1) *кути при основі рівні;* 2) *бісектриса кута при вершині є медіаною і висотою.***

Доведення. ⊙ Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC, у якому $AB = BC$, відрізок BL — його бісектриса (рис. 157). Треба довести, що $\angle A = \angle C$, $AL = LC$, $BL \perp AC$.

У трикутниках ABL і CBL сторона BL — спільна, $\angle ABL = \angle CBL$, оскільки за умовою BL — бісектриса

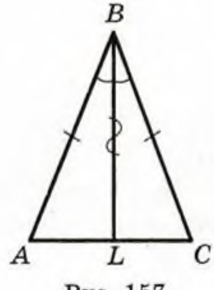


Рис. 157

кута ABC, сторони AB і BC рівні як бічні сторони рівнобедреного трикутника. Отже, $\Delta ABL = \Delta CBL$ за першою ознакою. Звідси можна зробити такі висновки:

1) $\angle A$ і $\angle C$ рівні як відповідні кути рівних трикутників;
2) відрізки AL і LC рівні як відповідні сторони рівних трикутників, а отже, BL — медіана;
3) $\angle ALB = \angle CLB$. Але $\angle ALB + \angle CLB = 180^\circ$. Звідси випливає, що $\angle ALB = \angle CLB = 90^\circ$, отже, BL — висота. ▲

З цієї теореми випливає, що:

1) ***у трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути;***
2) ***у рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота і медіана, проведені з його вершини, збігаються;***
3) ***у рівносторонньому трикутнику всі кути рівні;***
4) ***у рівносторонньому трикутнику бісектриса, висота і медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.***

Означення. **Якщо у трикутнику довжини всіх сторін різні, то такий трикутник називають різностороннім.**

Приклад. Відрізок AD — медіана рівнобедреного трикутника ABC, яка проведена до основи. На сторонах AB і AC позначено відповідно точки M і K так, що $BM = CK$. Доведіть рівність трикутників AMD і AKD.

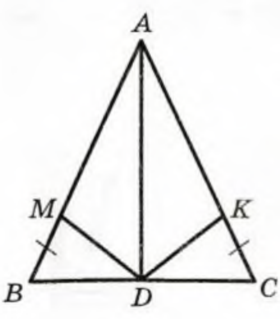


Рис. 158

Розв'язання. Маємо: $AB = AM + BM$, $AC = AK + CK$ (рис. 158).

Оскільки $AB = AC$ і $BM = CK$, то $AM = AK$.

$\angle BAD = \angle CAD$, оскільки медіана рівнобедреного трикутника, яка проведена до основи, є його бісектрисою.

AD — спільна сторона трикутників AMD і AKD.

Отже, $\Delta AMD = \Delta AKD$ за двома сторонами і кутом між ними.

1. Які є види трикутників залежно від кількості рівних сторін?
2. Який трикутник називають різностороннім? рівнобедреним? рівностороннім?
3. Які сторони рівнобедреного трикутника називають бічними?
4. Яку сторону рівнобедреного трикутника називають основою?
5. Сформулюйте властивість кутів рівнобедреного трикутника.
6. Сформулюйте властивість бісектриси рівнобедреного трикутника, проведеної до основи.
7. Яка властивість кутів трикутника, що лежать проти його рівних сторін?
8. Сформулюйте властивість кутів рівностороннього трикутника.
9. Яку властивість мають бісектриса, висота і медіана рівностороннього трикутника, проведені з однієї вершини?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

205.° Накресліть:
1) різносторонній гострокутний трикутник;
2) рівнобедрений прямокутний трикутник;
3) рівнобедрений тупокутний трикутник.

206.° Накресліть:
1) різносторонній прямокутний трикутник;
2) різносторонній тупокутний трикутник.

207.° Накресліть рівнобедрений трикутник з бічною стороною завдовжки 3 см так, щоб його кут при вершині був: 1) гострим; 2) прямим; 3) тупим. У побудованих трикутниках проведіть висоти до бічних сторін.

ВПРАВИ

208.° 1) Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 13 см, а бічна сторона — 8 см.
2) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 39 см, а основа — 15 см. Знайдіть бічні сторони трикутника.

209.° Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 28 см, а бічна сторона — 10 см. Знайдіть основу трикутника.

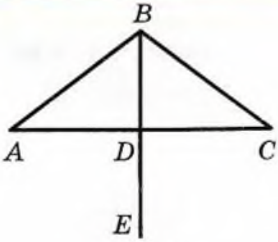


Рис. 159

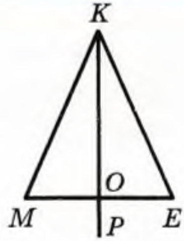


Рис. 160

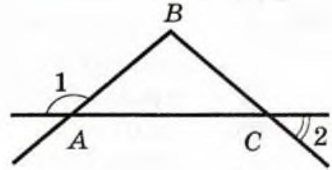


Рис. 161

210.° Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 32 см, а основа на 5 см більша за бічну сторону.

211.° Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 54 см, а основа в 4 рази менша від бічної сторони.

212.° У рівнобедреному трикутнику ABC сторона AC — основа, $\angle C = 40^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$, BD — медіана. Знайдіть кути трикутника ABD.

213.° На рисунку 159 $AB = BC$, BD — медіана трикутника ABC, $\angle ABD = 53^\circ$. Знайдіть $\angle ABC$ і $\angle ADE$.

214.° На рисунку 160 $MK = KE$, $OE = 6$ см, $\angle MKE = 48^\circ$, $\angle POE = 90^\circ$. Знайдіть сторону ME і кут MKO.

215.° На рисунку 161 $AB = BC$, $\angle 1 = 140^\circ$. Знайдіть $\angle 2$.

216.° Кут, вертикальний до кута при вершині рівнобедреного трикутника, дорівнює 68°. Знайдіть кут між бічною стороною трикутника і медіаною, проведеною до основи.

217.° Кут, суміжний з кутом при вершині рівнобедреного трикутника, дорівнює 76°. Знайдіть кут між бічною стороною трикутника і висотою, опущеною на основу.

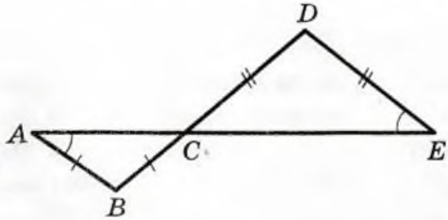


Рис. 162

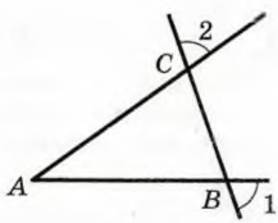


Рис. 163

218.° На рисунку 162 $AB = BC$, $DC = DE$. Доведіть, що $\angle A = \angle E$.

219.° Пряма перетинає сторони кута A в точках B і C так, що $AB = AC$ (рис. 163). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

220.° На рисунку 164 $AO = CO$, $\angle AOB = \angle COB$. Доведіть, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

221.° Трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC, BD — його бісектриса, DM — бісектриса трикутника BDC. Знайдіть кут ADM.

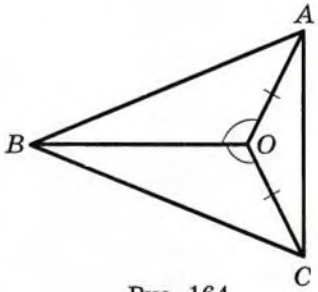


Рис. 164

222.° Один учень стверджує, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений, а другий учень — що він рівносторонній.

1) Чи можуть обидва учні бути правими?
2) У якому випадку правий тільки один учень і який саме?

223.° Використовуючи ознаки рівності трикутників, обґрунтуйте ознаки рівності рівнобедрених трикутників:

1) за бічною стороною і кутом при вершині;
2) за основою і прилеглим до неї кутом.

224.° На основі AC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки M і K так, що M лежить між A і K та $AM = CK$. Доведіть, що $\triangle MBK$ — рівнобедрений.

225.° У трикутнику MKE $MK = ME$. На стороні KE позначено точки F і N так, що N лежить між F і E та $\angle KMF = \angle EMN$. Доведіть, що $\angle MFN = \angle MNF$.

226.° На бічних сторонах рівнобедреного трикутника ABC з основою AB відкладено рівні відрізки CK і CM на сторонах CA і CB відповідно. Доведіть, що: 1) $\triangle AMC = \triangle BKC$; 2) $\triangle AMB = \triangle BKA$.

227.° У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC на медіані BD позначили довільну точку M. Доведіть, що: 1) $\triangle AMB = \triangle CMB$; 2) $\triangle AMD = \triangle CMD$.

228.° Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси кутів при основі рівні.

229.° Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, рівні.

230.• Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами рівнобедреного трикутника.

231.• Одна із сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а друга — 8 см. Яка з цих сторін є основою трикутника?

232.• Знайдіть третю сторону рівнобедреного трикутника, якщо дві інші його сторони дорівнюють: 1) 7 см і 4 см; 2) 7 см і 3 см. Скільки розв'язків у кожному випадку має задача?

233.• Одна із сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см. Знайдіть дві інші сторони, якщо периметр трикутника дорівнює: 1) 20 см; 2) 14 см. Скільки розв'язків у кожному випадку має задача?

234.• Чи є правильним твердження:

1) бісектриса рівнобедреного трикутника є його висотою і медіаною;
2) бісектриса рівностороннього трикутника є його висотою і медіаною;
3) якщо периметр трикутника в 3 рази більший за одну з його сторін, то цей трикутник рівносторонній?

235.• На сторонах рівностороннього трикутника ABC (рис. 165) позначили точки M, K і D так, що $AD = BM = CK$. Доведіть, що ΔMKD — рівносторонній.

236.•• На продовженнях сторін AB, BC, AC рівностороннього трикутника ABC (рис. 166) за точки A, B і C відповідно відклали рівні відрізки AD, BK і CE. Доведіть, що ΔDEK — рівносторонній.

237.•• Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а його медіана розбиває даний трикутник на два трикутники

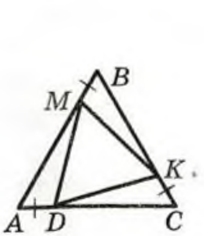


Рис. 165

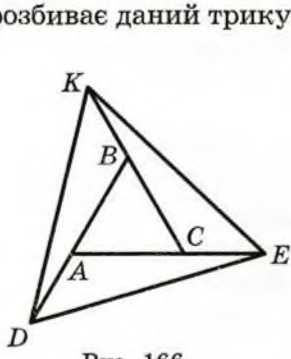


Рис. 166

Рис. 167

так, що периметр одного з них на 6 см менший від периметра другого. Знайдіть бічну сторону даного трикутника. Скільки розв'язків має задача?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

238. На рисунку 167 $a \perp b$, $\angle 1 = 35^\circ$. Знайдіть $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

239. Точки C і D поділили відрізок AB, довжина якого дорівнює a, на три відрізки AC, CD і DB так, що $AC = 2CD$, $CD = 2DB$. Знайдіть відстань між: 1) точкою A і серединою відрізка CD; 2) серединами відрізків AC і DB.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

240. Нарисуйте шестикутник, який можна одним розрізом поділити на два трикутники.

10. Ознаки рівнобедреного трикутника

У попередньому пункті ми розглянули властивості рівнобедреного трикутника. А як серед трикутників «розпізнавати» рівнобедрені? На це запитання відповідають такі теореми-ознаки.

Теорема 10.1. ***Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.***

Доведення. ⊙ Розглянемо трикутник ABC, у якому відрізок BM — медіана і висота. Треба довести, що $AB = BC$ (рис. 168).

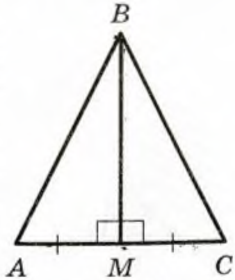


Рис. 168

З умови теореми випливає, що пряма BM — серединний перпендикуляр відрізка AC.

Тоді за властивістю серединного перпендикуляра $AB = BC$. ▲

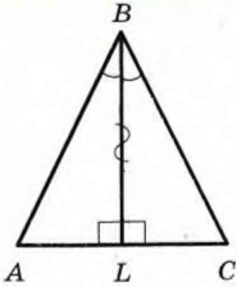


Рис. 169

Теорема 10.2. ***Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.***

Доведення. ⊙ Розглянемо трикутник ABC, у якому відрізок BL — бісектриса і висота. Треба довести, що $AB = BC$ (рис. 169).

У трикутниках ABL і CBL сторона BL — спільна, $\angle ABL = \angle CBL$, оскільки за умовою BL — бісектриса кута ABC, $\angle ALB = \angle CLB = 90^\circ$, оскільки за умовою BL — висота. Отже, $\Delta ABL = \Delta CBL$ за другою ознакою рівності трикутників. Тоді сторони AB і BC рівні як відповідні сторони рівних трикутників. ▲

Теорема 10.3. ***Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.***

Доведення. ⊛ Розглянемо трикутник ABC, у якому $\angle A = \angle C$. Треба довести, що $AB = BC$.

Проведемо серединний перпендикуляр a сторони AC. Доведемо, що пряма a проходить через вершину B.

Припустимо, що це не так. Тоді пряма a перетинає або сторону AB (рис. 170), або сторону BC (рис. 171).

Розглянемо перший з цих випадків. Нехай K — точка перетину прямої a зі стороною AB. Тоді за властивістю серединного перпендикуляра (теорема 8.2) $AK = CK$. Отже, ΔAKC — рівнобедрений, звідси $\angle A = \angle ACK$. Проте за умовою $\angle A = \angle ACB$. Тоді маємо: $\angle ACB = \angle ACK$, що суперечить основній властивості величини кута (п. 3).

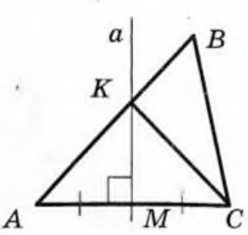


Рис. 170

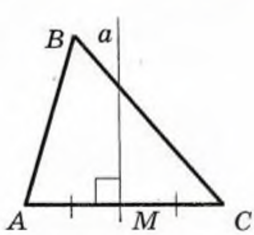


Рис. 171

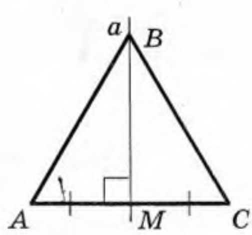


Рис. 172

Аналогічно отримуємо суперечність і для другого випадку (рис. 171).

Отже, наше припущення неправильне. Пряма a проходить через точку B (рис. 172), і за властивістю серединного перпендикуляра $BA = BC$. ▲

З цієї теореми випливає, що ***в трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони.***

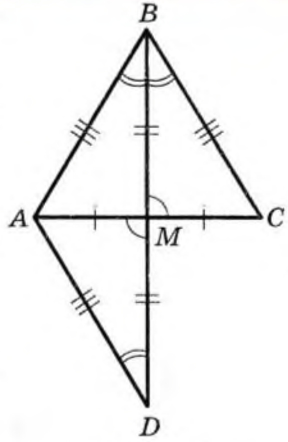


Рис. 173

Теорема 10.4. ***Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.***

Доведення. ⊛ Розглянемо трикутник ABC, у якому відрізок BM — медіана і бісектриса (рис. 173). Треба довести, що $AB = BC$.

На промені BM відкладемо відрізок MD, який дорівнює відрізку BM (рис. 173).

У трикутниках AMD і CMB $AM = MC$, оскільки за умовою BM — медіана, $BM = MD$ за побудовою, $\angle AMD$ і $\angle CMB$ рівні як вертикальні. Отже, $\Delta AMD = \Delta CMB$ за першою ознакою рівності трикутників. Тоді сторони AD і BC, $\angle ADM$ і $\angle CBM$ рівні як відповідні елементи рівних трикутників.

Оскільки BD — бісектриса кута ABC, то $\angle ABM = \angle CBM$. З урахуванням доведеного отримуємо, що $\angle ABM = \angle ADM$. Тоді за теоремою 10.3 ΔDAB — рівнобедрений, звідки $AD = AB$. Проте вже доведено, що $AD = BC$. Отже, $AB = BC$. ▲

Приклад. У трикутнику ABC проведено бісектрису BM (рис. 174), $\angle BAK = 70^\circ$, $\angle AKC = 110^\circ$. Доведіть, що $BM \perp AK$.

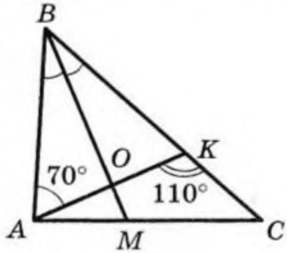


Рис. 174

Розв'язання. Оскільки $\angle BKA$ і $\angle AKC$ — суміжні, то $\angle BKA = 180^\circ - \angle AKC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Отже, у трикутнику ABK $\angle BAK = \angle BKA = 70^\circ$.

Тоді $\triangle ABK$ — рівнобедрений з основою AK, і його бісектриса BO (O — точка перетину AK і BM) є також висотою, тобто $BM \perp AK$.

1. Сформулюйте ознаки рівнобедреного трикутника.
2. Який зв'язок між рівними кутами і рівними сторонами трикутника?

ВПРАВИ

241.° У трикутнику ABC медіана BK перпендикулярна до сторони AC. Знайдіть $\angle ABC$, якщо $\angle ABK = 25°$.

242.° Серединний перпендикуляр сторони AC трикутника ABC проходить через вершину B. Знайдіть $\angle C$, якщо $\angle A = 17°$.

243.° У трикутнику ABC $\angle ACB = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, CK — висота. Знайдіть сторону AB, якщо $CK = 7$ см.

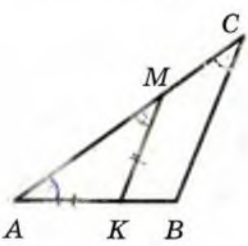


Рис. 175

244.° На рисунку 175 $\angle AMK = \angle ACB$, $AK = MK$. Доведіть, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

245.° Пряма, перпендикулярна до бісектриси кута A, перетинає його сторони в точках B і C. Доведіть, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

246.° Бісектриси AM і CK кутів при основі AC рівнобедреного трикутника ABC перетинаються в точці O. Доведіть, що $\triangle AOC$ — рівнобедрений.

247.° У трикутнику ABC бісектриса BK є його висотою. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника ABK дорівнює 16 см і $BK = 5$ см.

248.• Чи є правильним твердження:

1) якщо медіана і висота трикутника, проведені з однієї вершини, не збігаються, то цей трикутник не є рівнобедреним;
2) якщо бісектриса трикутника ділить протилежну сторону навпіл, то цей трикутник рівнобедрений?

249.° Медіани AE і CF, проведені до бічних сторін AB і BC рівнобедреного трикутника ABC, перетинаються в точці M. Доведіть, що ΔAMC — рівнобедрений.

√**250.**° Точки M і K належать відповідно бічним сторонам AB і BC рівнобедреного трикутника ABC, $AM = CK$. Відрізки AK і CM перетинаються в точці O. Доведіть, що ΔAOC — рівнобедрений.

+ **251.**•• На сторонах AB і BC трикутника ABC позначили відповідно точки D і E так, що $\angle EAC = \angle DCA$. Відрізки AE і CD перетинаються в точці F, $DF = EF$. Доведіть, що ΔABC — рівнобедрений.

252.•• Через середину D сторони AB трикутника ABC проведено прямі, перпендикулярні до бісектрис кутів ABC і BAC. Ці прямі перетинають сторони AC і BC у точках M і K відповідно. Доведіть, що $AM = BK$.

253.•• Медіана AM трикутника ABC перпендикулярна до його бісектриси BK. Знайдіть сторону AB, якщо $BC = 16$ см.

254.•• Пряма, яка проходить через вершину A трикутника ABC перпендикулярно до його медіани BD, ділить цю медіану навпіл. Знайдіть відношення довжин сторін AB і AC трикутника ABC.

255.•• У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 67{,}5°$, $\angle B = 22{,}5°$, CK — бісектриса трикутника ABC, CM — бісектриса трикутника BCK (рис. 176). Доведіть, що точка M — середина відрізка AB.

256.* Довжини сторін трикутника, виражені в сантиметрах, дорівнюють трьом послідовним натуральним числам. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо одна з його медіан перпендикулярна до однієї з його бісектрис.

257.* У трикутнику ABC $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см. На стороні BC позначено точку M таку, що $CM = 1$ см. Пряма, яка проходить через точку M перпендикулярно до бісектриси кута ACB, перетинає відрізок AC у точці K, а пряма, яка проходить через точку K перпендику-

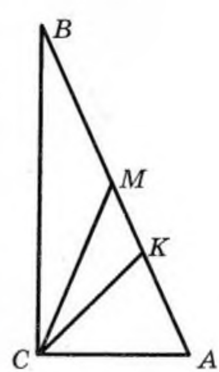


Рис. 176

лярно до бісектриси кута BAC, перетинає пряму AB у точці D. Знайдіть довжину відрізка BD.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

258. На прямій послідовно позначили точки A, B, C, D, E і F так, що $AB = BC = CD = DE = EF$. Знайдіть відношення $AB:CF$, $AB:BF$, $BD:AE$.

259. Знайдіть кути, які утворилися при перетині двох прямих, якщо один з них на 42° більший за половину іншого кута.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

260. Розріжте прямокутник розмірами 4×9 на дві рівні частини, з яких можна скласти квадрат.

11. Третя ознака рівності трикутників

Теорема 11.1 (третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами). ***Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. ⊛ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 177), у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (ці

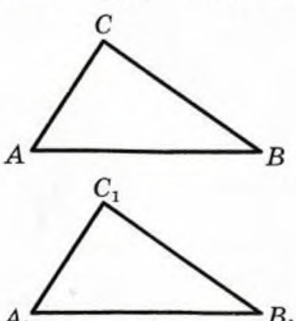


Рис. 177

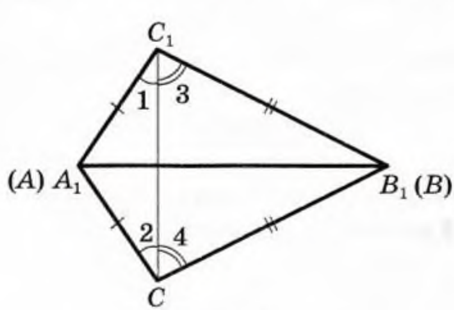


Рис. 178

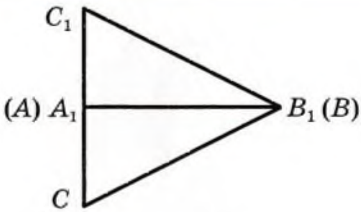


Рис. 179

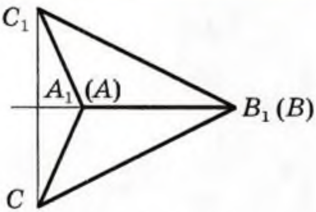


Рис. 180

рівності вказують, які сторони трикутників відповідають одна одній). Доведемо, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, вершина B — з B_1, а вершини C і C_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої AB (рис. 178). Проведемо відрізок CC_1. Оскільки $A_1C_1 = AC$, то трикутник A_1C_1C — рівнобедрений, а отже, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогічно можна довести, що $\angle 3 = \angle 4$. Отже, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$. Тоді $\Delta A_1C_1B_1 = \Delta A_1CB_1$ за першою ознакою рівності трикутників.

Здавалося б, доведення завершено. Проте ми розглянули лише випадок, коли відрізок CC_1 перетинає відрізок A_1B_1 у внутрішній точці. Насправді відрізок CC_1 може проходити через один з кінців відрізка A_1B_1, наприклад точку A_1 (рис. 179), або не мати спільних точок з відрізком A_1B_1 (рис. 180). У кожному з цих випадків доведення будуть аналогічними наведеному. Проведіть їх самостійно. ▲

З третьої ознаки рівності трикутників випливає, що *трикутник — жорстка фігура*. Справді, якщо чотири рейки з'єднати так, як показано на рисунку 181, *а*, то така конструкція не буде жорсткою (рис. 181, *б*, *в*). Якщо ж додати ще одну рейку, утворивши два трикутники (рис. 181, *г*), то одержана конструкція стане жорсткою. Цей факт широко використовують на практиці (рис. 182).

а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 181

а)

б)

Рис. 182. Жорсткі конструкції: *а*) опори ліній електропередачі; *б*) телевізійна башта

Теорема 11.2. ***Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.***

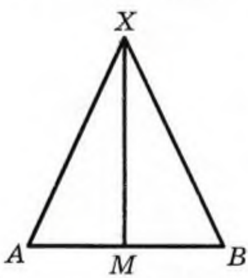


Рис. 183

Доведення. ⊙ Нехай точка X рівновіддалена від кінців відрізка AB, тобто $XA = XB$ (рис. 183). Розглянемо трикутники AXM і BXM, де M — середина відрізка AB. Тоді $\Delta AXM = \Delta BXM$ за третьою ознакою. Звідси $\angle AMX = \angle BMX$. Але сума цих кутів дорівнює 180°, тобто кожний з них дорівнює 90°. Отже, пряма XM — серединний перпендикуляр відрізка AB.

Зауважимо, що ми розглянули випадок, коли точка X не належить прямій AB. Якщо точка X належить прямій AB, то вона збігається з серединою відрізка AB, а отже, належить його серединному перпендикуляру. ▲

1. Сформулюйте третю ознаку рівності трикутників.

2. Де знаходяться точки, які рівновіддалені від кінців відрізка?

ВПРАВИ

261.° На рисунку 184 $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

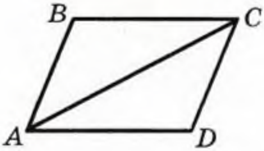


Рис. 184

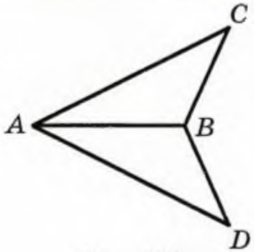


Рис. 185

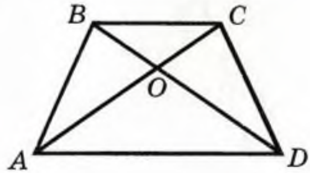


Рис. 186

262.° На рисунку 185 $AC = AD$, $BC = BD$. Знайдіть кут BAC, якщо $\angle BAD = 25°$.

263.° Доведіть, що два рівнобедрених трикутники рівні, якщо бічна сторона і основа одного трикутника відповідно дорівнюють бічній стороні і основі другого трикутника.

264.° Доведіть, що два рівносторонніх трикутники рівні, якщо сторона одного трикутника дорівнює стороні другого трикутника.

265.° На рисунку 186 $\Delta ABC = \Delta BCD$, причому $AB = CD$. Доведіть, що $\Delta ABD = \Delta \cancel{ACD}$. DCA

266.° На рисунку 186 $AB = CD$, $AC = BD$. Доведіть, що ΔBOC — рівнобедрений.

267.° Кожна з точок M і N рівновіддалена від кінців відрізка AB. Доведіть, що пряма MN — серединний перпендикуляр відрізка AB.

268.• На рисунку 187 $AB = KE$, $BC = KM$, $AM = EC$. Доведіть, що $\angle AMK = \angle BCE$.

269.• На рисунку 188 $AB = CD$, $BC = AD$, BM — бісектриса кута ABC, DK — бісектриса кута ADC. Доведіть, що $\Delta ABM = \Delta DCK$.

270.• Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $OA = OD$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta DBC$.

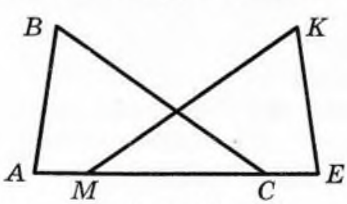


Рис. 187

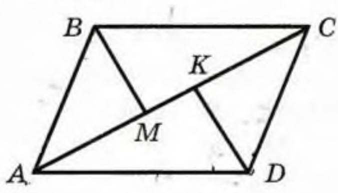


Рис. 188

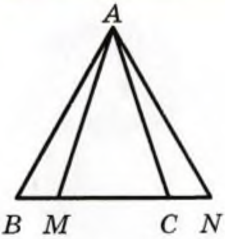


Рис. 189

271.* Відрізки BD і B_1D_1 — бісектриси трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

272.** Микола стверджує, що йому вдалося зробити рисунок, на якому $AB = AC$ і $AM = AN$ (рис. 189). Чи прав Микола?

273.** Чи будуть два трикутники рівними, якщо кожній стороні одного трикутника дорівнює деяка сторона другого трикутника?

274.* Доведіть рівність двох трикутників за двома сторонами і медіаною, яка проведена до третьої сторони.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

275. На відрізку AB позначили точки C і D так, що $AC:BC = 7:8$, $AD:BD = 13:17$. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо відстань між точками C і D дорівнює 2 см.

276. Прямі AB і CD перетинаються в точці O, промені OM, OK — бісектриси відповідно кутів AOC, BOC, які утворилися при цьому. Чи буде кут MOK прямим?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

277. Квадрат розрізали по діагоналях на 4 трикутники (рис. 190). Складіть з цих трикутників два квадрати.

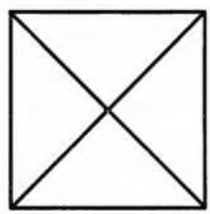


Рис. 190

12. Теореми

Ви бачите, що в підручнику з'являється все більше і більше теорем. І це не дивно: адже геометрія в основному складається з теорем та їх доведень.

Формулювання усіх теорем, які ми довели, складаються з двох частин. Першу частину (те, що дано) називають **умовою** теореми, другу частину (те, що потрібно довести) — **висновком** теореми.

Наприклад, у теоремі 8.1 (перша ознака рівності трикутників) умовою є те, що дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам і куту між ними другого трикутника, а висновком — рівність трикутників.

Усі відомі вам теореми можна умовно поділити на **теореми-властивості** і **теореми-ознаки**. Наприклад, теорема 1.1 встановлює властивість прямих, що перетинаються, теорема 9.1 — властивість рівнобедреного трикутника.

Теореми-ознаки вказують ознаки, за якими можна розпізнати фігуру, тобто віднести її до того чи іншого виду (класу).

Так, у теоремах-ознаках рівності трикутників зазначено вимоги, за якими два трикутники можна віднести до класу рівних. Наприклад, у теоремах 10.1–10.4 сформульовано ознаки, за якими «розпізнають» рівнобедрений трикутник.

Теореми, які випливають *безпосередньо* з аксіом або теорем, називають **теоремами-наслідками** або просто **наслідками**.

Наприклад, теорема 7.1 (нерівність трикутника) є наслідком з основної властивості довжини відрізка. Властивість кутів, протилежних рівним сторонам трикутника, є наслідком з теореми 9.1.

Якщо у теоремі 8.2 про властивість серединного перпендикуляра поміняти місцями умову і висновок, то отримаємо теорему 11.2. У таких випадках теореми називають **взаємно оберненими**. Якщо яку-небудь з цих теорем назвати **прямою**, то другу теорему будемо називати **оберненою**.

При формулюванні оберненої теореми треба бути дуже уважними: не завжди можна отримати істинне твердження. Наприклад, твердження, обернене теоремі 4.1 про суму суміжних кутів, хибне. Дійсно, якщо сума якихось двох кутів дорівнює 180°, то зовсім не обов'язково, щоб ці кути були суміжними. У таких випадках говорять, що обернена теорема хибна.

Ви знаєте, що справедливість теореми встановлюється шляхом логічних міркувань, тобто доведення.

Першу теорему цього підручника було доведено методом **від супротивного**. Назва цього методу фактично відображає його суть. Ми припустили, що висновок теореми 1.1 неправильний. На підставі цього припущення за допомогою логічних міркувань був отриманий факт, який суперечив основній властивості прямої.

Методом від супротивного було доведено також і ряд інших теорем, наприклад теореми 2.1, 5.1, 10.3.

Дуже важливо, щоб доведення теореми було повним. Так, повне доведення теореми 11.1 (третя ознака рівності трикутників) потребувало розгляду всіх трьох можливих випадків.

Уміння бачити усі тонкощі й нюанси доведення — найважливіша якість, яка формує математичну культуру. Якби, наприклад, при доведенні теореми 8.2 про властивість серединного перпендикуляра ми не розглянули б окремо випадок, коли точка X є серединою відрізка AB, то звернення до трикутників AXM і BXM було б не зовсім «законним».

При доведенні теореми 10.4 (ознака рівнобедреного трикутника) ми використовували **прийом додаткової побудови**: рисунок доповнили елементами, про які не йшлося в умові теореми. Цей метод є ключем до розв'язування багатьох задач і доведення цілого ряду теорем. Тому дуже важливо навчитися бачити «вигідну» (результативну) додаткову побудову.

А як набути такого «геометричного зору»? Питання непросте, і на нього складно відповісти за допомогою конкретних рекомендацій. Але все ж радимо, по-перше, не бути байдужими до геометрії, а полюбити цей красивий предмет, по-друге, більше розв'язувати задач, щоб розвинути інтуїцію і набути потрібного досвіду. Дерзайте!

1. З яких двох частин складається формулювання теореми?

2. Як називають теореми, у яких перелічено властивості, за якими можна віднести фігуру до якогось виду (класу)?

3. Як називають теорему, яка безпосередньо випливає з аксіоми чи іншої теореми?

4. Як називають теореми, у яких умову і висновок поміняно місцями?

5. У чому полягає метод доведення від супротивного?

6. Які з теорем 1.1; 2.1; 4.2; 5.1; 8.3 доведено методом від супротивного?

7. У чому полягає прийом додаткової побудови?

ВПРАВИ

278.° У теоремах 4.1; 8.2; 9.1; 10.3; 11.2 укажіть умову і висновок теореми.

279.° З теорем 4.1; 8.2; 9.1; 10.3; 11.2 виберіть: 1) теореми-властивості; 2) теореми-ознаки.

280.° Сформулюйте твердження, яке є оберненим до даного:

1) якщо трикутник рівносторонній, то його кути рівні;
2) якщо два кути вертикальні, то їх бісектриси є доповняльними променями;
3) якщо кут між бісектрисами двох кутів прямий, то ці кути суміжні;
4) якщо сторона і протилежний їй кут одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і протилежному їй куту другого трикутника, то ці трикутники рівні.

У якому з цих прикладів:

1) пряме й обернене твердження є правильними;
2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним;
3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?

281.° Сформулюйте твердження, яке є оберненим до даного:

1) якщо точка B лежить між точками A і C, то $AB + BC = AC$;
2) якщо два трикутники не рівні, то їх периметри теж не рівні;
3) якщо градусна міра кута більша за 90°, то він є тупим.

У якому з цих прикладів:

1) пряме і обернене твердження є правильними;
2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним;
3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?

282.° Сформулюйте твердження, супротивне даному:

1) відрізок AB перетинає пряму m;
2) градусна міра кута ABC більша за 40°;

3) з двох суміжних кутів хоча б один не більший за 90°;
4) промені OA і OB не є доповняльними;
5) відрізок має тільки одну середину.

283.° Сформулюйте твердження, супротивне даному:
1) кут ABC не є прямим;
2) трикутник MKE є рівнобедреним;
3) через точку на прямій можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну даній;
4) промінь AC ділить кут BAK навпіл.

284.• Доведіть, використовуючи метод від супротивного, що коли будь-яка висота трикутника не збігається з бісектрисою трикутника, проведеною з тієї самої вершини, то трикутник не є рівнобедреним.

285.• Доведіть, використовуючи метод від супротивного, що коли сторони AB і BC трикутника ABC не рівні, то його медіана BD не є його висотою.

286.• Доведіть методом від супротивного, що коли різниця двох кутів дорівнює 1°, то вони не можуть бути вертикальними.

287.• Доведіть методом від супротивного, що з двох суміжних кутів хоча б один не менший від 90°.

288.• Сформулюйте і доведіть ознаку рівності рівнобедрених трикутників за бічною стороною і медіаною, проведеною до бічної сторони.

289.• Сформулюйте і доведіть ознаку рівності трикутників за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, та кутом між медіаною і цією стороною.

290.•• Доведіть ознаку рівності трикутників за медіаною та кутами, на які вона розбиває кут трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

291. Позначте на прямій точки A, B і C. Поставте замість крапок один зі знаків «<», «>», «=» так, щоб утворився правильний запис:
1) $AB + BC \dots AC$;
2) $AB + AC \dots BC$;
3) $AC + BC \dots AB$.

292. Кут між бісектрисою одного із суміжних кутів та їх спільною стороною становить $\frac{1}{3}$ другого суміжного кута. Знайдіть градусні міри цих суміжних кутів.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

293. Довжини сторін прямокутника дорівнюють 4 см і 3 см. Знайдіть суму довжин усіх відрізків, що містяться всередині прямокутника (рис. 191).

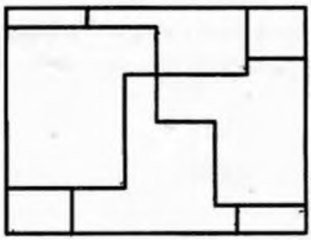


Рис. 191

ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - кути трикутника;
  - периметр трикутника;
  - прямокутний трикутник, гострокутний трикутник, тупокутний трикутник;
  - рівні трикутники, відповідні сторони і відповідні кути рівних трикутників;
  - висота, медіана, бісектриса трикутника;
  - серединний перпендикуляр відрізка;
  - рівнобедрений трикутник, рівносторонній трикутник, різносторонній трикутник;

- ви вивчили:
  - нерівність трикутника;
  - основну властивість рівних трикутників;
  - три ознаки рівності трикутників;
  - властивості серединного перпендикуляра відрізка і точок, рівновіддалених від кінців відрізка;
  - властивості й ознаки рівнобедреного трикутника;

- ви ознайомилися:
  - зі структурою теореми, видами теорем;
  - з деякими методами доведення теорем.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

1. Трикутник є гострокутним, якщо:

А) серед його кутів немає тупого;

Б) кожний його кут менший від прямого;

В) серед його кутів немає прямого;

Г) кожний його кут менший від тупого.

2. Сума двох сторін трикутника дорівнює 5 см. Знайдіть третю сторону цього трикутника, якщо її довжина, виражена в сантиметрах, не менша від 4 і дорівнює цілому числу.

А) 5; Б) 4; В) 6; Г) 1.

3. Яке з наступних тверджень є неправильним?

А) Медіана трикутника не може збігатися зі стороною;

Б) висота трикутника не може збігатися зі стороною;

В) висота трикутника може збігатися зі стороною;

Г) бісектриса трикутника не може збігатися зі стороною.

4. Два трикутники будуть рівними, якщо:

А) дві сторони одного трикутника дорівнюють двом сторонам другого трикутника;

Б) два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника;

В) дві сторони і кут одного трикутника дорівнюють двом сторонам і куту другого трикутника;

Г) дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам і куту між ними другого трикутника.

5. Скільки пар рівних трикутників зображено на рисунку (рівною кількістю рисочок позначено рівні відрізки)?

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

6. Відомо, що M — середина сторони AC трикутника ABC. На промені BM поза трикутником відкладено відрізок ME, який дорівнює відрізку BM. Знайдіть EC, якщо $AB = 4{,}2$ см.

А) 2,1 см; Б) 4,2 см; В) 4,8 см; Г) 8,4 см.

7. Яке з наступних тверджень є правильним?

А) Рівнобедрений трикутник – окремий вид різностороннього трикутника;

Б) рівносторонній трикутник – окремий вид різностороннього трикутника;

В) рівносторонній трикутник – окремий вид рівнобедреного трикутника;

Г) рівнобедрений трикутник – окремий вид рівностороннього трикутника.

8. Яке з наступних тверджень є неправильним?

А) Якщо висота трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на рівні відрізки, то цей трикутник є рівнобедреним;

Б) якщо медіана і бісектриса, проведені з однієї вершини, не збігаються, то цей трикутник не є рівнобедреним;

В) якщо трикутник рівносторонній, то довжина будь-якої його висоти дорівнює довжині будь-якої його бісектриси;

Г) якщо два кути трикутника рівні, то бісектриса третього кута ділить протилежну сторону трикутника на рівні відрізки.

9. Трикутник є рівностороннім, якщо:

А) його сторона в 3 рази менша від його периметра;

Б) кожна його сторона в 3 рази менша від його периметра;

В) дві його висоти рівні;

Г) дві його бісектриси рівні.

10. Периметр рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) дорівнює 16 см. Периметр трикутника ABM, де M — середина відрізка AC, дорівнює 12 см. Знайдіть довжину медіани BM.

А) 4 см; Б) 6 см; В) 2 см; Г) 5 см.

11. Кожна з точок X і Y рівновіддалена від кінців відрізка AB і обидві лежать в одній півплощині відносно прямої AB. Яке з наступних тверджень є неправильним?

А) Прямі XY і AB перпендикулярні;

Б) $\angle XAY = \angle XBY$;

В) $\angle AXB = \angle AYB$;

Г) $\angle AXY = \angle BXY$.

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

§3

Як встановити паралельність двох прямих? Які властивості притаманні паралельним прямим? Чому дорівнює сума кутів будь-якого трикутника? Які властивості має прямокутний трикутник? Вивчивши матеріал цього параграфа, ви отримаєте відповіді на поставлені запитання.

13. Паралельні прямі

Означення. **Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.**

На рисунку 192 зображено паралельні прямі a і b. Пишуть $a \parallel b$ (читають: «прямі a і b паралельні» або «пряма a паралельна прямій b»).

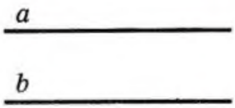


Рис. 192

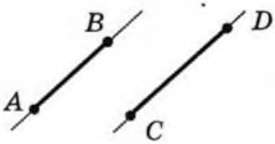


Рис. 193

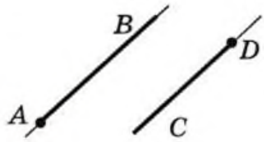


Рис. 194

Якщо два відрізки лежать на паралельних прямих, то їх також називають паралельними.

На рисунку 193 відрізки AB і CD паралельні. Пишуть $AB \parallel CD$.

Також можна говорити про паралельність двох променів, променя і відрізка, прямої і променя, відрізка і прямої. Наприклад, на рисунку 194 зображено паралельні промені.

Теорема 13.1 (ознака паралельності прямих). ***Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 195 $a \perp c$ і $b \perp c$. Треба довести, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b перетинаються в деякій точці M (рис. 196). Тоді через точку M, яка не належить прямій c, проходять дві прямі a і b, перпендикулярні до прямої c. Це суперечить теоремі 7.2. Отже, $a \parallel b$. ▲

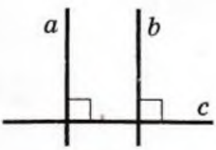


Рис. 195

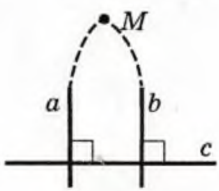


Рис. 196

Рис. 197

Доведена теорема дає змогу за допомогою лінійки і косинця будувати паралельні прямі (рис. 197).

Наслідок. ***Через дану точку M, яка не належить прямій a, можна провести пряму b, паралельну прямій a.***

Доведення. ⊙ Нехай точка M не належить прямій a (рис. 198).

Проведемо (наприклад, за допомогою косинця) через точку M пряму c, перпендикулярну до прямої a. Тепер через точку M проведемо пряму b, перпендикулярну до прямої c. За теоремою 13.1 $a \parallel b$. ▲

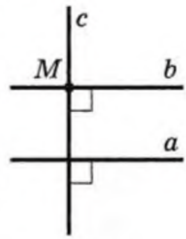


Рис. 198

Чи можна через точку M (рис. 198) провести ще одну пряму, паралельну прямій a? Відповідь дає така

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельних прямих). **Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.**

Теорема 13.2. ***Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.***

Доведення. ⊙ Нехай $b \parallel a$ і $c \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel c$.

Припустимо, що прямі b і c не паралельні, а перетинаються в деякій точці M (рис. 199). Тоді маємо, що через точку M проходять дві прямі, паралельні прямій a, що суперечить аксіомі паралельних прямих. Отже, $b \parallel c$. ▲

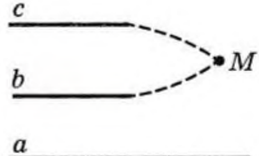


Рис. 199

Задача. *Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу.*

Розв'язання. Нехай прямі a і b паралельні, пряма c перетинає пряму b у точці M (рис. 200). Припустимо, що пряма c не перетинає пряму a, тоді $c \parallel a$. Але в цьому випадку через точку M проходять дві прямі b і c, які паралельні прямій a, що суперечить аксіомі паралельних прямих.

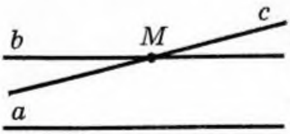


Рис. 200

Отже, пряма c перетинає пряму a.

1. Які дві прямі називають паралельними?
2. Яким символом позначають паралельність прямих?
3. Як читають запис $m \parallel n$?
4. Які відрізки називають паралельними?
5. Яке взаємне розміщення двох прямих, що перпендикулярні до третьої прямої?
6. Сформулюйте аксіому паралельних прямих.
7. Яке взаємне розміщення двох прямих, що паралельні третій прямій?
8. Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то як ця пряма розміщена відносно другої з паралельних прямих?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

294.° Перерисуйте в зошит рисунок 201. Проведіть через кожну з точок A і B пряму, паралельну прямій m.

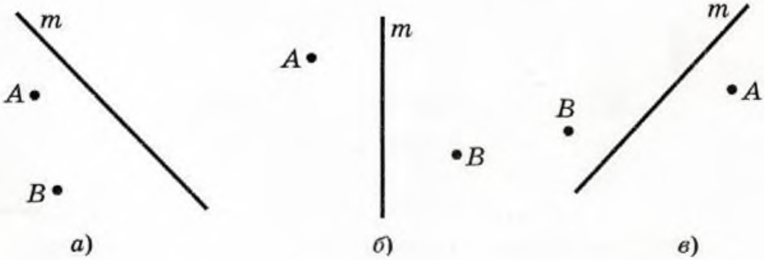


Рис. 201

295.° Накресліть трикутник і проведіть через кожну його вершину пряму, паралельну протилежній стороні.

296.° Перерисуйте в зошит рисунок 202. Проведіть через точку B пряму m, паралельну прямій AC, а через точку D — пряму n, паралельну прямій AC. Яке взаємне розміщення прямих m і n?

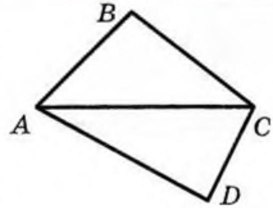


Рис. 202

ВПРАВИ

297.° Чи можна провести пряму, яка була б паралельна кожній з прямих a і b, що перетинаються?

298.° Пряма a паралельна стороні AB трикутника ABC. Чи може пряма a бути паралельною стороні AC чи стороні BC?

299.° Прямі a і b перетинаються. Чи можна провести таку пряму c, яка була б паралельна прямій a і перетинала пряму b?

300.° Чи можна вважати два відрізки паралельними, якщо вони не мають спільних точок?

301.° Чи правильно, що з точки, яка лежить поза даною прямою, можна провести тільки один промінь, паралельний даній прямій?

302.° Скільки через точку, яка не належить прямій, можна провести відрізків, які паралельні даній прямій?

303.° Прямі a і b перпендикулярні до прямої c, пряма d перетинає пряму a. Чи перетинає пряма d пряму b?

304.•• Доведіть, що коли будь-яка пряма, яка перетинає пряму a, перетинає і пряму b, то прямі a і b паралельні.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

305. На відрізку AB позначили точки C і D так, що $AC = BD$. Точка O — середина відрізка CD. Знайдіть відстань між точками C і D, якщо $AB = 21$ см, $AO : OD = 7 : 2$.

306. Кути ABD і DBC та кути ABF і FBC — суміжні і лежать у різних півплощинах відносно прямої AC, $\angle ABD =$

$= 80^\circ$, $\angle ABF = 150^\circ$, BM — бісектриса кута DBF. Знайдіть кут MBC.

307. У трикутнику ABC медіана CM дорівнює половині сторони AB, $\angle A = 47^\circ$, $\angle B = 43^\circ$. Чому дорівнює кут ACB?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

308. Катруся і Євген підійшли до квадратного ставка, у середині якого знаходився квадратний острів (рис. 203). На березі вони знайшли дві дошки, трохи коротші від ширини протоки між берегом ставка і островом. Як їм потрапити на острів?

Рис. 203

14. Ознаки паралельності двох прямих

Якщо дві прямі a і b перетнути третьою прямою c, то утвориться вісім кутів (рис. 204). Пряму c називають **січною** прямих a і b.

Кути 3 і 6, 4 і 5 називають **односторонніми**.

Кути 3 і 5, 4 і 6 називають **різносторонніми**.

Кути 6 і 2, 5 і 1, 3 і 7, 4 і 8 називають **відповідними**.

Теорема 14.1. ***Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.***

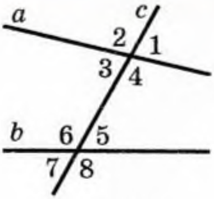


Рис. 204

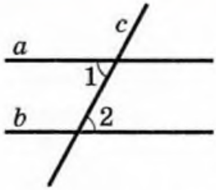


Рис. 205

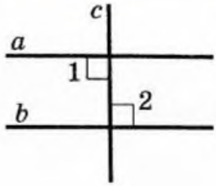


Рис. 206

Доведення. ⊙ На рисунку 205 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Якщо $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ (рис. 206), то паралельність прямих a і b випливає з теореми 13.1.

Нехай тепер пряма c не перпендикулярна до жодної з прямих a і b. Позначимо точку M — середину відрізка AB (рис. 207). Через точку M проведемо перпендикуляр ME до прямої a. Нехай пряма ME перетинає пряму b у точці F. Маємо: $\angle 1 = \angle 2$ за умовою; $\angle 3$ і $\angle 4$ рівні як вертикальні. Отже, $\Delta AME = \Delta BMF$ за другою ознакою. Звідси $\angle AEM = \angle MFB = 90^\circ$. Ми показали, що прямі a і b перпендикулярні до прямої EF, отже, вони паралельні. ▲

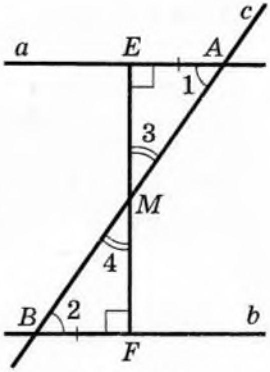


Рис. 207

Теорема 14.2. ***Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 208 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Кути 1 і 3 суміжні, отже, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Тоді $\angle 2 = \angle 3$. Але вони різносторонні. Тому за теоремою 14.1 $a \parallel b$. ▲

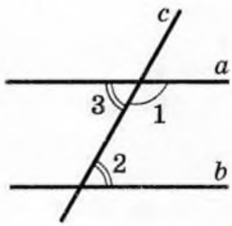


Рис. 208

Теорема 14.3. ***Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.***

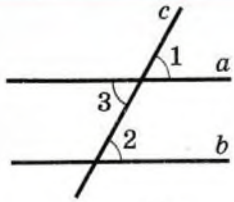


Рис. 209

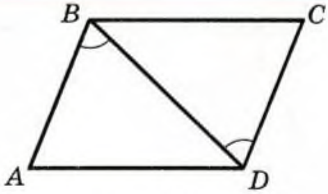


Рис. 210

Доведення. ⊙ На рисунку 209 пряма c є січною прямих a і b, $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Кути 1 і 3 рівні як вертикальні. Отже, $\angle 3 = \angle 2$. Але вони різносторонні. Тому за теоремою 14.1 $a \parallel b$. ▲

Приклад. На рисунку 210 $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

Розв'язання. Розглянемо ΔABD і ΔCDB.

$AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$ — за умовою. BD — спільна сторона. Отже, $\Delta ABD = \Delta CDB$ за двома сторонами і кутом між ними.

Тоді $\angle BDA = \angle DBC$. Крім того, $\angle BDA$ і $\angle DBC$ — різносторонні при прямих BC і AD та січній BD. Отже, $BC \parallel AD$.

1. Яке співвідношення має бути між різносторонніми кутами, утвореними при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними?
2. Яке співвідношення має бути між відповідними кутами, утвореними при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними?
3. Яке співвідношення має бути між односторонніми кутами, утвореними при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

309.° Проведіть дві прямі AB і CD. Проведіть пряму MK, яка перетинає кожну з прямих AB і CD. Позначте точку перетину прямих AB і MK буквою O, а прямих CD і MK — буквою E. Заповніть прогалини в тексті:

1) кути AOM і ... — відповідні;

2) кути AOE і ... — відповідні;
3) кути AOE і ... — різносторонні;
4) кути AOE і ... — односторонні.

Укажіть, якими кутами (відповідними, різносторонніми чи односторонніми) є кути:

1) $\angle BOM$ і $\angle DEM$; 2) $\angle BOE$ і $\angle DEM$; 3) $\angle BOE$ і $\angle OEC$.

310.° Накресліть дві прямі і проведіть їх січну. Пронумеруйте кути, утворені при перетині даних прямих січною. Укажіть серед цих кутів усі пари:

1) відповідних кутів;
2) односторонніх кутів;
3) різносторонніх кутів.

ВПРАВИ

311.° На рисунку 211 укажіть усі пари різносторонніх, односторонніх і відповідних кутів.

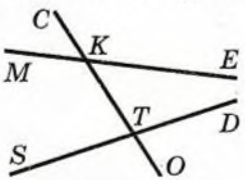


Рис. 211

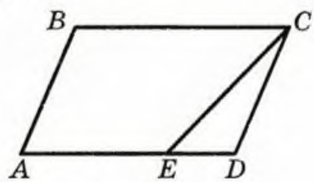


Рис. 212

312.° На рисунку 212 укажіть кути:

1) односторонні при прямих BC і AD та січній AB;
2) односторонні при прямих CE і CD та січній AD;
3) різносторонні при прямих BC і AD та січній CE;
4) відповідні при прямих CE і CD та січній AD;
5) односторонні при прямих BC і AD та січній CE.

313.° На яких з рисунків 213, *а–г* прямі a і b паралельні?

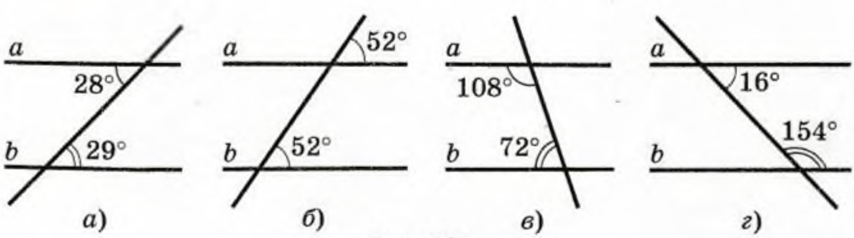


Рис. 213

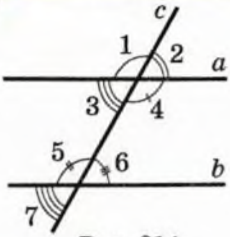


Рис. 214

314.° Чи паралельні зображені на рисунку 214 прямі a і b, якщо:
1) $\angle 3 = \angle 6$;
2) $\angle 2 = \angle 6$;
3) $\angle 4 = 125^\circ$; $\angle 6 = 55^\circ$;
4) $\angle 2 = 35^\circ$; $\angle 5 = 146^\circ$;
5) $\angle 1 = 98^\circ$; $\angle 6 = 82^\circ$;
6) $\angle 1 = 143^\circ$; $\angle 7 = 37^\circ$?

315.° На яких з рисунків 215, *а*–*г* прямі m і n паралельні?

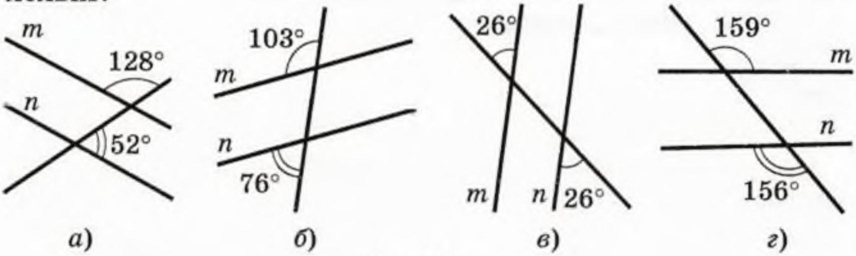


Рис. 215

316.° На рисунку 216 укажіть усі пари паралельних прямих.

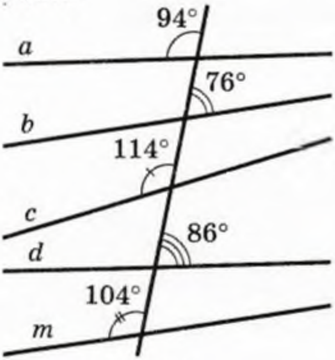


Рис. 216

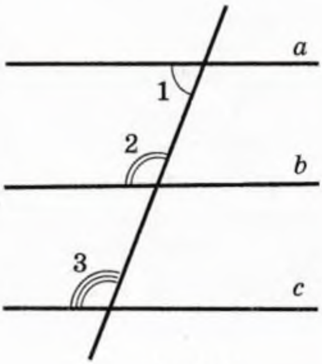


Рис. 217

317.° На рисунку 217 укажіть паралельні прямі, якщо $\angle 1 = 53^\circ$, $\angle 2 = 128^\circ$, $\angle 3 = 127^\circ$.

318.° На рисунку 218 $AB = BC$, $CD = DK$. Доведіть, що $AB \parallel DK$.

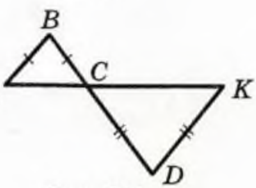


Рис. 218

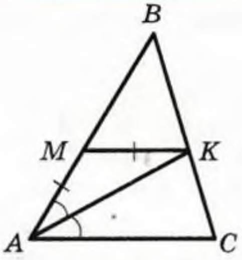


Рис. 219

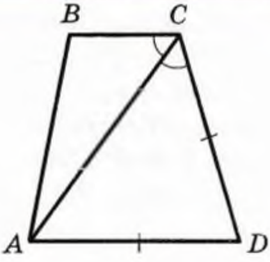


Рис. 220

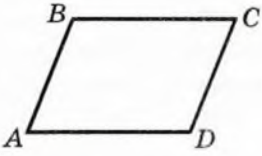


Рис. 221

319.˙ На рисунку 219 AK — бісектриса кута BAC, $AM = MK$. Доведіть, що $MK \parallel AC$.

320.˙ На рисунку 220 $\angle ACB = \angle ACD$, $AD = CD$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

321.˙ У трикутнику ABC $AB = BC$, $\angle A = 60°$, $\angle BCD$ — суміжний з $\angle ACB$, CM — бісектриса кута BCD. Доведіть, що $AB \parallel CM$.

322.˙ Відрізки AB і CD перетинаються в точці O і діляться цією точкою навпіл. Доведіть, що $AC \parallel BD$.

323.˙ На рисунку 221 $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

324.˙ На рисунку 222 пряма m перетинає пряму a. Чи перетинає пряма m пряму b?

325.˙ Яке взаємне розміщення прямих CD і EF на рисунку 223?

326.˙˙ Кут ABC дорівнює 60°, а кут BCD — 120°. Чи можна стверджувати, що прямі AB і CD паралельні?

327.˙˙ Кут між прямими a і c дорівнює куту між прямими b і c. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

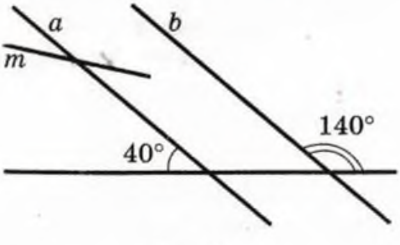


Рис. 222

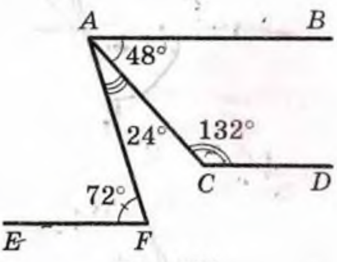


Рис. 223

328.•• Чотири кути, утворені при перетині прямих a і b прямою c, дорівнюють по 40°, а решта кутів — по 140°. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

329.•• Пряма перетинає бісектрису BM трикутника ABC у точці O, яка є серединою BM, а сторону BC — у точці K. Доведіть, що коли $OK \perp BM$, то $MK \parallel AB$.

330.•• Відрізки AM і CK — медіани трикутника ABC. На продовженні відрізка AM за точку M відкладено відрізок MF, а на продовженні відрізка CK за точку K — відрізок KD так, що $MF = AM$, $KD = CK$. Доведіть, що точки B, D і F лежать на одній прямій.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

331. Промінь OC розбиває кут AOB на два кути так, що $\angle AOC : \angle BOC = 3:5$. Знайдіть кут між променем OC і бісектрисою кута, суміжного з кутом AOB, якщо кут BOC на 42° більший за кут AOC.

332. На рисунку 224 $AB = BC$, $\angle ABK = \angle CBM$. Доведіть, що $BM = BK$.

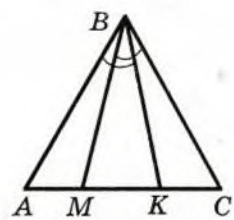


Рис. 224

333. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC. Пряма BD перетинає відрізок AC у точці E. Доведіть, що $AE = EC$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

334. Наведіть приклад, коли спільною частиною (перетином) трикутника і чотирикутника є восьмикутник.

П'ЯТИЙ ПОСТУЛАТ ЕВКЛІДА

У п. 6 ви дізналися, що за аксіоми обирають очевидні твердження. Тоді чому, наприклад, теореми 1.1–5.1 не включити до списку аксіом: адже вони також очевидні?

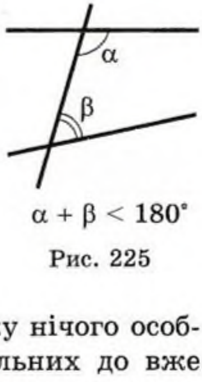
Відповідь на це запитання цілком природна: якщо якесь твердження можна довести за допомогою аксіом, то це твердження — теорема, а не аксіома.

З цих позицій дуже повчальною є історія, пов'язана з п'ятим постулатом Евкліда (нагадаємо, що в оповіданні «З історії геометрії» ми сформулювали чотири перших постулати).

V постулат. І щоб кожного разу, коли пряма при перетині з двома іншими прямими утворює з ними односторонні кути, сума яких менша від двох прямих, ці прямі перетинаються по той бік від січної, де ця сума менша від двох прямих кутів (рис. 225).

Можна показати, що п'ятий постулат і сформульована нами у п. 13 аксіома паралельних прямих рівносильні, тобто з постулату випливає аксіома і навпаки — з аксіоми випливає постулат.

Понад 20 сторіч багато вчених намагалися довести п'ятий постулат (аксіому паралельних прямих), тобто вивести його з інших аксіом Евкліда. Лише на початку XIX ст. кілька математиків незалежно один від одного дійшли висновку: твердження, що *через дану точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній,* є аксіомою.



$\alpha + \beta < 180°$

Рис. 225

Вам може здаватися, що в цьому висновку нічого особливого немає. Приєднуємо аксіому паралельних до вже існуючого списку аксіом-правил і в подальшому доводитимемо теореми.

Однак якщо у футболі змінити навіть одне правило, наприклад вимагати від польових гравців грати руками, а не ногами, то ми отримаємо зовсім іншу гру.

Якщо п'ятий постулат — це правило, яке ми приймаємо, а не теорема, то його можна замінити протилежним твердженням.

М. І. Лобачевський

Так і зробив видатний російський математик, професор Казанського університету Микола Іванович Лобачевський (1792–1856). Він замінив лише одне правило — аксіому паралельних прямих — таким: через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить щонайменше дві прямі, які не перетинають дану. Нова аксіома дозволила побудувати нову геометрію — неевклідову.

Подібну ідею трохи пізніше запропонував угорський математик Янош Бойяї (1802–1860).

15. Властивості паралельних прямих

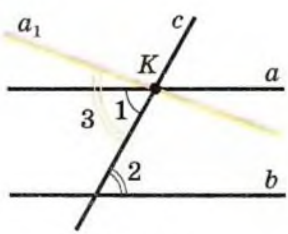


Рис. 226

Теорема 15.1 (обернена до теореми 14.1). ***Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 226 $a \parallel b$, c — січна. Доведемо, що $\angle 1 = \angle 2$.

Нехай $\angle 1 \neq \angle 2$. Тоді через точку K проведемо пряму a_1 так, щоб $\angle 3 = \angle 2$ (рис. 226). Кути 3 і 2 є різносторонніми при прямих a_1 і b та січній c. Тоді за теоремою 14.1 $a_1 \parallel b$. Отже, через точку K проходять дві прямі, паралельні прямій b, що суперечить аксіомі паралельних прямих. Таким чином, наше припущення неправильне, і $\angle 1 = \angle 2$. ▲

Теорема 15.2 (обернена до теореми 14.3). ***Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні.***

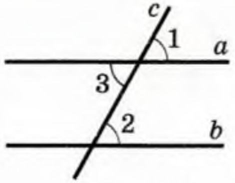


Рис. 227

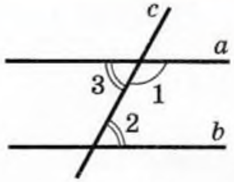


Рис. 228

Доведення. ⊙ На рисунку 227 $a \parallel b$, c — січна. Доведемо, що $\angle 1 = \angle 2$.

За теоремою 15.1 $\angle 3$ і $\angle 2$ рівні як різносторонні при паралельних прямих a і b та січній c. Але $\angle 3$ і $\angle 1$ рівні як вертикальні. Отже, $\angle 1 = \angle 2$. ▲

Теорема 15.3 (обернена до теореми 14.2). ***Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180°.***

Доведення. ⊙ На рисунку 228 $a \parallel b$, c — січна. Доведемо, що $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

За теоремою 15.1 $\angle 3$ і $\angle 2$ рівні як різносторонні при паралельних прямих a і b та січній c. Але кути 3 і 1 суміжні, тому $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Отже, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ▲

Наслідок. ***Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої*** (рис. 229).

Доведіть цю теорему самостійно.

Задача. *Доведіть, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої.*

Розв'язання. Нехай прямі a і b паралельні (рис. 230),

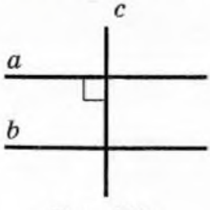


Рис. 229

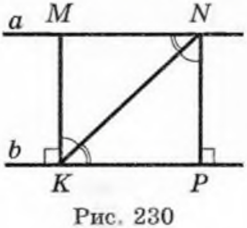


Рис. 230

M і N — дві довільні точки прямої a. Опустимо з них перпендикуляри MK і NP на пряму b. Доведемо, що $MK = NP$. Для цього розглянемо трикутники MKN і PNK.

KN — їх спільна сторона.

Оскільки $MK \perp b$ і $NP \perp b$, то $MK \parallel NP$, а кути MKN і PNK рівні як різносторонні при паралельних прямих MK і NP та січній KN.

Аналогічно $\angle MNK$ і $\angle PKN$ рівні як різносторонні при паралельних прямих MN і KP та січній KN.

Отже, трикутники MKN і PNK рівні за стороною і двома прилеглими кутами. Тоді $MK = NP$.

Означення. **Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.**

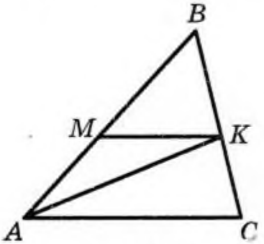


Рис. 231

Приклад. На рисунку 231 відрізок AK — бісектриса трикутника ABC, $MK \parallel AC$. Доведіть, що трикутник AMK — рівнобедрений.

Розв'язання. Оскільки AK — бісектриса трикутника ABC, то $\angle MAK = \angle KAC$.

Кути KAC і MKA рівні як різносторонні при паралельних прямих MK і AC та січній AK.

Отже, $\angle MAK = \angle MKA$.

Тоді ΔAMK — рівнобедрений з основою AK.

?

1. Порівняйте різносторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною.
2. Порівняйте відповідні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною.
3. Чому дорівнює сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною?
4. Відомо, що пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих. Чи обов'язково вона перпендикулярна до другої прямої?
5. Що називають відстанню між двома паралельними прямими?

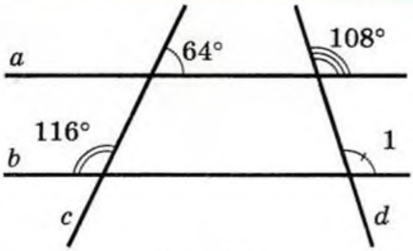


Рис. 232

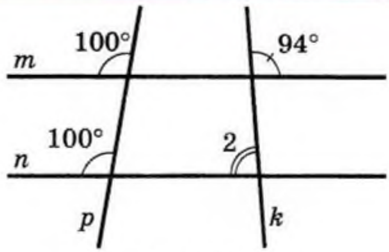


Рис. 233

ВПРАВИ

335.° На рисунку 232 знайдіть кут 1.

336.° На рисунку 233 знайдіть кут 2.

337.° Різниця односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50°. Знайдіть ці кути.

338.° Один з односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, у 4 рази більший за другий. Знайдіть ці кути.

339.° Знайдіть усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

1) один з цих кутів дорівнює 48°;
2) відношення градусних мір двох з цих кутів дорівнює 2 : 7.

340.° Знайдіть усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них на 24° менший від іншого.

341.° На рисунку 234 $m \parallel n$, $p \parallel k$, $\angle 1 = 50°$. Знайдіть $\angle 2$, $\angle 3$ і $\angle 4$.

342.° Пряма, паралельна основі AC рівнобедреного трикутника ABC, перетинає його бічні сторони AB і BC у точках D і F відповідно. Доведіть, що ΔDBF — рівнобедрений.

343.° На продовженнях сторін AC і BC трикутника ABC ($AB = BC$) за точки A і B позначили відповідно

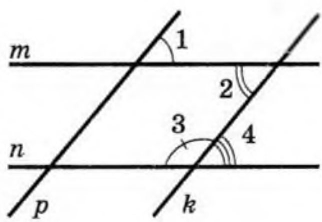


Рис. 234

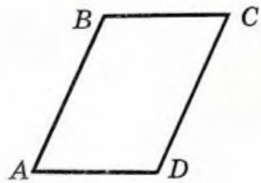


Рис. 235

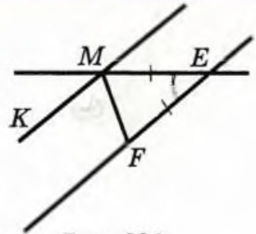


Рис. 236

точки P і K так, що $PK \parallel AB$. Доведіть, що ΔKPC — рівнобедрений.

344.° Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, $AO = BO$, $AC \parallel BD$. Доведіть, що $CO = DO$.

345.° Відрізки MK і DE перетинаються в точці F, $DK \parallel ME$, $DK = ME$. Доведіть, що $\Delta MEF = \Delta DKF$.

346.° Дайте відповідь на запитання:

1) Чи можуть обидва односторонні кути при двох паралельних прямих і січній бути тупими?
2) Чи може сума різносторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнювати 180°?
3) Чи можуть бути рівними односторонні кути при двох паралельних прямих і січній?

347.• На рисунку 235 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Доведіть, що $BC = AD$.

348.• На рисунку 235 $BC = AD$, $BC \parallel AD$. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

349.• На рисунку 236 $MK \parallel EF$, $ME = EF$, $\angle KMF = 70°$. Знайдіть $\angle MEF$.

350.• Через вершину B трикутника ABC (рис. 237) провели пряму MK, паралельну прямій AC, $\angle MBA = 42°$, $\angle CBK = 56°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

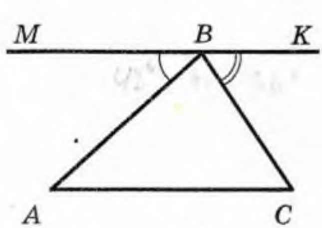


Рис. 237

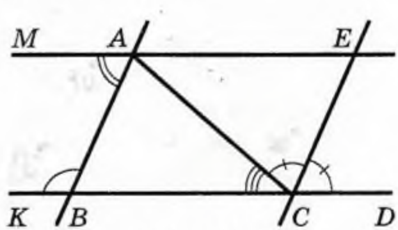


Рис. 238

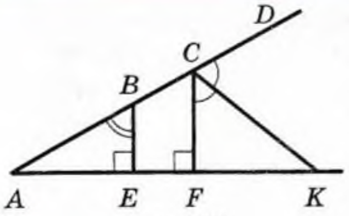


Рис. 239

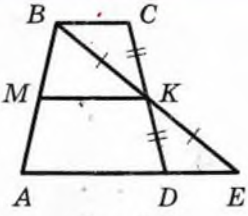


Рис. 240

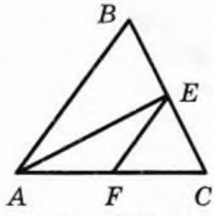


Рис. 241

351.˚ Пряма, проведена через вершину A трикутника ABC паралельно його протилежній стороні, утворює зі стороною AC кут, який дорівнює куту BAC. Доведіть, що даний трикутник — рівнобедрений.

352.˚ На рисунку 238 $\angle MAB = 50^\circ$, $\angle ABK = 130^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$, CE — бісектриса кута ACD. Знайдіть кути трикутника ACE.

353.˚ На рисунку 239 $BE \perp AK$, $CF \perp AK$, CK — бісектриса кута FCD, $\angle ABE = 32^\circ$. Знайдіть $\angle ACK$.

354.˚ На рисунку 240 $BC \parallel MK$, $BK = KE$, $CK = KD$. Доведіть, що $AD \parallel MK$.

355.˚ На рисунку 241 $AB = AC$, $AF = FE$, $AB \parallel EF$. Доведіть, що $AE \perp BC$.

356.˚ Трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC. Через довільну точку M його бісектриси BD проведено прямі, які паралельні його сторонам AB і BC та перетинають відрізок AC у точках E і F відповідно. Доведіть, що $DE = DF$.

357.˚˚ На рисунку 242 $AB \parallel DE$. Доведіть, що $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$.

358.˚˚ На рисунку 243 $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle CDE = 170^\circ$. Доведіть, що $BC \perp CD$.

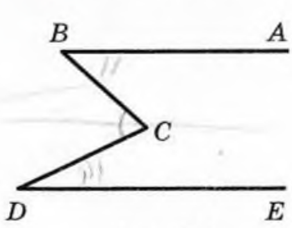


Рис. 242

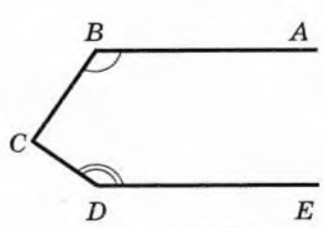


Рис. 243

359.•• Через вершину B трикутника ABC провели пряму, паралельну його бісектрисі AM. Ця пряма перетинає пряму AC у точці K. Доведіть, що ΔBAK — рівнобедрений.

360.•• Через точку O перетину бісектрис AE і CF трикутника ABC провели пряму, паралельну прямій AC. Ця пряма перетинає сторону AB у точці M, а сторону BC — у точці K. Доведіть, що $MK = AM + CK$.

361.•• Бісектриси кутів BAC і BCA трикутника ABC перетинаються в точці O. Через цю точку проведено прямі, які паралельні прямим AB і BC та перетинають сторону AC у точках M і K відповідно. Доведіть, що периметр трикутника MOK дорівнює довжині сторони AC.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

362. На відрізку AB позначили точку C так, що $AC : BC = 2 : 1$. На відрізку AC позначили точку D так, що $AD : CD = 3 : 2$. У якому відношенні точка D ділить відрізок AB?

363. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O, $AB = BC = CD = AD$. Доведіть, що $AC \perp BD$.

364. У трикутнику MOE на стороні MO позначено точку A, у трикутнику TPK на стороні TP — точку B так, що $MA = TB$. Яка градусна міра кута BKP, якщо $MO = TP$, $\angle M = \angle T$, $\angle O = \angle P$, $\angle AEO = 17^\circ$?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

365. На рисунку 244 зображено дуже складну замкнену ламану. Вона обмежує певну частину площини (многокутник). Як, позначивши на рисунку будь-яку точку, якомога швидше визначити, належить ця точка многокутнику чи ні?

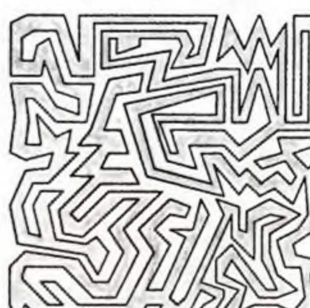


Рис. 244

16. Сума кутів трикутника

Трикутник — ключова фігура планіметрії. Світ трикутників різноманітний, проте всім їм притаманна одна властивість.

Теорема 16.1. ***Сума кутів трикутника дорівнює*** 180°.

Доведення. ⊙ Розглянемо довільний трикутник ABC. Треба довести, що $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Через вершину B проведемо пряму a, паралельну прямій AC (рис. 245). Маємо: $\angle A$ і $\angle 1$ рівні як різносторонні при паралельних прямих a і AC та січній AB. Аналогічно доводимо, що $\angle C = \angle 3$. Але кути 1, 2, 3 складають розгорнутий кут з вершиною B. Отже, $\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. ▲

Наслідок. ***Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Означення. Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.

На рисунку 246 кути 1, 2, 3 є зовнішніми кутами трикутника ABC.

Теорема 16.2. ***Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.***

Доведення. ⊙ На рисунку 246 $\angle 1$ — зовнішній. Треба довести, що $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$.

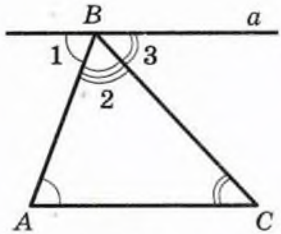


Рис. 245

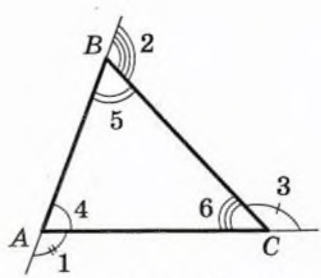


Рис. 246

Очевидно, що $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$. Оскільки $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$, то $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, звідки $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$. ▲

Наслідок. ***Зовнішній кут трикутника більший за кожний з кутів трикутника, не суміжних з ним.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Ви вже знаєте, що в трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути, і навпаки: проти рівних кутів лежать рівні сторони (п. 9, 10). Цю властивість доповнює така

Теорема 16.3. ***У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.***

Доведення. ⊛ Розглянемо трикутник ABC, у якому $AB > BC$. Треба довести, що $\angle ACB > \angle A$ (рис. 247).

Оскільки $AB > BC$, то на стороні AB знайдеться така точка M, що $BM = BC$. Отримали рівнобедрений трикутник MBC, у якому $\angle BMC = \angle BCM$.

Оскільки $\angle BMC$ — зовнішній кут трикутника AMC, то $\angle BMC > \angle A$. Наступний «ланцюжок» доводить першу частину теореми:

$$\angle ACB > \angle MCB = \angle BMC > \angle A.$$

Розглянемо трикутник ABC, у якому $\angle A < \angle C$. Треба довести, що $BC < AB$.

Оскільки $\angle C > \angle A$, то кут C можна поділити на два кути ACM і MCB так, що $\angle MCA = \angle A$ (рис. 248). Тоді ΔAMC — рівнобедрений з рівними сторонами MA і MC.

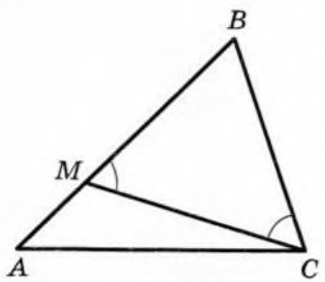


Рис. 247

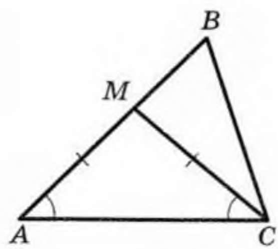


Рис. 248

Використовуючи нерівність трикутника, отримуємо:

$$BC < MB + MC = MB + MA = AB. \blacktriangle$$

Задача. *Медіана CM трикутника ABC дорівнює половині сторони AB. Доведіть, що ΔABC — прямокутний.*

Розв'язання. За умовою $AM = CM$ (рис. 249). Тоді у трикутнику AMC $\angle A = \angle ACM$.

Аналогічно $BM = CM$, і у трикутнику BMC $\angle B = \angle BCM$.

У ΔACB: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$. Ураховуючи, що $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, маємо:

$\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180^\circ$;

$2\angle ACB = 180^\circ$;

$\angle ACB = 90^\circ$.

Отже, ΔABC — прямокутний.

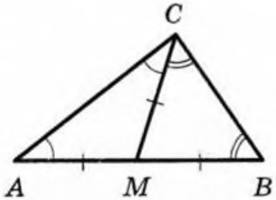


Рис. 249

1. Чому дорівнює сума кутів трикутника?
2. Яку найменшу кількість гострих кутів має будь-який трикутник?
3. Який кут називають зовнішнім кутом трикутника?
4. Який зв'язок між зовнішнім кутом трикутника і двома кутами трикутника, не суміжними з ним?
5. Порівняйте зовнішній кут трикутника з кутом трикутника, який не суміжний з ним.
6. Сформулюйте теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

ВПРАВИ

366.° Знайдіть третій кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють 35° і 96°.

367.° Один з кутів трикутника у 3 рази менший від другого кута і на 35° менший від третього. Знайдіть кути трикутника.

368.° Знайдіть кути трикутника, якщо їх градусні міри відносяться як $2:3:7$.

369.° Знайдіть кути рівностороннього трикутника.

370.° Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.

371.° Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 63°. Знайдіть кут при вершині цього трикутника.

372.° Знайдіть кути при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 104°.

373.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині в 4 рази більший за кут при основі.

374.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі на 48° менший від кута при вершині.

375.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює: 1) 110°; 2) 50°. Скільки розв'язків має задача?

376.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює: 1) 42°; 2) 94°. Скільки розв'язків має задача?

377.° У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, AK — бісектриса, $\angle BAK = 18°$. Знайдіть кути AKC і ABC.

378.° У трикутнику ABC $AB = BC$, CK — бісектриса, $\angle A = 66°$. Знайдіть $\angle AKC$.

379.° Бісектриси AK і CM трикутника ABC перетинаються в точці O, $\angle BAC = 116°$, $\angle BCA = 34°$. Знайдіть $\angle AOC$.

380.° У рівнобедреному трикутнику ABC з кутом при вершині B, який дорівнює 36°, провели бісектрису AD. Доведіть, що трикутники ADB і CAD — рівнобедрені.

381.° У трикутнику ABC провели бісектрису BF. Знайдіть кут C, якщо $\angle A = 39°$, $\angle AFB = 78°$.

382.° Доведіть, що коли один з кутів трикутника дорівнює сумі двох інших кутів, то цей трикутник — прямокутний.

383.° На рисунку 250 укажіть зовнішні кути:

1) при вершинах E і F трикутника MEF;

2) при вершині E трикутника MKE.

384.° На рисунку 251 укажіть трикутники, для яких зовнішнім кутом є: 1) кут AMB; 2) кут BMD.

385.° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 75°. Чому дорівнює:

1) кут трикутника при цій вершині;

2) сума двох кутів трикутника, не суміжних з ним?

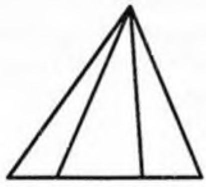


Рис. 250

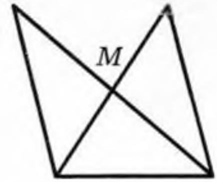


Рис. 251

386.° Чи може зовнішній кут трикутника бути меншим від кута трикутника? У випадку позитивної відповіді вкажіть вид трикутника.

387.° Визначте вид трикутника, якщо один з його зовнішніх кутів дорівнює куту трикутника, суміжному з ним.

388.° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 136°, а один із кутів трикутника, не суміжний з ним, — 61°. Знайдіть другий кут трикутника, не суміжний з даним зовнішнім.

389.° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 154°. Знайдіть кути трикутника, не суміжні з ним, якщо один з цих кутів на 28° більший за другий.

390.° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 98°. Знайдіть кути трикутника, не суміжні з ним, якщо один з цих кутів у 6 разів менший від другого.

391.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо зовнішній кут при його вершині дорівнює 38°.

392.° Порівняйте кути трикутника ABC, якщо:

1) $AB > AC > BC$; 2) $AB = BC$, $BC > AC$.

393.° У трикутнику ABC $\angle A = 34^\circ$, $\angle B = 28^\circ$. Порівняйте сторони AB, BC і AC.

394.° Порівняйте сторони трикутника ABC, якщо:

1) $\angle C > \angle A > \angle B$; 2) $\angle B > \angle C$, $\angle A = \angle B$.

395.° Доведіть, що коли два кути одного трикутника дорівнюють відповідно двом кутам другого трикутника, то й треті кути цих трикутників рівні.

396.• Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його зовнішніх кутів дорівнює: 1) 54°; 2) 112°. Скільки розв'язків має задача?

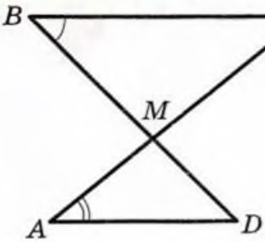


Рис. 252

397.* Зовнішній кут рівнобедреного трикутника дорівнює 130°. Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

398.* Бісектриси кутів при основі AC рівнобедреного трикутника ABC перетинаються в точці O. Доведіть, що кут AOC дорівнює зовнішньому куту трикутника при вершині A.

399.* На рисунку 252 $BC \parallel AD$, $\angle A = 25^\circ$, $\angle B = 55^\circ$. Знайдіть кут CMD.

400.* Відрізок BK — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC з основою BC, $\angle AKB = 105^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC.

401.* На стороні AB трикутника ABC позначили точку D так, що $BD = BC$, $\angle ACD = 15^\circ$, $\angle DCB = 40^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC.

402.* На сторонах трикутника ABC (рис. 253) позначено точки E і F так, що $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.

403.* На рисунку 254 $BC \parallel AD$, $\angle B = 100^\circ$, $\angle ACD = 95^\circ$, $\angle D = 45^\circ$. Доведіть, що $AB = BC$.

404.* Через вершину C трикутника ABC проведено пряму, яка паралельна бісектрисі AM трикутника і перетинає пряму AB у точці K. Знайдіть кути трикутника AKC, якщо $\angle BAC = 70^\circ$.

405.* У трикутнику ABC бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O. Знайдіть $\angle AOC$, якщо $\angle B = 100^\circ$.

406.* Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.

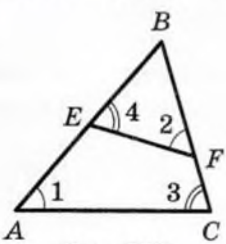


Рис. 253

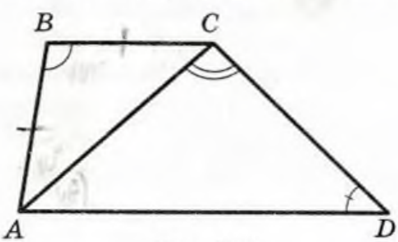


Рис. 254

407.$^{\bullet}$ Доведіть, що коли бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то цей трикутник рівнобедрений.

408.$^{\bullet}$ Кут при основі AC рівнобедреного трикутника ABC у 2 рази більший за кут при вершині, AM — бісектриса трикутника. Доведіть, що $BM = AC$.

409.$^{\bullet}$ Трикутник ABC рівнобедрений з основою AC. На стороні BC позначено точку M так, що $BM = AM = AC$. Знайдіть кути трикутника ABC.

410.$^{\bullet}$ Доведіть, що в будь-якому трикутнику є кут: 1) не менший від 60°; 2) не більший за 60°.

411.$^{\bullet}$ Визначте вид трикутника, якщо:

1) один з його кутів більший за суму двох інших;

2) будь-який з кутів менший від суми двох інших.

412.$^{\bullet}$ Визначте вид трикутника, якщо сума будь-яких двох його кутів більша за 90°.

413.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC кут B — тупий. На продовженні сторони AB за точку A позначили довільну точку D. Доведіть, що $CD > AC$.

414.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC $\angle C > 90^{\circ}$. На стороні BC позначили довільну точку D. Доведіть, що $AD > AC$.

415.$^{\bullet\bullet}$ Чи існує трикутник, дві бісектриси якого взаємно перпендикулярні?

416.$^{\bullet\bullet}$ Чи існує трикутник, у якому одна бісектриса ділить навпіл другу бісектрису?

417.$^{\bullet\bullet}$ Бісектриса кута B рівнобедреного трикутника ABC розбиває його на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трикутника ABC.

418.* У трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C перетинаються в точці O. Знайдіть $\angle BOC$.

419.* Відрізок AM — медіана трикутника ABC, $\angle CAM > \angle BAM$. Доведіть, що $AB > AC$.

420.* На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначили відповідно точки E і F так, що $AC = AF = EF = BE$. Знайдіть кути трикутника ABC.

421.* У трикутнику ABC $AB = 2$ см, $\angle A = 60^{\circ}$, $\angle B = 70^{\circ}$. На стороні AC позначили точку D так, що $AD = 1$ см. Знайдіть кути трикутника BDC.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

422. На прямій позначили точки A, B і C так, що точка B лежить між точками A і C та $BC = 2AB$. На відрізку BC позначили точку D так, що $BD : DC = 3 : 7$. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і CD, якщо відрізок CD на 16 см довший за відрізок BD.

423. На медіані BM трикутника ABC позначили точку O так, що $\angle OAC = \angle OCA$. Доведіть, що ΔABC — рівнобедрений.

424. Доведіть, що сума довжин двох сторін трикутника більша за подвоєну довжину медіани, проведеної до третьої сторони.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

425. Чи існує шестикутник, у якого жодні дві діагоналі не мають спільних точок, відмінних від вершин?

17. Прямокутний трикутник

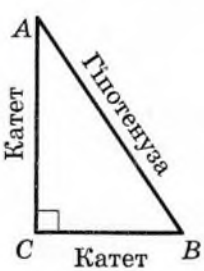


Рис. 255

На рисунку 255 зображено прямокутний трикутник ABC, у якому $\angle C = 90^\circ$.

Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають **гіпотенузою**, а сторони, прилеглі до прямого кута, — **катетами** (рис. 255).

Для доведення рівності двох трикутників знаходять їх рівні елементи. У будь-яких двох прямокутних трикутників такі елементи є завжди — це прямі кути. Тому для прямокутних трикутників можна сформулювати «персональні» ознаки рівності.

Теорема 17.1 (ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом). ***Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника***

відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету другого, то такі трикутники рівні.

Доведення. ⊛ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 256). Треба довести, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, вершина C — з C_1, а точки B і B_1 лежали у різних півплощинах відносно прямої A_1C_1 (рис. 257).

Маємо: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Отже, кут BC_1B_1 — розгорнутий, і тому точки B, C_1, B_1 лежать на одній прямій. Отримали рівнобедрений трикутник BA_1B_1 з бічними сторонами A_1B і A_1B_1 та висотою A_1C_1 (рис. 257). Тоді A_1C_1 — медіана цього трикутника і $C_1B = C_1B_1$. Отже, $\Delta A_1BC_1 = \Delta A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників. ▲

При розв'язуванні задач зручно користуватися й іншими ознаками рівності прямокутних трикутників, які безпосередньо випливають з ознак рівності трикутників.

Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами. ***Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.***

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом. ***Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють ка-***

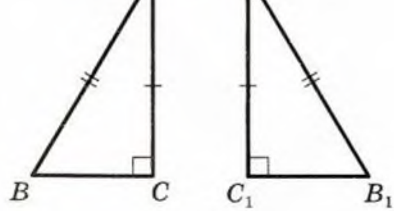


Рис. 256

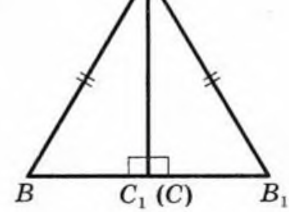


Рис. 257

тету і прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Очевидно, що коли гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то рівні й два інших гострих кути. Скориставшись цим твердженням, список ознак рівності прямокутних трикутників можна доповнити ще двома ознаками.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом. ***Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.***

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом. ***Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і гострому куту другого, то такі трикутники рівні.***

Приклад. Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

Розв'язання. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 258) $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, відрізки AD і A_1D_1 — бісектриси, $AD = A_1D_1$.

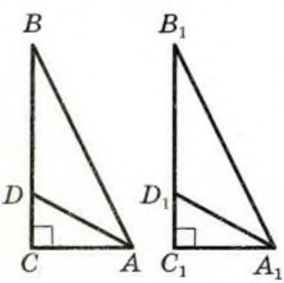


Рис. 258

Оскільки $AD = A_1D_1$,

$$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1,$$

то прямокутні трикутники ACD і $A_1C_1D_1$ рівні за гіпотенузою і гострим кутом. Тоді $AC = A_1C_1$ і прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за катетом і прилеглим гострим кутом.

1. Який трикутник називають прямокутним?
2. Яку сторону прямокутного трикутника називають гіпотенузою?
3. Яку сторону прямокутного трикутника називають катетом?
4. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом.
5. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за двома катетами.
6. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом.
7. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом.
8. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом.
9. Чому дорівнює сума гострих кутів прямокутного трикутника?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

426.° За допомогою транспортира і лінійки побудуйте прямокутний трикутник:

1) катети якого дорівнюють 3 см і 4 см;
2) один з катетів якого дорівнює 2,5 см, а прилеглий до нього кут — 40°;
3) гіпотенуза якого дорівнює 6 см, а один з гострих кутів — 70°.

Позначте побудовані трикутники, укажіть у кожному з них катети і гіпотенузу.

427. За допомогою транспортира і лінійки побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник:

1) з катетом, що дорівнює 5 см;
2) з гіпотенузою, що дорівнює 4 см.

ВПРАВИ

428.° На рисунку 259 зображено трикутник MKE з прямим кутом при вершині K. Укажіть:

1) катети і гіпотенузу трикутника;

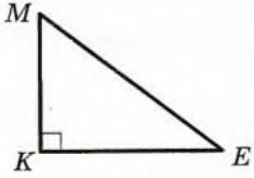


Рис. 259

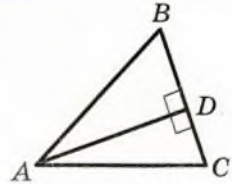


Рис. 260

2) катет, прилеглий до кута E;

3) катет, протилежний куту M.

429.° На рисунку 260 AD — висота трикутника ABC. Знайдіть на цьому рисунку прямокутні трикутники, укажіть у кожному з них катети і гіпотенузу.

430.° Один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $43°$. Знайдіть другий гострий кут.

431.° У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено висоту AH. Знайдіть кут CAH, якщо $\angle B = 76°$.

432.° Кут між основою рівнобедреного трикутника і висотою, проведеною до бічної сторони, дорівнює $19°$. Знайдіть кути даного трикутника.

433.° На рисунку 261 $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $AC = BD$. Доведіть, що $AB = CD$.

434.° На рисунку 262 $MO = FO$, $\angle MEO = \angle FKO = 90°$. Доведіть, що $\Delta MEO = \Delta FKO$.

435.° З точок A і B, які лежать в одній півплощині відносно прямої a, опущено перпендикуляри AM і BK на цю пряму, $AM = BK$. Доведіть, що $AK = BM$.

436.° На рисунку 263 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $BM \perp AC$, $DK \perp AC$. Доведіть, що $BM = DK$.

437.° На рисунку 264 $AB = BC$, $CD \perp AB$, $AE \perp BC$. Доведіть, що $BE = BD$.

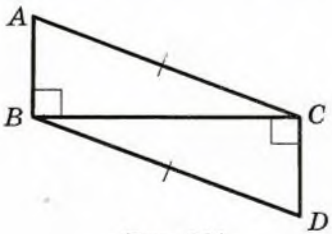


Рис. 261

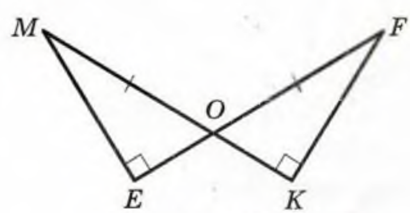


Рис. 262

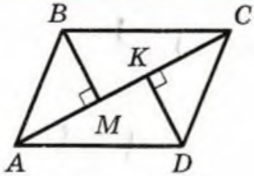


Рис. 263

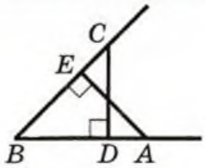


Рис. 264

438.° На бісектрисі кута з вершиною в точці B позначили точку M, з якої опустили перпендикуляри MD і MC на сторони кута. Доведіть, що $MD = MC$.

439.° На сторонах кута з вершиною в точці B позначили точки A і C так, що $AB = BC$. Через точки A і C провели прямі, які перпендикулярні до сторін BA і BC відповідно і перетинаються в точці O. Доведіть, що промінь BO — бісектриса кута ABC.

440.• Доведіть, що висоти рівнобедреного трикутника, проведені до його бічних сторін, є рівними.

441.• Доведіть, що коли дві висоти трикутника рівні, то цей трикутник є рівнобедреним.

442.• Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і бісектрисою, проведеною з вершини прямого кута.

443.• Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і висотою, проведеною з вершини прямого кута.

444.• Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і бісектрисою, проведеною з вершини прилеглого до цього катета гострого кута.

445.• Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до другого катета.

446.• Доведіть, що в рівних трикутниках висоти, опущені на відповідно рівні сторони, є рівними.

447.• Доведіть рівність гострокутних трикутників за стороною і двома висотами, проведеними з кінців цієї сторони.

448.• Доведіть рівність трикутників за стороною і проведеними до неї медіаною і висотою.

449.• Пряма перетинає сторони AB і BC трикутника ABC відповідно в точках M і K, які є серединами цих сторін. Доведіть, що вершини даного трикутника рівновіддалені від прямої MK.

450.• Пряма перетинає сторони AB і BC трикутника ABC у точках M і K відповідно. Вершини даного трикутника рівновіддалені від прямої MK. Доведіть, що точки M і K є серединами сторін AB і BC відповідно.

451.•• Висоти AM і CK трикутника ABC перетинаються в точці H, $HK = HM$. Доведіть, що ΔABC — рівнобедрений.

452.•• Висоти ME і NF трикутника MKN перетинаються в точці O, $OM = ON$, $MF = KE$. Доведіть, що ΔMKN — рівносторонній.

453.•• Чи можна стверджувати, що коли дві сторони і висота, проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і висоті, проведеній до третьої сторони, другого трикутника, то ці трикутники рівні?

454.•• Доведіть рівність трикутників за двома кутами і висотою, проведеною з вершини третього кута.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

455. Кути ABC і DBC — суміжні, промінь BM належить куту ABC, промінь BK — куту DBC, $\angle MBC = \angle CBK = 30^\circ$, кут DBK у 5 разів більший за кут ABM. Знайдіть кути ABC і DBC.

456. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначили відповідно точки M і K так, що $BM = BK$. Відрізки AK і CM перетинаються в точці O. Доведіть, що: 1) ΔAOC — рівнобедрений; 2) пряма BO — серединний перпендикуляр відрізка AC.

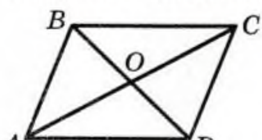


Рис. 265

457. На рисунку 265 $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть, що $AO = OC$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

458. Чи можна замостити площину такими фігурами, як зображена на рисунку 266?

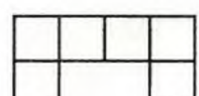


Рис. 266

18. Властивості прямокутного трикутника

Теорема 18.1. ***У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.***

Доведення. ⊙ Будь-який з катетів лежить проти гострого кута, а гіпотенуза лежить проти прямого кута. Прямий кут більший за гострий кут, а отже, за теоремою 16.3 гіпотенуза більша за будь-який з катетів. ▲

Наслідок. ***Якщо з однієї точки, яка не лежить на прямій, до цієї прямої проведено перпендикуляр і похилу, то перпендикуляр менший від похилої.***

На рисунку 267 відрізок AB — перпендикуляр, відрізок AX — похила, $AB < AX$.

Часто при розв'язуванні задач використовують результати таких двох задач.

Задача 1. *Катет, який лежить проти кута, що дорівнює 30°, дорівнює половині гіпотенузи.*

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC, у якому $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. Треба довести, що $BC = \frac{1}{2}AB$.

На прямій BC відкладемо відрізок CD, який дорівнює відрізку BC (рис. 268). Тоді $\Delta ABC = \Delta ADC$ за двома катетами. Дійсно, сторони BC і CD рівні за побудовою, AC — спільна сторона цих трикутників і $\angle ACB = \angle ACD = 90^\circ$. Тоді $\angle DAC = 30^\circ$. Звідси $\angle BAD = \angle ADB = 60^\circ$. Отже, $\angle ABD = 60^\circ$ і трикутник ABD — рівносторонній. Тоді $BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB$.

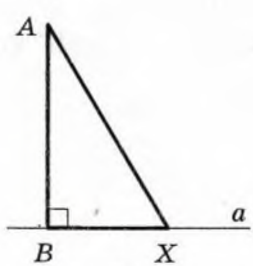


Рис. 267

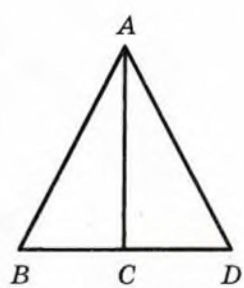


Рис. 268

Задача 2. *Якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить проти цього катета, дорівнює* 30°.

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC, у якому $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = \frac{1}{2}AB$. Треба довести, що $\angle A = 30^\circ$.

На прямій BC відкладемо відрізок CD, який дорівнює відрізку BC (рис. 268). Тоді $AB = BD$. Крім того, відрізок AC є медіаною і висотою трикутника BAD, а отже, за ознакою рівнобедреного трикутника $AB = AD$. Тепер зрозуміло, що $AB = BD = AD$ і трикутник BAD — рівносторонній. Оскільки AC — бісектриса кута BAD, то $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = 30^\circ$.

1. Яка із сторін прямокутного трикутника є найбільшою?
2. Яку властивість має катет, що лежить проти кута, який дорівнює 30°?
3. Яку градусну міру має кут, який лежить проти катета, що дорівнює половині гіпотенузи?

ВПРАВИ

459.° Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 24 см, 10 см і 26 см. Знайдіть катети і гіпотенузу даного трикутника.

460.° У прямокутному трикутнику DEF гіпотенуза DE дорівнює 18 см, $\angle D = 30^\circ$. Знайдіть катет FE.

461.° У прямокутному трикутнику MKC $\angle M = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $CM = 7$ см. Знайдіть гіпотенузу CK.

462.° У рівносторонньому трикутнику ABC точка D — середина сторони AB. З цієї точки опущено перпендикуляр DE на сторону AC. Знайдіть відрізки, на які точка E розбиває відрізок AC, якщо сторона даного трикутника дорівнює 16 см.

463.° У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, CK — висота, $CK = 7$ см, $AC = 14$ см. Знайдіть $\angle B$.

464.° Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а різниця гіпотенузи і меншого катета — 5 см. Знайдіть ці сторони трикутника.

465.° У трикутнику ABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, CK — висота, $AC = 10$ см. Знайдіть відрізок BK.

466.° У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, CD — висота, $BD = 7$ см. Знайдіть гіпотенузу AB.

467.° На рисунку 269 AB — перпендикуляр, AC — похила, $AC = 2$ см. Знайдіть кут ACB і довжину перпендикуляра AB, якщо ця довжина, виражена в сантиметрах, дорівнює цілому числу.

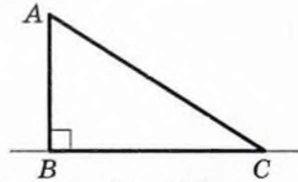


Рис. 269

468.• Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а один з кутів — 120°. Знайдіть висоту трикутника, проведену з вершини кута при його основі.

469.• У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено висоту BM, $BM = 7{,}5$ см, $\angle MBC = 15^\circ$. Знайдіть бічну сторону трикутника.

470.• Бісектриси AM і BK рівностороннього трикутника ABC перетинаються в точці O. Доведіть, що $AO : OM = 2 : 1$.

471.•• У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Серединний перпендикуляр відрізка AB перетинає його в точці M, а відрізок BC — у точці K. Доведіть, що $MK = \frac{1}{3}BC$.

472.•• У трикутнику MKE $\angle K = 90^\circ$, $\angle E = 30^\circ$, $KE = 12$ см. Знайдіть бісектрису MC трикутника.

473.•• У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, відрізок AD — бісектриса, відрізок CD на 3 см менший від відрізка BD. Знайдіть бісектрису AD.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

474. На рисунку 270 $AB = BC$, $AM = KC$, $\angle AKE = \angle FMC$. Доведіть, що ΔFBE — рівнобедрений.

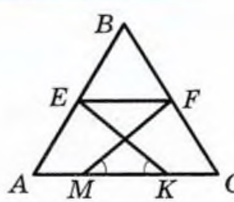


Рис. 270

475. Через вершини A і B трикутника ABC проведено прямі, які перпендикулярні до бісектриси кута ACB і перетинають прямі AC і BC у точках M і K

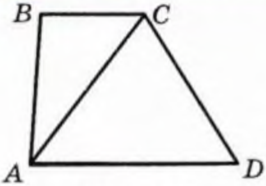


Рис. 271

відповідно. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AC > BC$, $CM = 6$ см, $BK = 2$ см, $AB = 7$ см.

476. На рисунку 271 $BC \parallel AD$, промінь CA — бісектриса кута BCD, $AD = 9$ см, $AC = 8$ см. Знайдіть периметр трикутника CAD.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

477. Трикутник з цупкого паперу розріжте на три частини так, щоб, перегорнувши кожну з них, можна було б знову скласти трикутник, який дорівнює даному.

ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- було введено такі поняття:
  - паралельні прямі;
  - односторонні, різносторонні, відповідні кути;
  - відстань між паралельними прямими;
  - зовнішній кут трикутника;
  - гіпотенуза, катет;

- ви вивчили:
  - аксіому паралельних прямих;
  - властивості паралельних прямих;
  - ознаки паралельності прямих;
  - властивість суми кутів трикутника;
  - властивість зовнішнього кута трикутника;
  - ознаки рівності прямокутних трикутників;
  - властивості прямокутних трикутників.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

1. Яке з наступних тверджень є правильним?

А) Якщо два відрізки не мають спільних точок, то вони паралельні.

Б) Якщо два промені не мають спільних точок, то вони паралельні.

В) Якщо промінь і відрізок не мають спільних точок, то вони паралельні.

Г) Якщо дві прямі не мають спільних точок, то вони паралельні.

2. Яке з наступних тверджень є правильним?

А) Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки один відрізок, паралельний цій прямій.

Б) Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки один промінь, паралельний цій прямій.

В) Через точку, яка не належить даній прямій, проходить безліч прямих, непаралельних цій прямій.

Г) Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки дві прямі, паралельні цій прямій.

3. Яке з наступних тверджень є неправильним?

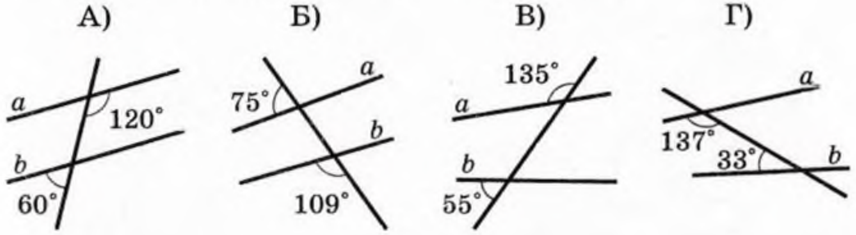
А) Якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Б) Якщо $a \perp b$ і $b \perp c$, то $a \parallel c$.

В) Якщо $a \perp b$ і $b \perp c$, то $a \perp c$.

Г) Якщо $a \parallel b$ і $c \perp b$, то $c \perp a$.

4. На якому з рисунків прямі a і b паралельні?



5. Яке з наступних тверджень є неправильним?

А) Якщо сума кутів однієї пари різносторонніх кутів дорівнює сумі кутів другої пари, то прямі не паралельні.

Б) Якщо різносторонні кути не рівні, то прямі не паралельні.

В) Якщо сума односторонніх кутів не дорівнює 180°, то прямі не паралельні.

Г) Якщо відповідні кути не рівні, то прямі не паралельні.

6. Скільки зовнішніх кутів має трикутник?

А) 3; Б) 6; В) 4; Г) 9.

7. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині?

А) 180°; Б) 300°; В) 360°; Г) 100°.

8. У трикутнику ABC бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O. Яка з наступних рівностей є правильною?

А) $\angle AOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$; В) $\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$;

Б) $\angle AOC = 90^\circ - \angle B$; Г) $\angle AOC = 90^\circ + \angle B$.

9. У трикутнику ABC висоти, проведені з вершин A і C, перетинаються в точці O. Яка з наступних рівностей є правильною?

А) $\angle AOC = 90^\circ - \angle B$; В) $\angle AOC = 90^\circ + \angle B$;

Б) $\angle AOC = 180^\circ - \angle B$; Г) $\angle AOC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle B$.

10. Яке з наступних тверджень є правильним?

А) Якщо дві сторони одного прямокутного трикутника дорівнюють двом сторонам другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Б) Якщо катет і гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють катету і гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

В) Якщо гіпотенуза і два кути одного прямокутного трикутника дорівнюють гіпотенузі і двом кутам другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Г) Якщо сторона і два кути одного прямокутного трикутника дорівнюють стороні і двом кутам другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

11. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Яке з наступних тверджень є неправильним?

А) $CB = \frac{1}{2}AB$; Б) $AC = \frac{1}{2}AB$; В) $AC < AB$; Г) $AC > BC$.

КОЛО І КРУГ. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ §4

У цьому параграфі ви познайомитеся з властивостями найдосконалішої геометричної фігури – кола. Ви дізнаєтесь, як, відмовившись від звичних інструментів – косинця і транспортира, а використовуючи лише циркуль і лінійку без поділок, виконати багато побудов.

19. Геометричне місце точок. Коло і круг

Рис. 272

Будь-яка множина точок — це геометрична фігура. Зобразити довільну фігуру легко: усе, що намалюєте, — це геометрична фігура (рис. 272). Однак вивчати фігури, які складаються з хаотично розміщених точок, навряд чи доцільно. Тому розумно виокремити той клас фігур, усі точки яких мають певну характерну властивість. Кожну з таких фігур називають **геометричним місцем точок**.

Означення. **Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.**

Образно ГМТ можна подати так: задають певну властивість, а потім на білій площині *усі точки*, які мають цю властивість, фарбують у червоний колір. Та «червона фігура», яку при цьому отримали, і є ГМТ.

Наприклад, зафіксуємо дві точки A і B. Для всіх точок задамо властивість: одночасно належати променям AB і BA. Зрозуміло, що цю властивість мають усі точки відрізка AB і тільки вони (рис. 273). Тому шуканим ГМТ є відрізок AB.

Розглянемо перпендикулярні прямі a і b. Для всіх точок задамо властивість: належати прямій b і знаходитися на відстані 1 см від прямої a. Очевидно, що точки A і B (рис. 274) задовольняють цим вимогам. Також зрозуміло, що жодна точка, відмінна від A і B, цієї властивості не має. Отже, шукане ГМТ є фігурою, яка складається з двох точок A і B (рис. 274).

Рис. 273

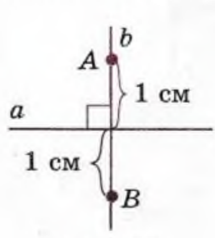


Рис. 274

Узагалі, щоб мати право якусь множину точок називати ГМТ, треба довести дві взаємно обернені теореми:

1) *кожна точка даної множини має задану властивість*;

2) *якщо точка має задану властивість, то вона належить даній множині.*

Теорема 19.1. ***Серединний перпендикуляр відрізка є ГМТ, рівновіддалених від кінців цього відрізка.***

Доведення. ⊙ Згідно з теоремою 8.2 кожна точка серединного перпендикуляра має цю властивість, а згідно з теоремою 11.2, якщо точка має цю властивість, то вона належить серединному перпендикуляру. ▲

Теорема 19.2. ***Бісектриса кута є ГМТ, які належать куту і рівновіддалені від його сторін.***

Пряма теорема. ***Кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.***

Доведення. ⊙ Очевидно, що вершина кута має цю властивість.

Візьмемо деяку точку X, яка не збігається з вершиною кута ABC і належить його бісектрисі (рис. 275). Опустимо перпендикуляри XM і XN відповідно на сторони BA і BC. Доведемо, що $XM = XN$.

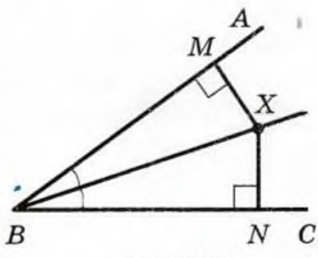


Рис. 275

У прямокутних трикутниках BXM і BXN гіпотенуза BX — спільна, $\angle MBX = \angle NBX$, оскільки BX — бісектриса кута ABC. Отже, $\Delta BXM = \Delta BXN$ за гіпотенузою і гострим кутом. Звідси $XM = XN$. ▲

Обернена теорема. ***Якщо точка, що належить куту, рівновіддалена від його сторін, то вона лежить на бісектрисі цього кута.***

Доведення. ⊖ Очевидно, що вершина кута має цю властивість.

Візьмемо деяку точку X, яка належить куту ABC, не збігається з його вершиною і рівновіддалена від його сторін. Опустимо перпендикуляри XM і XN відповідно на сторони BA і BC. Доведемо, що $\angle MBX = \angle NBX$ (рис. 275).

У прямокутних трикутниках BXM і BXN гіпотенуза BX — спільна, $XM = XN$ за умовою. Отже, $\Delta BXM = \Delta BXN$ за гіпотенузою і катетом. Звідси $\angle MBX = \angle NBX$. ▲

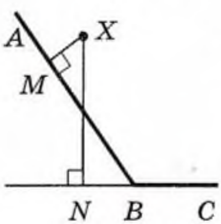


Рис. 276

Зауважимо, що доведення теореми буде повним, якщо показати, що рівновіддаленість точки кута від його сторін виключає можливість, коли одна з точок M або N належить продовженню сторони кута (рис. 276). Дослідити цю ситуацію ви можете на занятті математичного гуртка.

Зазначимо також, що доведена теорема справедлива й для розгорнутого кута.

Означення. Колом називають геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки.

Задану точку називають **центром** кола. На рисунку 277 точка O — центр кола.

Будь-який відрізок, який сполучає точку кола з його центром, називають **радіусом** кола. На рисунку 277 відрізок OX — радіус. З означення випливає, що усі радіуси одного кола рівні.

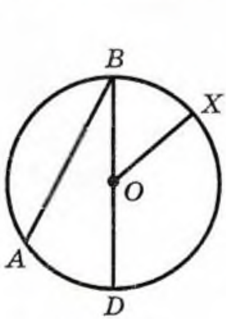


Рис. 277

Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають **хордою** кола. На рисунку 277 відрізок AB — хорда. Хорду, яка проходить через центр кола, називають **діаметром**. На рисунку 277 відрізок BD — діаметр кола. Очевидно, що $BD = 2OX$, тобто діаметр кола вдвічі більший за його радіус.

З курсу математики шостого класу ви знаєте, що фігуру, обмежену колом, називають кругом (рис. 278). Тепер за допомогою поняття ГМТ можна дати інше

Означення. Кругом називають геометричне місце точок, відстань від яких до заданої точки не більша за дане додатне число.

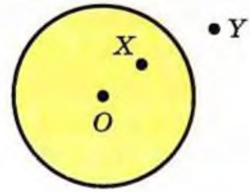


Рис. 278

Задану точку називають **центром** круга, а дане число — **радіусом** круга. Якщо X — довільна точка круга з центром O радіуса R, то $OX \leq R$ (рис. 278). Якщо $OX < R$, то кажуть, що точка X лежить всередині кола, яке обмежує даний круг. Точка Y не належить кругу (рис. 278). Також кажуть, що точка Y лежить поза колом, яке обмежує круг.

З означення круга випливає, що коло, яке обмежує круг, йому належить.

Хорда і **діаметр** круга — це хорда і діаметр кола, яке обмежує круг.

Приклад. На продовженні хорди CD кола з центром O за точку D позначено точку E таку, що відрізок DE дорівнює радіусу кола (рис. 279). Пряма OE перетинає дане коло в точках A і B. Доведіть, що $\angle AOC = 3\angle CEO$.

Розв'язання. Нехай $\angle CEO = \alpha$.

Оскільки ΔODE — рівнобедрений, то $\angle DOE = \angle CEO = \alpha$.

$\angle ODC$ — зовнішній кут трикутника ODE, $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.

Оскільки ΔCOD — рівнобедрений, то маємо: $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.

$\angle AOC$ — зовнішній кут трикутника COE. Тоді $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, тобто $\angle AOC = 3\angle CEO$.

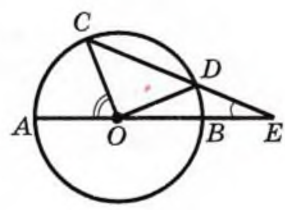


Рис. 279

1. Яку множину точок називають геометричним місцем точок?
2. Які дві теореми треба довести, щоб мати право стверджувати, що деяка множина точок є ГМТ?
3. Яка фігура є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка?

4. Яка фігура є геометричним місцем точок, які належать куту і рівновіддалені від його сторін?
5. Що називають колом?
6. Що називають радіусом кола?
7. Що називають хордою кола?
8. Що називають діаметром кола?
9. Як пов'язані між собою діаметр і радіус кола?
10. Що називають кругом?
11. Чи належить колу його центр?
12. Чи належить кругу його центр?
13. Яка нерівність виконується для будь-якої точки A, що належить кругу з центром O і радіусом R?
14. Яка нерівність виконується для будь-якої точки B, що не належить кругу з центром O і радіусом R?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

478.° Накресліть коло з центром O і радіусом 3,5 см. Позначте на цьому рисунку які-небудь:

1) точки A і B такі, що $OA < 3{,}5$ см, $OB < 3{,}5$ см;
2) точки C і D такі, що $OC = 3{,}5$ см, $OD = 3{,}5$ см;
3) точки E і F такі, що $OE > 3{,}5$ см, $OF > 3{,}5$ см.

479.° Накресліть відрізок AB, довжина якого дорівнює 3 см. Знайдіть точку, віддалену від кожного з кінців відрізка AB на 2 см. Скільки існує таких точок?

480.° Накресліть відрізок CD, довжина якого дорівнює 4 см. Знайдіть точку, віддалену від точки C на 2,5 см, а від точки D — на 3,5 см. Скільки існує таких точок?

481.° Накресліть коло, діаметр якого дорівнює 7 см. Позначте на колі точку A. Знайдіть на колі точки, віддалені від точки A на 4 см.

ВПРАВИ

482.° На рисунку 280 зображено коло з центром B. Укажіть радіус, хорду і діаметр кола. Скільки зображено на рисунку радіусів? хорд?

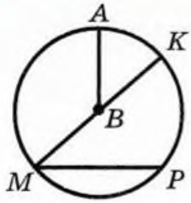


Рис. 280

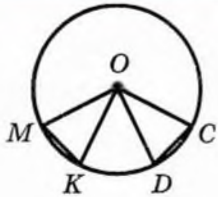


Рис. 281

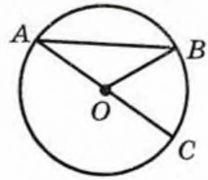


Рис. 282

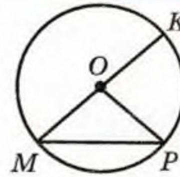


Рис. 283

483.° У колі з центром O проведено дві рівні хорди AB і CD. Доведіть, що $\angle AOB = \angle COD$.

484.° На рисунку 281 точка O — центр кола, $\angle COD = \angle MOK$. Доведіть, що хорди CD і MK рівні.

485.° У колі проведено діаметри AB і CD. Доведіть, що $\angle BAC = \angle CDB$.

486.° У колі з центром O проведено діаметри MK і EF, $MK = 12$ см, $ME = 10$ см. Знайдіть периметр трикутника FOK.

487.° У колі з центром O проведено діаметр AC і хорду AB, $\angle BAC = 26°$ (рис. 282). Знайдіть $\angle BOC$.

488.° У колі з центром O проведено хорду MP і діаметр MK, $\angle POK = 84°$ (рис. 283). Знайдіть $\angle MPO$.

489.° У колі проведено діаметр AB і хорду AC, яка дорівнює радіусу цього кола. Знайдіть $\angle BAC$.

490.° У колі з центром O проведено діаметр CD. На колі позначено точку E так, що $\angle COE = 90°$. Доведіть, що $CE = DE$.

491.° Чому дорівнює діаметр кола, якщо відомо, що він на 4 см більший за радіус даного кола?

492.° Відрізки AB і CD — діаметри кола. Доведіть, що $AC \parallel BD$.

493.• Хорда перетинає діаметр кола під кутом $30°$ і ділить його на відрізки завдовжки 4 см і 10 см. Знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди.

494.• Хорда CD перетинає діаметр AB у точці M, $CE \perp AB$, $DF \perp AB$, $\angle AMC = 60°$, $ME = 18$ см, $MF = 12$ см (рис. 284). Знайдіть хорду CD.

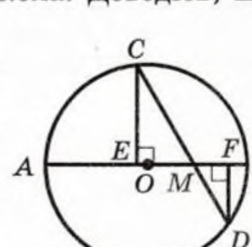


Рис. 284

495.•• Знайдіть геометричне місце центрів кіл даного радіуса, які проходять через дану точку.

496.•• Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які проходять через дві дані точки.

497.•• Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від двох даних прямих, які перетинаються.

498.•• Знайдіть геометричне місце вершин рівнобедрених трикутників, які мають спільну основу.

499.•• Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від двох паралельних прямих.

500.•• Знайдіть ГМТ, віддалених від даної прямої на задану відстань.

501.•• Відрізок AB — діаметр кола, M — довільна точка кола, відмінна від точок A і B. Доведіть, що $\angle AMB = 90^\circ$.

502.* Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $AX > BX$.

503.* Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $AX > AB$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

504. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено бісектриси AD і CE. Доведіть, що $AE = ED$.

505. З точки O через точки A, B і C проведено промені OA, OB і OC. Відомо, що $OA = OB = OC$, $\angle AOB = 80^\circ$, $\angle BOC = 110^\circ$, $\angle AOC = 170^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC.

506. На стороні AB трикутника ABC позначили точку M так, що $BM = CM$, MK — бісектриса кута AMC. Доведіть, що $MK \parallel BC$.

507. У гострокутному трикутнику один із зовнішніх кутів дорівнює 160°. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать висоти, проведені з двох інших вершин трикутника.

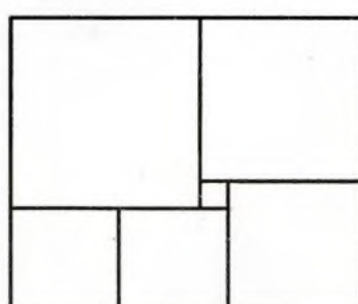


Рис. 285

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

508. Прямокутник на рисунку 285 складено з квадратів. Знайдіть сторону найбільшого квадрата, якщо сторона найменшого дорівнює 1.

20. Деякі властивості кола. Дотична до кола

Теорема 20.1. ***Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.***

Доведення. ⊙ Якщо хорда є діаметром, то теорема очевидна.

На рисунку 286 зображено коло з центром O, M — точка перетину діаметра CD і хорди AB, $CD \perp AB$. Треба довести, що $AM = MB$.

Проведемо радіуси OA і OB. У рівнобедреному трикутнику AOB ($OA = OB$) відрізок OM — висота, а отже, і медіана, тобто $AM = MB$. ▲

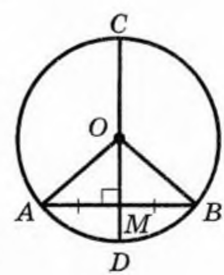


Рис. 286

Теорема 20.2. ***Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.***

Доведіть цю теорему самостійно. Подумайте, чи буде правильним це твердження, якщо хорда є діаметром.

На рисунку 287 зображено пряму і коло, які на рисунку 287, *а* не мають спільних точок, на рисунку 287, *б* мають дві спільні точки, на рисунку 287, *в* — одну.

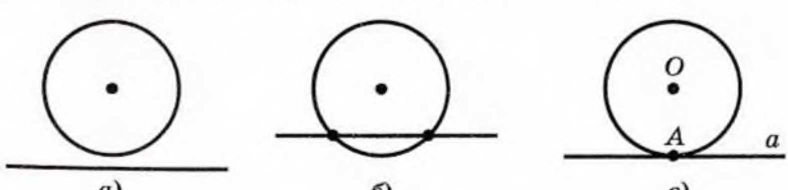


Рис. 287

Означення. **Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.**

Зрозуміло, що дотична до кола має тільки одну спільну точку з кругом, обмеженим цим колом.

На рисунку 287, *в* пряма a — дотична, A — **точка дотику.**

Якщо відрізок (промінь) належить дотичній до кола і має з цим колом спільну точку, то кажуть, що відрізок (промінь) *дотикається* до кола. Наприклад, на рисунку 288 зображено відрізок AB, який дотикається до кола в точці C.

Теорема 20.3 (властивість дотичної). ***Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.***

Доведення. ⊙ На рисунку 289 зображено коло з центром O, A — точка дотику прямої a і кола. Треба довести, що $OA \perp a$.

Припустимо, що це не так, тобто OA — похила до прямої a. Тоді з точки O опустимо перпендикуляр OM на пряму a (рис. 289). Оскільки точка A — єдина спільна точка прямої a і круга з центром O, то точка M не належить цьому кругу. Звідси $OM = MB + OB > OB = OA$. Отримали суперечність: перпендикуляр OM більший за похилу OA. Отже, $OA \perp a$. ▲

Теорема 20.4 (ознака дотичної до кола). ***Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.***

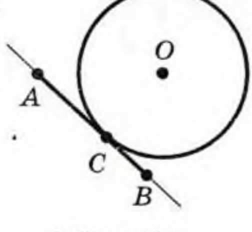


Рис. 288

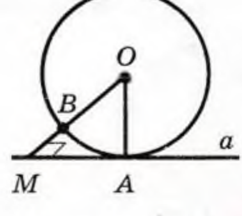


Рис. 289

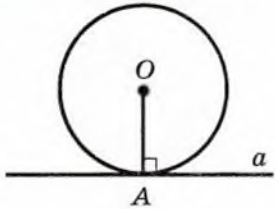


Рис. 290

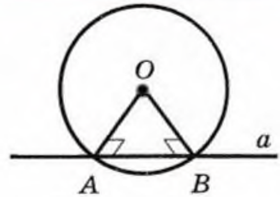


Рис. 291

Доведення. ⊙ На рисунку 290 зображено коло з центром у точці O, відрізок OA — його радіус, точка A належить прямій a, $OA \perp a$. Доведемо, що пряма a — дотична до кола.

Нехай пряма a не є дотичною, а має ще одну спільну точку B з колом (рис. 291). Тоді ΔAOB — рівнобедрений (сторони OA і OB рівні як радіуси). Звідси отримуємо суперечність: у трикутнику AOB є два прямих кути. Отже, пряма a є дотичною до кола. ▲

Наслідок. ***Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.***

Часто при розв'язуванні задач використовують результат такої задачі.

Задача. *Якщо з даної точки до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.*

Розв'язання. На рисунку 292 зображено коло з центром O. Прямі AB і AC — дотичні, B і C — точки дотику. Треба довести, що $AB = AC$.

Проведемо радіуси OB і OC у точки дотику. За властивістю дотичної $OB \perp AB$ і $OC \perp AC$. У прямокутних трикутниках AOB і AOC катети OB і OC рівні як радіуси одного кола, AO — спільна гіпотенуза. Отже, $\Delta AOB = \Delta AOC$ за гіпотенузою і катетом. Звідси $AB = AC$. ▲

Рис. 292

1. Як ділить хорду діаметр, що перпендикулярний до неї?
2. Чому дорівнює кут між хордою, відмінною від діаметра, і діаметром, який ділить цю хорду навпіл?
3. Яку пряму називають дотичною до кола?
4. Яку властивість має радіус, проведений у точку дотику прямої і кола?
5. Сформулюйте ознаку дотичної до кола.
6. Яку властивість мають дотичні, проведені до кола з однієї точки?
7. Яке можливе взаємне розміщення прямої і кола?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

509.° Накресліть коло з центром O, проведіть хорду AB. Користуючись косинцем, поділіть цю хорду навпіл.

510.° Накресліть коло з центром O, проведіть хорду CD. Користуючись лінійкою зі шкалою, проведіть діаметр, який перпендикулярний до хорди CD.

511.° Накресліть коло довільного радіуса, позначте на ньому точки A і B. Користуючись лінійкою і косинцем, проведіть прямі, які б дотикалися до кола в точках A і B.

512.° Проведіть пряму a і позначте на ній точку M. Користуючись косинцем, лінійкою і циркулем, побудуйте коло з радіусом 3 см, яке б дотикалося до прямої a в точці M. Скільки таких кіл можна провести?

ВПРАВИ

513.° На рисунку 293 точка O — центр кола, діаметр CD перпендикулярний до хорди AB. Доведіть, що $\angle AOD = \angle BOD$.

514.° Доведіть, що рівні хорди кола рівновіддалені від його центра.

515.° Доведіть, що коли хорди кола рівновіддалені від його центра, то вони рівні.

516.° Чи правильно, що пряма, яка перпендикулярна до радіуса кола, дотикається до цього кола?

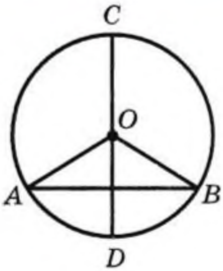


Рис. 293

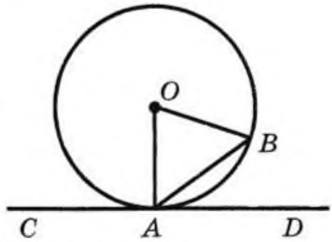


Рис. 294

517.° Пряма CD дотикається до кола з центром O в точці A, відрізок AB — хорда кола, $\angle BAD = 35^\circ$ (рис. 294). Знайдіть $\angle AOB$.

518.° Пряма CD дотикається до кола з центром O в точці A, відрізок AB — хорда кола, $\angle AOB = 80^\circ$ (рис. 294). Знайдіть $\angle BAC$.

519.° Дано коло, діаметр якого дорівнює 6 см. Пряма a віддалена від його центра на: 1) 2 см; 2) 3 см; 3) 6 см. У якому випадку пряма a є дотичною до кола?

520.• Доведіть, що діаметр кола більший за будь-яку хорду, відмінну від діаметра.

521.• У колі з центром O через середину радіуса проведено хорду AB, перпендикулярну до нього. Доведіть, що $\angle AOB = 120^\circ$.

522.• У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$. Доведіть, що:

1) пряма BC є дотичною до кола з центром A, яке проходить через точку C;
2) пряма AB не є дотичною до кола з центром C, яке проходить через точку A.

523.• Знайдіть кут між радіусами OA і OB кола, якщо відстань від центра O кола до хорди AB у 2 рази менша від: 1) довжини хорди AB; 2) радіуса кола.

524.• У колі проведено діаметр AB і хорди AC і CD так, що $AC = 12$ см, $\angle BAC = 30^\circ$, $AB \perp CD$. Знайдіть довжину хорди CD.

525.• З точки M до кола з центром O проведено дотичні MA і MB, A і B — точки дотику, $\angle OAB = 20^\circ$. Знайдіть $\angle AMB$.

526.$^{\bullet}$ Через кінці хорди AB, яка дорівнює радіусу кола, проведено дві дотичні, що перетинаються в точці C. Знайдіть $\angle ACB$.

527.$^{\bullet}$ Через точку C кола з центром O проведено дотичну до цього кола, AB — діаметр кола. З точки A на дотичну опущено перпендикуляр AD. Доведіть, що промінь AC — бісектриса кута BAD.

528.$^{\bullet}$ Пряма AC дотикається до кола з центром O в точці A (рис. 295). Доведіть, що кут BAC у 2 рази менший від кута AOB.

529.$^{\bullet}$ Відрізки AB і BC — відповідно хорда і діаметр кола, $\angle ABC = 30^\circ$. Через точку A проведено дотичну до кола, яка перетинає пряму BC у точці D. Доведіть, що ΔABD — рівнобедрений.

530.$^{\bullet}$ Відомо, що діаметр AB ділить хорду CD навпіл, але не перпендикулярний до неї. Доведіть, що CD — теж діаметр.

531.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даної прямої в даній точці.

532.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до обох сторін даного кута.

533.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даної прямої.

534.$^{\bullet\bullet}$ Прямі, які дотикаються до кола з центром O в точках A і B, перетинаються в точці K, $\angle AKB = 120^\circ$. Доведіть, що $AK + BK = OK$.

535.$^{\bullet\bullet}$ Коло дотикається до сторони AB трикутника ABC у точці M і до продовження двох інших сторін. Доведіть, що сума $BC + BM$ дорівнює половині периметра трикутника ABC.

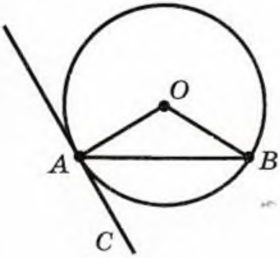


Рис. 295

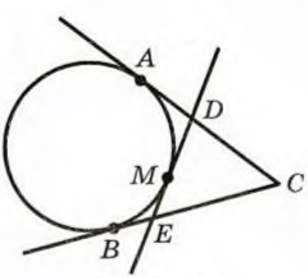


Рис. 296

536.** Через точку C проведено дотичні AC і BC до кола, A і B — точки дотику (рис. 296). На колі взято довільну точку M, яка лежить в одній півплощині з точкою C відносно прямої AB, і через неї проведено дотичну до кола, яка перетинає прямі AC і BC у точках D і E відповідно. Доведіть, що периметр трикутника DEC не залежить від вибору точки M.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

537. Доведіть, що середина M відрізка, кінці якого належать двом паралельним прямим, є серединою будь-якого відрізка, кінці якого належать цим прямим і який проходить через точку M.

538. Відрізки AB і CD лежать на одній прямій і мають спільну середину. Точку M вибрано так, що ΔAMB — рівнобедрений з основою AB. Доведіть, що ΔCMD також є рівнобедреним з основою CD.

539. На стороні MK трикутника MPK позначено точки E і F так, що точка E лежить між точками M і F, $ME = EP$, $PF = FK$. Знайдіть кут M, якщо $\angle EPF = 92^\circ$, $\angle K = 26^\circ$.

540. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектрису BM. З точки M на сторону BC опущено перпендикуляр MK. Виявилося, що $\angle ABM = \angle KMC$. Доведіть, що ΔABC — рівнобедрений.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

541. Установіть закономірність форм фігур, зображених на рисунку 297. Яку фігуру треба поставити наступною?

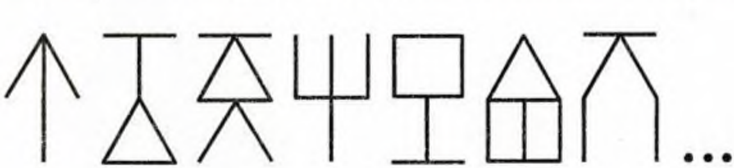


Рис. 297

21. Описане і вписане кола трикутника

Означення. **Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.**

На рисунку 298 зображено коло, описане навколо трикутника. У цьому випадку також кажуть, що трикутник **вписаний** у коло.

Очевидно, що центр описаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його вершин. На рисунку 298 точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC, тому $OA = OB = OC$.

Теорема 21.1. ***Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.***

Доведення. ⊙ Для доведення достатньо показати, що для будь-якого трикутника ABC існує точка O, яка рівновіддалена від усіх його вершин. Тоді точка O буде центром описаного кола, а відрізки OA, OB і OC — його радіусами.

На рисунку 299 зображено довільний трикутник ABC. Проведемо серединні перпендикуляри k і l сторін AB і AC відповідно. Нехай O — точка перетину цих прямих. Оскільки точка O належить серединному перпендикуляру k, то $OA = OB$. Оскільки точка O належить серединному перпендикуляру l, то $OA = OC$. Отже, $OA = OB = OC$, тобто точка O рівновіддалена від усіх вершин трикутника. ▲

Зауважимо, що навколо трикутника можна описати тільки одне коло. Це випливає з того, що серединні перпендикуляри k і l (рис. 299) мають тільки одну точку перетину.

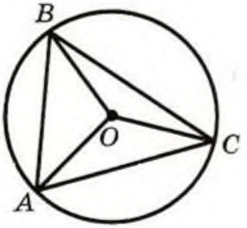


Рис. 298

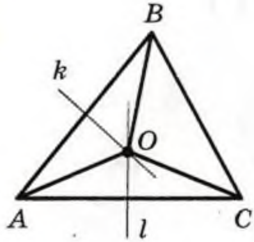


Рис. 299

Отже, існує тільки одна точка, яка рівновіддалена від усіх вершин трикутника.

Наслідок 1. ***Три серединних перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці.***

Наслідок 2. ***Центр кола, описаного навколо трикутника, — це точка перетину серединних перпендикулярів його сторін.***

Означення. **Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.**

На рисунку 300 зображено коло, вписане в трикутник. У цьому випадку також кажуть, що трикутник **описаний** навколо кола.

Точка O (рис. 300) — центр вписаного кола трикутника ABC, відрізки OM, ON, OP — радіуси, проведені в точки дотику, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Зрозуміло, що центр вписаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його сторін.

Теорема 21.2. ***У будь-який трикутник можна вписати коло.***

Доведення. Для доведення достатньо показати, що для будь-якого трикутника ABC існує точка O, яка віддалена від кожної його сторони на деяку відстань r. Тоді за наслідком з теореми 20.4 точка O буде центром кола радіуса r, яке дотикається до сторін AB, BC і AC.

На рисунку 301 зображено довільний трикутник ABC. Проведемо бісектриси кутів A і B, O — точка їх перетину. Оскільки точка O належить бісектрисі кута A, то вона рівно-

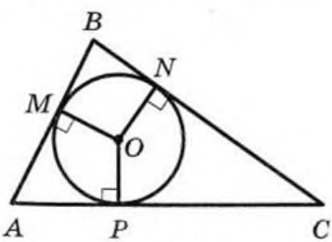


Рис. 300

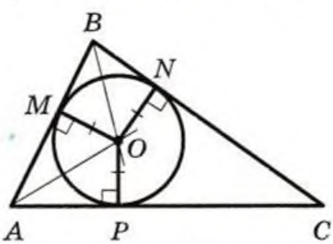


Рис. 301

віддалена від сторін AB і AC (теорема 19.2). Аналогічно, оскільки точка O належить бісектрисі кута B, то вона рівновіддалена від сторін BA і BC. Отже, точка O рівновіддалена від усіх сторін трикутника. ▲

Зауважимо, що в трикутник можна вписати тільки одне коло. Це випливає з того, що бісектриси кутів A і B (рис. 301) перетинаються тільки в одній точці. Отже, існує тільки одна точка, яка рівновіддалена від сторін трикутника.

Наслідок 1. ***Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.***

Наслідок 2. ***Центр кола, вписаного в трикутник, — це точка перетину його бісектрис.***

Задача. *Доведіть, що радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, визначається за формулою* $r = \frac{a+b-c}{2}$, *де* r *— радіус вписаного кола,* a *і* b *— катети,* c *— гіпотенуза.*

Розв'язання. У трикутнику ABC (рис. 302) $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, точка O — центр вписаного кола, M, E і K — точки дотику вписаного кола зі сторонами BC, AC і AB відповідно.

Відрізок OM — радіус кола, проведений у точку дотику. Тоді $OM \perp BC$.

Оскільки точка O — центр вписаного кола, то CO — бісектриса кута ACB і $\angle OCM = 45^\circ$. Тоді ΔCMO — рівнобедрений прямокутний, $CM = OM = r$.

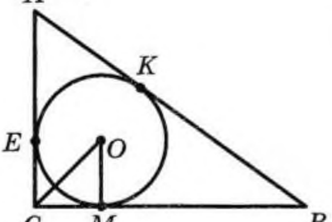


Рис. 302

Використовуючи властивість відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки, маємо:

$$CE = CM = r;$$
$$AK = AE = b - r;$$
$$BK = BM = a - r.$$

Оскільки $AK + BK = AB$, то $b - r + a - r = c$, $2r = a + b - c$,

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

1. Яке коло називають описаним навколо трикутника?
2. Який трикутник називають вписаним у коло?
3. Навколо якого трикутника можна описати коло?
4. Яка точка є центром кола, описаного навколо трикутника?
5. Яке коло називають вписаним у трикутник?
6. Який трикутник називають описаним навколо кола?
7. У який трикутник можна вписати коло?
8. Яка точка є центром кола, вписаного в трикутник?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

542.° Накресліть різносторонній гострокутний трикутник.

1) Користуючись лінійкою зі шкалою і косинцем, знайдіть центр кола, описаного навколо даного трикутника.
2) Опишіть навколо трикутника коло.

Виконайте завдання пунктів 1 і 2 для різносторонніх прямокутного і тупокутного трикутників.

543.° Накресліть:

1) рівнобедрений гострокутний трикутник;
2) рівнобедрений тупокутний трикутник.

Виконайте завдання пунктів 1 і 2 з № 542.

544.° Перерисуйте в зошит рисунок 303. Проведіть через точки A, B, C коло, користуючись лінійкою зі шкалою, косинцем і циркулем.

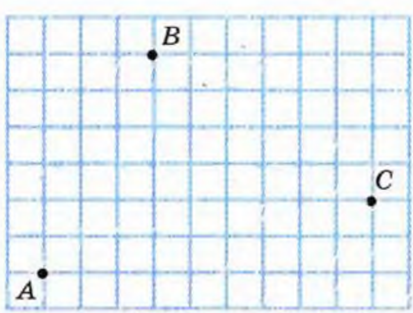


Рис. 303

545.° Накресліть різносторонній трикутник.

1) Користуючись лінійкою і транспортиром, знайдіть центр кола, вписаного в даний трикутник.
2) Користуючись косинцем, знайдіть точки дотику вписаного кола зі сторонами трикутника.
3) Впишіть у даний трикутник коло.

546.° Накресліть рівнобедрений трикутник. Виконайте завдання пунктів 1, 2 і 3 із завдання 545.

ВПРАВИ

547.° Доведіть, що центр описаного кола рівнобедреного трикутника належить прямій, яка містить медіану, проведену до його основи.

548.° Доведіть, що центр вписаного кола рівнобедреного трикутника належить висоті, проведеній до його основи.

549.° Доведіть, що коли центр вписаного кола трикутника належить його висоті, то цей трикутник — рівнобедрений.

550.° Доведіть, що центр описаного кола рівностороннього трикутника є точкою перетину його бісектрис.

551.° На рисунку 304 у трикутники ABD і CBD вписано кола з центрами O_1 і O_2 відповідно. Доведіть, що $\angle O_1DO_2$ — прямий.

552.° На рисунку 305 у трикутники ABD і CBD вписано кола з центрами O_1 і O_2 відповідно, $\angle ABC = 50^\circ$. Знайдіть кут O_1BO_2.

553.° Через центр O кола, описаного навколо трикутника ABC, проведено пряму, яка перпендикулярна до сторони AC

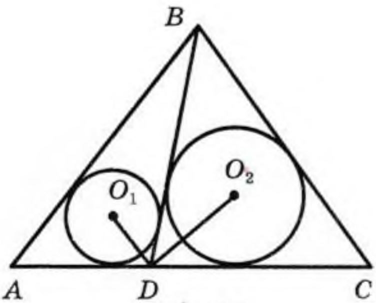


Рис. 304

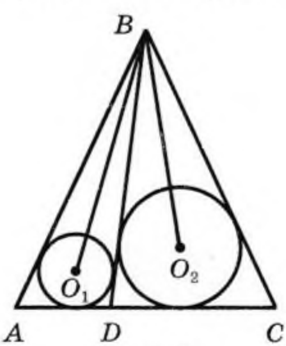


Рис. 305

і перетинає сторону AB у точці M. Доведіть, що $AM = MC$.

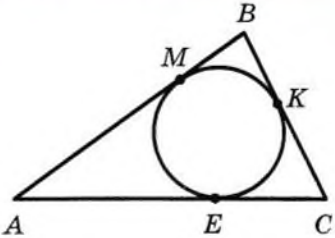


Рис. 306

554.* Коло, вписане в трикутник ABC (рис. 306), дотикається до його сторін у точках M, K і E, $BK = 2$ см, $KC = 4$ см, $AM = 8$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

555.* Коло, вписане в трикутник ABC (рис. 306), дотикається до його сторін у точках M, K і E, $AM = 13$ см, $BK = 3$ см, периметр трикутника ABC дорівнює 46 см. Знайдіть довжину сторони AC.

556.* Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його висоті, то цей трикутник рівнобедрений.

557.* Доведіть, що коли центр кола, вписаного в трикутник, належить його медіані, то цей трикутник рівнобедрений.

558.* Доведіть, що коли центри вписаного і описаного кіл трикутника збігаються, то цей трикутник — рівносторонній.

559.* Бічна сторона рівнобедреного трикутника ділиться точкою дотику вписаного кола у відношенні $7:5$, рахуючи від вершини трикутника. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 68 см.

560.* Периметр трикутника ABC, описаного навколо кола, дорівнює 52 см. Точка дотику зі стороною AB ділить цю сторону у відношенні $2 : 3$, рахуючи від вершини A. Точка дотику зі стороною BC віддалена від вершини C на 6 см. Знайдіть сторони трикутника.

561.* У трикутник з кутами 30°, 70° і 80° вписано коло. Знайдіть кути трикутника, вершини якого є точками дотику вписаного кола зі сторонами даного трикутника.

562.* Коло, вписане в рівнобедрений трикутник ABC, дотикається до його бічних сторін AB і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що $MN \parallel AC$.

563.* Центр кола, описаного навколо трикутника, належить його стороні. Доведіть, що цей трикутник — прямокутний.

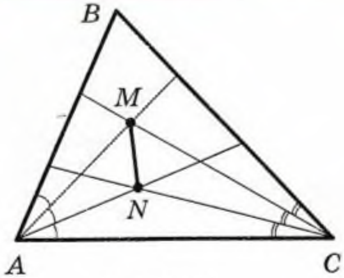


Рис. 307

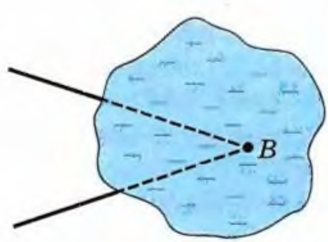


Рис. 308

564.** У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається до сторони AB в точці M, $BC = a$. Доведіть, що $AM = p - a$, де p — півпериметр трикутника ABC.

565.** До кола, вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною a, проведено дотичну, яка перетинає дві його сторони. Знайдіть периметр трикутника, який ця дотична відтинає від даного.

566.* У рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) з основою 10 см вписано коло. До цього кола проведено три дотичні, які відтинають від даного трикутника трикутники ADK, BEF і CMN. Сума периметрів утворених трикутників дорівнює 42 см. Чому дорівнює бічна сторона даного трикутника?

567.* У трикутнику ABC відрізок BD — медіана, $AB = 7$ см, $BC = 8$ см. У трикутники ABD і BDC вписали кола. Знайдіть відстань між точками дотику цих кіл з відрізком BD.

568.* Кожний з кутів BAC і ACB трикутника ABC поділено на три рівні частини (рис. 307). Доведіть, що $\angle AMN = \angle CMN$.

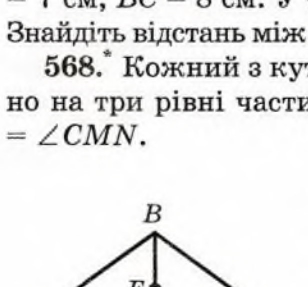


Рис. 309

569.* Вершина кута B недоступна (рис. 308). За допомогою транспортира побудуйте пряму, яка містить бісектрису кута B.

570.* Точки F і O — центри вписаного і описаного кіл рівнобедреного трикутника ABC відповідно (рис. 309). Вони знаходяться на однаковій відстані від його основи AC. Знайдіть кути трикутника ABC.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

571. Бісектриса кута ABC утворює з його стороною кут, що дорівнює куту, суміжному з кутом ABC. Знайдіть кут ABC.

572. У рівнобедреному трикутнику з вершини одного кута при основі проведено висоту трикутника, а з вершини другого кута при основі — бісектрису трикутника. Один з кутів, утворених при перетині проведених бісектриси і висоти, дорівнює $64°$. Знайдіть кути даного трикутника.

573. На рисунку 310 $BC \parallel AD$, $AB = 3$ см, $BC = 10$ см. Бісектриса кута BAD перетинає відрізок BC у точці K. Знайдіть відрізки BK і KC.

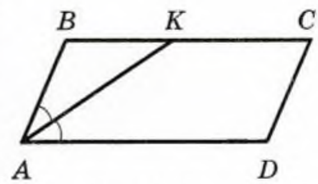


Рис. 310

574. У трикутнику ABC $AB = BC$, AM і CK — медіани цього трикутника. Доведіть, що $MK \parallel AC$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

575. У квадраті $ABCD$ вирізали заштриховану фігуру (рис. 311). Розділіть частину квадрата, яка залишилася, на 4 рівні фігури.

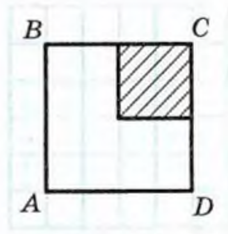


Рис. 311

22. Задачі на побудову

За допомогою лінійки з поділками, циркуля, косинця, транспортира, шаблонів (рис. 312) вам неодноразово доводилося виконувати різні геометричні побудови.

А чи можна обходитися меншою кількістю креслярських інструментів? Виявляється, що в багатьох випадках достатньо використовувати тільки *циркуль і лінійку*


Рис. 312

без поділок. Наприклад, щоб провести бісектрису кута, зовсім не обов'язково мати транспортир, а поділити відрізок навпіл можна і тоді, коли на лінійку не нанесено шкалу.

А чи варто в наш час, коли створено найточніші прилади і досконалі комп'ютерні програми, які дають можливість виконувати найскладніші виміри і побудови, обходитися такими «мізерними» засобами, як циркуль і лінійка? На практиці, звісно, ні. Тому, наприклад, конструктори, будівельники, архітектори, дизайнери, закрійники не обмежують себе у виборі інструментів.

Однак при вивченні геометрії дуже корисно взяти участь у грі за такими правилами:

1) усі побудови виконуються тільки за допомогою циркуля і лінійки без поділок;
2) за допомогою лінійки через задану точку A можна провести пряму, а також через задані дві точки A і B провести пряму AB;
3) за допомогою циркуля можна побудувати коло з даним центром і радіусом, що дорівнює заданому відрізку AB.

Отже, домовимося, що коли в задачі потрібно побудувати якусь фігуру, то побудова виконується за описаними вище правилами.

Розв'язати задачу на побудову — це означає скласти план (*алгоритм*) побудови фігури; реалізувати план, виконавши побудову; довести, що отримана фігура є шуканою.

Розглянемо основні задачі на побудову.

Задача 1. *Побудуйте кут, що дорівнює даному, одна із сторін якого є даним променем.*

Розв'язання. На рисунку 313 зображено кут A і промінь OK. Треба побудувати кут, що дорівнює куту A, однією із сторін якого є промінь OK.

Проведемо коло довільного радіуса з центром у точці A. Точки перетину цього кола зі сторонами кута A позначимо B і C (рис. 314). Нехай $AB = AC = r$.

Проведемо коло радіуса r з центром у точці O (рис. 315). Воно перетинає промінь OK у точці M. Потім з центром

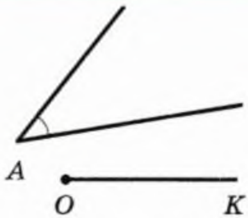


Рис. 313

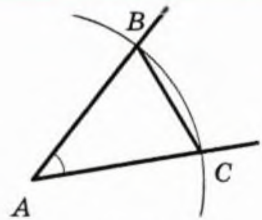


Рис. 314

у точці M проведемо коло, радіус якого дорівнює BC. Нехай E і F — точки перетину кіл з центрами O і M.

Покажемо, що кожний з кутів EOM і FOM — шуканий. Доведемо, наприклад, що $\angle EOM = \angle BAC$.

Розглянемо трикутники ABC і OEM. Маємо: $AB = OE = r = AC = OM$. Крім того, за побудовою $EM = BC$. Отже, $\Delta ABC = \Delta OEM$ за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle EOM = \angle BAC$. Аналогічно можна показати, що $\angle BAC = \angle FOM$.

Задача 2. *Побудуйте серединний перпендикуляр даного відрізка.*

Розв'язання. Нехай AB — даний відрізок. Проведемо два кола з центрами A і B радіуса AB (рис. 316). Точки перетину цих кіл позначимо M і N.

З побудови випливає, що $MA = MB = AB$ і $NA = NB = AB$. Отже, точки M і N належать серединному перпендикуляру відрізка AB. Пряма MN і є серединним перпендикуляром відрізка AB.

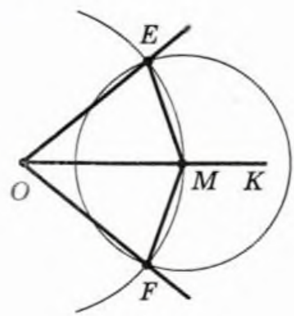


Рис. 315

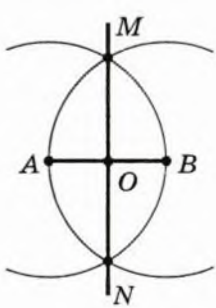


Рис. 316

Зауваження. Оскільки пряма MN перетинає відрізок AB у його середині в точці O, то тим самим розв'язана

Задача 3. *Поділіть даний відрізок навпіл.*

Задача 4. *Дано пряму і точку, яка їй не належить. Через цю точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної.*

Розв'язання. Нехай m — дана пряма, A — точка, яка їй не належить. Проведемо коло з центром у точці A так, щоб воно перетинало пряму m у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 317).

Оскільки $AM = AN$, то точка A належить серединному перпендикуляру відрізка MN. Побудувавши цей серединний перпендикуляр (див. задачу 2), ми тим самим розв'яжемо дану задачу.

Задача 5. *Дано пряму і точку, яка їй належить. Через цю точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної.*

Розв'язання. Нехай m — дана пряма, A — точка, яка їй належить. Проведемо коло довільного радіуса з центром у точці A. Воно перетинає пряму m у точках M і N (рис. 318).

Оскільки $AM = AN$, то задача звелася до побудови серединного перпендикуляра відрізка MN.

Задача 6. *Побудуйте бісектрису даного кута.*

Розв'язання. Нехай A — даний кут. Проведемо коло довільного радіуса з центром у точці A. Це коло перетинає сторони кута в точках M і N (рис. 319). Тим самим радіусом проведемо кола з центрами M і N. Ці кола перетинаються у точках A і K.

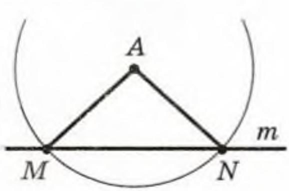


Рис. 317

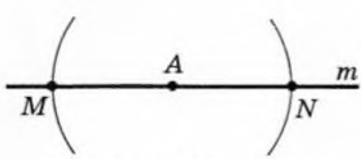


Рис. 318

Доведемо, що промінь AK — шукана бісектриса.

Дійсно, $\Delta AMK = \Delta ANK$ за трьома сторонами. Отже, $\angle MAK = \angle NAK$.

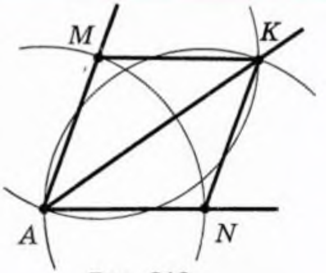


Рис. 319

П р и к л а д 1. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і катетом.

Р о з в ' я з а н н я. Проведемо дві перпендикулярні прямі m і n, C — точка їх перетину (рис. 320). На прямій m відкладемо відрізок CA, який дорівнює даному катету. З центром у точці A проведемо коло радіусом, який дорівнює даній гіпотенузі. Це коло перетне пряму n у двох точках B_1 і B_2 (рис. 321). Кожний з трикутників ACB_1 і ACB_2 — шуканий.

Оскільки трикутники ACB_1 і ACB_2 рівні, то вважатимемо, що задача має єдиний розв'язок.

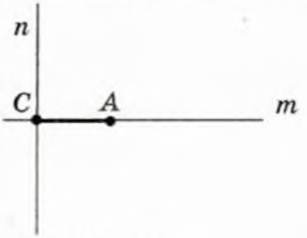


Рис. 320

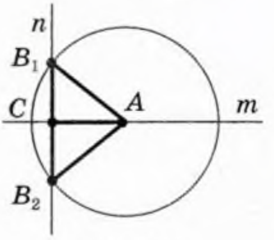


Рис. 321

П р и к л а д 2. Побудуйте гострокутний трикутник за стороною і висотами, проведеними до двох інших сторін.

Р о з в ' я з а н н я. На рисунку 322 зображено трикутник ABC, AA_1 і CC_1 — його висоти. Якщо відомо відрізки AC, AA_1 і CC_1, то можна побудувати прямокутні трикутники AA_1C і CC_1A за гіпотенузою і катетом.

Проведений аналіз підказує план побудови.

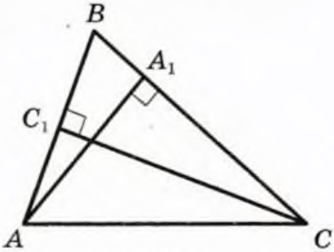


Рис. 322

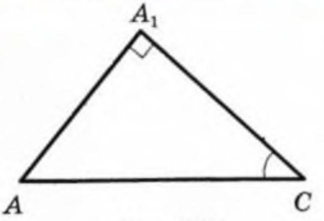


Рис. 323

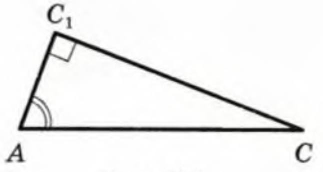


Рис. 324

Побудуємо прямокутний трикутник AA_1C, у якому гіпотенуза AC дорівнює даній стороні, а катет AA_1 — одній з даних висот (рис. 323). У побудованому трикутнику кут ACA_1 дорівнює одному з кутів, прилеглих до даної сторони шуканого трикутника. За допомогою аналогічної побудови можна отримати другий кут, прилеглий до даної сторони (рис. 324).

Тепер залишилося побудувати трикутник за стороною і двома прилеглими до неї кутами. Виконайте цю побудову самостійно.

Приклад 3. Побудуйте трикутник за кутом, висотою і бісектрисою, проведеними з вершини цього кута.

Розв'язання. На рисунку 325 зображено трикутник ABC, у якому відрізок BD — висота, відрізок BK — бісектриса.

Якщо відомо відрізки BD і BK, то прямокутний трикутник BDK можна побудувати за гіпотенузою і катетом. Також зауважимо, що коли відомо кут ABC, то можна побудувати кути ABK і KBC, кожний з яких дорівнює $\frac{1}{2}\angle ABC$. Звідси отримуємо план побудови.

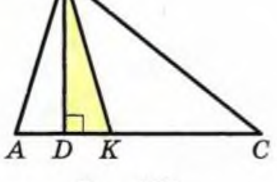


Рис. 325

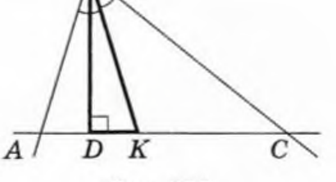


Рис. 326

Будуємо прямокутний трикутник DBK, у якому гіпотенуза BK дорівнює даній бісектрисі, а катет BD — даній висоті (рис. 326). Будуємо два кути, кожний з яких дорівнює половині даного, так, щоб промінь BK був їх спільною стороною. На рисунку 326 це кути ABK і KBC. Трикутник ABC — шуканий.

1. Якими інструментами домовилися виконувати геометричні побудови? Які побудови можна виконувати ними?
2. Що означає розв'язати задачу на побудову?

ВПРАВИ

576.° Накресліть: 1) гострий кут; 2) тупий кут. Побудуйте кут, що дорівнює накресленому.

577.° Накресліть гострий кут ABC і проведіть промінь DK. Побудуйте кут MDK такий, що $\angle MDK = 2\angle ABC$.

578.° Поділіть даний відрізок на 4 рівні частини.

579.° Накресліть довільний кут. Поділіть його на 4 рівні частини.

580.° Побудуйте кут, який дорівнює: 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $75°$; 4) $120°$.

581.° Побудуйте кут, який дорівнює: 1) $30°$; 2) $22°30'$; 3) $15°$.

582.° Накресліть: 1) гострокутний трикутник; 2) тупокутний трикутник. Побудуйте всі висоти цього трикутника.

583.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте його: 1) висоту AM; 2) медіану BD; 3) бісектрису CK.

584.° Через дану точку, яка не належить даній прямій, проведіть пряму, паралельну даній.

585.° Побудуйте трикутник:

1) за двома сторонами і кутом між ними;

2) за стороною і двома прилеглими кутами.

586.° Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається до даної прямої в даній точці.

587.° Через дану точку, що належить куту, проведіть пряму, яка відтинає на сторонах кута рівні відрізки.

588.° Побудуйте дотичну до кола, яка проходить через дану точку кола.

589.° Побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута.

590.° Дано кут, який дорівнює 30°. Побудуйте коло заданого радіуса, центр якого належить одній із сторін даного кута і яке дотикається до його другої сторони.

591.° Побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута і, крім того, до однієї з них — у даній точці.

592.° Побудуйте прямокутний трикутник:

1) за двома катетами;

2) за гіпотенузою і гострим кутом;

3) за катетом і прилеглим гострим кутом.

593.° Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і протилежним гострим кутом.

594.° Побудуйте рівнобедрений трикутник:

1) за бічною стороною і кутом при вершині;

2) за висотою, опущеною на основу, та кутом при вершині;

3) за основою і медіаною, проведеною до основи;

4) за основою і висотою, проведеною до бічної сторони.

595.° Побудуйте рівнобедрений трикутник:

1) за основою і кутом при основі;

2) за бічною стороною і кутом при основі;

3) за висотою, проведеною до основи, і бічною стороною.

596.° Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник:

1) за катетом;

2) за гіпотенузою.

597.• Побудуйте коло, центром якого є дана точка на стороні даного гострого кута і яке відтинає на другій стороні кута відрізок даної довжини.

598.• Як поділити навпіл відрізок, довжина якого в кілька разів більша за найбільший розхил циркуля?

599.• Побудуйте прямокутний трикутник:

1) за гострим кутом і бісектрисою цього кута;

2) за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.

600.• Побудуйте прямокутний трикутник:

1) за катетом і медіаною, проведеною до другого катета;

2) за гострим кутом і висотою, проведеною з вершини прямого кута.

601.• Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і радіусом вписаного кола.

602.• Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою трикутника, проведеною з вершини цього кута.

603.• Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін, і кутом між даною стороною і медіаною.

604.• Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї гострим кутом і висотою, проведеною до даної сторони.

605.• Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною до однієї з цих сторін. Скільки розв'язків може мати задача?

606.• Побудуйте трикутник за стороною і медіаною та висотою, проведеними з одного й того самого кінця даної сторони. Скільки розв'язків може мати задача?

607.• Побудуйте трикутник за висотою і двома кутами, які ця висота утворює зі сторонами трикутника, що мають з висотою спільну вершину. Скільки розв'язків може мати задача?

608.• Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони. Скільки розв'язків може мати задача?

609.• Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з цих сторін. Скільки розв'язків може мати задача?

610.• Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим кутом і медіаною, проведеною до даної сторони. Скільки розв'язків може мати задача?

611.•• Побудуйте трикутник за кутом і висотами, проведеними з вершин двох інших кутів.

612.•• Побудуйте трикутник за двома висотами і кутом, з вершини якого проведена одна з даних висот. Скільки розв'язків може мати задача?

613.•• Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.

614.•• Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і радіусом вписаного кола.

615.** Побудуйте трикутник за радіусом вписаного кола і відрізками, на які точка дотику вписаного кола ділить одну із сторін.

616.** Побудуйте трикутник за стороною та висотою і медіаною, проведеними до цієї сторони.

617.** Побудуйте трикутник, якщо дано три точки, у яких вписане коло дотикається до його сторін.

618.* Як поділити на 3 рівні частини кут, який дорівнює 54°?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

619. У трикутнику ABC $AB = BC$, AE і CF — бісектриси цього трикутника. Доведіть, що $EF \parallel AC$.

620. Визначте кути трикутника ABC, якщо $\angle A + \angle B = 110^\circ$, а $\angle A + \angle C = 85^\circ$.

621. Пряма, яка проходить через середину D гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC і перпендикулярна до неї, перетинає катет BC у точці M, $\angle MAC : \angle MAB = 8 : 5$. Знайдіть гострі кути трикутника ABC.

622. Зовнішній кут трикутника більший за один з кутів трикутника, не суміжних з ним, на 60°, а за другий — на 40°. Визначте вид трикутника.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

623. На аркуші паперу нарисували рівносторонній трикутник і повністю накрили його двома іншими рівносторонніми трикутниками різних розмірів. Доведіть, що для покриття вистачило б одного з цих трикутників.

23. Метод геометричних місць точок у задачах на побудову

Відомо, що при змішуванні синього і жовтого кольорів отримаємо зелений.

Нехай на площині треба знайти точки, які мають якісь дві властивості одночасно. Якщо точки, які мають першу властивість, будуть «синіми», а точки, які мають другу

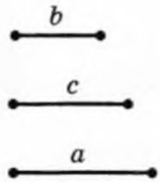


Рис. 327

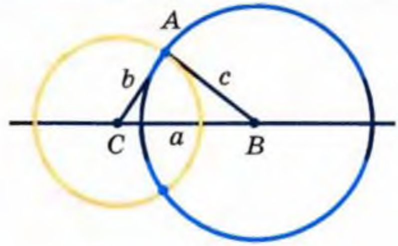


Рис. 328

властивість, — «жовтими», то зрозуміло, що «зелені точки» матимуть одразу дві властивості. У цьому й полягає ідея методу ГМТ, яку проілюструємо на таких задачах.

Задача. *Побудуйте трикутник за трьома даними його сторонами.*

Розв'язання. Нехай дано три відрізки, довжини яких дорівнюють a, b, c (рис. 327). Треба побудувати трикутник ABC, у якому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Проведемо довільну пряму. За допомогою циркуля відкладемо на ній відрізок, який дорівнює a (рис. 328). Зрозуміло, що задача звелася до побудови третьої вершини трикутника.

Скористаймося тим, що точка A має одразу дві властивості:

1) належить геометричному місцю точок, рівновіддалених від точки B на відстань c — «синє коло» (рис. 328);
2) належить геометричному місцю точок, рівновіддалених від точки C на відстань b — «жовте коло» (рис. 328).

За точку A можна обрати будь-яку з двох «зелених точок», що утворилися.

Отриманий трикутник ABC є шуканим, оскільки в ньому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

З описаної побудови випливає, що коли кожний з трьох даних відрізків менший від суми двох інших, то ці відрізки можуть слугувати сторонами трикутника.

Приклад 1. Побудуйте фігуру, усі точки якої належать даному куту, рівновіддалені від його сторін і знаходяться на заданій відстані a від його вершини.

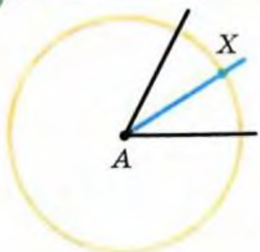


Рис. 329

Розв'язання. Шукані точки належать одразу двом геометричним місцям точок: бісектрисі даного кута і колу з центром у його вершині і радіусом, який дорівнює a.

Побудуємо бісектрису кута і вказане коло (рис. 329). Їх перетином є шукана точка X.

Приклад 2. Побудуйте центр кола радіуса R, яке проходить через дану точку M і дотикається до даної прямої a.

Розв'язання. Оскільки коло дотикається до прямої a, то його центр знаходиться на відстані R від прямої. Геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої на дану відстань, є дві паралельні прямі (див. вправу 500). Отже, центр кола треба шукати на «жовтих» прямих (рис. 330).

Геометричним місцем точок, які є центрами кіл радіуса R, що проходять через точку M, є коло даного радіуса з центром у точці M. Тому за центр шуканого кола можна обрати будь-яку з точок перетину «синього» кола з однією з «жовтих» прямих (рис. 331).

Побудову для випадку, коли дана точка належить даній прямій, розгляньте самостійно.

Приклад 3. Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола.

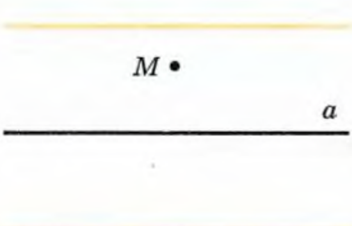


Рис. 330

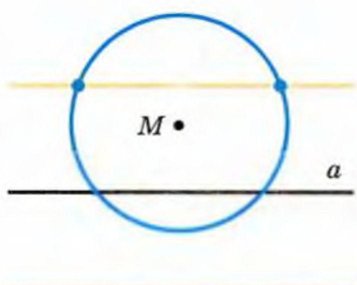


Рис. 331

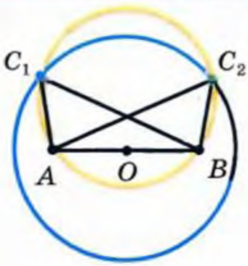


Рис. 332

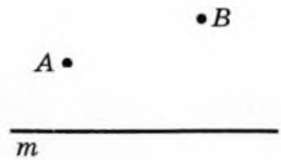


Рис. 333

Розв'язання. Побудуємо коло даного радіуса і проведемо хорду AB, яка дорівнює стороні шуканого трикутника. Тоді кінці хорди є двома вершинами шуканого трикутника. Зрозуміло, що третя вершина належить одночасно побудованому колу («жовте» коло) та колу з центром у точці O, яка є серединою хорди AB, і радіусом, який дорівнює даній медіані («синє» коло). Кожний з трикутників ABC_1 і ABC_2 (рис. 332) є шуканим.

ВПРАВИ

624.° Дано пряму m і точки A та B поза нею (рис. 333). Побудуйте на прямій m точку, рівновіддалену від точок A і B. (сер. ⊥)

625.° Точки A і B належать прямій m. Побудуйте точку, віддалену від прямої m на відстань a і рівновіддалену від точок A і B. Скільки розв'язків має задача?

626.° Точки B і C належать різним сторонам кута A. Побудуйте точку M, яка належить куту, рівновіддалена від його сторін і таку, що $MB = MC$. Скільки розв'язків може мати задача? бісек і сер.⊥

627.° Точки B і C належать різним сторонам кута A. Побудуйте точку D, яка належить куту, рівновіддалена від його сторін і таку, що $DC = BC$. Скільки розв'язків може мати задача?

628.° Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і бічною стороною.

629.• Для даного кола побудуйте точку, яка є його центром.

630.• Побудуйте коло даного радіуса, яке проходить через дану точку і центр якого належить даній прямій.

631.• Побудуйте коло даного радіуса, яке проходить через дві дані точки.

632.• Знайдіть усі точки, які належать даному колу і рівновіддалені від кінців даного відрізка. Скільки розв'язків може мати задача?

633.• Дано дві прямі m і n, які перетинаються, і відрізок AB. Побудуйте на прямій m точку, яка віддалена від прямої n на відстань AB. Скільки розв'язків має задача?

634.• У трикутнику ABC $\angle C = 90°$. На катеті AC побудуйте точку D, яка віддалена від прямої AB на відстань CD.

635.• Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?

636.• Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з даних сторін.

637.• Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і медіаною, проведеною до бічної сторони.

638.•• На даному колі побудуйте точку, яка знаходиться на даній відстані від даної прямої. Скільки розв'язків може мати задача?

639.•• На даному колі побудуйте точку, яка рівновіддалена від двох даних прямих, що перетинаються. Скільки розв'язків може мати задача?

640.•• Між двома паралельними прямими дано точку. Побудуйте коло, яке проходить через цю точку і дотикається до даних прямих. Скільки розв'язків має задача?

641.•• Побудуйте коло, яке проходить через дану точку A і дотикається до даної прямої m у даній точці B.

642.•• Дано дві паралельні прямі і січну. Побудуйте коло, яке дотикається до цих трьох прямих.

643.•• Побудуйте трикутник за двома сторонами і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків має задача?

644.•• Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?

645.•• Побудуйте рівносторонній трикутник за радіусом описаного кола.

646.• Три прямі попарно перетинаються і не проходять через одну точку. Побудуйте точку, рівновіддалену від усіх трьох прямих. Скільки розв'язків має задача?

647.• Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою гіпотенузи та другого катета.

648.• Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і сумою катетів.

649.• Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і різницею катетів.

650.• Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і різницею гіпотенузи та другого катета.

651.• Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і різницею бічної сторони та висоти, опущеної на основу.

652.• Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін.

653.• Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і різницею двох інших сторін.

654.• Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і різницею двох інших сторін.

655.• Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і сумою двох інших сторін.

656.• Побудуйте трикутник за стороною, різницею кутів, прилеглих до цієї сторони, і сумою двох інших сторін.

657.• Побудуйте трикутник за периметром і двома кутами.

658.• Побудуйте гострокутний трикутник за периметром, одним з кутів і висотою, проведеною з вершини іншого кута.

659.• Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола та висотою і медіаною, проведеними з однієї вершини.

660.• Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

661.• Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін.

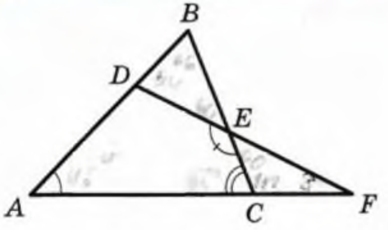


Рис. 334

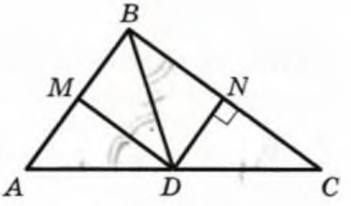


Рис. 335

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

662. На рисунку 334 $\angle A = 46^\circ$, $\angle ACB = 68^\circ$, $\angle DEC = 120^\circ$. Знайдіть кути трикутників EFC і DBE.

663. Через середину O сторони MK трикутника MKN проведено пряму, яка перпендикулярна до сторони MK і перетинає сторону MN у точці C. Відомо, що $MC = KN$, $\angle N = 50^\circ$. Знайдіть кут MCO.

664. У трикутнику ABC з вершини прямого кута C проведено висоту CH і бісектрису CM. Довжина відрізка HM удвічі менша від довжини відрізка CM. Знайдіть гострі кути трикутника ABC.

665. На рисунку 335 $BD = DC$, $DN \perp BC$, $\angle BDM = \angle MDA$. Знайдіть суму кутів MBN та BMD.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

666. Розріжте фігуру, зображену на рисунку 336, на три частини, які не є квадратами, так, щоб з цих частин можна було скласти квадрат.

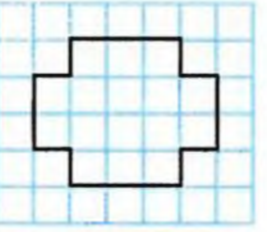


Рис. 336

ПІДСУМКИ

У цьому параграфі:

- **було введено такі поняття:**
  - ➢ **геометричне місце точок;**
  - ➢ **коло, круг;**
  - ➢ **радіус, хорда, діаметр кола і круга;**
  - ➢ **дотична до кола;**
  - ➢ **описане і вписане кола трикутника;**

- **ви вивчили:**
  - ➢ **основні ГМТ;**
  - ➢ **властивості і ознаку дотичної;**
  - ➢ **теореми про існування описаного і вписаного кіл трикутника;**
  - ➢ **властивості кола і його елементів;**

- **ви ознайомилися:**
  - ➢ **з ключовими задачами на побудову;**
  - ➢ **з методом ГМТ.**

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

1. Дано 3 точки, які не лежать на одній прямій. Скільки точок містить геометричне місце точок, рівновіддалених від даних?

А) Безліч; Б) 2; В) 1; Г) жодної.

2. Дано 3 точки, що лежать на одній прямій. Скільки точок містить геометричне місце точок, рівновіддалених від даних точок?

А) 1; Б) 2; В) безліч; Г) жодної.

3. Скільки точок містить геометричне місце точок, які належать куту і рівновіддалені від його сторін і вершини?

А) 1; Б) 2; В) безліч; Г) жодної.

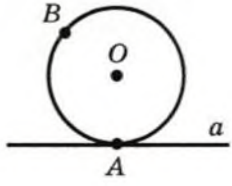
4. Точка X належить колу з центром O радіуса R. Яке з наступних тверджень є неправильним?

А) $OX \leqslant R$; Б) $OX \geqslant R$; В) $OX < R$; Г) $OX = R$.

5. Пряма має дві спільні точки з колом з центром O радіуса R. Яку фігуру утворюють усі точки X даної прямої такі, що $OX \geqslant R$?

А) Відрізок; В) промінь;

Б) два промені; Г) пряму.



6. На рисунку зображено пряму a, яка дотикається до кола з центром O в точці A. На колі позначено точку B, X — довільна точка прямої a. Яке з наступних тверджень є неправильним?

А) $OX > OB$; В) $OX \geqslant OB$;

Б) $OX \geqslant OA$; Г) $OA = OB$.

7. Яке твердження є правильним?

А) Якщо дві хорди перпендикулярні, то одна з них є діаметром.

Б) Якщо дві хорди точкою перетину діляться навпіл, то вони перпендикулярні.

В) Якщо дотична, проведена через кінець хорди, перпендикулярна до неї, то ця хорда — діаметр.

Г) Якщо одна з хорд ділить другу навпіл, то ця хорда — діаметр.

8. Центр описаного кола трикутника — це точка перетину:

А) висот;

Б) медіан;

В) серединних перпендикулярів його сторін;

Г) бісектрис.

9. Центр вписаного кола трикутника — це точка перетину:

А) висот;

Б) медіан;

В) серединних перпендикулярів його сторін;

Г) бісектрис.

10. Центри вписаного і описаного кіл трикутника збігаються в:

А) рівнобедреному трикутнику;

Б) рівносторонньому трикутнику;

В) прямокутному трикутнику;

Г) різносторонньому трикутнику.

11. При розв'язуванні задач на побудову використовують такі інструменти:

А) циркуль, транспортир, лінійку;

Б) лінійку, косинець;

В) лінійку, косинець, циркуль, транспортир;

Г) циркуль, лінійку.

1. Найпростіші геометричні фігури та їх властивості

667. Відрізок, довжина якого дорівнює a, поділили на п'ять рівних відрізків. Знайдіть відстань між серединами крайніх відрізків.

668. Точка C — середина відрізка AB, $AB = 10$ см. На прямій AB знайдіть усі точки X такі, що $AX + BX + CX = 12$ см.

669. Точка D — середина відрізка MK, $MK = 16$ см. На прямій MK знайдіть усі точки Y такі, що $MY + KY + DY = 30$ см.

670. На прямій позначили 10 точок: A, B, C, D, E, F, M, N, K, P. Скільки при цьому утворилося відрізків, одним з кінців яких є точка A? Скільки всього утворилося відрізків з кінцями в позначених точках? Чи залежить загальна кількість відрізків від того, чи лежать позначені точки на одній прямій?

671. На рисунку 337 $AN = 24$ см, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FK$, $KM = MN$, $DF = 6$ см. Знайдіть довжину відрізка BM.

672. Накресліть кут MKE, який дорівнює $120°$. Проведіть промінь KC так, щоб $\angle MKC = 60°$. Знайдіть кут CKE та вкажіть його вид. Скільки розв'язків має задача?

673. Градусні міри суміжних кутів ABC і CBD відносяться як $5:4$. Знайдіть кут між бісектрисами кутів ABC і ABD. Скільки розв'язків має задача?

674. Два кути мають спільну сторону і не мають інших спільних точок. Чи є ці кути суміжними, якщо: 1) їх ве-

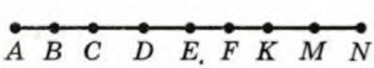


Рис. 337

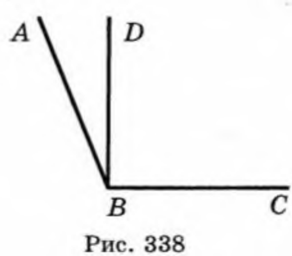


Рис. 338

личини відносяться як $11:19$ і один з кутів на 32° більший за другий; 2) їх величини відносяться як $7:3$ і один з кутів на 72° менший від другого?

675. На рисунку 338 $BD \perp BC$. Кут між бісектрисами кутів ABD і DBC дорівнює 55°. Знайдіть кут ABD.

2. Трикутники

676. Периметр трикутника дорівнює 87 см, одна із сторін — a см, друга — b см. Складіть вираз для знаходження третьої сторони. Обчисліть довжину третьої сторони, якщо $a = 27$, $b = 21$.

677. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AB + BC = 27$ см, $AB + AC = 28$ см, $BC + AC = 29$ см.

678. На рисунку 339 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AD = CF$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta DEF$.

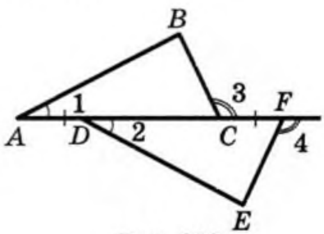


Рис. 339

679. У трикутниках ABC і DEF проведено медіани BM і EK відповідно. Відомо, що $BC = EF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle C = \angle F$. Доведіть, що:

1) $\Delta BMC = \Delta EFK$;

2) $\Delta ABM = \Delta DEK$.

680. У гострокутних трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ проведено висоти BD і B_1D_1 відповідно. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, якщо $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$, $CD = C_1D_1$.

681. У трикутниках ABC і MKE $AB = MK$, $BC = KE$, $\angle B = \angle K$. На відрізку AB позначено точку F, а на відрізку MK — точку P так, що $\angle ACF = \angle MEP$. Яка довжина відрізка CF, якщо $PE = 15$ см?

682. У трикутниках ABC і DEF $AC = DF$, $BC = EF$, $\angle C = \angle F$. Бісектриси кутів BAC і ABC перетинаються в точці O, а бісектриси кутів DEF і EDF — у точці M. Доведіть, що $\Delta AOB = \Delta DME$.

683. На продовженні основи BC рівнобедреного трикутника ABC за точку B позначено точку M таку, що $\angle MBA = 128^\circ$. Знайдіть кут між бічною стороною AC та бісектрисою кута ACB.

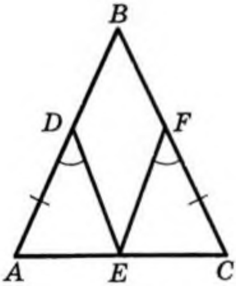


Рис. 340

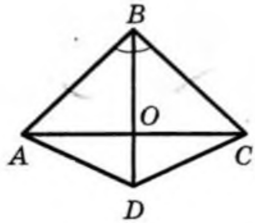


Рис. 341

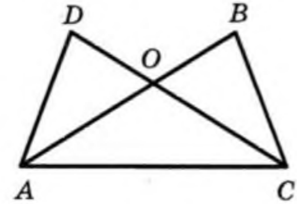


Рис. 342

684. З точок A і B, які лежать в одній півплощині відносно прямої m, опущено на цю пряму перпендикуляри AC і BD відповідно. Точки A і B рівновіддалені від прямої m, точка O — середина відрізка CD. Доведіть, що ΔAOB — рівнобедрений.

685. На рисунку 340 $AB = BC$, $AD = FC$, $\angle ADE = \angle CFE$. Доведіть, що точка E — середина відрізка AC.

686. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC. Доведіть, що пряма BD — серединний перпендикуляр відрізка AC.

687. На рисунку 341 $AB = BC$, $\angle ABO = \angle CBO$. Доведіть, що $\angle DAO = \angle DCO$.

688. На рисунку 342 $OA = OC$, $OD = OB$. Доведіть, що $\angle DAC = \angle BCA$.

689. Точка O перетину серединних перпендикулярів сторін AC і BC трикутника ABC належить його стороні AB. Доведіть, що: 1) точка O — середина відрізка AB; 2) $\angle ACB = \angle A + \angle B$.

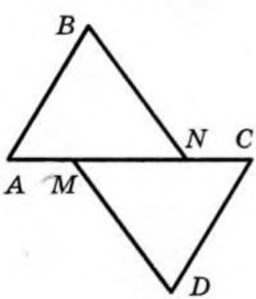


Рис. 343

690. Медіана трикутника ABC розбиває його на два трикутники, периметри яких рівні. Доведіть, що Δ ABC — рівнобедрений.

691. У трикутнику ABC $AB = BC$, BD — медіана. Периметр трикутника ABC дорівнює 50 см, а трикутника ABD — 40 см. Знайдіть довжину медіани BD.

692. На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено точки F і K відповідно.

Доведіть, що коли трикутники AFB і AKB рівні з відповідними сторонами AK і BF, то трикутник ABC — рівнобедрений.

693. На рисунку 343 $AM = CN$, $AB = CD$, $BN = DM$. Доведіть, що $\angle ABN = \angle CDM$.

694. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ медіани AM і A_1M_1 рівні, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

3. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

695. Через точку, яка не належить прямій a, проведено три прямі. Доведіть, що принаймні дві з цих прямих перетинають пряму a.

696. На сторонах AB і AC трикутника ABC позначили відповідно точки M і K так, що $\angle AMK = \angle ABC$. Доведіть, що $\angle AKM = \angle ACB$.

697. Доведіть, що:

1) бісектриси різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні;
2) бісектриси односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, перпендикулярні.

698. Як взаємно розміщені бісектриси відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною?

699. Пряма, проведена через вершину трикутника паралельно його протилежній стороні, утворює з двома іншими сторонами рівні кути. Доведіть, що даний трикутник — рівнобедрений.

700. На продовженні сторін AC і BC трикутника ABC ($AB = BC$) за вершину C позначено точки E і D відповідно так, що $DE \parallel AB$. Доведіть, що ΔCDE — рівнобедрений.

701. На стороні BC трикутника ABC позначили точки M і K (точка M лежить між точками B і K) так, що $\angle KAC = \angle B$, $\angle BAM = \angle C$. Доведіть, що ΔMAK — рівнобедрений.

• **702.** Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, у 2 рази менша від цієї основи. Знайдіть кути даного трикутника.

703. На стороні AC трикутника ABC позначили точку O так, що $AB = AO$. Відомо, що зовнішній кут при вершині A дорівнює 160° і $\angle C = 40^\circ$. Доведіть, що $BO = CO$.

704. На продовженнях сторони AC трикутника ABC за точки A і C позначено відповідно точки M і K так, що $AM = AB$, $CK = BC$. Знайдіть кути трикутника MBK, якщо $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$.

705. Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає його сторони AB і BC у точках M і K відповідно так, що $AM = MK$. Відомо, що $\angle B = 65^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Знайдіть кут KAC.

706. У трикутнику ABC $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. Знайдіть кут між висотою і бісектрисою трикутника, проведеними з вершини C.

707. Висоти AD і BK рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) перетинаються в точці H, $\angle AHB = 128^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC.

708. Висоти AD і CM рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) перетинаються в точці H, $\angle AHC = 140^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC.

709. Один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 42°. Знайдіть менший з кутів, утворених бісектрисою прямого кута з гіпотенузою.

710. З точок C і D, які лежать в одній півплощині відносно прямої m, опущено перпендикуляри CE і DF на цю пряму, $CF = DE$. Доведіть, що $CE = DF$.

• **711.** На рисунку 344 $AB = BC = CD = DE$, $BF \perp AC$, $DK \perp CE$. Доведіть, що $AF = EK$.

712. Висоти BM і CK трикутника ABC перетинаються в точці H, $\angle ABC = 35^\circ$, $\angle ACB = 83^\circ$. Знайдіть $\angle BHC$.

713. Кут між висотою і бісектрисою трикутника, проведеними з вершини його прямого кута, дорівнює 12°. Знайдіть гострі кути даного трикутника.

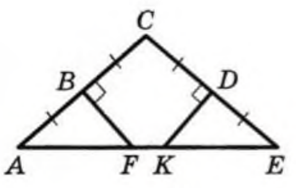


Рис. 344

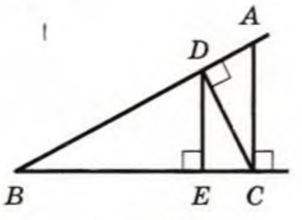


Рис. 345

714. На гіпотенузі AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC позначили точки M і K (точка M лежить між точками B і K) так, що $AC = AM$ і $BC = BK$. Знайдіть $\angle MCK$.

715. З вершини прямого кута трикутника опустили висоту на гіпотенузу. Доведіть, що два трикутники, які при цьому утворилися, і даний трикутник мають відповідно рівні гострі кути.

716. У трикутниках ABC і DEF $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, висоти BM і EK рівні. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta DEF$.

717. Висоти AM і CK трикутника ABC перетинаються в точці O, $OK = OM$, $\angle BAM = \angle ACK$. Доведіть, що ΔABC — рівносторонній.

718. Дві висоти рівнобедреного трикутника при перетині утворюють кут 100°. Знайдіть кути даного трикутника.

719. У трикутнику ABC кут ACB — прямий, CH — висота даного трикутника, CD — бісектриса трикутника BCH. Доведіть, що $AC = AD$.

720. Кут між висотою і бісектрисою рівнобедреного трикутника, проведеними з однієї вершини, дорівнює 15°. Знайдіть кути даного трикутника. Скільки розв'язків має задача?

721. На продовженнях гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC за точки A і B позначили відповідно точки D і E так, що $AC = AD$, $BC = BE$. Знайдіть кут DCE.

722. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначили точки D і E так, що $AC = AE$ і $BC = BD$. Знайдіть кут DCE.

723. У рівносторонньому трикутнику ABC із середини M сторони AC опущено перпендикуляр MK на сторону BC. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $KC = 3$ см.

• **724.** Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 60°, а сума гіпотенузи і меншого катета — 27 см. Знайдіть ці сторони трикутника.

725. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 15^\circ$, $BC = 11$ см. На катеті AC позначили точку M так, що $\angle BMC = 30^\circ$. Знайдіть відрізок AM.

726. На одній стороні кута B позначили точки D і A, а на другій — точки E і C (рис. 345) так, що $AC \perp BC$, $DE \perp BC$, $CD \perp AB$. Знайдіть відрізок DE, якщо $\angle B = 30^\circ$, $AC = 12$ см.

727. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать дві медіани рівностороннього трикутника.

4. Коло і круг. Геометричні побудови

728. У колі з центром O проведено діаметр AC та хорди AB і BC такі, що $AB = BC$. Знайдіть $\angle AOB$.

729. Діаметри AB і CD кола з центром O перпендикулярні. На діаметрі AB по різні боки від центра O позначено точки E і F так, що $CE = DF$. Доведіть, що $OE = OF$.

730. У колі з центром O проведено непаралельні хорди MK і NP, $MK = NP$, точки A і B — середини хорд MK і NP відповідно. Доведіть, що $\angle OAB = \angle OBA$.

• **731.** У колі проведено хорди AB і BC, кожна з яких дорівнює радіусу кола. Знайдіть $\angle ABC$.

732. Доведіть, що дотичні до кола, проведені через кінці діаметра, паралельні.

733. Діаметр AB ділить кожну з хорд MN і PK, відмінних від діаметра, навпіл. Доведіть, що $MN \parallel PK$.

734. Доведіть, що центр кола рівновіддалений від будь-якої дотичної до кола.

• **735.** З точки A до кола з центром O проведено дотичні AM і AK, M і K — точки дотику. Точка перетину відрізка OA з колом є серединою цього відрізка. Знайдіть $\angle MAK$.

736. Пряма, яка паралельна хорді AC кола, дотикається до цього кола в точці B. Доведіть, що ΔABC — рівнобедрений.

737. Радіус OC кола з центром O ділить навпіл хорду AB, яка не є діаметром. Через точку C проведено дотичну до кола. Доведіть, що ця дотична паралельна хорді AB.

738. Коло, центр якого належить бісектрисі кута, перетинає його сторони. Доведіть, що відрізки, які відтинає коло на сторонах кута, рівні.

739. Через точку M проведено дотичні MK і ME до кола з центром у точці O, де K і E — точки дотику, $\angle OMK = 30^\circ$, $MK = 6$ см. Знайдіть довжину хорди KE.

740. Доведіть, що хорда кола, яка перпендикулярна до іншої хорди цього кола і проходить через її середину, є діаметром даного кола.

741. У колі проведено діаметр AB і хорди AC та BD такі, що $AC \parallel BD$. Доведіть, що відрізок CD — діаметр кола.

742. У трикутнику ABC $AB = BC$, точка O — центр вписаного кола, точки D і E — точки дотику вписаного кола зі сторонами AC і AB відповідно, $\angle ABC = 48^\circ$. Знайдіть $\angle DOE$.

743. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до його сторін AB, BC і AC у точках K, M і E відповідно, $AK = BM = CE$. Доведіть, що трикутник ABC — рівносторонній.

744. Бісектриси AD і CE трикутника ABC перетинаються в точці O_1, бісектриси EF і DK трикутника DEB перетинаються в точці O_2. Доведіть, що точки B, O_1 і O_2 лежать на одній прямій.

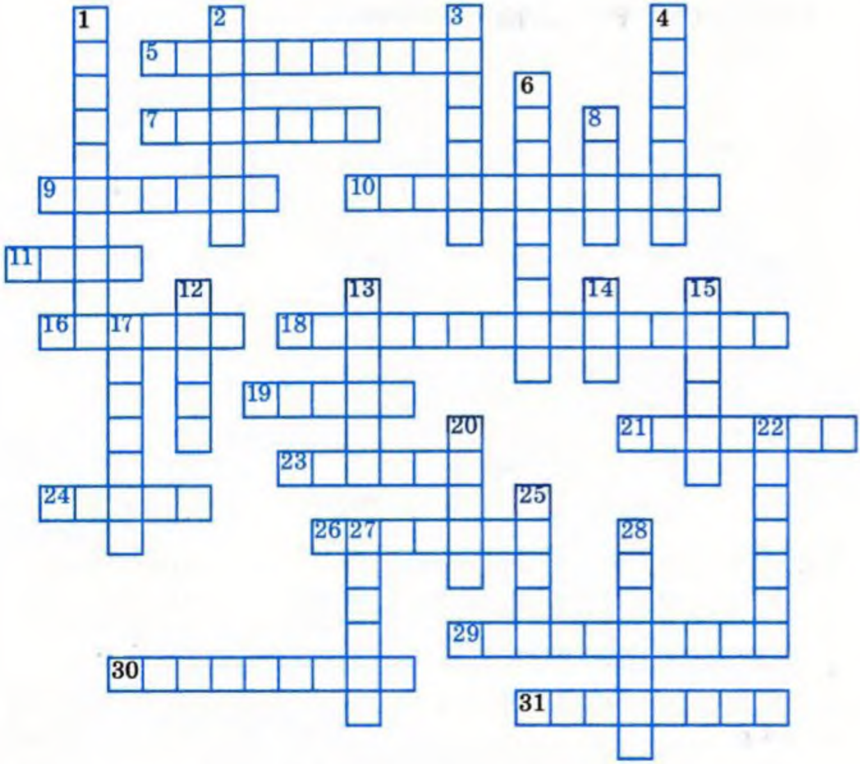
745. Через вершину даного кута проведіть поза ним пряму так, щоб вона утворювала зі сторонами цього кута рівні кути.

746. Через дану точку A, яка не належить даній прямій, проведіть пряму, яка утворює з даною прямою даний кут.

747. Розгадайте кросворд.

По горизонталі: 5. Прямі, які не перетинаються. **7.** Два кути, одна сторона яких спільна, а дві інші — доповняльні промені. **9.** Відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. **10.** Два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями сторін другого. **11.** Геометричне місце точок, відстань від яких до даної точки не більша за дане число. **16.** Відрізок, який сполучає точку кола з його центром. **18.** Прямі, при перетині яких утворюються прямі кути. **19.** Відрізок, що сполучає дві точки кола. **21.** Коло, яке проходить через усі вершини трикутника. **23.** Перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону. **24.** Точка, рівновіддалена від усіх точок кола. **26.** Твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення. **29.** Промінь з початком у вершині кута, який ділить кут на два рівних кути. **30.** Кут, суміжний з кутом трикутника. **31.** Сума довжин усіх сторін трикутника.

По вертикалі: 1. Сторона прямокутного трикутника, протилежна прямому куту. **2.** Одна з частин, на які довіль-



на точка розбиває пряму. **3.** Хорда, яка проходить через центр кола. **4.** Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника. **6.** Геометрична фігура. **8.** Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки. **12.** Кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°. **13.** Одиниця виміру кутів. **14.** Геометрична фігура. **15.** Кут, градусна міра якого дорівнює 90°. **17.** Пряма, яка має з колом одну спільну точку. **20.** Сторона прямокутного трикутника, прилегла до прямого кута. **22.** Твердження, правильність якого приймають без доведення. **25.** Давньогрецький математик. **27.** Автор книги «Начала». **28.** Кут, градусна міра якого менша від 90°.

14. 1 точка, або 4 точки, або 6 точок. **15.** Найменша можлива кількість точок перетину — 1, найбільша — 10. **16.** Рис. 346. **17.** 12 точок. **18.** Рис. 347. **42.** 8 см або 56 см. **43.** *Вказівка.* Візьміть на прямій m довільну точку X і порівняйте суму $AX + BX$ з довжиною відрізка AB. **45.** 1) Усі точки відрізка EF; 2) точки A і B (рис. 348); 3) таких точок не існує. **46.** Таких точок дві. Одна з них є такою внутрішньою точкою відрізка AB, що $AC : BC = 1 : 2$, а друга така, що точка A — середина відрізка BC. **47.** 4 см. **48.** *а*) 4 точки; *б*) 3 точки; *в*) 4 точки; *г*) 3 точки. **50.** *Вказівка.* Скористайтеся рівністю: 1) $13 - 2 \cdot 5 = 3$; 2) $3 \cdot 5 - 13 = 2$; 3) $2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 1$. **51.** *Вказівка.* Скористайтеся рівністю: 1) $2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 = 8$; 2) $3 \cdot 11 - 4 \cdot 7 = 5$. **73.** 60°. **74.** 108°. **77.** 68°. **78.** 153°. **79.** 1) 6°; 2) 0,5°. **81.** 50° або 110°. **82.** 77° або 163°. **86.** *Вказівка.* Відкладіть від довільного променя даний кут послідовно 14 разів. Скористайтеся тим, що утворений таким чином кут на 2° більший за розгорнутий кут. **87.** 1) *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $19° \cdot 19 = 361°$. **88.** Так. *Вказівка.* Припустіть, що такого кута немає, і отримайте суперечність. **109.** 90°. **110.** 180°. **111.** 75°. **112.** 72°, 108°. **113.** 44°, 136°. **127.** 1) 124°; 2) 98°. **128.** 126°. **132.** 70°, 160°. **133.** 1) *Вказівка.* $90° = 17° \cdot 5 + 5°$. **157.** 48 см. **158.** 13 см. **159.** 3 см. **161.** 120°. **197.** 3 см. **198.** 10 см. **200.** 2) *Вказівка.* Доведіть, що $\angle AOM = \angle BOK$. Кут AOB — розгорнутий. Тоді $\angle AOM + \angle MOB = 180°$. Звідси $\angle MOB + \angle BOK = 180°$. **203.** 20°; 70°. **232.** 1) 4 см або 7 см; 2) 7 см. **233.** 1) 8 см і 8 см; 2) 4 см і 6 см або 5 см і 5 см. **237.** 26 см або 14 см. **239.** 1) $\frac{5a}{7}$; 2) $\frac{9a}{14}$. **252.** *Вказів-*

Рис. 346

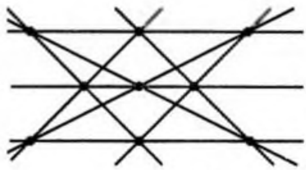


Рис. 347

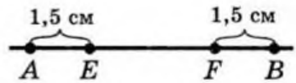


Рис. 348

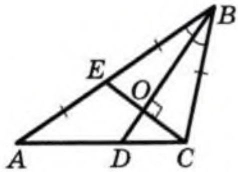


Рис. 349

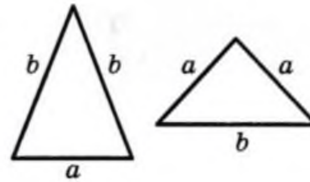


Рис. 350

ка. Скориставшись тим, що коли бісектриса трикутника є його висотою, то трикутник — рівнобедрений, доведіть, що ΔMAD і ΔKBD — рівнобедрені. **253.** 8 см. **254.** $AB:AC = 1:2$. **256.** 2 см, 3 см, 4 см. *Вказівка*. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC (рис. 349), відрізок CE — його медіана, $BD \perp CE$. Доведіть, що ΔCBE — рівнобедрений ($BC = BE$). Тоді $AB = 2BC$ і можуть мати місце такі випадки: $AB - BC = 1$ см або $AB - BC = 2$ см, тобто $BC = 1$ см або $BC = 2$ см. **257.** 2 см. *Вказівка*. Доведіть, що трикутники KMC і KDA — рівнобедрені. **273.** Необов'язково. *Вказівка*. Розгляньте трикутники, що зображено на рисунку 350. **274.** *Вказівка*. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — дані трикутники, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, відрізки AM і A_1M_1 — медіани трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно. На продовженнях відрізків AM і A_1M_1 за точки M і M_1 відкладіть відповідно відрізки MD і M_1D_1 такі, що $MD = AM$ і $M_1D_1 = A_1M_1$. Доведіть, що $AC = BD$ і $A_1C_1 = B_1D_1$. Далі доведіть рівність трикутників ABD і $A_1B_1D_1$, MBD і $M_1B_1D_1$ і, нарешті, ABC і $A_1B_1C_1$. **290.** *Вказівка*. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — дані трикутники, відрізки AM і A_1M_1 — відповідно їх медіани, $AM = A_1M_1$, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$, $\angle CAM = \angle C_1A_1M_1$. На продовженнях відрізків AM і A_1M_1 за точки M і M_1 відкладіть відповідно відрізки MD і M_1D_1 такі, що $MD = AM$ і $M_1D_1 = A_1M_1$. Доведіть, що $AC = BD$ і $A_1C_1 = B_1D_1$. Далі доведіть рівність трикутників ABD і $A_1B_1D_1$, звідки легко отримати рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. **302.** Безліч. **304.** *Вказівка*. Припустимо, що прямі a і b перетинаються. Виберемо довільну точку, яка належить прямій a, відмінну від точки перетину a і b. Через вибрану точку можна провести пряму, яка перетинає пряму a і паралельна прямій b, що суперечить умові. **305.** 6 см.

306. 35°. **307.** 90°. **326.** Ні. **329.** *Вказівка.* Нехай пряма OK перетинає пряму AB у точці N. Доведіть, що ΔNBK — рівнобедрений. Далі покажіть, що $\angle BKO = \angle OKM$. **330.** *Вказівка.* Доведіть, що $BF \parallel AC$ і $BD \parallel AC$, та скористайтесь аксіомою паралельних прямих. **331.** 111° або 69°. **349.** 40°. **352.** 40°, 70°, 70°. **353.** 106°. **357.** *Вказівка.* Проведіть через точку C пряму, яка паралельна AB. **360.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники AMO і CKO — рівнобедрені. **362.** $AD:DB = 2:3$. **401.** 25°, 55°, 100°. **404.** 35°, 35°, 110°. **405.** 140°. **408.** *Вказівка.* Знайдіть кути трикутника ABC і доведіть, що трикутники AMB і MAC — рівнобедрені. **409.** 36°, 72°, 72°. **410.** *Вказівка.* Застосуйте метод доведення від супротивного. **412.** Гострокутний. *Вказівка.* Розгляньте по черзі кожний кут трикутника. Оскільки сума двох інших кутів більша за 90°, то розглядуваний кут менший від 90°. Оскільки всі кути виявляться меншими від 90°, то трикутник — гострокутний. **413.** *Вказівка.* У трикутнику DAC кут DAC — тупий. Отже, $DC > AC$. **415.** Ні. **417.** 36°, 72°, 72° або 90°, 45°, 45°. **418.** $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. **419.** *Вказівка.* На продовженні медіани AM за точку M відкладіть відрізок MD, який дорівнює цій медіані, і розгляньте ΔABD. **420.** $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$, $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$, $\left(\frac{180}{7}\right)^\circ$. **421.** 90°, 40°, 50°. *Вказівка.* Розгляньте трикутник DAK, де точка K — середина AB. **422.** 36 см. **451.** *Вказівка.* Доведіть рівність трикутників AKH і CMH. **452.** *Вказівка.* Доведіть, що $\Delta MEN = \Delta NFM$. Звідси випливає, що $MK = NK$. Крім того, $KE = FM = NE$. Отже, $MK = MN$. **453.** Ні. **455.** 50°, 130°. **467.** 1 см, 30°. **468.** 9 см. **469.** 15 см. **472.** 8 см. **473.** 6 см. *Вказівка.* Доведіть, що трикутник ADB — рівнобедрений. **475.** 21 см. **493.** 1,5 см. **494.** 60 см. **495.** Коло даного радіуса з центром у даній точці. **496.** Серединний перпендикуляр відрізка, який сполучає дані точки. **497.** Дві прямі, що складаються з бісектрис чотирьох кутів, утворених при перетині даних прямих. **498.** Усі точки серединного перпендикуляра даної основи, крім точки перетину цього перпендикуляра з основою. **499.** Пряма, що є серединним перпендикуляром відрізка, який є перпендикулярним до даних прямих і кінці якого належать даним прямим. **500.** Пара паралельних прямих, кожна з яких віддалена від даної прямої на дану відстань. **501.** *Вказівка.* Сполучіть точку M і центр O кола, розгляньте трикутники AOM і BOM. **502.** Усі точки півплощини, якій належить точка B і межею якої є серединний перпендикуляр відрізка AB, за винятком межі цієї півплощини. **503.** Усі точки площини, що не належать кругу з центром A і радіусом AB. **505.** 55°, 85°, 40°. **507.** 20°. **523.** 1) 90°; 2) 120°. **524.** 12 см. **525.** 40°. **526.** 120°. **531.** Усі точки прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даної прямої, крім даної точки. **532.** Усі точки бісектриси кута, за винятком вершини кута. **533.** Усі точки площини, за винятком даної прямої. **534.** *Вказівка.* Розглянувши трикутник OAK, доведіть, що $OK = 2AK$. **535.** *Вказівка.* Скористайтеся властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки. **539.** 18°. **559.** 24 см, 24 см, 20 см. **560.** 20 см, 14 см, 18 см. **561.** 50°, 55°, 75°. **564.** *Вказівка.* Скористайтеся властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки. **565.** a. **566.** 16 см. *Вказівка.* Доведіть, що сума периметрів утворених трикутників дорівнює периметру даного трикутника. **567.** 0,5 см. *Вказівка.* Нехай M_1 і M_2 — точки дотику кіл, вписаних відповідно в трикутники ABD і DBC. Для відрізків DM_1 і DM_2 скористайтеся результатом задачі 564. **568.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що бісектриси трикутника, зокрема трикутника AMC, перетинаються в одній точці. **569.** *Вказівка.* Позначте на різних сторонах кута точки M і N. Проведіть бісектриси кутів BMN і BNM. Далі позначте на різних сторонах кута точки E і F. Проведіть бісектриси кутів BEF і BFE. **570.** 36°, 36°, 108°. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що трикутники FAO і BOA — рівнобедрені. **572.** 52°, 52°, 76°. **573.** 3 см, 7 см. **597.** *Вказівка.* Проведіть через дану точку, що лежить на стороні кута, перпендикуляр до іншої сторони кута. **599.** 1) *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, у якому гіпотенуза дорівнює даній бісектрисі, а гострий кут дорівнює половині даного кута. **601.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, у якому один з катетів дорівнює половині даної основи, а інший — радіусу кола. **604.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом, що дорівнює даній висоті, і протилежним гострим кутом, що дорівнює даному. **606.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, у якому гіпотенуза дорівнює даній стороні, а катет — даній висоті. **613.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, один з катетів якого дорівнює різниці довжини катета і радіуса, а другий — радіусу. Тоді другому катету протилежить кут, що дорівнює половині гострого кута шуканого трикутника. **617.** *Вказівка.* Побудуйте коло, що проходить через три задані точки. **618.** Нескладно побудувати кут, що дорівнює 60°. Далі скористайтеся рівністю $6^\circ = 60^\circ - 54^\circ$. **620.** 15°, 95°, 70°. **621.** 25°, 65°. **622.** Гострокутний. **633.** *Вказівка.* Шукана точка належить ГМТ, віддалених на відстань AB від прямої n. Указане ГМТ — пара прямих, паралельних прямій n. Кожна з точок перетину цих прямих з прямою m задовольняє умову. Зауважимо, що задача завжди має два розв'язки. **640.** *Вказівка.* Проведіть відрізок, перпендикулярний до двох даних паралельних прямих, кінці A і B якого належать цим прямим. Тоді центр шуканого кола належить двом ГМТ: першому — рівновіддалених від точок A і B і другому — віддалених від даної в умові точки на відстань $\frac{1}{2}AB$. **641.** *Вказівка.* Геометричним місцем центрів кіл, що дотикаються до даної прямої в даній точці B, є пряма, перпендикулярна до даної і така, що проходить через цю точку (дана точка B не належить ГМТ). Геометричним місцем центрів кіл, що проходять через точки A і B, є серединний перпендикуляр відрізка AB. **647.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник BCD, у якому катет BC дорівнює даному катету, а катет DC — сумі гіпотенузи і другого катета. Тоді вершина A шуканого трикутника ABC належить серединному перпендикуляру відрізка BD. **648.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADB, у якому $\angle D = 45^\circ$, сторона DB дорівнює сумі даних катетів, сторона AB — даній гіпотенузі. **649.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADB, у якому $\angle D = 135^\circ$, сторона DB дорівнює різниці даних катетів, сторона AB — даній гіпотенузі. **650.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник DBC, у якому $\angle C = 90°$, катет CB дорівнює даному катету, катет CD — різниці гіпотенузи і другого катета. Тоді шукана вершина A лежить на серединному перпендикулярі відрізка DB. **652.** *Вказівка.* Побудуйте $\triangle ADC$, у якому сторона AC дорівнює даній, сторона DC — сумі двох інших сторін, кут DCA — даному куту. **653.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC за даною стороною AC, даним кутом C і стороною DC, що дорівнює даній різниці сторін. Вершина B шуканого трикутника ABC лежить на серединному перпендикулярі відрізка AD. Описана побудова застосовна до випадку, коли заданий кут C прилягає до більшої з двох невідомих сторін. **654.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC, у якому $\angle D = 90° + \frac{\beta}{2}$, де β — даний кут, сторона AC дорівнює даній стороні, сторона AD — даній різниці сторін. Тоді шукана вершина D лежить на серединному перпендикулярі відрізка DC. **655.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC, у якому $\angle D = \frac{\beta}{2}$, де β — даний кут, сторона AC дорівнює даній стороні, сторона AD — даній сумі сторін. Тоді шукана вершина D лежить на серединному перпендикулярі відрізка DC. **656.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC, у якому AC — дана сторона, довжина DC дорівнює сумі невідомих сторін, $\angle DAC = 90° + \alpha$, де α — піврізниця кутів, про які йдеться в умові. **658.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом, який дорівнює висоті, і протилежним кутом, який дорівнює даному. Гіпотенуза цього трикутника — одна зі сторін шуканого. Тепер задачу зведено до задачі 652. **659.** *Вказівка.* Побудуйте прямокутний трикутник BDM, у якому гіпотенуза BM дорівнює даній медіані, катет BD — даній висоті. Тоді центр описаного кола шуканого трикутника лежить на прямій, перпендикулярній до відрізка DM, яка проходить через точку M. **660.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ABD, у якому сторони AB і AD дорівнюють двом даним сторонам, а сторона BD у два рази більша за дану медіану. **661.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC, у якому AC — дана сторона, сторона AD у два рази більша за дану медіану, а висота, проведена з вершини D, дорівнює даній висоті. Покажіть, що сторона DC

дорівнює одній з невідомих сторін шуканого трикутника. **663.** 65°. **664.** 15°, 75°. **665.** 180°. **667.** $\frac{4a}{5}$. **668.** Точки X_1 і X_2, зображені на рисунку 351. **669.** Точки Y_1 і Y_2, зображені на рисунку 352. **672.** 60° або 180°. **673.** 40° або 140°. **675.** 20°. **677.** 42 см. **691.** 15 см. **702.** 45°, 45°, 90°. **704.** 30°, 40°, 110°. **705.** 35°. **706.** 10°. **707.** 52°, 52°, 76°. **708.** 70°, 70°, 40°. **713.** 33°, 57°. **714.** 45°. **718.** 50°, 50°, 80° або 80°, 80°, 20°. **720.** 70°, 70°, 40° або 50°, 50°, 80°. **721.** 135°. **722.** 45°. **725.** 22 см. **726.** 9 см. **727.** 60°. **731.** 120°. **735.** 60°. **739.** 6 см. **741.** *Вказівка.* Нехай O — центр кола. Доведіть, що $\angle COD = 180°$. **742.** 114°. **744.** *Вказівка.* Доведіть, що точки O_1 і O_2 належать бісектрисі кута B.

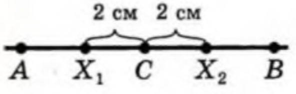


Рис. 351

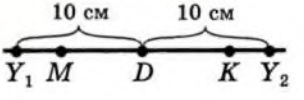


Рис. 352

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ У ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

§ 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
В	Г	А	В	В	В	Б	Б	В	Б	В

§ 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Б	Б	Б	Г	Г	Б	В	Б	Б	А	В

§ 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Г	В	В	А	А	Б	В	В	Б	В	Б

§ 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
В	Г	А	В	Б	А	В	В	Г	Б	Г

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ПОХОДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ТЕРМІНІВ

Аксіома від грецького *axios* — гідний визнання

Бісектриса від латинського *bis* — двічі і *sectrix* — січна

Геометрія від грецького *geo* — земля і *metreo* — вимірюю

Гіпотенуза від грецького *gipotenusa* — та, що стягує

Градус від латинського *gradus* — крок, ступінь

Діагональ від грецького *dia* — через і *gonium* — кут

Діаметр від грецького *diametros* — поперечник

Катет від грецького *katetos* — висок

Квадрат від латинського *quadratus* — чотирикутний (від *guattuor* — чотири)

Куб від грецького *kybos* — гральна кісточка

Математика від грецького *mathematike* (від *matema* — знання, наука)

Медіана від латинського *medius* — середній

Метр від французького *mètre* — палка для вимірювання або грецького *metron* — міра

Паралельність від грецького *parallelos* — той, хто йде поруч

Периметр від грецького *peri* — навколо і *metreo* — вимірюю

Перпендикуляр від латинського *perpendicularis* — прямовисний

Планіметрія від грецького *planum* — площина

Пропорція від латинського *proportio* — співвідношення

Радіус від латинського *radius* — спиця в колесі, промінь

Теорема від грецького *theoreo* — розглядаю, обдумую

Транспортир від латинського *transportaro* — переносити, перекладати

Фігура від латинського *figura* — зовнішній вигляд, образ

Формула від латинського *formula* — форма, правило

Хорда від грецького *chorde* — струна, тятива

Центр від латинського *centrum* — вістря ніжки циркуля

Циркуль від латинського *circulus* — коло

ДОДАТОК
ОРІЄНТОВНЕ ТЕМАТИЧНЕ ПОУРОЧНЕ ПЛАНУВАННЯ

№	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
1	2	3
	I. Найпростіші геометричні фігури (9 год)	
1.	Точки і прямі	1
2.	Відрізок і його довжина	1
3.	Промінь. Кут. Вимірювання кутів	2
4.	Суміжні і вертикальні кути	2
5.	Перпендикулярні прямі	1
6.	Аксіоми. Узагальнення і систематизація навчального матеріалу	1
7.	Тематичне оцінювання № 1	1
	II. Трикутники (14 год)	
8.	Рівні трикутники. Висота, бісектриса і медіана трикутника	2
9.	Перша і друга ознаки рівності трикутників	4
10.	Рівнобедрений трикутник та його властивості	3
11.	Ознаки рівнобедреного трикутника	1
12.	Третя ознака рівності трикутників	1
13.	Теореми	1
14.	Узагальнення і систематизація навчального матеріалу	1
15.	Тематичне оцінювання № 2	1
	III. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника (13 год)	
16.	Паралельні прямі	1
17.	Ознаки паралельності двох прямих	2
18.	Властивості паралельних прямих	2

Продовж. табл.

1	2	3
19.	Сума кутів трикутника	3
20.	Прямокутний трикутник	2
21.	Властивості прямокутного трикутника	1
22.	Узагальнення і систематизація навчального матеріалу	1
23.	Тематичне оцінювання № 3	1
IV. Коло і круг. Геометричні побудови (14 год)		
24.	Геометричне місце точок. Коло і круг	2
25.	Деякі властивості кола. Дотична до кола	2
26.	Описане і вписане кола трикутника	2
27.	Задачі на побудову	3
28.	Метод геометричних місць точок у задачах на побудову	3
29.	Узагальнення і систематизація навчального матеріалу	1
30.	Тематичне оцінювання № 4	1
V. Систематизація і повторення навчального матеріалу (4 год)		

ЗМІСТ

§ 3. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

§ 4. Коло і круг. Геометричні побудови

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7-го класу

Для середнього шкільного віку

Відповідальний за випуск *В. Л. Маркіанов*
Редактор *М. В. Москаленко*
Художники *П. М. Репринцев, О. С. Юхтман*
Художній редактор *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *І. Л. Маркіанової*
Коректор *І. Л. Безсонова*

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.
(писано до друку 10.04.2007. Формат 60×90/16. Гарнітура шкі.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 13,0.

ТОВ ТО «Гімназія»
Україна, 61103, м. Харків, вул. Дерев'янка, 16а
Тел. (057) 758-83-93, 719-46-80

Віддруковано з готових позитивів у друкарні ПП «Модем»,
61103, м. Харків, вул. Дерев'янка, 16а.
Тел. (057) 758-15-80, 758-15-90