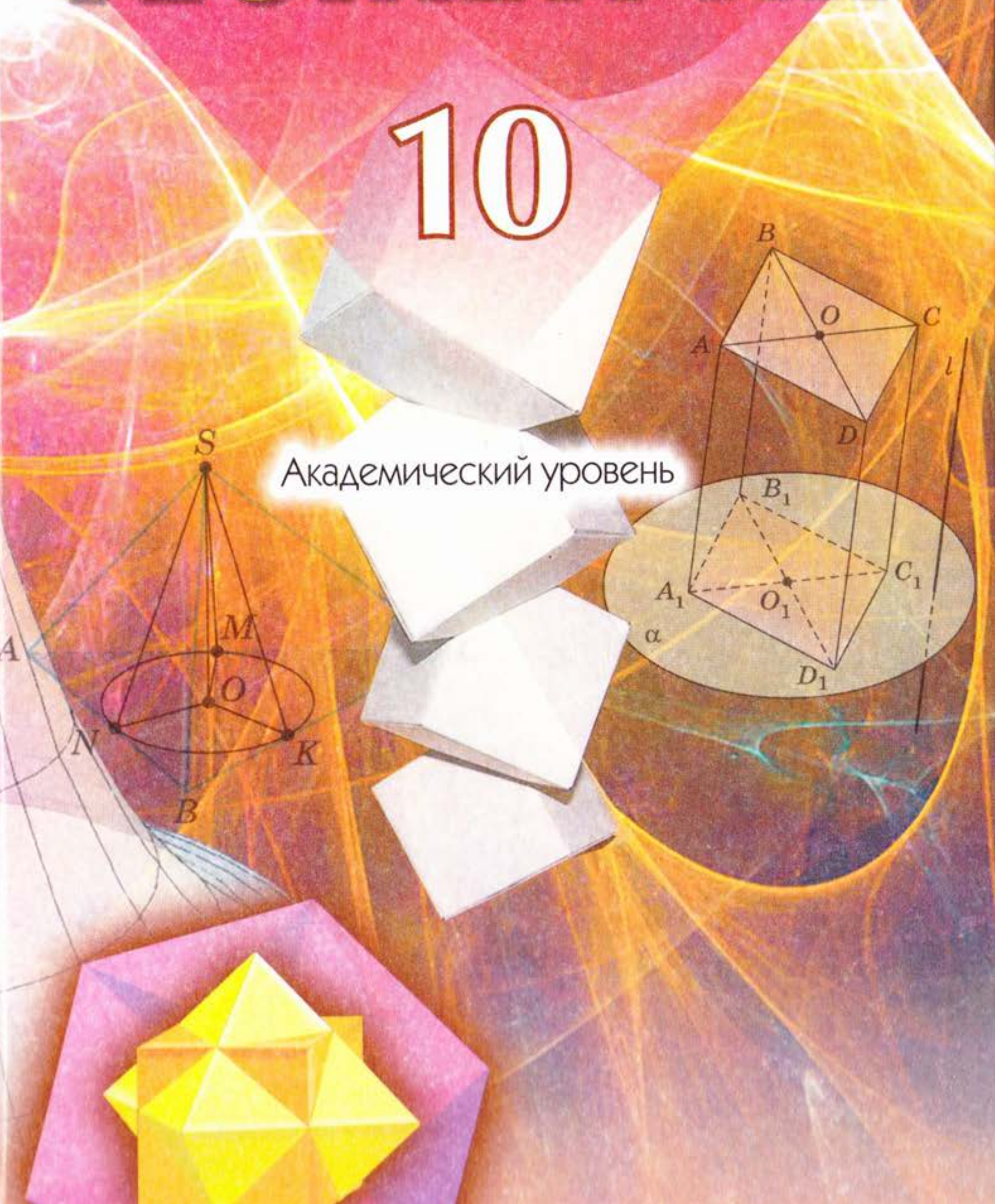
О.Я. Билянина, Г.И. Билянин, В.А. Швец

ГЕОМЕТРИЯ

10

Академический уровень



ББК 22.14я721
Б61

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины (приказ МОН Украины № 177 от 03.03.2010 г.)

Издано за счет государственных средств. Продажа запрещена

Перевод с украинского

Научную экспертизу проводил Институт математики Национальной академии наук Украины.

Психолого-педагогическую экспертизу проводил Институт педагогики Национальной академии педагогических наук Украины.

Независимые эксперты, которые производили экспертизу:

Тоточенко В.И. – доцент кафедры алгебры, геометрии и математического анализа Херсонского государственного университета, кандидат педагогических наук;

Дзюба И.И. – методист Куликовского РМК, Черниговская обл.;

Остапенко С.И. – учитель Владимирецкого районного коллегиума, Ровенская обл., учитель-методист;

Губа Г.А. – учитель ООШ I–III ст. № 6, г. Ясиноватая, Донецкая обл., учитель-методист.

Билянина, О.Я.

Б61 Геометрия : 10 кл. : академ. уровень : учебн. для общеобразоват. учеб. завед.: Пер. с укр. / О.Я. Билянина, Г.И. Билянин, В.А. Швец. – К. : Генеза, 2010. – 256 с. : ил.
ISBN 978-966-11-0023-6.

ББК 22.14я721

ISBN 978-966-11-0023-6 (рус.)
ISBN 978-966-11-0007-6 (укр.)

Уважаемые старшеклассники!

Научно-технический прогресс довольно стремительно изменяет характер существующих профессий и приводит к возникновению новых, в большей мере требующих от человека внимательности, сообразительности и быстроты реакции. Поэтому ***важнейшей задачей обучения сегодня является развитие логического мышления, усвоение общих методов научного исследования.***

Успешность выполнения этой задачи во многом определяется качеством усвоения математики как базовой дисциплины, закладывающей фундамент для изучения многих специальных дисциплин.

Предлагаемый вашему вниманию новый учебник «Геометрия. 10 класс» академического уровня содержит учебно-практический материал для изучения окружающего мира, ведь геометрия как наука является одним из специфических средств его отображения.

Вы уже знаете, что школьный курс геометрии состоит из 2 частей: планиметрии и стереометрии. В этом учебном году вам предстоит освоить начала стереометрии – науки, изучающей фигуры и их свойства в пространстве. Учебник, по которому вы будете работать, состоит из 7 модулей, имеющих следующую структуру: название модуля, его краткое содержание и цели изучения; изложение теоретического материала с образцами решений; упражнения, составленные в соответствии с четырьмя уровнями сложности; задачи прикладного содержания; исторический материал под рубрикой «*Из летописи геометрии*»; вопросы для самоконтроля; тест для самоконтроля.

Образцы решения задач содержат дополнительные объяснения в форме «*Почему именно так?*». Это поможет вам ориентироваться в условии задачи и выбирать способ ее решения.

Модули 1 и 7 направлены на обобщение и систематизацию соответствующих курсов планиметрии и изученного в 10 классе, поэтому изложение теоретического материала в них носит более информационный характер, чем в других модулях. Уровни сложности задач – начальный, средний, достаточный и высокий – обозначены соответственно: «°», «°°», «•», «••». В большинстве случаев задачи начального и среднего уровня представлены в тестовой форме. Их можно выполнять как устно, так и письменно.

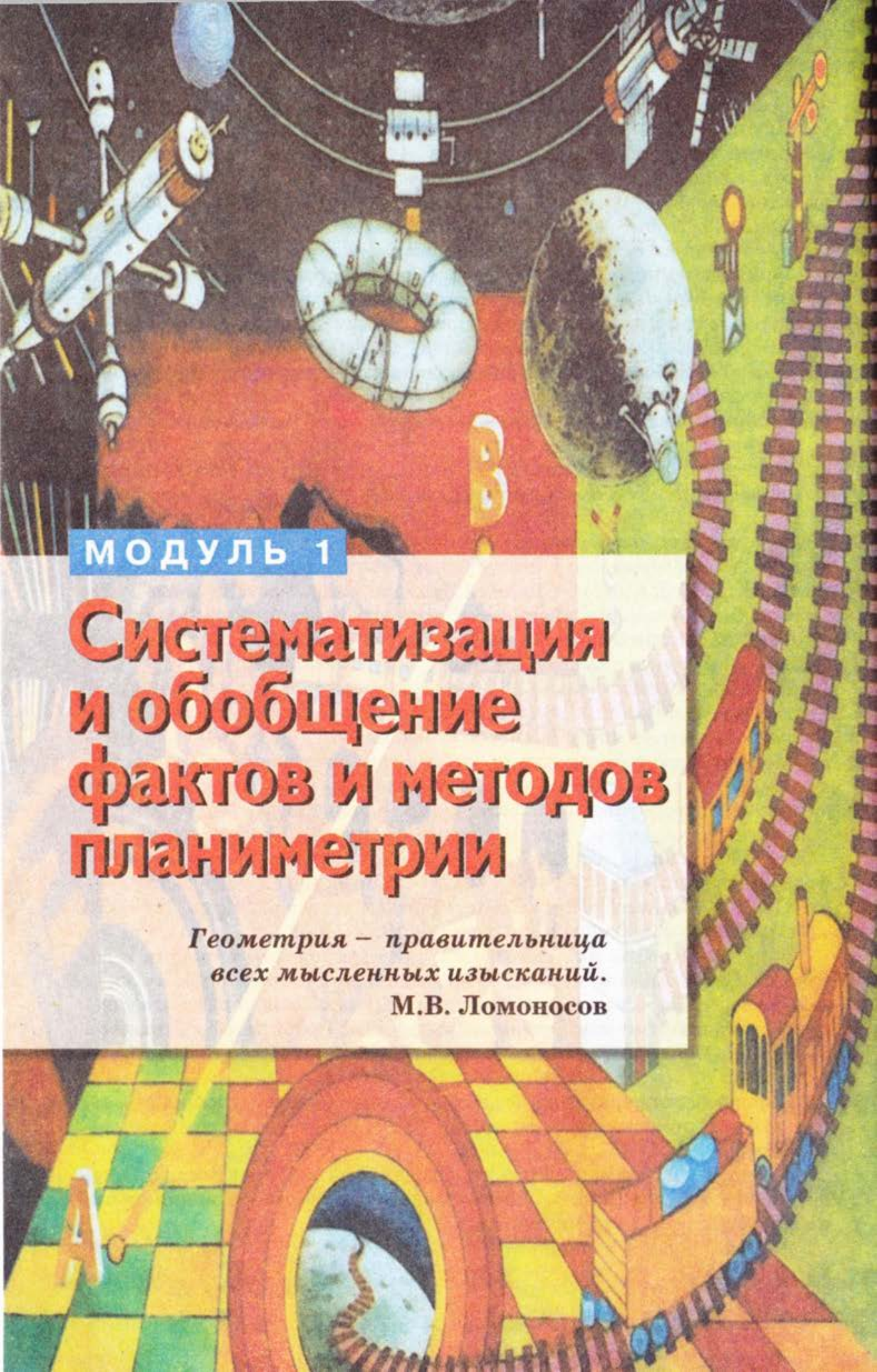
Вопросы и тесты для самоконтроля помогут вам повторить и закрепить изученное в модуле, подготовиться к определенному виду контроля. Некоторые задачи рубрики «*Прикладные задачи*» приведены с указаниями или с полным решением. Рубрика «*Из летописи геометрии*» содержит исторические сведения о геометрии, знакомит с фактами из жизни выдающихся ученых и т. п.

Жизнь ставит перед вами все новые и новые задачи, но мы надеемся, что знания, приобретенные в школе, будут способствовать их успешному решению.

Геометрия рождена жизнью, она соединяет в себе практику, логику, фантазию! По словам М.В. Ломоносова, ***«геометрия – правительница всех мысленных изысканий».***

Желаем успехов в обучении!

Авторы



МОДУЛЬ 1

Систематизация и обобщение фактов и методов планиметрии

Геометрия – правительница
всех мысленных изысканий.
М.В. Ломоносов

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ МОДУЛЯ

- *О логическом построении планиметрии*
- *Основные понятия планиметрии*
- *Аксиомы планиметрии*
- *Опорные факты курса планиметрии*
  - *Взаимное расположение прямых на плоскости*
  - *Окружность и круг*
  - *Многоугольники*
  - *Треугольник и его элементы*
  - *Выпуклые четырехугольники*
- *Задачи и методы их решения*
  - *Алгебраические методы*
  - *Геометрические методы*

Освоив этот модуль, вы узнаете:

- как различают определяемые и неопределяемые понятия;
- какие понятия принимают как основные;
- как аксиомы влияют на дальнейшее построение геометрии;
- какова роль теорем при составлении комплексной характеристики геометрической фигуры;
- как составить краткие сведения об изученном курсе планиметрии;
- какие факты курса планиметрии могут быть опорными;
- как отличить свойство геометрической фигуры от ее определения;
- как условно разделяют методы решения геометрических задач;
- какие теоретические знания необходимы для решения несложных геометрических задач.

§ 1.1. О логическом построении планиметрии. Основные понятия. Аксиомы планиметрии

В окружающем нас мире существует много разнообразных предметов, каждый из которых обладает определенным набором характеристик: размеры, форма, цвет, твердость, химический состав и т.д. Например, круг радиуса 10 см можно вырезать из металлического листа или из бумаги. Понятно, что эти предметы будут иметь как одинаковые характерные свойства, так и различные. Что касается формы и количественных характеристик, то они являются одинаковыми фигурами – два круга радиуса 10 см. Школьные дисциплины, изучающие пространственную форму и количественные характеристики предметов и явлений материального мира, – алгебра и геометрия – относятся к математическим.

Геометрия – это наука о пространственной форме и количественных характеристиках предметов реального мира.

Исследованием прочих характеристик предметов окружающей среды занимаются другие дисциплины. Если в процессе изучения предмета не учитывать никаких других его характеристик, кроме пространственной формы и размеров, получим абстрактный объект, который называют *геометрической фигурой*.

Слово «геометрия» – греческого происхождения и в переводе означает *землеизмерение*. Геометрия, которую изучают в школе, называется *евклидовой* по имени древнегреческого ученого Евклида (см. рубрику «Из летописи геометрии» на с. 45). Школьная геометрия состоит из двух частей: ***планиметрии*** и ***стереометрии***. С планиметрией вы ознакомились в основной школе, а стереометрию будете изучать в старших классах.

Планиметрия – это раздел геометрии, который изучает геометрические фигуры на плоскости (рис. 1.1).

Стереометрия – это раздел геометрии, который изучает фигуры в пространстве.

Рис. 1.1

Геометрические фигуры – это абстрактные фигуры, которые напоминают окружающие предметы. Чтобы отличить одну геометрическую фигуру (или понятие) от другой, их описывают в виде утверждения, которое называют *определением*.

Определение – это утверждение, которое описывает существенные свойства предмета (понятия), позволяющие отличить его от других. Как выяснилось, определить все геометрические фигуры невозможно. Например, точка, прямая, плоскость. Их называют ***неопределяемыми***, ***начальными*** (с которых все начинается), или, как принято в планиметрии, ***основными***.

Логическое построение планиметрии можно описать как последовательность следующих этапов.

1. Выбор геометрических понятий, которые называют основными (абстрактных фигур).

2. Формулирование основных свойств для этих геометрических понятий с помощью утверждений, которые считаются истинными без доказательств.

3. Построение других понятий, определяемых через основные понятия и их свойства, и утверждений, истинность которых устанавливается путем доказательств, опираясь на известные.

Такое построение науки называют ***аксиоматическим*** (греч. «аксиома», что в переводе означает *уважение*, *авторитет*, *неопровержимая истина*). ***Аксиома*** – это утверждение, принимающееся как истинное без доказательств. Основные свойства простейших геометрических фигур, которые считаются истинными без доказательства и являются исходными при доказательстве других свойств, называют ***аксиомами геометрии***.

Для школьного курса планиметрии определены:

1. Основные геометрические фигуры (понятия) – *точка*, *прямая*. (*Точка* – простейшая геометрическая фигура. Все другие геометрические фигуры состоят из точек, в том числе и *прямая*.)

2. Аксиомы планиметрии – это основные свойства простейших геометрических фигур.

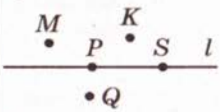
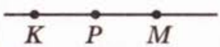
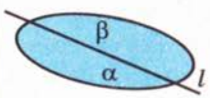
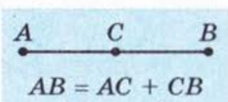
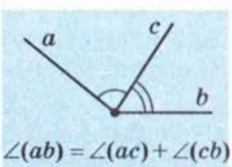
3. Система определений планиметрических фигур и теорем, выражающих их свойства.

К определяемым понятиям в геометрии относят отрезок, луч, треугольник и т. п., поскольку для них существуют объяснения «что это такое?». Определяемых понятий много. Приведем пример.

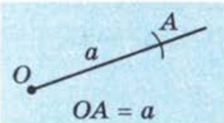
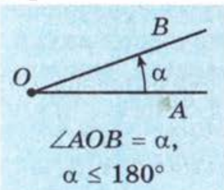
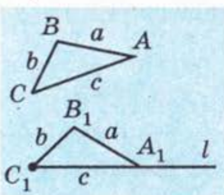
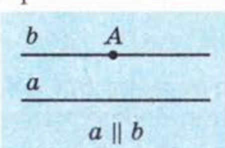
Пусть на прямой a заданы две различные точки A и B. Фигуру, состоящую из всех точек прямой a, которые лежат между точками A и B, включая точки A и B, называют ***отрезком*** (рис. 1.2). Точки A и B называются *концами* отрезка, а все другие точки – *внутренними точками* отрезка. Таким образом, отрезок – определяемое понятие.

Рис. 1.2

АКСИОМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

№	Названия аксиом	Содержание аксиом	Следствия из аксиом
I	**Аксиомы принадлежности** I_1  I_2 	I_1. Какой бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. I_2. Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну	Две различные прямые либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке
II	**Аксиомы расположения** II_1  II_2 	II_1. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими. II_2. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости	Если концы любого отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую
III	**Аксиомы измерения** III_1  III_2 	III_1. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой. III_2. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами	Если три точки A, B и C лежат на одной прямой, то точка C будет лежать между точками A и B в случае, когда $AB = AC + CB$. Если от данной полупрямой отложить в одну и ту же полуплоскость два угла, то сторона меньшего угла, отличная от данной полупрямой, будет проходить между сторонами большего угла

Продолжение табл.

№	Названия аксиом	Содержание аксиом	Следствия из аксиом
IV	**Аксиомы откладывания** IV_1  IV_2  IV_3 	IV_1. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и притом только один. IV_2. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и притом только один. IV_3. Каков бы ни был треугольник, существует треугольник, равный ему, в заданном расположении относительно данной полупрямой	Если прямая, которая не проходит ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон
V	**Аксиома параллельности** V_1 	V_1. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной	Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую

С целью установления правильности утверждения о свойствах той или иной геометрической фигуры прибегают к некоторым рассуждениям. Среди них есть такие, которые требуют доказательства (*теоремы*, *задачи*). Утверждение, истинность которого устанавливается путем доказательства и которое используется для доказательства других утверждений, называют ***теоремой***. Теорема состоит из: *условия* и *вывода*. Для доказательства теорем в школьном курсе геометрии в основном используют следующие методы (см. § 1.3):

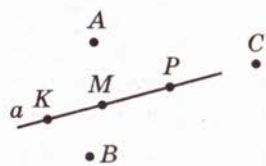
а) по структуре доказательства – прямой (аналитический и синтетический), от противного;

б) по использованию математического аппарата – алгебраический, координатный, векторный и др.

Все рассуждения при доказательстве теорем произвольным методом основываются на аксиомах и известных доказанных фактах. Т.е. чтобы доказать теорему, разрешается пользоваться только основными свойствами простейших фигур (аксиомами) и свойствами, доказанными ранее (теоремами). Никакими другими свойствами фигур, даже если они представляются очевидными, пользоваться нельзя. Например, доказывая теоремы, можно использовать рисунки. Однако это лишь геометрическая модель содержания текста, выраженного словами, поэтому делать по рисунку выводы о свойствах фигур не разрешается.

Итак, **геометрия, как и другие математические науки, строится по такой схеме: сначала следует ввести основные понятия, задать аксиомы (*правила игры*), а потом, опираясь на аксиомы, выводить другие факты (*проводить игру по определенным правилам, не противоречащим друг другу*).**

Упражнения



1.1°. Выберите по рисунку два правильных математических утверждения.

А) $A \in a$; В) $K \notin a$; Д) $C \in a$.
Б) $M \notin a$; Г) $B \notin a$;

1.2°. На одной прямой обозначены три точки A, B и C так, что $AB = 2{,}72$ дм, $BC = 1{,}38$ дм, $AC = 1{,}34$ дм. Определите правильные утверждения относительно расположения одной точки между двумя другими.

А) $A \in BC$; Б) $B \in AC$; В) $C \in AB$; Г) $C \notin AB$; Д) $B \notin AC$.

1.3°. Известно, что отрезок AM длиннее отрезка BM в 3 раза. Укажите два математических утверждения, соответствующих тексту задачи.

А) $AM = 3BM$; В) $AM = \frac{1}{3}BM$; Д) $BM = \frac{1}{3}AM$.

Б) $3AM = BM$; Г) $AM + BM = 4AM$;

1.4°. Укажите две правильные краткие записи условия задачи: «Отрезок AM короче отрезка BM на 2 см».

А) $AM - BM = 2$ см; Г) $AM + 2$ см $= BM$;
Б) $BM - AM = 2$ см; Д) $AM = BM + 2$ см.
В) $AM - 2$ см $= BM$;

1.5°. Найдите градусную меру угла AOM, если $\angle AOB = 150°$, а $\angle AOM$ в 2 раза больше $\angle BOM$ (M – внутренняя точка $\angle AOB$).

А) 50°; Б) 100°; В) 75°; Г) 30°; Д) 120°.

1.6°. Найдите длины отрезков AM и BM ($M \in AB$), если длина отрезка AB равна 12 см, а отрезок AM короче отрезка BM на 3 см.

А) 1,5 см и 4,5 см; В) 7,5 см и 10,5 см; Д) 5 см и 7 см.
Б) 4,5 см и 7,5 см; Г) 6 см и 9 см;

1.7°°. На одной прямой обозначили 21 точку так, что расстояние между любыми двумя соседними точками равно 3 см. Найдите расстояние между крайними точками.

А) 63 см; Б) 60 см; В) 66 см; Г) 57 см; Д) 54 см.

1.8°°. На отрезке AB длиной 42 см обозначена точка M в соответствии с условиями (А–Д). Подберите к каждому из них правильные утверждения (1–6).

А) $AM > BM$ на 2 см;
Б) $AM < BM$ на 6 см;
В) $2AM = BM$;
Г) $AM : BM = 3 : 4$;
Д) $0,5BM = AM$.

1) $AM = 18$ см;
2) $BM = 28$ см;
3) $AM = 22$ см;
4) $BM = 24$ см;
5) $AM = 14$ см;
6) $BM = 20$ см.

А		
Б		
В		
Г		
Д		

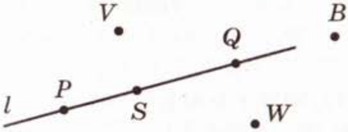
1.9°°. Луч OA проходит между сторонами угла POM, градусная мера которого равна 160°. Подберите к каждому условию (А–Д) правильные утверждения (1–6).

А) $\angle POA > \angle AOM$ на 40°;
Б) $\angle POA < \angle AOM$ на 60°;
В) $\angle AOM = 0,6\angle POA$;
Г) $\angle POA = 3\angle AOM$;
Д) $\angle AOM : \angle POA = 3 : 5$.

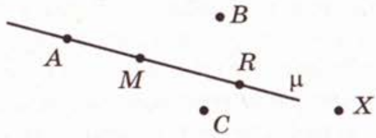
1) $\angle AOM = 110°$;
2) $\angle POA = 120°$;
3) $\angle AOM = 60°$;
4) $\angle POA = 100°$;
5) $\angle AOM = 40°$;
6) $\angle POA = 50°$.

А		
Б		
В		
Г		
Д		

1.10°°. Составьте несколько правильных математических утверждений к каждому из рисунков.



1)



2)

1.11°°. На луче OX отложены два отрезка: $OA = 7,3$ см и $OB = 5,8$ см. Определите длину отрезка AB.

1.12•. Определите, какая из трех точек – A, B, M – лежит между двумя другими.

1) $AM = 3$ см, $AB = 8$ см, $BM = 5$ см;
2) $AM = 7$ см, $BM = 12$ см, $AB = 19$ см;
3) $AM = 27$ см, $BM = 5$ см, $AB = 22$ см;
4) $AM = 9$ см, $BM = 21$ см, $AB = 12$ см;
5) $AM = 21$ см, $BM = 37$ см, $AB = 16$ см;
6) $BM = 18$ см, $AM = 33$ см, $AB = 15$ см.

1.13•. Определите длину отрезка KM, если точка O делит отрезок AB на два отрезка длиной 18 см и 14 см, а точки K и M – середины отрезков AO и OB.

1.14•. На отрезке AB длиной 48 см обозначена точка O. Найдите длины отрезков AO и OB, если $AO : OB = 3 : 5$.

1.15•. Найдите длину отрезка MB, если точки A, B, C и M лежат на одной прямой, причем $AC = 12$ см, $CB = 5$ см, а M – середина отрезка AC.

1.16•. Луч OM проходит между сторонами угла KOC, градусная мера которого равна 153°. Найдите углы KOM и MOC, если известно, что $\angle KOM$ в 2 раза больше $\angle MOC$.

1.17•. На отрезке AB длиной 75 см обозначены точки M и K ($M \in AK$, $K \in MB$) так, что отрезок AM на 5 см длиннее отрезка MK, а отрезок KB в 2 раза длиннее отрезка AM. Найдите длины пяти образованных отрезков.

1.18••. Луч, лежащий между сторонами угла, разбивает его на два угла. Докажите, что биссектрисы этих углов образуют угол, вдвое меньший величины заданного угла.

1.19••. Даны четыре прямые a, b, c и d, причем каждые три из них пересекаются в одной точке. Докажите, что все четыре прямые проходят через одну точку.

§ 1.2. Опорные факты курса планиметрии

Данный параграф предназначен для повторения курса планиметрии. Необходимость в нем обусловлена тем, что многие вопросы планиметрии на первом этапе обучения в школе рассматриваются несколько поверхностно. В следующих классах уровень изучения материала повышается, а вернуться и углубить пройденное удается не всегда. Поэтому мы систематизируем и обобщим основные сведения по планиметрии, условно разбив их на блоки: взаимное расположение прямых на плоскости; окружность и круг; многоугольники; треугольник и его элементы; выпуклые четырехугольники.

Взаимное расположение прямых на плоскости

Две прямые на плоскости могут пересекаться только в одной точке или не пересекаться, т.е. быть параллельными. При пересечении двух прямых образуются ***смежные*** и ***вертикальные*** углы. Смежные углы дополняют друг друга до 180°, а вертикальные – равны. Меньший из них называется ***углом между прямыми***. На рисунке 1.3 изображены две прямые AD и BC, которые пересекаются в точке O, образуя смежные и вертикальные углы:

1) $\angle COD$ и $\angle AOB$, $\angle AOC$ и $\angle BOD$ – вертикальные;

2) $\angle AOC$ и $\angle COD$, $\angle COD$ и $\angle DOB$, $\angle AOB$ и $\angle AOC$, $\angle AOB$ и $\angle BOD$ – смежные.

Если один из углов при пересечении двух прямых равен 90°, то все другие углы – смежные и вертикальные – также равны 90°. Такие прямые называют ***взаимно перпендикулярными***. Записывают, например, $AD \perp BC$ или $a \perp b$.

Расстоянием от точки A до прямой a (рис. 1.4) называют длину отрезка OA, перпендикулярного к прямой a, где точка O – ***основание перпендикуляра***. Расстояние от точки A до любой точки прямой a, отличной от точки O, больше расстояния от точки A до прямой a. Т.е. любой отрезок AX, где X – точка прямой a, отличная от точки O, длиннее отрезка AO.

Две различные прямые a и b, лежащие в одной плоскости, называются ***параллельными***, если они не имеют ни одной общей точки. Коротко записывают $a \parallel b$. Если прямые не параллельны ($a \nparallel b$), то они пересекаются ($a \cap b = A$).

Вследствие пересечения двух прямых третьей прямой образуется восемь углов (рис. 1.5) (прямые a и b могут пересекаться, но прямая c через точку их пересечения не проходит):

- внутренние односторонние (углы *4* и *5*, *3* и *6*);
- внутренние разносторонние (углы *3* и *5*, *4* и *6*);
- внешние односторонние (углы *1* и *8*, *2* и *7*);
- внешние разносторонние (углы *1* и *7*, *2* и *8*);
- соответствующие (углы *1* и *5*, *2* и *6*, *8* и *4*, *7* и *3*).

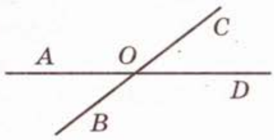


Рис. 1.3

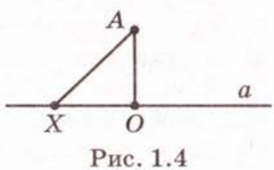


Рис. 1.4

Признаки параллельности прямых:

1. Если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой внутренние (или внешние) разносторонние углы равны или внутренние односторонние в сумме составляют 180°, то a и b параллельны.

2. Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.

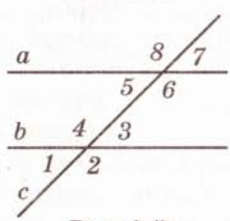


Рис. 1.5

Теорема Фалеса

Если на одной стороне угла отложить несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то они отсекут на второй стороне также равные отрезки. Например, если $AA_1 \parallel BB_1$, причем $OA = AB$, то $OA_1 = A_1B_1$ (рис. 1.6).

Окружность и круг

Кругом с центром O и радиусом R называют фигуру, образованную всеми точками плоскости, которые отдалены от точки O на расстояние, не больше чем R. **Круг ограничен окружностью.** ***Окружностью*** с центром O и радиусом R называют множество точек плоскости, отдаленных от точки O на расстояние, равное R (рис. 1.7, *а*). Отрезки, которые соединяют центр с точками окружности и имеют длину R, называют ***радиусами*** окружности (круга).

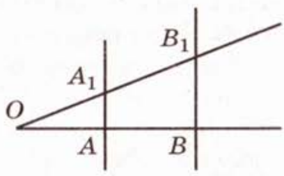


Рис. 1.6

Части круга, на которые он делится двумя радиусами, называют ***круговыми секторами*** (рис. 1.7, *б*).

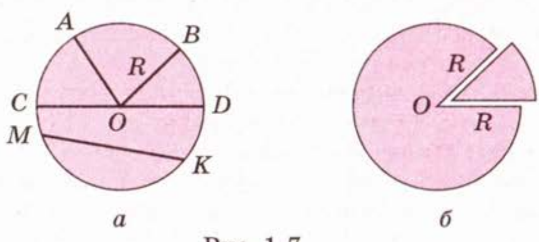


Рис. 1.7

Хорда – отрезок, который соединяет две точки окружности (MK), – делит круг на два ***сегмента***, а окружность – на две дуги. ***Диаметр*** – наибольшая хорда окружности (CD).

Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная окружность. Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит пополам эту хорду и обе дуги, которые стягиваются ею, и наоборот, если диаметр проведен через середину хорды, то он перпендикулярен этой хорде и делит пополам дугу, которую она стягивает (рис. 1.8, *а*).

Дуги, которые находятся между параллельными хордами, равны между собой. Равные дуги стягиваются равными хордами, и наоборот, равные хорды стягивают равные дуги.

Равные хорды одинаково отдалены от центра, и наоборот, хорды, одинаково отдаленные от центра, равны между собой. Большая из двух хорд меньше отдалена от центра, и наоборот, из двух хорд больше та, которая меньше отдалена от центра (рис. 1.8, *а*).

Каким может быть взаимное расположение прямой и окружности?

Рассмотрим окружность с центром O и прямую l (рис. 1.8, *б*). Из точки O проведем перпендикуляр к прямой l. Пусть A – основание этого перпендикуляра. Возможны три случая: точка A находится вне окружности (A_3), на окружности (A_2) и внутри окружности (A_1). В каждом из этих случаев окружность и прямая l либо не имеют общих точек, либо имеют одну общую точку A_2 (l_2 – *касательная к окружности*), либо имеют две общие точки (l_1 – *секущая*).

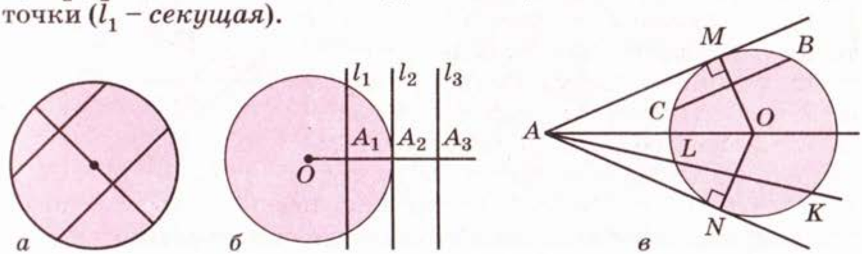


Рис. 1.8

Прямая, проходящая через точку окружности, является **касательной к окружности** только тогда, когда она перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку. Если касательная параллельна хорде окружности, то точка касания делит пополам дугу, которую стягивает хорда (рис. 1.8, *в*; $AM \parallel CB$, $\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{MB}$).

Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то отрезки этих касательных (от точек касания до данной точки) равны между собой, а луч, проведенный через данную точку и центр окружности, делит пополам угол между касательными (рис. 1.8, *в*; $AM = AN$, $\angle MAO = \angle OAN$).

Вписанным углом в окружность называют угол, образованный двумя хордами, выходящими из одной точки на окружности (рис. 1.9). Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, между собой равны. Вписанный угол, который опирается на полуокружность (на диаметр), – прямой.

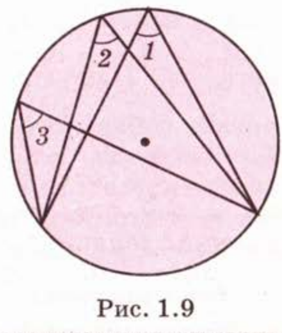


Рис. 1.9

Угол с вершиной в центре окружности называется ***центральным углом***. Центральный угол, стороны которого пересекают окружность в тех же точках, что и вписанный, называется соответствующим центральным углом вписанного (рис. 1.10). Мера ***вписанного*** угла равна половине меры соответствующего центрального или дополняет его половину до 180°. Угол, образованный хордой и касательной, которая проходит через конец хорды, измеряется половиной дуги, находящейся между сторонами этого угла (рис. 1.11; $\angle MAN = \frac{1}{2}\overset{\frown}{MA}$). Угол, образованный двумя хордами, пересекающимися внутри окружности, измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых находится между сторонами этого угла, а другая – между продолжениями этих сторон.

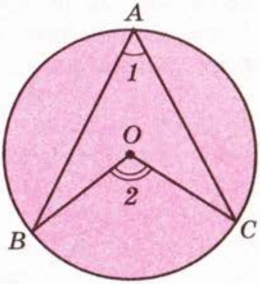


Рис. 1.10

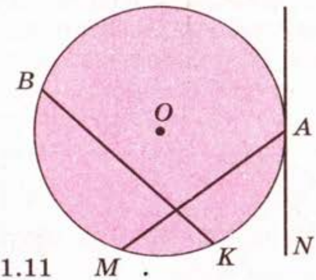


Рис. 1.11

Угол, образованный двумя касательными, называется ***описанным*** (рис. 1.8, *в*; $\angle MAN$). Описаный угол измеряется полуразностью двух дуг, которые находятся между его сторонами $\left(\angle MAN = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MBN} - \overset{\frown}{MCN})\right)$.

Длину окружности находят по формуле: $C = \pi d = 2\pi R$, где d – диаметр окружности, R – радиус окружности; а длину дуги окружности – по формуле: $l = \frac{\pi R\alpha}{180}$, где α – градусная мера соответствующего центрального угла. Площадь круга: $S = \pi R^2 = \frac{CR}{2}$; площадь кругового сектора: $S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha$, где R – радиус круга, α – градусная мера соответствующего центрального угла. Площадь сегмента: $S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_\triangle$, где α – градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а $S_\triangle$ – площадь треугольника с вершинами в центре круга и на концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «–» следует использовать, когда $\alpha < 180°$, а знак «+» – когда $\alpha > 180°$.

Многоугольники

Многоугольником называется простая замкнутая ломанная. Например, ***многоугольником*** $A_1A_2...A_n$ называется линия, полученная путем последовательного соединения n различных точек A_1, A_2, ..., A_n отрезками таким образом, чтобы каждая точка была соединена со следующей, а последняя – с первой (рис. 1.12). Различают многоугольники плоские и неплоские. ***Плоский многоугольник*** – часть плоскости, ограниченная многоугольником.

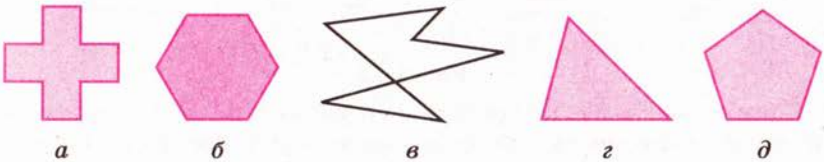


Рис. 1.12

Многоугольник может быть выпуклым или невыпуклым. Многоугольник ***выпуклый***, если он лежит в одной полуплоскости относительно каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины (рис. 1.12, *б*, *г*, *д*).

Многоугольники называют ***равными***, если при наложении они совмещаются. Для выпуклого n-угольника сумма внутренних углов равна $180°(n-2)$, а количество диагоналей любого n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Если все стороны выпуклого многоугольника равны между собой и все углы также равны между собой, то его называют ***правильным*** (рис. 1.12, *д*). Если все вершины многоугольника лежат на некоторой окружности, он называется ***вписанным*** в эту окружность (рис. 1.13, *а*). Если все стороны многоугольника касаются некоторой окружности, он называется ***описанным вокруг окружности*** (рис. 1.13, *б*). По количеству сторон n-угольника ему дают название. Например, треугольник ($n = 3$), четырехугольник ($n = 4$), пятиугольник ($n = 5$) и т.д.

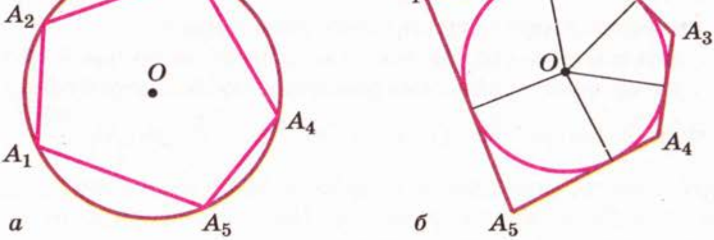


Рис. 1.13

Как построить правильный n-угольник?

Если окружность разделить на n равных частей и точки последовательно соединить отрезками, то получим правильный n-угольник, вписанный в окружность (рис. 1.14).

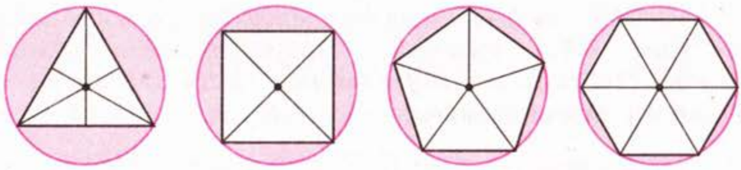


Рис. 1.14

Если окружность разделить на n равных частей и через точки деления провести касательные к окружности, то отрезки этих касательных образуют правильный n-угольник, описанный вокруг окружности (рис. 1.15).

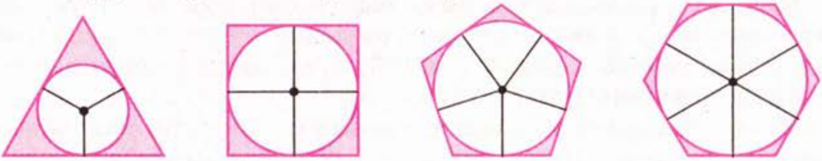


Рис. 1.15

Вокруг каждого правильного многоугольника можно описать окружность или в каждый правильный многоугольник можно вписать окружность.

В правильном многоугольнике центры описанной и вписанной окружностей совпадают. Общий центр описанной и вписанной окружностей называется *центром* правильного многоугольника. Радиус вписанной окружности называют *апофемой* правильного многоугольника.

Угол, образованный двумя радиусами, проведенными через смежные вершины правильного многоугольника, называется его *центральным углом*. Все центральные углы правильного многоугольника равны между собой и составляют $\frac{360°}{n}$, где n – количество сторон (углов) многоугольника.

В правильном n-угольнике, как и в произвольном n-угольнике, сумма всех углов (внутренних) составляет $180°(n - 2)$. Поэтому каждый его угол определяется по формуле $\frac{180°(n-2)}{n}$.

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается его сторон в их серединах. Центр окружности, вписанной в правильный многоугольник, является точкой пересечения серединных перпендикуляров его сторон (рис. 1.15).

Если сторона правильного многоугольника равна a, радиус вписанной в него окружности – r, а радиус описанной вокруг него окружности – R, то между ними существует связь, которая выражается формулами:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}, \quad R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}.$$

Если $n = 3$ (правильный треугольник), то:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Если $n = 4$ (правильный четырехугольник), то:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}45^\circ} = \frac{a}{2}, \quad R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Если $n = 6$ (правильный шестиугольник), то:

$$r = \frac{a}{2\operatorname{tg}30^\circ} = \frac{a}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a.$$

Простейшим многоугольником является треугольник. В любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну. На рисунке 1.16, *а* изображена окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, $r = OM$ – радиус. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис и находится внутри треугольника. Поскольку площадь треугольника находят по формуле $S_\Delta = pr$, где p – полупериметр треугольника, то отсюда $r = \frac{S_\Delta}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, где a, b, c – стороны треугольника. Центр окружности, вписанной в треугольник, равноудален от его сторон.

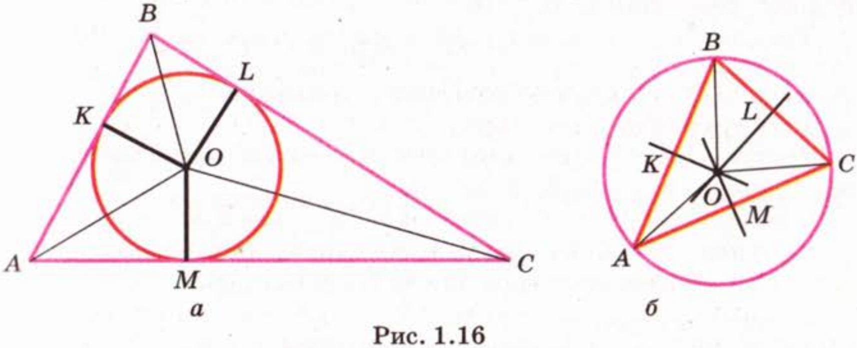


Рис. 1.16

Можно ли в любой четырехугольник вписать окружность?

Ответ. Нельзя. В четырехугольник можно вписать окружность только при условии, что суммы длин его противоположных сторон равны.

Вокруг произвольного треугольника можно описать окружность, притом только одну (см. рис. 1.16, *б*). Центр окружности, описанной вокруг треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к его сторонам. Центр окружности O, описанной вокруг треугольника ABC, равноудален от его вершин.

На рисунке 1.16, *б* изображена окружность с центром O, описанная вокруг треугольника ABC, $R = OA$ – ее радиус. Если радиус описанной окружности R, стороны треугольника, вписанного в окружность, a, b, c, и p – полупериметр треугольника, то

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Можно ли описать окружность вокруг произвольного четырехугольника?

Ответ. Нельзя. Вокруг четырехугольника можно описать окружность только тогда, когда суммы противоположных углов равны 180°.

Треугольник и его элементы

Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек, которые не лежат на одной прямой, и трех отрезков, которые попарно соединяют эти точки. Рассмотрим $\triangle ABC$ (рис. 1.17), в котором выделяют шесть основных элементов: три внутренних угла α, β, γ и три соответственно противолежащие им стороны a, b, c.

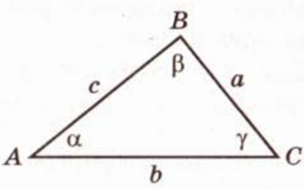


Рис. 1.17

Треугольник называется ***тупоугольным***, ***прямоугольным*** или ***остроугольным***, если его наибольший внутренний угол соответственно больше, равен или меньше 90°.

Треугольник называется ***равнобедренным***, если у него две стороны равны (боковые стороны). Основанием равнобедренного треугольника является сторона, которая не равна ни одной из двух других равных сторон.

Треугольник, все стороны которого равны, называется ***равносторонним***, или ***правильным***.

Соотношение между сторонами и углами треугольника:

– против большей стороны лежит больший угол, и наоборот;
– против равных сторон лежат равные углы;
– теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$;
– теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними).

Треугольник можно определить любой тройкой таких основных элементов: либо двумя сторонами и углом между ними, либо одной стороной и двумя углами, либо тремя сторонами. Например, $\triangle ABC$ со сторонами a, b, c можно задать так:

1) a, b и C; b, c и A; a, c и B; 3) a, b и c.

2) a, B и C; b, A и C; c, A и B;

Соотношение между внутренними и внешними углами треугольника: любой внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Из трех отрезков можно образовать треугольник тогда и только тогда, когда любая его сторона меньше суммы и больше разности двух других его сторон. В любом треугольнике можно провести три медианы, три биссектрисы и три высоты.

Свойства биссектрисы угла треугольника: *биссектрисы* треугольника пересекаются в одной точке, которая лежит в середине треугольника и является центром вписанной в него окружности. Биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам (рис. 1.18; BL – биссектриса, $AL : LC = AB : BC$).

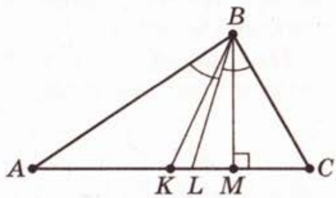


Рис. 1.18

Основные свойства медиан треугольника:

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая лежит в середине треугольника.
2. Медианы треугольника точкой их пересечения делятся в соотношении 2 : 1 (считая от вершин треугольника).
3. Медиана делит треугольник на два треугольника, площади которых равны (рис. 1.18; BK – медиана, $S_{\triangle ABK} = S_{\triangle KBC}$).
4. Три медианы треугольника делят треугольник на шесть треугольников, площади которых равны.

Прямые, на которых лежат ***высоты*** треугольника, пересекаются в одной точке – ***ортоцентре*** треугольника, которая может находиться во внутренней или внешней области треугольника. Высоты треугольника, проведенные к его сторонам a, b и c, обозначаются h_a, h_b и h_c соответственно. Высота треугольника h_a определяется через его стороны по формуле:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Медиана треугольника m_a, проведенная к стороне a, определяется через стороны треугольника по формуле:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

В каждом треугольнике можно построить три ***средние линии*** – отрезки, соединяющие середины двух его сторон. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне треугольника и равна ее половине. Средняя линия треугольника отсекает от него подобный треугольник, площадь которого относится к площади основного треугольника как 1 : 4.

Свойства равнобедренного треугольника: углы при основании треугольника равны; высота, проведенная к основанию, является также биссектрисой и медианой.

Свойства равностороннего треугольника: все углы равны (каждый угол равен 60°); каждая из трех высот является также биссектрисой и медианой; центр окружности, описанной вокруг треугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в него.

Прямоугольный треугольник имеет сторону, которая лежит против прямого угла, – ***гипотенузу*** (c) и две стороны, образующие прямой угол, – ***катеты*** (a и b) (рис. 1.19). Стороны прямоугольного треугольника a, b и c (c – гипотенуза) связаны между собой соотношением, называемым теоремой Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$. Читается так: ***квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.***

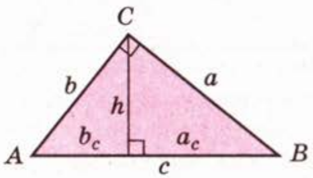


Рис. 1.19

Свойства прямоугольного треугольника:

1. Катет является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу: $b^2 = b_c \cdot c$ и $a^2 = a_c \cdot c$ (рис. 1.19).

2. Высота, проведенная из вершины прямого угла, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу: $h^2 = b_c \cdot a_c$.

3. Центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.

4. Для сторон прямоугольного треугольника справедливы отношения: $\sin A = \dfrac{CB}{AB}$, $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$.

Запомните!

α	30°	45°	60°	***Указание для лучшего запоминания***:
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1. Запишите черты дробей для каждого значения выражения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ со знаменателями 2.
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	2. Запишите в числителях: 1, 2, 3 для $\sin\alpha$ (3, 2, 1 для $\cos\alpha$). 3. Допишите знак радикала для каждого числителя дроби. Учитывая то, что $\sqrt{1} = 1$, получаем заполненную таблицу

Выпуклые четырехугольники

Четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, называется ***параллелограммом*** (рис. 1.20).

Свойства параллелограмма:

1. Середина диагонали параллелограмма является его центром симметрии.

2. Противоположные стороны параллелограмма равны.

3. Противоположные углы параллелограмма равны.

4. Каждая диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

5. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.

6. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма (d_1 и d_2) равна сумме квадратов всех его сторон:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

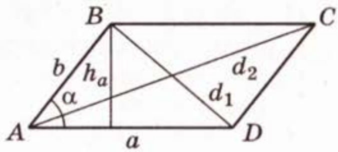


Рис. 1.20

Чтобы доказать, что некоторый заданный четырехугольник является параллелограммом, следует, согласно определению, убедиться в параллельности его противоположных сторон. Иногда такие рассуждения являются громоздкими, а иногда – излишними. Существуют другие доказанные признаки, на основании которых можно утверждать, что данный четырехугольник является действительно параллелограммом.

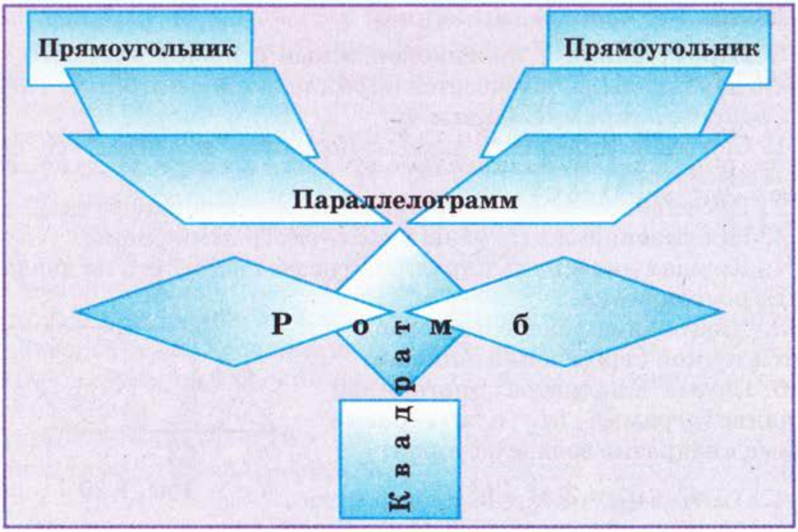
Если в четырехугольнике исполняется любое из таких условий: 1) противоположные стороны попарно равны; 2) две противоположные стороны равны и параллельны; 3) противоположные углы попарно равны; 4) диагонали в точке пересечения делятся пополам, – то такой четырехугольник является параллелограммом.

Прямоугольник – это параллелограмм, в котором все углы равны. Поскольку сумма углов четырехугольника равна $180°(4 - 2) = 360°$, то в прямоугольнике все углы прямые. Прямоугольник имеет все свойства параллелограмма. Кроме того, он имеет еще одно свойство: ***диагонали прямоугольника равны***.

Для прямоугольника справедлива и обратная теорема: если у параллелограмма диагонали равны, то он – прямоугольник. Эта теорема является признаком прямоугольника.

Ромб – это параллелограмм, в котором все стороны равны. Кроме общих свойств параллелограмма, ромб имеет и другие, характерные только для него.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам. Справедлива и обратная теорема, которая является признаком ромба: если у параллелограмма диагонали взаимно перпендикулярны или если в нем диагонали делят углы пополам, то такой параллелограмм – ромб.



Квадрат – это параллелограмм, в котором все углы равны и все стороны равны. Таким образом, квадрат – это прямоугольник с равными сторонами или квадрат – это ромб с равными углами (прямыми). Очевидно, что квадрат имеет все свойства прямоугольника и ромба.

Трапеция – это четырехугольник, в котором только две противоположные стороны параллельны. Эти параллельные стороны называются ***основаниями*** трапеции, две другие стороны – ***боковыми сторонами***.

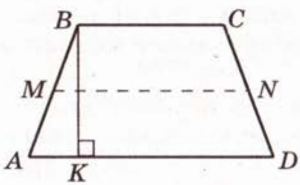


Рис. 1.21

Если боковые стороны трапеции равны между собой, такую трапецию называют ***равнобокой*** (рис. 1.21; $AB = CD$).

Равнобокая трапеция имеет такие свойства:

1. Углы, прилежащие к основанию равнобокой трапеции, равны. Справедливо и обратное утверждение: если углы, прилежащие к основанию трапеции, равны, то такая трапеция равнобокая.

2. Диагонали равнобокой трапеции равны.

3. Сумма противоположных углов равнобокой трапеции равна $180°$.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется ее ***средней линией*** (рис. 1.21; MN – средняя линия, $AM = MB$, $CN = ND$).

Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме (рис. 1.21; $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$).

Упражнения

1.20°. При пересечении прямых a и b образовалось четыре угла (рис. 1.22, *а*). Задайте каждому из условий (А–Д) возможное следствие (1–5).

А) $\angle 1 = \angle 3$; 1) $\angle 3 = \angle 4 = 90°$;
Б) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$; 2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90°$;
В) $\angle 1 = \angle 2 = 90°$; 3) $\angle 1$ и $\angle 4$ – смежные;
Г) $\angle 2 + \angle 4 = 260°$; 4) $\angle 1$ и $\angle 3$ – острые;
Д) $\angle 3 = 90°$. 5) $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

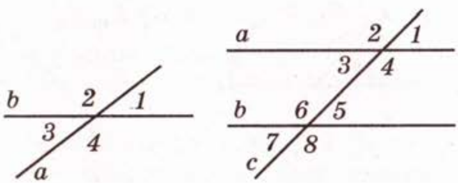
1.21°. Условиями (1–7) указана градусная мера некоторых углов. Выберите среди них те, которые могут быть смежными.

1) 18°; 2) 72°; 3) 128°; 4) 62°; 5) 28°; 6) 108°; 7) 38°.

А) 1 и 2; Б) 2 и 6; В) 3 и 4; Г) 1 и 7; Д) 2 и 5.

1.22°. Укажите правильный вывод, если известно, что $\angle 1 = \angle 7$ (рис. 1.22, *б*).

А) $a \parallel b$; Б) $a \perp b$; В) $a \cap b$.



а *б*

Рис. 1.22

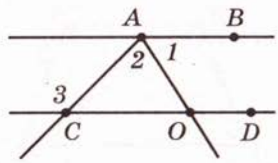


Рис. 1.23

1.23°°. Найдите градусную меру $\angle 3$ (рис. 1.23), если $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 = 72°$.

А) 72°; Б) 144°; В) 108°; Г) 36°; Д) 124°.

1.24°. Найдите градусную меру внешнего угла KMN треугольника KMZ (рис. 1.24).

А) 135°; В) 108°; Д) 45°.
Б) 125°; Г) 117°;

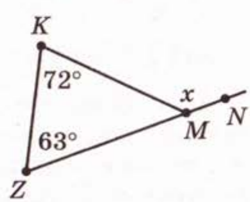


Рис. 1.24

1.25°. Найдите градусную меру угла между биссектрисой угла при вершине равнобедренного треугольника и его боковой стороной, если углы треугольника ABC относятся как 3 : 4 : 3.

А) 18°; Б) 36°; В) 72°; Г) 60°; Д) 30°.

1.26°. Определите правильные равенства (рис. 1.25).

А) $\triangle ABO = \triangle OCD$; В) $BA = CD$; Д) $\angle BAO = \angle DCO$;
Б) $\triangle AOB = \triangle COD$; Г) $\angle AOB = \angle DOC$; Е) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.27°. Найдите углы треугольника BOC (рис. 1.26).

А) 48°, 48°, 84°; В) 24°, 132°, 24°; Д) 48°, 132°, 20°.
Б) 132°, 48°, 48°; Г) 42°, 90°, 48°;

1.28°. Идентифицируйте каждому шестиугольнику периметра P (А–Д) окружность радиуса R, описанную вокруг него (1–5).

А) $P = 42$ см; 1) $R = 2$ см;
Б) $P = 12$ см; 2) $R = 8$ см;
В) $P = 84$ см; 3) $R = 6$ см;
Г) $P = 48$ см; 4) $R = 14$ см;
Д) $P = 36$ см. 5) $R = 7$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

1.29°. Вычислите периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей с радиусами 6 см, 7 см и 8 см, которые попарно касаются извне (рис. 1.27).

А) 28 см; Б) 29 см; В) 27 см; Г) 42 см; Д) 21 см.

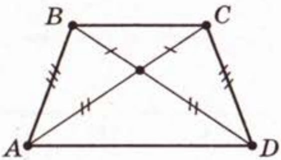


Рис. 1.25

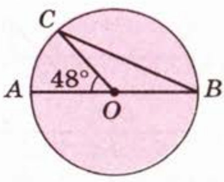


Рис. 1.26

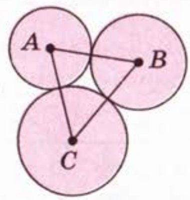


Рис. 1.27

1.30°. Выберите выражения, которыми определяются радиус вписанной окружности в правильный треугольник со стороной a и радиус описанной вокруг него окружности:

1) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{a}{2}$; 5) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

А) 1 и 2; Б) 2 и 3; В) 3 и 4; Г) 4 и 5; Д) 1 и 5.

1.31°. Найдите диаметр окружности, если прямая a является касательной к ней, A – точка касания, $OB = 12$ см и образует с касательной угол 30° (рис. 1.28).

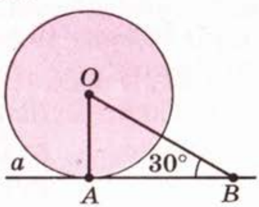


Рис. 1.28

А) 24 см; Б) 12 см; В) 6 см; Г) 18 см; Д) 4 см.

1.32°. Сторона квадрата равна $20\sqrt{2}$ см. Укажите длину радиуса окружности, вписанной в этот квадрат.

А) 20 см; Б) $10\sqrt{2}$ см; В) 10 см; Г) $5\sqrt{2}$ см; Д) 5 см.

1.33°. Одно из оснований трапеции на 8 см больше другого, а средняя линия трапеции равна 10 см. Найдите меньшее основание трапеции.

А) 2 см; Б) 4 см; В) 6 см; Г) 8 см; Д) 10 см.

1.34°. Вычислите площадь ромба, диагонали которого равны 10 см и 36 см.

А) 90 см^2; Б) 92 см^2; В) 180 см^2; Г) 184 см^2; Д) 360 см^2.

1.35°°. Найдите угол между прямыми a и b, если прямые m и n параллельны (рис. 1.29).

А) 50°; Б) 80°; В) 100°; Г) 65°; Д) 115°.

1.36°°. Определите длины радиусов двух окружностей, которые касаются извне, если расстояние между их центрами 18 см, а длина одного из радиусов составляет 50 % длины другого.

А) 9 см и 6 см; В) 12 см и 6 см; Д) 24 см и 12 см.
Б) 10 см и 8 см; Г) 14 см и 4 см;

1.37°°. Укажите выражение, которое определяет длину окружности, ограничивающей круг площадью 9π см^2.

А) 3π см; Б) 9π см; В) 12π см; Г) 18π см; Д) 6π см.

1.38°°. Найдите площадь круга, вписанного в квадрат со стороной 6 см.

А) 9π см^2; Б) 144π см^2; В) 36π см^2; Г) 72π см^2; Д) 18π см^2.

1.39°°. Найдите площадь треугольника (рис. 1.30) (длины отрезков приведены в сантиметрах).

А) 6 см^2; Б) 9 см^2; В) 12 см^2; Г) 24 см^2; Д) 30 см^2.

1.40°°. Определите периметр равнобедренного треугольника, если точка касания вписанной в него окружности делит его боковую сторону на отрезки 6 см и 5 см. Выберите правильную комбинацию возможных ответов.

1) 21 см; 2) 32 см; 3) 23 см; 4) 34 см; 5) 33 см.

А) 1 или 2; Б) 2 или 4; В) 2 или 3; Г) 3 или 5; Д) 4 или 5.

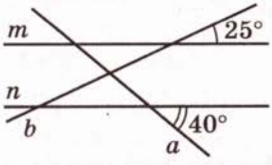


Рис. 1.29

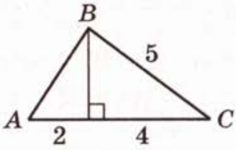


Рис. 1.30

1.41°°. Найдите сторону BC треугольника ABC, вписанного в окружность радиуса R (рис. 1.31).

А) R; Б) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; В) $R\sqrt{2}$; Г) $R\sqrt{3}$; Д) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

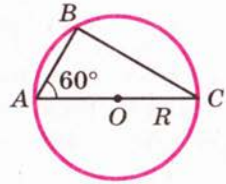


Рис. 1.31

1.42°°. Идентифицируйте парами сторону правильного треугольника a и радиус r вписанной в него окружности.

А) $a = 18$ см; 1) $r = 4\sqrt{3}$ см;
Б) $a = 9\sqrt{3}$ см; 2) $r = 7{,}5$ см;
В) $a = 30$ см; 3) $r = 4{,}5$ см;
Г) $a = 24$ см; 4) $r = 3\sqrt{3}$ см;
Д) $a = 15\sqrt{3}$ см. 5) $r = 5\sqrt{3}$ см;

А	
Б	
В	
Г	
Д	

1.43°°. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 5 см. Найдите диагональ квадрата.

А) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см; Б) $5\sqrt{2}$ см; В) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ см; Г) $10\sqrt{2}$ см; Д) $20\sqrt{3}$ см.

1.44°°. На рисунке 1.32 изображены два треугольника ABC и CDM, стороны которых – AB и MD – параллельны. Найдите длину отрезка AD, если $MD = \frac{1}{3}AB$, $CD = 1{,}5$ см.

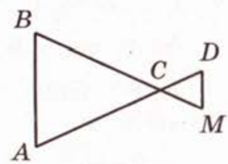


Рис. 1.32

А) 3 см; В) 6 см; Д) 9 см.
Б) 4,5 см; Г) 7,5 см;

1.45°°. Укажите количество сторон правильного многоугольника, внутренний угол которого равен 160°.

А) 12; Б) 14; В) 16; Г) 18; Д) 20.

1.46°°. Найдите периметр ромба, диагонали которого равны 24 см и 18 см.

А) 120 см; Б) 60 см; В) 84 см; Г) 108 см; Д) 144 см.

1.47°°. Известно, что периметр параллелограмма равен 48 см, а одна из его сторон на 8 см длиннее другой. Найдите меньшую сторону параллелограмма.

А) 8 см; Б) 16 см; В) 6 см; Г) 12 см; Д) 10 см.

1.48°°. Вне равнобедренного треугольника ABC построили два равных угла ABM и CBK, стороны которых пересекли продолжения основания AC соответственно в точках M и K. Докажите равенство треугольников MBC и KBA (рис. 1.33, *а*).

1.49°°. Из точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды длиной 5 см и 12 см. Найдите расстояние между их концами.

1.50•. Определите взаимное расположение прямых AB и CD по данным рисунка 1.33, *б*. Ответ обоснуйте.

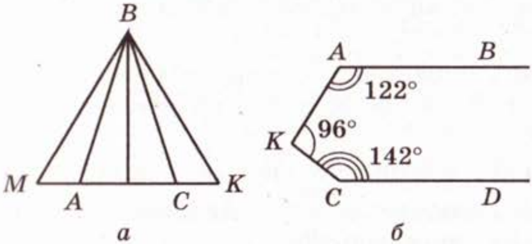


Рис. 1.33

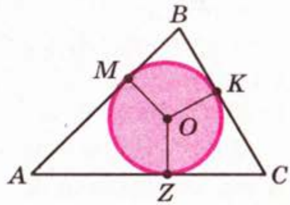


Рис. 1.34

1.51•. В треугольник ABC вписана окружность (рис. 1.34), точки касания которой M и Z делят две его стороны AB и AC на отрезки, разность которых соответственно равна 3 см и 4 см ($AM > MB$, $AZ > ZC$). Найдите стороны треугольника ABC, если его периметр равен 28 см.

1.52•. Вокруг равностороннего треугольника описана окружность, радиус которой равен $3\sqrt{3}$ см. Вычислите радиус вписанной окружности.

1.53•. Вокруг окружности описана равнобокая трапеция, угол при основании которой равен 30°. Высота трапеции – 7 см. Найдите длину средней линии трапеции.

1.54•. Вокруг окружности описана равнобокая трапеция, угол при основании которой равен 150°. Средняя линия трапеции равна $16\sqrt{3}$ см. Найдите длину высоты трапеции.

1.55•. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, основание которого равно 16 см, а высота, проведенная к ней, – 15 см.

1.56•. Высота AM треугольника ABC делит его сторону BC на отрезки BM и MC. Найдите длину отрезка MC, если $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AB = 26$ см, $\angle B = 45°$.

1.57•. Сторона ромба равна 10 см, а одна из его диагоналей – 12 см. Найдите радиус вписанной в ромб окружности.

1.58•. В окружности радиуса 15 см на расстоянии 12 см от его центра проведена хорда. Найдите длину этой хорды.

1.59•. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону на отрезки 6 см и 10 см, считая от вершины острого угла. Вычислите площадь параллелограмма, если его острый угол равен 60°.

1.60••. В окружности проведены две пересекающиеся хорды. Одна из них точкой пересечения делится пополам, а вторая – на части длиной 5 см и 20 см. Найдите длину каждой хорды.

1.61••. Из точки вне окружности проведены секущая и касательная. Найдите длину касательной, если она на 5 см больше внешней части и на столько же меньше внутренней части секущей.

1.62••. Из точки вне окружности проведены секущая и касательная, сумма длин которых равна 15 см, а внешняя часть секущей на 2 см меньше касательной. Найдите длины секущей и касательной.

1.63••. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 6 см и 9 см.

1.64••. В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 8 см, а меньшая боковая сторона – $6\sqrt{3}$ см. Найдите площадь трапеции, если один из ее углов равен 120°.

1.65••. Вокруг трапеции, основания которой равны 40 см и 14 см, а высота – 39 см, описана окружность. Найдите ее радиус.

1.66••. 1) Диагонали трапеции равны 20 см и 15 см, высота – 12 см. Вычислите площадь трапеции.

2) Диагонали трапеции равны 30 см и 26 см, высота – 24 см. Вычислите площадь трапеции.

1.67••. Большая диагональ ромба равна 24 см, а радиус вписанной окружности – 6 см. Вычислите площадь ромба.

1.68••. Стороны треугольника равны 17 см, 25 см и 28 см. Окружность с центром на большей стороне касается двух других сторон. Вычислите площадь круга.

1.69••. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 6 см и 4 см, а угол между диагоналями составляет 60°.

§ 1.3. Задачи и методы их решения

Для геометрии закономерным является то, что введенные основные понятия и сформулированная аксиоматика составляют основу для новых утверждений. Однако справедливость последних необходимо доказывать путем определенных рассуждений, основывающихся на ранее доказанных утверждениях или аксиомах. Так формируются *математические задачи*.

Что такое математическая задача?

Существуют разные определения этого понятия, например: ***математическая задача*** – это любое требование вычислить, построить, доказать, исследовать что-либо, или вопрос, равносильный такому требованию.

В каждой задаче что-то дано (условие) и что-то нужно доказать или найти (требование, вывод). Выполнить поставленное требование – и означает решить задачу. Отметим, что если истинность какого-либо, часто используемого математического утверждения установлена путем рассуждения (доказательства), то такое утверждение называют *теоремой*.

Можно ли утверждать, что для успешного решения геометрических задач и доказательства теорем достаточно свободно владеть всем теоретическим материалом?

Нет. Это не так. При хорошем знании теории следует овладеть еще и практическими навыками. А это возможно только в процессе решения задач, начиная с простейших и постепенно переходя к более сложным.

Математические задачи условно разделены на четыре вида, в соответствии с их требованиями: задачи на вычисление, доказательство, исследование и построение. С ними вы уже ознакомились в курсе планиметрии.

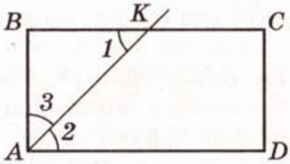
Приступая к решению задачи, следует выбрать метод. Методы делят:

а) по структуре – синтетический, аналитический, от противного и др.;

б) по использованию математического аппарата – алгебраический, векторный, координатный, метод площадей, метод геометрических преобразований и др.

Суть синтетического метода заключается в том, что, исходя из условия задачи или теоремы с использованием известных утверждений строится цепочка логических рассуждений, последнее из которых совпадает с требованием задачи. Приведем пример.

Задача 1



Биссектриса угла прямоугольника делит большую сторону на два отрезка – 7 см и 9 см. Найдите периметр этого прямоугольника.

Дано: $ABCD$ – прямоугольник; AK – биссектриса, $K \in BC$;
$BK = 7$ см, $KC = 9$ см (или $BK = 9$ см, $KC = 7$ см).

Найти: P_{ABCD}.

Решение	Почему именно так?
AK – биссектриса прямого угла BAD, $BC \parallel AD$, AK – секущая, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние разносторонние.	Пусть по условию AK – заданная биссектриса. Точка K разбивает отрезок BC на два отрезка BK и KC. Далее, учитывая параллельность противоположных сторон прямо-

AK – биссектриса, следовательно, $\angle 2 = \angle 3$. Таким образом, $\angle 1 = \angle 3$.

В $\triangle ABK$: $\angle 1 = \angle 3$, следовательно, $\triangle ABK$ – равнобедренный и $AB = BK$.

1. Если $BK = 7$ см, $KC = 9$ см, то $AB = BK = 7$ см и $BC = 16$ см.
$P_{ABCD} = (7 + 16) \cdot 2 = 46$ (см).

2. Если $BK = 9$ см, $KC = 7$ см, то $AB = BK = 9$ см и $BC = 16$ см.
$P_{ABCD} = (9 + 16) \cdot 2 = 50$ (см).

Ответ. 46 см или 50 см.

угольника и их пересечение секущей (AK – биссектриса), устанавливаем равность двух углов треугольника. Это определяет вид треугольника – равнобедренный, а значит, равность двух сторон. Т.е. $AB = BK$.

Если $BK = 7$ см, то $AB = 7$ см, $BC = 7 + 9 = 16$ (см); периметр:

$P = (7 + 16) \cdot 2 = 46$ (см).

Если $BK = 9$ см, то $AB = 9$ см, $BC = 7 + 9 = 16$ (см); периметр:

$P = (9 + 16) \cdot 2 = 50$ (см). Таким образом, периметр прямоугольника может быть 46 см или 50 см.

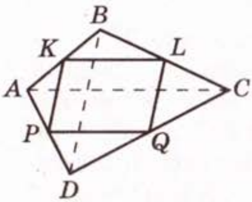
Эта задача является *опорной*, поскольку на такой идее строятся многие задачи и для параллелограмма, и для трапеции. У этих фигур биссектриса угла отсекает всегда равнобедренный треугольник.

Отметим, что сокращенное обозначение углов в виде $\angle 1$, $\angle 2$, ... упрощает запись и экономит время, поэтому в таких случаях им пользоваться удобнее.

Как видим, в процессе решения задачи 1 используются только известные геометрические утверждения и производятся соответствующие вычисления. Причем для каждой геометрической задачи такие рассуждения свои.

Суть аналитического метода состоит в том, что, исходя из требования (вывода) утверждения (теоремы или задачи) и опираясь на известное утверждение, строится цепочка логических рассуждений, которая показывает, что требование является следствием условия. Приведем пример.

Задача 2



Докажите, что середины сторон любого выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Дано: $ABCD$ – четырехугольник; $K \in AB$, $AK = KB$; $L \in BC$, $BL = LC$; $Q \in CD$, $CQ = QD$; $P \in AD$, $AP = PD$.

Доказать: $KLQP$ – параллелограмм.

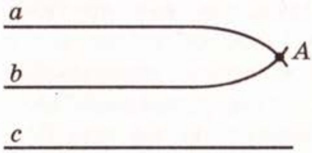
Доказательство	Почему именно так?
$KLQP$ – заданный четырехугольник. K, L, Q, P – середины соответствующих сторон. AC и BD – диагонали четырехугольника $ABCD$. В $\triangle ABC$: KL – средняя линия, следовательно, $KL \parallel AC$. В $\triangle ADC$: PQ – средняя линия, следовательно, $PQ \parallel AC$. Имеем: 1. $KL \parallel AC$ и $AC \parallel PQ$, следовательно, $KL \parallel PQ$ (по признаку параллельных прямых). 2. Аналогично $KP \parallel LQ$ как среднии линии треугольников ABD и C. Итак, в четырехугольнике $KLQP$ противоположные стороны параллельны, следовательно, он – параллелограмм, согласно признаку параллелограмма. Что и требовалось доказать (ч.т.д.).	Требование задачи: доказать. Это означает, что истинность утверждения следует подтвердить цепочкой рассуждений. Чтобы четырехугольник $KLQP$ был параллелограммом, достаточно показать, что его противоположные стороны параллельны. Для этого заданный четырехугольник разбиваем на два треугольника одной диагональю, а потом – второй. Средние линии одной пары треугольников параллельны диагонали AC, а второй пары – BD. (Отрезок, соединяющий середины двух сторон, является средней линией треугольника, которая имеет свойство: параллельна третьей стороне треугольника.) Отсюда, средние линии каждой пары треугольников параллельны между собой. Таким образом, получаем, что в четырехугольнике $KLQP$ противоположные стороны параллельны, следовательно, он – параллелограмм.

Отметим: доказательство того, что четырехугольник, вершины которого являются серединами произвольного выпуклого четырехугольника, – параллелограмм, можно проводить и другими методами.

Синтетический и *аналитический* методы называют также *прямыми* методами решения математических задач.

Чтобы решить задачу прямым методом, следует начать с анализа содержания задачи, от которого зависит выбор метода решения. Далее необходимо создать модель в виде рисунка и продолжить рассуждать над каждым действием, которые в совокупности образуют цепочку действий, ведущих либо от условия к требованию, либо от требования к условию.

Суть метода доказательства от противного состоит в том, что, имея утверждение, строим новое, возразив выводу данного. Формулируется утверждение. Исходя из вывода противоположного утверждения, строим цепочку истинных утверждений, пока не получим утверждение, которое противоречит либо условию, либо известной аксиоме или теореме, либо предположению. Таким образом приходим к выводу, что противоположное утверждение ошибочно, а потому исходное является истинным (тут действует логический закон: из двух противоположных утверждений одно истинное, другое ошибочное, третьего не дано). Рассмотрим пример.



Задача 3

Докажите утверждение: если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.

Строим противоположное утверждение: существуют две прямые, параллельные третьей и не параллельные между собой.

Доказательство	Почему именно так?
От противного. Предположим, что $a \parallel c$, $b \parallel c$, но $a \nparallel b$. Тогда $a \cap b = A$. Получили утверждение, которое противоречит аксиоме параллельности: через точку A на плоскости проходят две различные прямые, параллельные третьей. Следовательно, противоположное утверждение ошибочно, поэтому исходное утверждение – истинное. Т.е. две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу. Ч.т.д.	Исходим из вывода нового утверждения: пусть прямые a и b, параллельные третьей прямой c, не параллельны между собой. Тогда они пересекаются в некоторой точке A. Получили, что через точку проходят две различные прямые, параллельные третьей. Это противоречит аксиоме параллельности. Пришли к противоречию. Последнее утверждение ошибочно, следовательно, исходное утверждение – истинное.

Математическую задачу считают решенной, если: 1) записан ответ в виде числа, выражения, указан алгоритм построения рисунка, если это задача на вычисление, построение или исследование; 2) подтверждено сформулированное в задаче утверждение, если это задача на доказательство.

Метод от противного называют *непрямым* методом решения математических задач.

Рассмотрим некоторые другие методы решения геометрических задач, которые делят на виды по использованию математического аппарата.

Алгебраический метод решения задач

Решая задачу алгебраическим методом, следует уделить внимание таким этапам:

1. Моделирование текста задачи с помощью рисунка (в большинстве случаев).
2. Введение обозначений искомых величин или тех, которые приводят к искомым (чаще всего буквами латинского алфавита).
3. Составление уравнения или системы уравнений с использованием введенных определений и известных геометрических соотношений между искомыми и данными величинами.
4. Решение составленного уравнения или системы уравнений. Возврат к введенным обозначениям и определение искомых геометрических величин. По необходимости, выполнение исследования найденных решений.
5. Запись ответа.

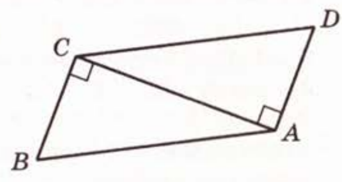
Задачи, в которых задана зависимость между двумя измерениями, сводятся к решению уравнения. Например, одна из сторон параллелограмма на 3 см длиннее другой, а периметр – 30 см. Нужно найти длины сторон параллелограмма. Тогда, введя переменную x как длину стороны этого параллелограмма, имеем длину второй стороны $(x - 3)$. Учитывая определение периметра параллелограмма и его известное значение, получаем уравнение:

$$(x + x - 3) \cdot 2 = 30.$$

Приведем другие примеры решения задач алгебраическим методом.

Задача 4

Периметр прямоугольного треугольника равен 36 см. Гипотенуза относится к катету как 5 : 3. Найдите стороны треугольника.



Дано: $\triangle ACB$ ($\angle C = 90°$); $P_\triangle = 36$ см; $AB : AC = 5 : 3$.

Найти: AB, AC и BC.

Решение	Почему именно так?
Обозначим коэффициент пропорциональности через k. Тогда $AB = 5k$, а $AC = 3k$. $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $25k^2 = 9k^2 + BC^2$,	$P_\triangle = 36$ см – единственное линейное измерение, с которым связаны стороны треугольника. $\dfrac{Гипотенуза}{Катет} = \dfrac{5}{3}$.

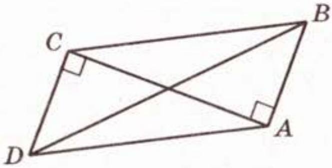
$BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$ $(BC > 0,\ k > 0)$.
$P_{\triangle} = AB + AC + BC$, или
$5k + 3k + 4k = 36$,
$12k = 36$, $k = 3$.
$AB = 5 \cdot 3 = 15$ (см),
$AC = 3 \cdot 3 = 9$ (см),
$BC = 4 \cdot 3 = 12$ (см).

Ответ. 15 см, 9 см и 12 см.

Пусть $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3} = \frac{5k}{3k}$, отсюда $AB = 5k$, $AC = 3k$.

$P_{\triangle} = AB + AC + BC$. Определить сторону BC можно по теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, отсюда $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$, $BC > 0$, $BC = 4k$. Метод решения – *алгебраический*, поскольку используется математическая модель – уравнение $5k + 3k + 4k = 36$.

Задача 5



В параллелограмме диагонали равны 16 см и 20 см. Меньшая из них перпендикулярна к его стороне. Найдите площадь этого параллелограмма.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм; $\angle A > \angle B$, $AC < BD$; $AC \perp AB$, $AC \perp CD$, $AC = 16$ см, $BD = 20$ см.

Найти: S_{ABCD}.

Решение

Пусть $ABCD$ – заданный параллелограмм, в котором $AC \perp CD$ и $AC \perp AB$.

Обозначим стороны параллелограмма:

$AB = x$, $BC = y$. Тогда имеем уравнение:

$2(x^2 + y^2) = 16^2 + 20^2$, отсюда

$$x^2 + y^2 = \frac{16^2 + 20^2}{2},$$

$x^2 + y^2 = 328$.

По теореме Пифагора из $\triangle CAB$ $(\angle A = 90°)$:

Почему именно так?

В ходе решения этой задачи сначала выбираем формулу для вычисления площади параллелограмма.

$S_{ABCD} = a \cdot h_a$, где a – основание параллелограмма, h_a – высота, проведенная к нему. $AC \perp AB$, поэтому AC является высотой параллелограмма, проведенной к сторонам AB или CD, длины которых неизвестны. Стороны параллелограмма связаны с его диагоналями формулой

$$(a^2 + b^2) \cdot 2 = d_1^2 + d_2^2.$$

Длины сторон параллелограмма являются неизвестными, поэтому, очевидно, следует составить

$AB^2 + AC^2 = BC^2$, т.е. имеем: $x^2 + 16^2 = y^2$ или $y^2 - x^2 = 16^2$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 328, \\ y^2 - x^2 = 256. \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - (y^2 - x^2) = 328 - 256$,

$2x^2 = 72$, $x^2 = 36$,

$(x > 0)$, $x = 6$.

$S_{ABCD} = AB \cdot AC =$
$= 6$ см $\cdot$ 16 см $= 96$ см^2.

Ответ. 96 см^2.

систему уравнений. Одно уравнение можно получить по вышеуказанной формуле, а второе – исходя из того, что диагональ параллелограмма перпендикулярна, имеем прямоугольный треугольник с двумя неизвестными сторонами (они же и стороны параллелограмма).

Отметим, что, принимая во внимание требование задачи, можно не искать обе стороны параллелограмма, а только, например, сторону AB.

Метод площадей

Если условие задачи содержит данные, по которым легко найти площадь одним из способов, то это делают в первую очередь. С помощью другого способа для вычисления площади этой самой фигуры делают второй шаг – составляют уравнение, в котором одно из линейных измерений неизвестно. Приравнивая площади, получают уравнение с одним неизвестным.

Задача 6

Стороны треугольника равны 13 см, 14 см и 15 см. Вычислите высоту, проведенную к стороне, которая имеет длину 14 см.

Решение

Пусть a, b, c – стороны некоторого $\triangle ABC$, причем $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см.

$a < b$ и $b < c$, h_b – высота, проведенная к средней стороне.

По формуле Герона:

$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

а по другой формуле:

$$S_\triangle = \frac{1}{2} b \cdot h_b.$$

$S_\triangle = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} =$

Почему именно так?

Имея три стороны треугольника a, b, c, можно найти его площадь по формуле Герона:

$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

С другой стороны, площадь треугольника можно найти по формулам:

$$S_\triangle = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c,$$

где h_i – высота, проведенная к

$= \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2} =$
$= \sqrt{3^2 \cdot 7^2 \cdot 4^2} = 3 \cdot 7 \cdot 4 =$
$= 84$ (см^2).

$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h_b = 7 \cdot h_b$,

$7 \cdot h_b = 84$, $h_b = 12$ (см).

Ответ. 12 см.

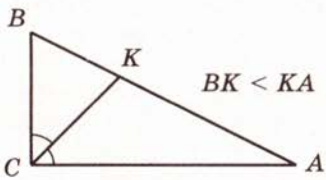
i-й стороне. Осталось выбрать сторону треугольника и получить уравнение:

$$\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot h_i = S_\triangle,$$

в котором неизвестным будет h_i.

Отметим, что хотя во время решения задачи 6 использовалось алгебраическое уравнение, более существенными в решении этой задачи являются рассуждения о площади фигуры. Поэтому такой метод получил название *метод площадей*.

Задача 7



Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 6 см. Найдите длину биссектрисы прямого угла.

Дано: $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$); CK – биссектриса; $BC = 3$ см, $AC = 6$ см.

Найти: CK.

Решение	Почему именно так?
Пусть ABC – данный прямоугольный треугольник ($\angle C = 90°$), в котором $BC = 3$ см, $AC = 6$ см и CK – биссектриса прямого угла. Введем обозначение: $CK = x$. Найдем площадь $\triangle ABC$ двумя разными способами: 1) $S_{\triangle ABC} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$ (см^2); 2) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCK} + S_{\triangle ACK}$; $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot \sin 45° +$ $+ \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot \sin 45° = \frac{3\sqrt{2}}{4}x +$	Площадь $\triangle ABC$ можно найти по формуле $S = \frac{ab}{2}$, где a и b – два катета. Биссектриса разделила $\triangle ABC$ на два треугольника, площади которых неизвестны. Их площади можно найти по формуле: $S_\triangle = \frac{1}{2}mn\sin\gamma$, где m и n – стороны треугольника, а γ – угол между ними, т.е. $\gamma = 45°$. $S_{\triangle BCK} = \frac{1}{2}CB \cdot CK \cdot \sin 45°$,

$$+\frac{6\sqrt{2}}{4}x = \frac{9\sqrt{2}x}{4}.$$

Приравниваем правые части равенств:

$$\frac{9\sqrt{2}x}{4} = 9.$$

Отсюда $x = 2\sqrt{2}$.

Т.е. $CK = 2\sqrt{2}$ см.

Ответ. $2\sqrt{2}$ см.

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$S_{\triangle ACK} = \frac{1}{2}CK \cdot CA \cdot \sin 45°.$$

Поскольку

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCK} + S_{\triangle ACK},$$

а биссектриса CK является неизвестной, то получим уравнение с одним неизвестным.

Метод векторов

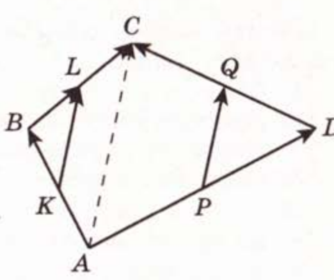
Чтобы применить метод векторов к решению задачи, необходимо выполнить следующие действия:

1. Перевести задачу на язык векторов, т.е. рассмотреть некоторые данные в ней отрезки как векторы и составить векторное равенство.
2. Осуществить преобразование для векторного равенства, пользуясь соответствующими свойствами действий над векторами и известными векторными равенствами.
3. Вернуться от векторного языка к геометрическому.
4. Записать ответ.

Метод векторов чаще всего используется при решении задач, в которых требуется доказать: параллельность прямых (отрезков), деление отрезка в определенном соотношении; что три точки лежат на одной прямой; что данный четырехугольник – параллелограмм (ромб, прямоугольник, квадрат, трапеция). Проиллюстрируем суть этого метода на примере решения задачи.

Задача 8

Докажите, что середины сторон любого выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.



Дано: $ABCD$ – четырехугольник;
$K \in AB, AK = KB$;
$L \in BC, BL = LC$;
$Q \in CD, CQ = QD$;
$P \in AD, AP = PD$.

Доказать: $KLQP$ – параллелограмм.

Доказательство	Почему именно так?
1. Переведем задачу на язык векторов, заменив отрезки векторами: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{KB}$. 2. Воспользуемся правилом треугольника для сложения векторов: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{KL}$. Учитывая, что $\overrightarrow{KB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (K – середина AB) и $\overrightarrow{BL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (L – середина BC), получаем равенство: $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$ $=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Поэтому $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Аналогично $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 3. Поэтому $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{PQ}$. Т.е. векторы одинаково направлены, лежат на параллельных прямых и имеют одинаковую длину. Это доказывает, что $KLQP$ – параллелограмм. Ч.т.д.	Переведя задачу на язык векторов, получаем требование задачи: доказать равность векторов $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{PQ}$. Воспользовавшись правилом треугольника для нахождения суммы векторов, имеем: $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Однако $\overrightarrow{KB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, поэтому $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Аналогично получаем, что $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Таким образом, $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{PQ}$, что и требовалось доказать.

Метод координат

Решая задачу координатным методом, следует выполнить такие действия:

1. Записать геометрическую задачу на языке координат.
2. Преобразовать выражение или вычислить его значение.
3. Перевести найденный результат на язык геометрии.
4. Записать ответ.

Методом координат чаще всего решают задачи:

– на нахождение геометрических мест точек;

– на доказательство зависимостей между линейными элементами геометрических фигур.

Решая задачу методом координат, необходимо рационально выбрать систему координат: данную фигуру следует разместить относительно осей координат таким образом, чтобы как можно больше координат нужных точек равнялось нулю, а также одному и тому же числу. Например, координаты вершин прямоугольника $ABCD$ можно выбрать так, как на рисунке 1.35:

$$A(0; 0), B(0; b), C(a; b), D(a; 0).$$

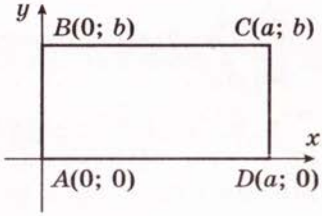
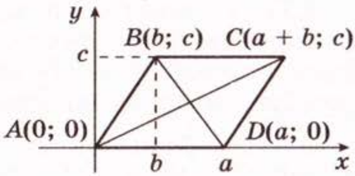


Рис. 1.35

Проиллюстрируем суть метода координат на примере.

Задача 9

Докажите, что когда у параллелограмма диагонали равны, то он прямоугольник.



Доказательство

Разместим параллелограмм в системе координат таким образом, чтобы его вершины имели координаты: $A(0; 0)$, $B(b; c)$, $C(a+b; c)$, $D(a; 0)$, причем $a > 0$, $b \geqslant 0$, $c > 0$. По условию $AC = BD$. Выразим расстояние между точками A и C, B и D через их координаты:

$$AC = \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2},\ BD = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}.$$

Тогда $\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$, или

$(a+b-0)^2 + (c-0)^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2$, отсюда $4ab = 0$.

Поскольку $a > 0$, то $b = 0$, а это означает, что точка $B(b; c)$ лежит на оси Oy. Поэтому угол BAD прямой. Отсюда следует, что параллелограмм $ABCD$ – прямоугольник.

Метод геометрических преобразований: метод поворота, метод симметрии, метод параллельного переноса, метод гомотетии.

Решая задачи методом геометрических преобразований, наряду с данными фигурами рассматривают новые, полученные из данных с помощью определенного преобразования. Выясняют свойства новых фигур, переносят эти свойства на данные фигуры, а затем находят способ решения задачи.

Говорят, что задачи, решенные методами векторов, координат, геометрических преобразований, площадей и другими методами, в которых используется больше свойств геометрических фигур, решены *геометрическими методами*.

Упражнения

1.70°. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 20 см, сторона $AB = 5$ см. Найдите длину другой стороны параллелограмма. Выберите уравнение, которое является моделью данной задачи.

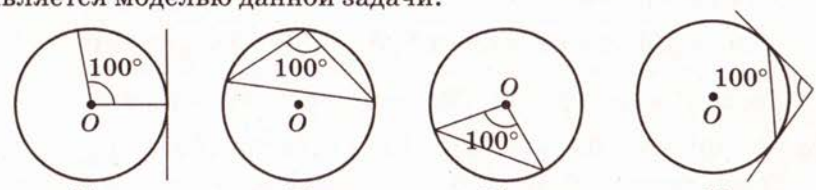
А) $x + 5 = 20$; В) $3x + 5 = 20$; Д) $2x + 5 = 10$.
Б) $2x + 5 = 20$; Г) $(x + 5) \cdot 2 = 20$;

1.71°. Периметр параллелограмма со сторонами a см и b см равен 50 см. Найдите стороны параллелограмма. Идентифицируйте каждому условию алгебраическое уравнение, которое может быть моделью полученной задачи.

А) $a : b = 2 : 3$; 1) $(x + 3 + x) \cdot 2 = 50$;
Б) $a > b$ на 3 см; 2) $(x - 2 + x) \cdot 2 = 50$;
В) $a > b$ в 2 раза; 3) $(x + 3x) \cdot 2 = 50$;
Г) $a < b$ на 2 см; 4) $(2x + 3x) \cdot 2 = 50$;
Д) $a < b$ в 3 раза. 5) $(x + 2x) \cdot 2 = 50$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

1.72°. Центральный угол опирается на хорду, стягивающую дугу 100°. Найдите углы треугольника, образованного сторонами центрального угла и хордой. Укажите рисунок, который является моделью данной задачи.



А) Б) В) Г)

1.73°. В окружности с центром O проведены диаметры AB и CD (рис. 1.36). Угол AOC в 17 раз меньше суммы других трех образовавшихся углов. Найдите вписанный угол ABC.

А) 20°; Б) 40°; В) 10°; Г) 80°; Д) 160°.

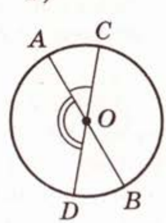


Рис. 1.36

1.74°. Найдите катет, прилежащий к углу 60°, прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 10 см.

А) $5\sqrt{3}$ см; Б) 5 см; В) $10\sqrt{3}$ см; Г) $2\sqrt{5}$ см; Д) $5\sqrt{2}$ см.

1.75°. В равностороннем треугольнике ABC к основанию AC проведена высота BH. Известно, что $P_{\triangle ABC} = 18$ см, $P_{\triangle ABH} = 12$ см и $AB : AC = 5 : 8$. Найдите отношение высоты равнобедренного треугольника BH к его основанию AC.

А) $\frac{3}{2}$; Б) $\frac{3}{8}$; В) $\frac{1}{2}$; Г) $\frac{4}{5}$; Д) $\frac{5}{6}$.

1.76°. В прямоугольнике (рис. 1.37), диагональ которого равна 13 см, обозначены точки M, N, K и L – середины его сторон. Выберите геометрические утверждения, необходимые для нахождения периметра четырехугольника $MNKL$.

1) Определение прямоугольника;
2) свойства прямоугольника;
3) свойства прямоугольного треугольника;
4) определение треугольника;
5) определение средней линии треугольника;
6) свойства средней линии треугольника;
7) признаки параллельности прямых.

А) 1, 2, 4 и 7; Б) 2, 4, 5 и 7; В) 2, 5 и 6; Г) 3, 5 и 6; Д) 3, 6 и 7.

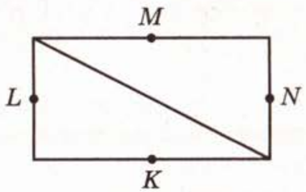


Рис. 1.37

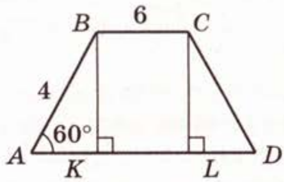


Рис. 1.38

1.77°°. Найдите радиус окружности, описанной вокруг правильного треугольника со стороной 24 см.

А) $4\sqrt{2}$ см; В) 12 см; Д) $8\sqrt{3}$ см.

Б) $12\sqrt{3}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см;

1.78°°. Вычислите площадь параллелограмма, две стороны которого равны 9 см и $5\sqrt{2}$ см, а угол между ними – 45°.

А) $45\sqrt{2}$ см^2; В) 45 см^2; Д) $15\sqrt{2}$ см^2.

Б) $22{,}5\sqrt{2}$ см^2; Г) 22,5 см^2;

1.79°°. Выберите три последовательности правильного нахождения площади равнобокой трапеции $ABCD$ (рис. 1.38).

1) Использование аксиомы измерения отрезков;
2) нахождение сторон полученного треугольника;
3) доказательство равенства двух образованных треугольников;
4) установление вида четырехугольника;
5) использование свойств четырехугольника $BCLK$.

А) 1, 4, 5, 2 и 3; В) 5, 4, 3, 1 и 2; Д) 4, 5, 2, 3 и 1.

Б) 2, 3, 4, 5 и 1; Г) 3, 2, 4, 5 и 1;

1.80°°. Найдите радиус вписанной в ромб окружности, если диагонали ромба равны 6 см и 8 см.

А) 4,8 см; Б) 3,6 см; В) 2,4 см; Г) 1,8 см; Д) 1,2 см.

1.81•. В треугольнике ABC проведен параллельно AC отрезок DE ($D \in AB$, $E \in BC$). Найдите сторону AB треугольника ABC, если известно, что $DE = 4$ см, $DB = 6$ см, $AC = 10$ см.

1.82•. Высоты параллелограмма равны 8 см и 12 см, а угол между ними – 60°. Найдите площадь параллелограмма.

1.83•. Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а медиана, проведенная к нему, – 5 см. Найдите гипотенузу треугольника.

1.84•. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 30 см, а радиус описанной вокруг него окружности – 17 см. Вычислите площадь данного треугольника.

1.85••. Стороны треугольника равны 29 см, 25 см и 6 см. Найдите длину высоты треугольника, проведенной к наименьшей стороне.

1.86••. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса острого угла делит противолежащий катет на отрезки длиной 24 см и 51 см.

1.87••. В треугольнике одна сторона равна 24 см, медиана, проведенная к ней, – 14 см, а разность двух других сторон – 8 см. Вычислите периметр треугольника.

1.88••. В треугольнике две стороны и медиана, проведенная из вершины угла, образованного ими, соответственно равны 14 см, 22 см и 14 см. Вычислите периметр треугольника.

1.89••. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = 0$.

1.90••. Докажите, что середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами ромба. (Используйте различные методы решения.)

1.91••. В квадрат вписана окружность радиуса R. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до сторон квадрата постоянна и равна $6R^2$. (Используйте различные методы решения.)

Геометрия – одна из древнейших математических наук. Первые геометрические факты отображены в вавилонских клинописных таблицах, египетских папирусах и других источниках VI–III в. до н.э.

Название науки **«геометрия»** происходит от двух древнегреческих слов: «geo» (гео) – *земля* и «metreo» (метрео) – *измерение*. В развитии геометрии выделяют четыре основных периода.

Первый период **– зарождение геометрии как науки** – протекал в Древнем Египте, Вавилоне и Греции примерно до V в. до н.э. Именно тогда ученые установили первые общие закономерности в природе и воспроизвели их в зависимостях между геометрическими величинами. Основной проблемой геометров того периода было вычисление некоторых площадей и объемов. Логических обоснований в задачах было очень мало. В основном геометрические свойства доказывались практическими наблюдениями, поиском закономерностей, экспериментальным путем, т.е. эмпирически.

Второй период **– формирование геометрии в структурную систему.** В VII в. до н.э. центром развития геометрии стала Греция. Древние геометры работали над систематизацией накопленных и новых знаний, устанавливали связи между геометрическими фактами, разрабатывали приемы доказательств. Значительный вклад в развитие математики, в частности геометрии, в этот период сделали Пифагор, Платон, Аристотель, Фалес, Анаксигор, Демокрит, Евклид. В книге «Начала» Евклида сформулированы понятия о фигуре, о геометрическом утверждении и доказательстве. Они остаются актуальными и сегодня.

Третий период **– дополнение геометрии новыми методами** – начался в первой половине XVII в., когда французский ученый Рене Декарт разработал метод координат, связавший евклидову геометрию с алгеброй и математическим анализом. Использование методов этих наук в геометрии дало возможность создать новые науки – аналитическую, а позднее – дифференциальную геометрию, проективную и начертательную геометрию. Таким образом, евклидова геометрия поднялась на качественно новую ступень по сравнению с геометрией древних: в ней рассматривались гораздо более общие фигуры и использовались новые методы.

Четвертый период **– создание неевклидовой геометрии** – связан с именем российского ученого Николая Ивановича Лобачевского, открывшего в 1826 г. возможности для создания неевклидовых геометрий. Им была построена совершенно новая, неевклидова геометрия, которую теперь называют геометрией Лобачевского.

Особенность начатого Н.И. Лобачевским периода в истории геометрии состоит в том, что после его открытия начали развиваться новые геометрические теории, новые «геометрии» и соответствующие обобщения самого предмета геометрии. В этот период возникло понятие о разновидностях пространства (термин «пространство» в науке может означать как обычное реальное пространство, так и абстрактное, «математическое», пространство). Некоторые теории создавались внутри евклидовой геометрии, как ее особые разделы, а позднее приобретали статус самостоятельных. Другие, подобно геометрии Лобачевского, вводили изменения аксиом и структурировались на основе этих изменений, обобщая и строя науку.

Именно так была создана геометрия Римана (Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1866) – немецкий ученый) и ее обобщения (1854–1866), получившие применение в теории относительности, механике и др.

В школьном курсе мы изучаем **геометрию Евклида**. Перевел труд древнегреческого ученого «Начала» украинский математик Михаил Егорович Ващенко-Захарченко (1825–1912) в 1880 г. На основе этой книги написано множество учебников по геометрии. Например, преподавание геометрии в советской школе почти до 1982 г. осуществлялось по учебнику российского педагога-математика А.П. Киселева (1852–1940). В 1980-х годах украинским математиком А.В. Погореловым было создано новое учебное пособие. Его и сегодня можно найти в библиотеках общеобразовательных учебных заведений.

Современная геометрия является многовекторной и стремительно развивается в совокупностях математических теорий, изучающих различные пространства и их фигуры. Значительный вклад в геометрию сделали и наши соотечественники: М.В. Остроградский, А.М. Астряб, А.П. Киселев, А.Д. Александров, А.Н. Колмогоров, А.В. Погорелов и др.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие фигуры на плоскости являются основными?
2. Какие понятия являются определяемыми, а какие – неопределяемыми?
3. Что такое аксиома; теорема?
4. Каковы основные свойства принадлежности точек и прямых?
5. Какой отрезок принадлежит полуплоскости?
6. Каковы основные свойства взаимного расположения точек на прямой; на плоскости?
7. Каковы основные свойства измерения отрезков; углов?
8. Каковы основные свойства откладывания отрезков; углов?
9. Какое свойство имеют параллельные прямые?
10. Каково структурное построение планиметрии?

11. В каком случае три точки плоскости будут расположены на одной прямой?
12. Что такое определение? Приведите примеры определений.
13. Как могут быть расположены три точки на плоскости?
14. Какие прямые называются параллельными; перпендикулярными?
15. Как определить угол между пересекающимися прямыми?
16. Какие углы называются смежными; вертикальными?
17. Какое свойство имеют смежные углы; вертикальные?
18. Как доказывают параллельность прямых?
19. Как могут быть расположены окружность и прямая?
20. Какие свойства имеет касательная к окружности?
21. Какие многоугольники называются плоскими?
22. Какие углы называются вписанными в окружность?
23. Какова зависимость между вписанным и центральным углами?
24. Как найти центр окружности, вписанной в треугольник и описанной вокруг него?
25. Какие общие формулы связывают сторону правильного n-угольника с радиусом вписанной окружности?
26. Какие общие формулы связывают сторону правильного n-угольника с радиусом описанной окружности?
27. Каково свойство перпендикуляра, проведенного через середину хорды окружности?
28. Какова зависимость между катетами и гипотенузой в прямоугольном треугольнике?
29. Какое свойство имеет медиана треугольника?
30. Каковы свойства биссектрисы угла треугольника?
31. Как по тройке элементов треугольника, среди которых один линейный, можно его решить?
32. Какие теоремы помогают при решении треугольника?
33. Как определить вид четырехугольника?
34. Как проверить, что данный четырехугольник является параллелограммом; прямоугольником; ромбом; квадратом; трапецией?
35. Какие условия определяют существование треугольника?
36. Какие многоугольники являются равными, а какие – подобными?
37. Какие формулы можно использовать для нахождения площади параллелограмма; прямоугольника; ромба; квадрата; трапеции?
38. Какие методы решения задач вы знаете?
39. Как решить геометрическую задачу алгебраическим методом?

Тест для самоконтроля

Часть 1

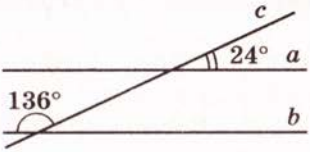
Задания 1–16 содержат варианты ответов, из которых правильным является только *один* или *конкретное количество*. Выберите правильный ответ.

1°. Определите величины углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, если один из них равен 26°.

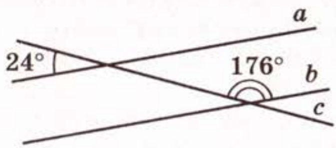
А) 64°, 116°, 64°; В) 26°, 116°, 116°; Д) 141°, 52°, 141°.

Б) 126°, 64°, 126°; Г) 26°, 154°, 154°;

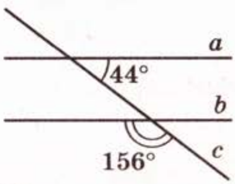
2°. Укажите рисунок, по данным которого можно сделать вывод, что прямые a и b параллельны.



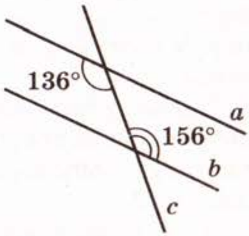
А)



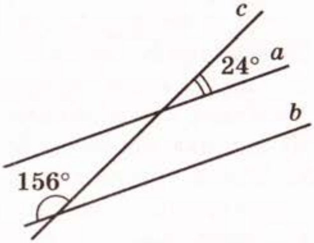
Б)



В)



Г)



Д)

3°. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD, пересекаясь в точке O, образуют $\angle AOB = 84°$ (рис. 1.39). Найдите величину $\angle OBC$.

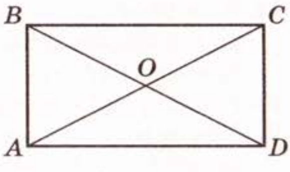


Рис. 1.39

А) 21°; В) 48°; Д) 63°.

Б) 42°; Г) 24°;

4°. Найдите площадь квадрата, вокруг которого описана окружность радиуса R.

А) $R^2\sqrt{2}$ см²; В) $2R^2$ см²; Д) $4R^2$ см².

Б) $\frac{R^2\sqrt{2}}{2}$ см²; Г) $2R^2\sqrt{2}$ см²;

5°. Найдите площадь трапеции, средняя линия которой равна 12 см, а высота – 6 см.

А) 144 см^2; Б) 18 см^2; В) 54 см^2; Г) 36 см^2; Д) 72 см^2.

6°. Вычислите периметр равнобедренного треугольника, если окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит его боковую сторону на отрезки длиной 4 см и 5 см, считая от основания.

А) 23 см; Б) 22 см; В) 26 см; Г) 27 см; Д) 28 см.

7°. Острый угол прямоугольной трапеции в 5 раз меньше ее тупого угла. Найдите величину тупого угла.

А) 120°; Б) 135°; В) 144°; Г) 150°; Д) 160°.

8°. Найдите соотношение углов, которые образованы касательной, проведенной через точку C некоторой окружности, и двумя хордами CB и CA, если известно, что AB – диаметр и $\angle COB = 36°$ (рис. 1.40).

А) 1 : 5; Б) 1 : 6; В) 1 : 7; Г) 1 : 4; Д) 1 : 2.

9°°. Периметр квадрата равен $20\sqrt{2}$ см. Определите радиус окружности, описанной вокруг квадрата.

А) 2,5 см; Б) 4 см; В) 5 см; Г) 10 см; Д) 20 см.

10°°. Найдите разность углов β и α, если известно, что хорда $AB = R$, где R – радиус окружности (рис. 1.41).

А) 30°; Б) 45°; В) 60°; Г) 90°; Д) 120°.

11°°. Радиус окружности, описанной вокруг квадрата, равен $8\sqrt{2}$ см. Вычислите периметр квадрата.

А) 32 см; Б) $32\sqrt{2}$ см; В) 16 см; Г) 64 см; Д) $16\sqrt{2}$ см.

12°°. Найдите площадь заштрихованной части фигуры (рис. 1.42).

А) $(2\pi - 2)$ см^2; В) $(8 - 2\pi)$ см^2; Д) $(4 - 2\pi)$ см^2.
Б) $(2 - 2\pi)$ см^2; Г) $(2\pi - 8)$ см^2;

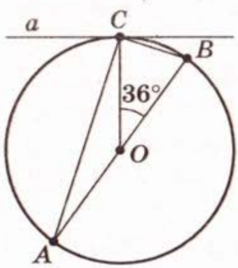


Рис. 1.40

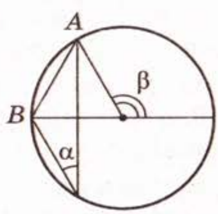


Рис. 1.41

Рис. 1.42

13°°. Определите градусную меру угла x (рис. 1.43).

А) 120°; В) 75°; Д) 45°.
Б) 60°; Г) 105°;

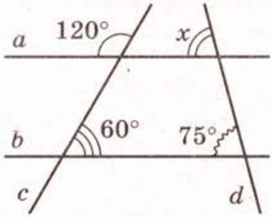


Рис. 1.43

14°°. В окружности, радиус которой равен 13 см, проведена хорда длиной 24 см. Найдите расстояние от центра окружности до данной хорды.

А) 10 см; В) 13 см; Д) 1 см.
Б) 12 см; Г) 5 см;

15°°. Найдите площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 20 см, а один из катетов – 16 см.

А) 96 см^2; Б) 120 см^2; В) 160 см^2; Г) 192 см^2; Д) 240 см^2.

16°°. Вычислите площадь треугольника, две стороны которого равны $6\sqrt{2}$ см и 8 см, а угол между ними – 45°.

А) 48 см^2; Б) 24 см^2; В) 96 см^2; Г) 12 см^2; Д) $12\sqrt{2}$ см^2.

● ***Часть 2***

Выполните задания 17–28 с краткой записью хода рассуждений.

17•. Найдите процентное соотношение большего из смежных углов к меньшему, если сумма трех углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 240°.

18•. Найдите сумму двух острых углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, если один из них в 3 раза больше другого.

19•. Из точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды длиной 8 см и 15 см. Найдите радиус окружности.

20•. Из точки окружности проведены две хорды, образующие угол 30°. Найдите длину отрезка, соединяющего их концы, если радиус окружности равен 5 см.

21•. Хорда длиной 8 см отдалена от центра окружности на 4 см. Найдите длину окружности.

22•. Сторона правильного шестиугольника равна $6\sqrt{3}$ см. Найдите радиус окружности, вписанной в шестиугольник.

23•. Боковые стороны трапеции, описанной вокруг окружности, относятся как 7 : 9, а средняя линия равна 32 см. Найдите боковые стороны трапеции.

24•. В окружность радиуса 4 см вписана трапеция, диагональ которой является биссектрисой острого угла и образует с меньшим основанием угол 30°. Найдите высоту трапеции.

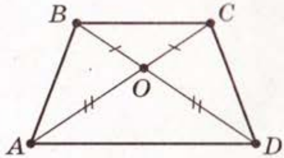


Рис. 1.44

25•. Известно, что два отрезка AC и BD пересекаются в точке O, причем $AO = OD$, $CO = BO$, $BD = 20$ см, $CD = 14$ см (рис. 1.44). Найдите периметр треугольника AOB.

26•. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$, $BC = 3\sqrt{6}$ см. Найдите длину стороны AC.

27•. Диагонали ромба относятся как 5 : 12, а его площадь равна 120 см^2. Найдите периметр ромба.

28•. Высота BD треугольника ABC делит его сторону AC на отрезки AD и CD. Найдите длину отрезка CD, если $AB = 2\sqrt{3}$ см, $BC = 5$ см, $\angle A = 60°$.

Часть 3

Выполните задания 29–32 с полным обоснованием.

29••. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 26 см, а высота, опущенная на основу, – 10 см. Определите радиусы окружностей, вписанной в треугольник и описанной вокруг него.

30••. Биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки в отношении 5 : 12. Вычислите периметр треугольника, если медиана, проведенная к гипотенузе, равна 26 см.

31••. Две стороны треугольника равны 3 см и 5 см, а медиана, проведенная к третьей стороне треугольника, – 3,5 см. Найдите угол треугольника, ограниченного данными сторонами.

32••. Диагональ равнобокой трапеции делит высоту, проведенную из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 12 см, а боковая сторона трапеции равна ее меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

МОДУЛЬ 2

Введение в стереометрию

Аксиомы обладают наивысшей степенью общности и представляют начало всего.

Аристотель

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ МОДУЛЯ

- *Основные понятия стереометрии*
- *Аксиомы стереометрии*
- *Следствия из аксиом стереометрии*
- *Пространственные геометрические фигуры*
- *Построение простейших сечений:*
  - *куба*
  - *прямоугольного параллелепипеда*
  - *пирамиды*

Освоив этот модуль, вы узнаете:

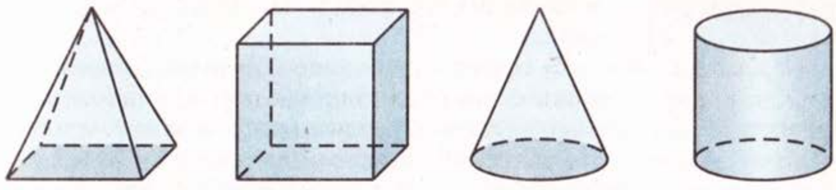
- какие понятия в стереометрии являются определяемыми, а какие – неопределяемыми;
- каково логическое построение стереометрии;
- какие аксиомы заложены в структурное строение стереометрии;
- какие аксиомы влияют на дальнейшее построение геометрии;
- какие свойства имеют простейшие фигуры пространства;
- как определяется единственная плоскость;
- чем отличаются плоские фигуры от неплоских;
- как выполняют сечение фигуры;
- как построить сечение куба, пирамиды, параллелепипеда плоскостью, проходящей через три точки;
- как построить сечение куба, пирамиды, параллелепипеда плоскостью, проходящей через прямую и точку вне ее.

§ 2.1. Основные понятия стереометрии. Аксиомы стереометрии

Напомним, что геометрия – это наука о свойствах геометрических фигур, которая состоит из двух частей: *планиметрии* и *стереометрии*. Планиметрию – раздел геометрии, изучающий свойства фигур на плоскости, вы изучили. В модуле 1 систематизированы и обобщены факты и свойства таких фигур. Стереометрию – раздел геометрии о свойствах фигур в пространстве – изучают в старших классах. Схематически это выглядит так:

Фигуры, которые изучаются в стереометрии, называются *геометрическими* или *пространственными*. На рисунке 2.1

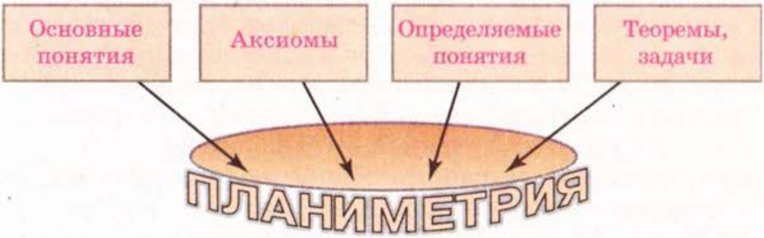
изображены некоторые пространственные фигуры: пирамида, параллелепипед, конус, цилиндр.



а *б* *в* *г*

Рис. 2.1

Напомним структуру логического построения планиметрии:



Поскольку стереометрия также является составляющей геометрии, то строится она по тому же принципу. Некоторые понятия принимаются как *основные* (*простейшие*, *неопределяемые*). Для них формулируются основные свойства – *аксиомы*, а далее рассматриваются другие, определяемые, понятия и их свойства.

Все фигуры, которые рассматривались на плоскости, можно рассматривать и в пространстве. Поэтому основные фигуры (понятия) планиметрии – точка и прямая – автоматически становятся основными фигурами стереометрии. Описываются они так же. В пространстве рассматривается еще одна основная фигура – *плоскость*. Ее можно представить как идеально гладкую поверхность доски или поверхность листа бумаги, которые продолжены во все стороны до бесконечности. Плоскость также понимают как множество точек.

На базе основных понятий определяются другие основные определяемые понятия: расстояние между точками, отрезок, луч, треугольник и т.д.

Прямая – подмножество точек плоскости, отрезок – подмножество точек прямой. Некоторые подмножества точек плоскости являются плоским треугольником, четырехугольником и т.д., а некоторые – неплоскими фигурами. Пространство состоит из бесконечного множества точек.

Итак, основными фигурами (понятиями) в стереометрии являются *точка*, *прямая* и *плоскость*. Эти понятия называют *неопределяемыми*. Каждая пространственная геометрическая фигура состоит из множества точек. Рассмотрим куб на рисунке 2.2.

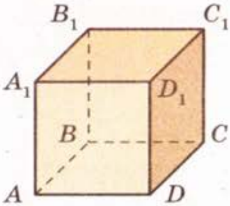


Рис. 2.2

У него 8 вершин (точки), 12 ребер (части прямых) и 6 граней (части плоскостей). Гранями куба являются квадраты – фигуры планиметрии.

В стереометрии рассматривают более одной плоскости. Пространство состоит из бесконечного количества плоскостей, прямых и точек. Поэтому все аксиомы планиметрии (см. § 1.1) имеют место и в стереометрии. Однако при этом ***некоторые из них приобретают другой смысл***. Так, аксиома I_1 в планиметрии утверждает, что существуют точки вне данной прямой ***на плоскости***, в которой лежит прямая. Именно в таком понимании эта аксиома применялась в процессе построения геометрии на плоскости. Теперь эта аксиома утверждает вообще существование точек, не лежащих на данной прямой, ***в пространстве***. Из нее непосредственно не вытекает, что существуют точки вне данной прямой на плоскости, в которой лежит прямая. Это требует уже специального доказательства.

Формулирование некоторых аксиом планиметрии как аксиом стереометрии требует уточнения. Это касается, например, аксиом II_2, IV_2, IV_3, V_1. Приведем эти уточнения.

II_2. Прямая, ***принадлежащая плоскости***, разбивает эту плоскость на две полуплоскости.

IV_2. От любой полупрямой ***на содержащей ее плоскости*** в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

IV_3. Каков бы ни был треугольник, существует треугольник, который равен ему ***в данной плоскости*** в заданном расположении относительно данной полупрямой ***в этой плоскости***.

V_1. ***На плоскости*** через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Понятно, что с увеличением количества основных фигур появляются новые аксиомы об их свойствах:

1. *Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей* (рис. 2.3, *а*).

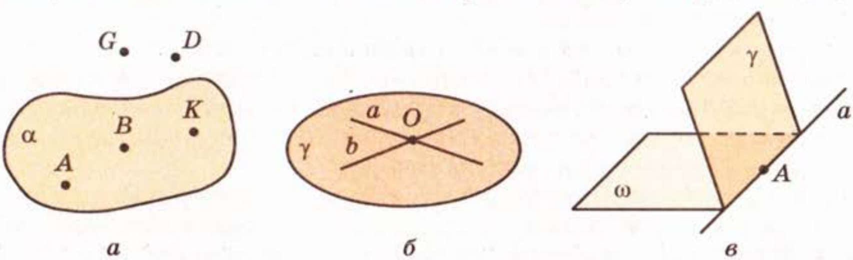


Рис. 2.3

2. *Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну* (рис. 2.3, *б*).

3. *Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку* (рис. 2.3, *в*).

Аксиома 1 указывает на то, что любая плоскость все пространство не исчерпывает. Существуют точки пространства, которые ей не принадлежат. Аксиома 2 утверждает, что две прямые, пересекающиеся в пространстве, всегда определяют одну плоскость. Из аксиомы 3 следует, что если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют множество общих точек, образующих прямую, которая содержит эту точку.

Эти три аксиомы дополняют пять групп аксиом планиметрии и вместе с ними образуют аксиоматику стереометрии. Аксиому 1 стереометрии отнесем к группе *аксиом принадлежности* (обозначим I_3), а аксиомы 2 и 3 – к группе *аксиом взаимного расположения* (соответственно обозначим II_3, II_4).

Плоскости обозначаются строчными буквами греческого алфавита – α, β, γ, ...; точки – большими буквами латинского алфавита – A, B, C, ...; прямые – малыми буквами латинского алфавита – a, b, c, ... или двумя прописными буквами латинского алфавита – AB, CD, ...

Для кратких записей утверждений используют символы «$\in$» – принадлежит, «$\notin$» – не принадлежит, «$\subset$» – подмножество и т.д. Краткие записи взаимного расположения точек, прямых и плоскостей:

1. Точка A принадлежит прямой a (точка A лежит на прямой a, прямая a проходит через точку A). Обозначение: $A \in a$.

2. Точка A не принадлежит прямой a (точка A не лежит на прямой a, прямая a не проходит через точку A). Обозначение: $A \notin a$.

3. Точка A принадлежит плоскости α (точка A лежит на плоскости α, плоскость α проходит через точку A). Обозначение: $A \in \alpha$.

4. Прямая a принадлежит плоскости α (прямая a лежит на плоскости α, плоскость α проходит через прямую a). Обозначение: $a \subset \alpha$.

Итак, используя рисунок 2.3, аксиомы можно записать:

I_3. Существуют точки $\{A, B, K, ...\} \in \alpha$ и точки $\{G, D, ...\} \notin \alpha$.

II_3. Если $a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$ и $a \cap b = O$, то γ – единственная.

II_4. Если $A \in \omega$ и $A \in \gamma$, то $\omega \cap \gamma = a$, причем $A \in a$.

Плоскости изображают по-разному. На рисунке 2.4 показаны некоторые примеры различных изображений плоскостей.

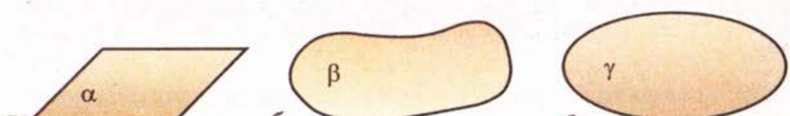


Рис. 2.4

Далее в стереометрии мы будем использовать все определяемые понятия планиметрии, дополнять их новыми, собственно стереометрическими, формулировать и доказывать свойства пространственных фигур.

Как видим, логическое построение планиметрии и стереометрии одинаково, отличаются они лишь некоторым содержанием основных понятий, аксиом, определений, теорем.

Задача 1

Точки A, B, C, D не лежат на одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.

Доказательство

Докажем методом от противного. Допустим, что прямые AB и CD пересекаются (рис. 2.5). Тогда, по аксиоме II_3, через них можно провести плоскость, которой принадлежат эти прямые. Это означает, что точки A, B, C, D также принадлежат этой плоскости, что противоречит условию. Предположение неверно. Прямые AB и CD не пересекаются, что и требовалось доказать.

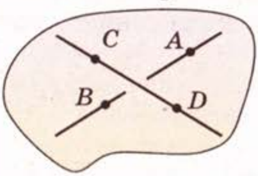


Рис. 2.5

Заметим, что школьный курс геометрии посвящен *евклидовой* геометрии. Несмотря на то что с течением времени геометрия Евклида была существенно дополнена и откорректирована, ее по-прежнему называют именем древнего ученого. Такое уважение вызвано широтой практического применения евклидовой геометрии. Она используется в технических науках, картографии, геодезии, астрономии и др.

Упражнения

2.1°. Укажите количество точек, принадлежащих плоскости ω (рис. 2.6).

А) Одна; Б) две; В) три; Г) 2012; Д) сколько угодно.

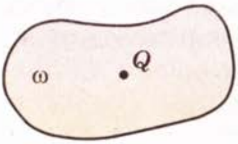


Рис. 2.6

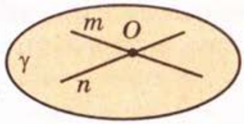


Рис. 2.7

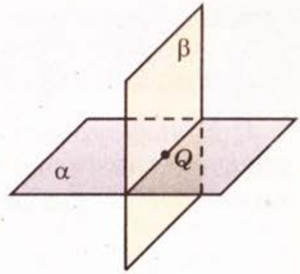


Рис. 2.8

2.2°. На рисунке 2.7 изображены две прямые m и n, которые пересекаются в точке O и определяют плоскость γ. Укажите, какое количество прямых, проходящих через точку O, лежит на плоскости γ.

А) Ни одной; В) две; Д) сколько угодно.
Б) одна; Г) три;

2.3°. Выберите для двух различных плоскостей α и β одинаковые по содержанию утверждения.

1) Плоскости α и β пересекаются;
2) плоскости α и β имеют только одну общую точку;
3) плоскости α и β имеют общую точку;
4) плоскости α и β имеют не более двух общих точек;
5) плоскости α и β имеют общую прямую.

А) 1, 2 и 4; Б) 1, 3 и 5; В) 2, 4 и 5; Г) 2, 3 и 4; Д) 1, 3 и 4.

2.4°. Две различные плоскости имеют общую точку Q. Определите, сколько прямых, проходящих через точку Q, являются общими для плоскостей α и β (рис. 2.8).

А) Одна; В) три; Д) бесконечное количество.
Б) две; Г) ни одной;

2.5°. Определите, сколько общих прямых могут иметь пересекающиеся плоскости.

А) Одна; В) три; Д) десять.
Б) две; Г) бесконечное количество;

2.6°°. Докажите, что две прямые в пространстве не могут пересекаться более чем в одной точке.

2.7°°. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

2.8•. Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой a, и прямая b, которая лежит в одной из этих плоскостей и пересекает другую. Докажите, что прямые a и b пересекаются.

2.9••. Даны три различные плоскости, которые попарно пересекаются. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.

§ 2.2. Следствия из аксиом стереометрии

Проанализировав все сказанное ранее, можно утверждать, что логическое построение геометрии имеет следующий вид:

ГЕОМЕТРИЯ

Основные понятия	Аксиомы	Определяемые понятия	Теоремы, задачи

Важное место в геометрии занимают аксиомы. Они выражают наиболее существенные свойства основных геометрических фигур. Все остальные свойства геометрических фигур устанавливаются рассуждениями, опирающимися на аксиомы или ранее доказанные утверждения, которые опираются на аксиомы. Такие рассуждения называют ***доказательствами***. Утверждение, истинность которого доказана и которое используют для доказательства других утверждений, называют ***теоремой***. Простейшими из них являются утверждения для основных фигур стереометрии. Они называются ***следствиями из аксиом стереометрии***. Рассмотрим теоремы, которые являются следствиями из аксиом стереометрии.

Теорема 1

Через прямую и точку, не принадлежащую ей, можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство. Пусть BC – данная прямая и A – точка, не принадлежащая ей (рис. 2.9). Через точки A и B проведем прямую b. Прямые BC и b различны и пересекаются в точке B. По аксиоме II_3 через них можно провести плоскость α. Докажем, что она единственная, методом от противного. Допустим, что существует другая плоскость β, которая содержит прямую BC и точку A. Тогда, согласно аксиоме II_4, плоскости α и β пересекаются по общей прямой, которой принадлежат точки A, B, C, что противоречит условию. Предположение неверно. Плоскость α – единственная. *Теорема доказана.*

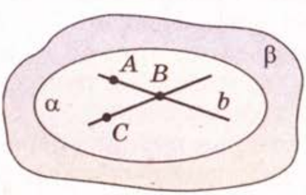


Рис. 2.9

Теорема 2

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.

Доказательство. Пусть заданы прямая a, плоскость α и точки A и B прямой a, принадлежащие α (рис. 2.10). Выберем точку C, которая не принадлежит прямой a. Через точку C и прямую a проведем плоскость β. Если α и β совпадут, то прямая a принадлежит плоскости α. Если же плоскости α и β различны и имеют две общие точки A и B, то они пересекаются по прямой a_1, содержащей эти точки. Поэтому через две точки A и B проходят две прямые a и a_1, что противоречит аксиоме принадлежности I_2. Поэтому a и a_1 – совпадают. Однако поскольку a_1 принадлежит плоскости α, то и прямая a также принадлежит α. *Теорема доказана.*

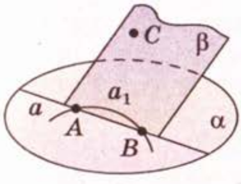


Рис. 2.10

Теорема 3

Через три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Доказательство. Пусть A, B, C – заданные точки (рис. 2.11). Проведем через точки A и C прямую b, а через точки A и B – прямую a. Прямые a и b различны и имеют общую точку A. Через них можно провести плоскость α. Докажем, что она единственная, методом от противного. Допустим, что существует другая плоскость β, содержащая точки A, B, C. Тогда, по теореме 2, прямые a и b принадлежат плоскости β. Поэтому плоскости α и β имеют две общие прямые a и b, которые пересекаются, что противоречит аксиоме II_3. Итак, плоскость α – единственная. *Теорема доказана.*

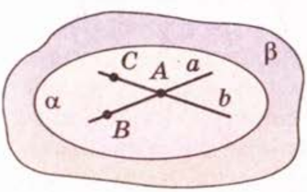


Рис. 2.11

Отметим, если плоскость определена тремя точками, которые не лежат на одной прямой, например A, B, C, то в таком случае пользуются обозначением: (ABC). Читается: «плоскость, заданная точками A, B и C», или сокращенно «плоскость ABC».

Если грань многогранника – четырехугольник, например $ABCD$, то выбирают запись плоскости произвольной тройкой его вершин. Например, (BCD), (ACD) или (ABC). Однако иногда в записи плоскости оставляют все четыре вершины, например ($ABCD$).

Задача 1

Можно ли через точку пересечения двух данных прямых провести третью прямую, которая бы не лежала с ними в одной плоскости?

Решение

Через прямые a и b (рис. 2.12), которые имеют общую точку O, можно провести плоскость α. Возьмем точку B, которая не принадлежит α. Через точки O и B проведем прямую c. Прямая c не лежит на плоскости α, так как если бы прямая c принадлежала плоскости α, то и точка B принадлежала бы плоскости α. Поэтому через точку пересечения прямых a и b можно провести третью прямую, которая не лежит с ними в одной плоскости.
Ответ. Можно.

Почему именно так?

Очевидно, что точки плоскости задают прямые, которые будут принадлежать этой самой плоскости. Если же взять точку пересечения двух прямых на плоскости и точку вне плоскости, то через любые две точки пространства можно провести прямую. Эта прямая будет иметь только одну общую точку с плоскостью, а значит, будет ее пересекать.

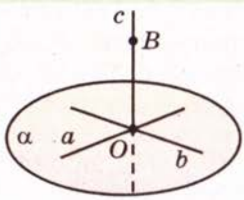


Рис. 2.12

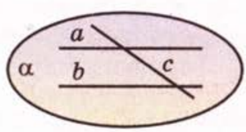


Рис. 2.13

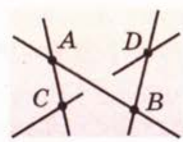


Рис. 2.14

Задача 2

Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

Доказательство

Поскольку прямые a и b параллельны, то по определению эти прямые лежат в одной плоскости α (рис. 2.13). Произвольная прямая c, пересекающая a и b, имеет с плоскостью α две общие точки – точки пересечения. Согласно теореме 2, эта прямая принадлежит плоскости α. Следовательно, все прямые, пересекающие две параллельные прямые, лежат в одной плоскости, что и требовалось доказать.

Задача 3

Докажите, что если прямые AB и CD не лежат в одной плоскости, то прямые AC и BD также не лежат в одной плоскости.

Доказательство	Почему именно так?
Докажем методом от противного. Допустим, что прямые AC и BD лежат в одной плоскости (рис. 2.14). Тогда точки A, B, C, D принадлежат этой плоскости, а следовательно, прямые AB и CD принадлежат этой плоскости, что противоречит условию. Предположение неверно, поэтому прямые AC и BD не принадлежат одной плоскости, что и требовалось доказать.	При доказательстве принадлежности или непринадлежности часто используют метод доказательства от противного. В этом случае он сразу выводит на противоречия, а значит – доказывает требование задачи.

Задача 4

Сколько всего существует различных плоскостей, проходящих через прямую и точку в пространстве?

Решение	Почему именно так?
Если в пространстве даны прямая и точка, лежащая на ней, то ими определяется множество плоскостей, поскольку через прямую проходит множество различных плоскостей.	Взяв вне этой прямой произвольную точку, мы всякий раз будем иметь другую плоскость, не совпадающую с ранее построенной. Таких плоскостей множество.
Если же точка не лежит на прямой, то по следствию из аксиом стереометрии такую плоскость можно построить только одну.	Через данную точку вне прямой можно провести либо прямую, которая пересекает данную прямую, либо прямую, параллельную данной. Оба случая задают одну плоскость.
Ответ. Бесконечно много или одна.	

Упражнения

2.10°. Выберите четыре утверждения, определяющие единственность плоскости.

А) Любые две точки пространства;

Б) любая прямая пространства и точка на ней;

В) любая прямая пространства и точка вне ее;

Г) любые три прямые пространства;

Д) любые три точки пространства;

Е) любые две параллельные прямые;

Ж) любые две прямые;

З) любые две прямые, которые пересекаются.

2.11°. Укажите плоскости, которым принадлежит точка P (рис. 2.15).

1) (SAB); 2) (SBC); 3) (SAC); 4) (ABC).

А) 1 и 2; Б) 2 и 3; В) 3 и 4; Г) 1 и 4.

2.12°. Укажите количество плоскостей, которые можно провести через три точки, лежащие на одной прямой.

А) Одну; Б) две; В) бесконечное количество; Г) конечное количество; Д) три.

2.13°. Укажите прямую пересечения плоскостей (CMD) и (MAD), изображенных на рисунке 2.16.

А) CD; Б) MC; В) MA; Г) DA; Д) MD.

2.14°. На двух ребрах пирамиды обозначены точки M и N (рис. 2.17). Укажите плоскость, в которой лежит прямая MN.

А) (TRS); Б) (PTS); В) (PRS); Г) (PTR).

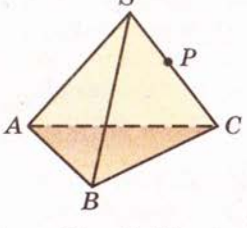


Рис. 2.15

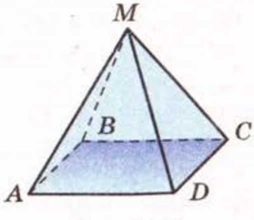


Рис. 2.16

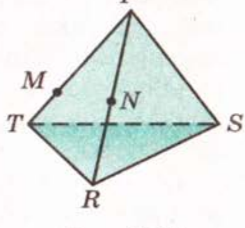


Рис. 2.17

2.15°°. Определите количество разных плоскостей, которые можно провести через пять точек, если четыре из них лежат на одной плоскости (рис. 2.16).

А) Одну; Б) четыре; В) пять; Г) шесть; Д) семь.

2.16°°. По рисунку 2.16 выбраны плоскости, которые пересекаются по прямым, содержащим ребра пирамиды. Определите среди нижеуказанных утверждений правильные.

1) (MAB) и (MBC); 3) (MBD) и (MAC); 5) (MBC) и (MAD);
2) (MAB) и (MCD); 4) (MAB) и (BCD); 6) (MBD) и (ABD).

А) 1 и 3; Б) 2 и 5; В) 3 и 6; Г) 1 и 4; Д) 2 и 6.

2.17°°. Определите прямые, с которыми может пересекаться прямая MN (рис. 2.17).

1) PR; 2) PS; 3) PT; 4) TS; 5) RS; 6) TR.

А) 1, 2 и 4; Б) 2, 3 и 5; В) 3, 4 и 5; Г) 1, 3 и 6; Д) 2, 4 и 6.

2.18°°. Выберите две плоскости, которым принадлежит точка Q (рис. 2.18).

А) (ABC); В) (MBC); Д) (MAD).
Б) (MAB); Г) (MCD);

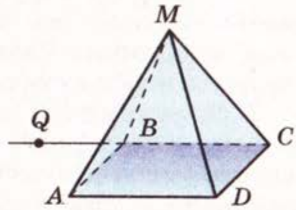


Рис. 2.18

2.19°°. Даны трапеция $ABCD$ и точка O, принадлежащая основанию BC (рис. 2.19). Определите два утверждения, по которым можно доказать, что все вершины трапеции лежат в одной плоскости α.

А) $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $AB \subset \alpha$;
Б) $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $O \in \alpha$;
В) $A \in \alpha$, $D \in \alpha$, $O \in \alpha$;
Г) $C \in \alpha$, $D \in \alpha$, $A \in \alpha$;
Д) $BC \subset \alpha$, $O \in BC$, $O \in \alpha$.

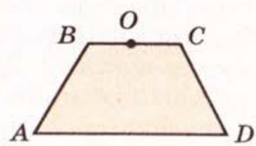


Рис. 2.19

2.20•. Три прямые, которые проходят через точку O, пересекают четвертую прямую в точках A, B и C. Докажите, что точки A, B, C и O лежат в одной плоскости.

2.21•. Две вершины и точка пересечения медиан треугольника лежат в плоскости δ. Докажите, что и третья вершина треугольника принадлежит плоскости δ.

2.22•. Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

2.23•. Докажите, что все прямые, которые пересекают данную прямую и проходят через данную точку вне прямой, лежат в одной плоскости.

2.24•. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько можно провести различных плоскостей, проходящих через три эти точки?

2.25•. Сколько плоскостей можно провести через:

1) одну точку; 2) две точки; 3) три точки?

2.26°. Докажите, что если диагонали четырехугольника пересекаются, то его вершины лежат в одной плоскости.

2.27°°. Точки A, B, C не лежат на одной прямой. $M \in AB$, $K \in AC$, $X \in MK$. Докажите, что точка X принадлежит плоскости (ABC).

2.28°°. Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая a, параллельная диагонали BD. Докажите, что прямые a и CD пересекаются.

§ 2.3. Сечения

Анализируя окружающий мир и систематизируя его предметы по форме, мы убеждаемся, что много из них «усечены» или «склеены». Разъединив их, получим поверхность, которую называют их ***сечением.***

С сечениями мы сталкиваемся в разнообразных ситуациях: в быту, в столярничестве, токарстве и т.д. Решением задач на ***сечения*** геометрических фигур или других тел занимаются в черчении и конструкторской практике. Сечения выполняют для пространственных геометрических фигур.

Мы будем рассматривать сечения трех пространственных фигур: пирамиды, куба и прямоугольного параллелепипеда (их относят к многогранникам; с понятием многогранника вы ознакомитесь позднее). Для введения понятия сечения геометрической фигуры напомним понятие об отрезке, пересекающем или не пересекающем прямую: если в заданной плоскости концы отрезка лежат в различных полуплоскостях относительно заданной прямой, то отрезок пересекает прямую, если же в одной, – то нет. Аналогией такой ситуации в пространстве является плоскость и отрезок, т.е. их взаимное расположение. Каждая плоскость разбивает пространство на два полупространства, а концы отрезка могут лежать в различных полупространствах (рис. 2.20, *а*) относительно некоторой плоскости, на плоскости (рис. 2.20, *б*) или в одном полупространстве (рис. 2.20, *в*).

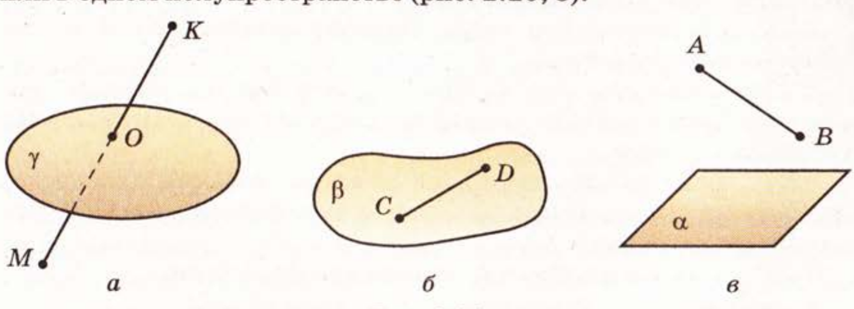


Рис. 2.20

Если ни одна из двух точек не принадлежит плоскости, а отрезок, соединяющий их, имеет с этой плоскостью общую точку, то говорят, что данные точки лежат по разные стороны относительно плоскости, или отрезок пересекает плоскость. Если же как минимум две точки пространственной геометрической фигуры лежат по разные стороны плоскости, то говорят, что плоскость эту фигуру пересекает, такую плоскость называют *секущей*.

Фигура, которая состоит из всех общих точек геометрической фигуры и *секущей* плоскости, называется ***сечением геометрической фигуры***. На рисунке 2.21 сечения изображены цветом.

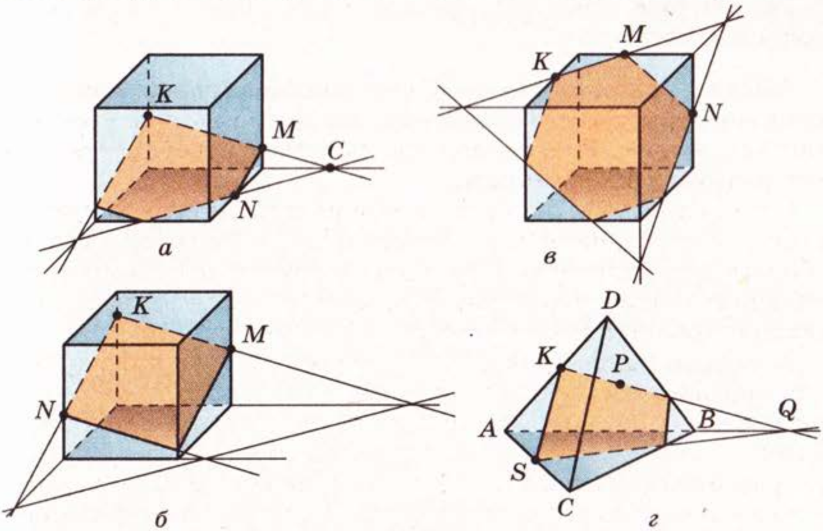


Рис. 2.21

Сечение задают условием задачи. В зависимости от этих условий и выполняют построение сечения. Учитывая изученное, мы будем решать задачи, в которых сечение задается тремя точками или прямой и точкой вне ее. Почти во всем курсе стереометрии нам придется работать с разными сечениями.

Существуют различные методы построения сечений. Наиболее распространенный в практике изучения курса геометрии средней школы – *метод следов*. Рассмотрим его.

Если плоскость грани многогранника и плоскость сечения имеют две общие точки, то они пересекаются по прямой, проходящей через эти точки. Эту прямую называют *линией пересечения* данных плоскостей.

Плоскость сечения многогранника имеет общие прямые с плоскостями граней многогранника. Прямую, по которой плоскость сечения пересекает плоскость любой грани многогранника, называют *следом плоскости сечения*. Следов столько, сколько плоскостей граней пересекает плоскость сечения.

При построении сечения следует помнить:

- через две точки, принадлежащие плоскости, проходит только одна прямая, и эта прямая также принадлежит этой плоскости;
- чтобы построить линию пересечения двух плоскостей, необходимо найти две точки, которые принадлежат обеим плоскостям, и через них провести линию пересечения;
- при построении сечений многогранников секущей плоскостью нужно найти отрезки, по которым секущая плоскость пересекается с гранями многогранника.

Рассмотрим примеры построения сечения многогранника секущей плоскостью.

Задача 1 Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины ребер с общей вершиной.

Построение

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – заданный куб (рис. 2.22). Выберем одну из вершин, например A, являющуюся общей для трех ребер AB, AA_1 и AD. Обозначим на этих ребрах точки M, N и P соответственно, являющиеся их серединами. Точки M, N и P не лежат на одной прямой, а поэтому определяют секущую плоскость (MNP). Точки M и P – общие точки плоскости сечения и грани $ABCD$, поэтому $PM = (MNP) \cap (ABCD)$, PM – сторона сечения.

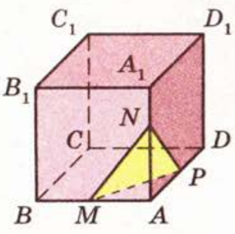


Рис. 2.22

Аналогично $PN = (MNP) \cap (AA_1D_1D)$ и $MN = (MNP) \cap (ABB_1A_1)$, поэтому PN и MN – две другие стороны сечения. Таким образом, $\triangle MNP$ – искомое сечение.

Задача 2 Постройте сечение пирамиды $MABC$ плоскостью, которая проходит через ребро MA и середину ребра BC.

Построение

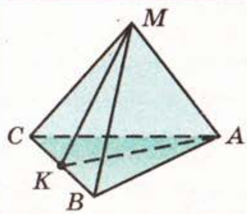


Рис. 2.23

Плоскость сечения задается прямой MA и серединой ребра BC (обозначим ее точкой K) (рис. 2.23). (MAK) – плоскость сечения. Найдем прямые пересечения этой плоскости с плоскостями (ABC) и (MBC). Ими будут соответствующие прямые AK и KM, а $\triangle MAK$, образованный пересечением прямых MA, AK и KM, – искомое сечение.

Задача 3

Постройте сечение пирамиды $DABC$ плоскостью, проходящей через три точки, которые лежат соответственно на ребрах AD, DC, BC.

Построение

Рассмотрим случай, когда ни одна из прямых, проходящих через эти точки, не будет параллельна сторонам граней.

Пусть $M \in AD$, $N \in DC$, $P \in BC$, α – секущая плоскость, проходящая через заданные точки M, N и P. Построим сечение, выполняя последовательно шаги:

1. $M \in (ADC)$, $N \in (ADC)$, тогда $MN \subset (ADC)$; $MN = \alpha \cap (ADC)$.
2. $N \in (BDC)$, $P \in (BDC)$, тогда $NP \subset (BDC)$; $NP = \alpha \cap (BDC)$.

Мы нашли две стороны фигуры сечения: отрезки MN и NP (рис. 2.24, *а*). Точка P – общая точка двух плоскостей (ABC) и (MNP). Такие плоскости (по аксиоме II_4) пересекаются по прямой, проходящей через точку P. Для построения такой прямой нужна вторая точка.

3. Плоскости (ADC) и (ABC) пересекаются по прямой AC. MN по условию не параллельна AC и $MN \subset (ADC)$, поэтому $MN \cap AC = S$ (рис. 2.24, *б*).
4. Прямая SP – линия пересечения плоскостей (MNP) и (ABC). Пересечение этой прямой с ребром AB дает точку Q, которая является вершиной сечения. Таким образом, четырехугольник $MNPQ$ – искомое сечение (рис. 2.24, *в*).

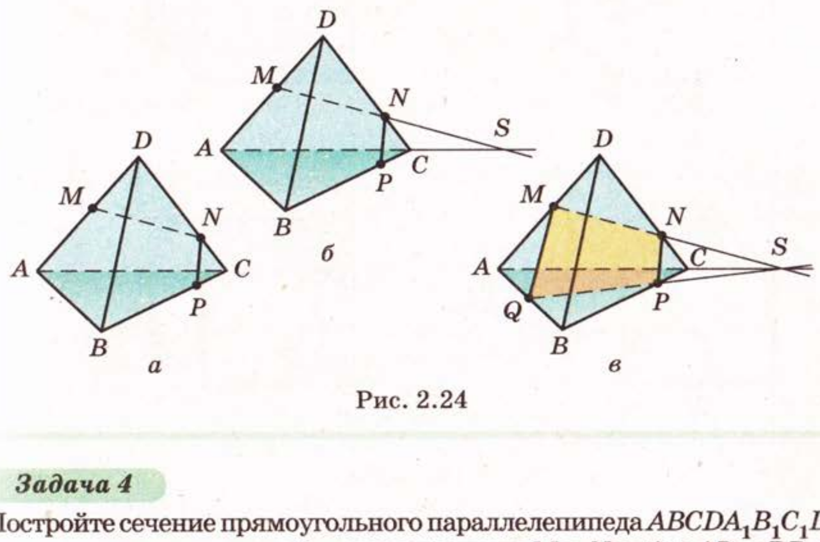


Рис. 2.24

Задача 4

Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины M и N ребер AD и BB_1 и точку P пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.25, *а*).

Построение

Обозначим секущую плоскость $\alpha = (MNP)$. Выполним последовательно шаги, выполняя поиск фигуры, образованной плоскостью сечения.

1. Найдем точку пересечения прямой NP с плоскостью (AA_1D_1D). Эта прямая лежит в плоскости (BB_1D_1D), пересекающейся с плоскостью (AA_1D_1D) по прямой DD_1. Точка K_1 – точка пересечения прямых NP и DD_1. Точка K_1 – искомая (рис. 2.25, *б*).

2. Аналогично находим точку K_2 как точку пересечения прямой NP с плоскостью $(ABCD)$. Точка K_2 – искомая.

3. Плоскость α пересекает плоскость (AA_1D_1D) по прямой K_1M, а плоскость $(ABCD)$ – по прямой K_2M. Прямые K_1M и K_2M пересекают ребра прямоугольного параллелепипеда A_1D_1 и AB в точках K_3 и K_4 соответственно (рис. 2.25, *в*).

4. Прямая K_3P пересекает ребро прямоугольного параллелепипеда B_1C_1 в некоторой точке K_5 – последней вершине сечения (рис. 2.25, *в*).

Таким образом, пятиугольник $MK_3K_5NK_4$ – искомое сечение (рис. 2.25, *г*).

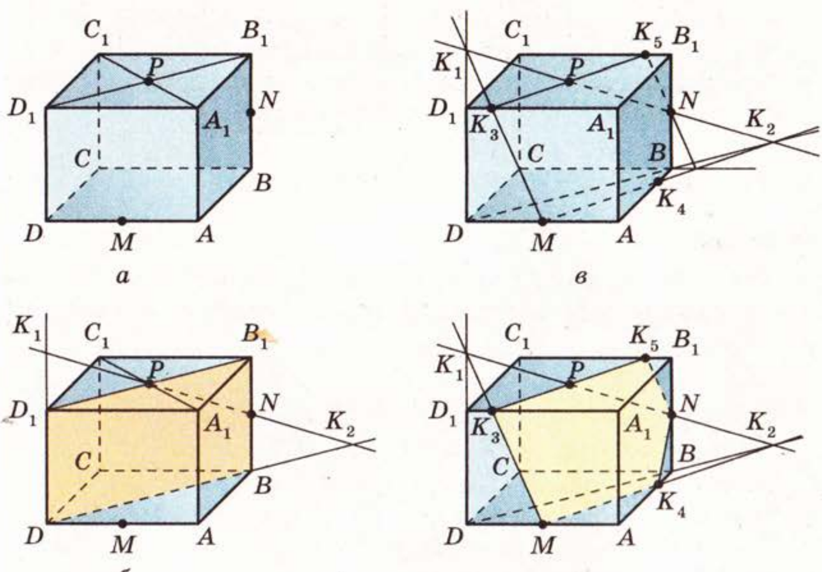


Рис. 2.25

Приведем краткие описания построения сечения куба плоскостью, проходящей через три точки.

Задача 5

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки M, N, P, которые принадлежат соответственно ребрам AD, DD_1, CC_1.

Построение

Секущая плоскость (MNP) (рис. 2.26).

1. Точки N и P лежат в (PDC). Проведем прямую PN, $PN \cap DC = E$.

2. Точки E, M лежат в (ABC). Проведем прямую EM, $EM \cap AB = K$, $EM \cap BC = F$.

3. Точки F, P лежат в (BB_1P), $FP \cap BB_1 = Q$.

4. $PNMKQ$ – искомое сечение.

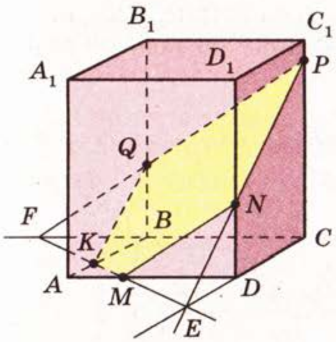


Рис. 2.26

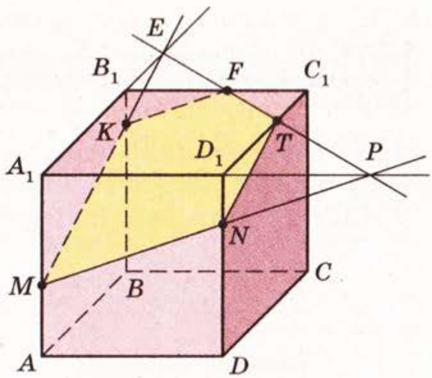


Рис. 2.27

Задача 6

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, M, T, которые принадлежат соответственно ребрам BB_1, AA_1, D_1C_1.

Построение

Секущая плоскость (KMT) (рис. 2.27).

1. Точки M и K лежат в (AA_1B_1), $KM \cap A_1B_1 = E$.
2. Точки E, T лежат в $(A_1B_1C_1)$, $ET \cap B_1C_1 = F$, $T \cap A_1D_1 = P$.
3. Точки M, P лежат в (AA_1D_1), $MP \cap DD_1 = N$.
4. $MKFTN$ – искомое сечение.

Задача 7

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, M, N, которые принадлежат соответственно ребрам CC_1, B_1C_1, DC.

Построение

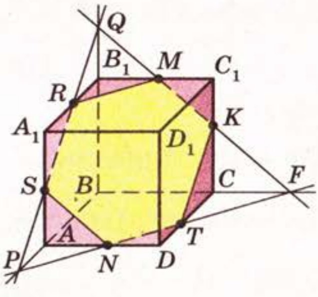


Рис. 2.28

Секущая плоскость (KMN) (рис. 2.28).

1. Точки M, K лежат в (B_1C_1C), $MK \cap BB_1 = Q$, $MK \cap BC = F$.
2. Точки F и N лежат в (ABC), $FN \cap DC = T$, $FN \cap AB = P$.
3. Точки Q и P лежат в (ABB_1), $QP \cap AA_1 = S$, $QP \cap A_1B_1 = R$.
4. $MKTNSR$ – искомое сечение.

Упражнения

2.29°. Укажите плоскости, которые пересекает прямая KL в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.29).

А) (ABC); Б) $(A_1D_1B_1)$; В) (B_1BD); Г) (ADD_1); Д) (ABB_1).

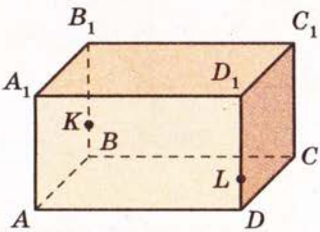


Рис. 2.29

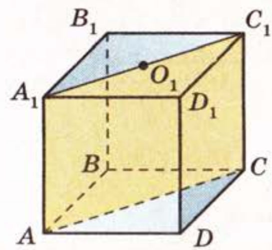


Рис. 2.30

2.30°. На рисунке 2.30 изображено сечение прямоугольного параллелепипеда, проходящее через три точки. Укажите такие тройки точек, для которых сечение построено верно.

1) A, C и O_1; 2) B, A и C; 3) A, A_1 и C; 4) O_1, C_1 и A; 5) C, C_1 и B_1.

А) 1, 2 и 4; Б) 2, 3 и 5; В) 1, 3 и 4; Г) 3, 4 и 5; Д) 1, 2 и 5.

2.31°. На ребрах пирамиды $DABC$, изображенной на рисунке 2.31, обозначены точки M и N. Выберите треугольник, который может быть сечением этой пирамиды.

А) $\triangle DMN$; Б) $\triangle MNC$; В) $\triangle MNA$; Г) $\triangle MNB$.

2.32°°. В кубе проведена прямая MN (рис. 2.32). Идентифицируйте парами правильные утверждения.

А) $(ABC) \cap MN$; 1) S;
Б) $(A_1B_1C_1) \cap MN$; 2) N;
В) $(AA_1B_1) \cap MN$; 3) P;
Г) $(DD_1C_1) \cap MN$. 4) M.

А	
Б	
В	
Г	

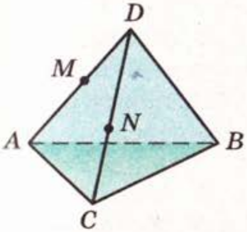


Рис. 2.31

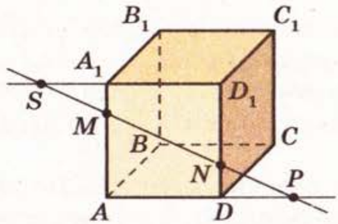


Рис. 2.32

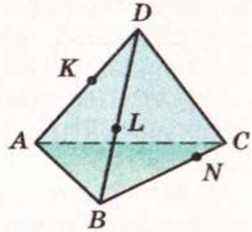


Рис. 2.33

2.33°°. Укажите плоскости, которые будут пересекаться по прямой DN (рис. 2.33).

1) (ABC); 2) (DCB); 3) (ALD); 4) (ADN); 5) (KDC).

А) 1 и 3; Б) 2 и 4; В) 3 и 5; Г) 2 и 5; Д) 1 и 4.

2.34°°. Выполните рисунок 2.34 и постройте точку пересечения прямой KF с плоскостью (ADC).

2.35°°. Выполните рисунок 2.35 и постройте точку пересечения прямой EF с плоскостью (ABC).

2.36°°. Выполните рисунок 2.36 и постройте точку пересечения прямой PQ с плоскостью (ABC).

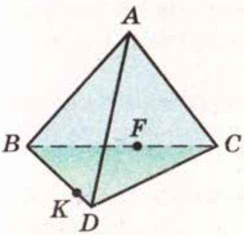


Рис. 2.34

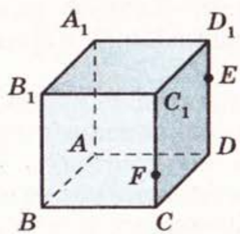


Рис. 2.35

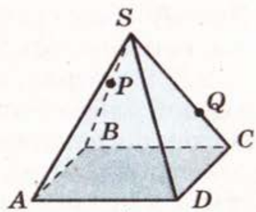


Рис. 2.36

2.37°°. В треугольной пирамиде $ABCD$ точка M принадлежит ребру BC (рис. 2.37). Постройте линию пересечения плоскостей (AMD) и (CDB).

2.38°°. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ укажите линию пересечения плоскостей (ABB_1) и (BCC_1).

2.39•. Постройте сечение треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через ребро DC и точку пересечения медиан грани ABC.

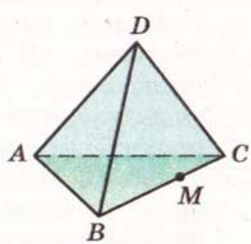


Рис. 2.37

2.40•. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребро AB и точку пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$.

2.41•. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью, проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины.

2.42•. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и вершину B.

2.43••. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину ребра BB_1.

2.44••. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину B_1 и две точки M и N, лежащие на ребрах AA_1 и CC_1. Рассмотрите различные случаи расположения точек M и N.

2.45••. Постройте сечение треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через три точки K, S и P ($K \in AD$, $S \in AC$, $P \in (ADB)$).

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

2.1. Почему для разметки котлована под небольшое сооружение используют натянутый шнур?

Указание. Пересечением двух плоскостей является прямая.

2.2. При формировании кирпича (или строительного блока) по параллельным краям формы, наполненной соответствующей массой, скользит прямолинейный брусок. Почему грань выравниваемого кирпича (блока) при этом становится плоской?

2.3. Проверяя, находятся ли концы четырех ножек стула в одной плоскости, столяр крепит к ним накрест две нитки. На чем основывается такой метод?

Указание. Две пересекающиеся прямые определяют плоскость, и притом только одну.

2.4. Как столяр отпиливает часть от деревянного бруска, чтобы срез был плоским?

Ответ. На двух смежных гранях бруска чертит отрезки, например AB и AC. Потом отпиливает так, чтобы полотно пилы шло по этим отрезкам. Поскольку пила будет двигаться по двум пересекающимся отрезкам (частям прямых), срез получится плоским.

2.5. Штативы для фотоаппаратов, геодезических приборов и пр. изготовляются в виде треноги. Почему подставка на трех опорах считается наиболее устойчивой?

Указание. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит только одна плоскость.

2.6. Столяр находит огрехи в обработке деревянного бруска или доски, осматривая их вдоль обработанной поверхности. На чем основывается такая проверка?

Указание. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.

2.7. Почему стул с тремя ножками, размещенными по окружности, более устойчив, нежели стул на четырех опорах?

Указание. Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют плоскость, и притом только одну.

2.8. Почему мотоцикл с коляской стоит на дороге устойчиво, а для мотоцикла без коляски нужна дополнительная опора?

Указание. Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют плоскость, и притом только одну.

2.9. Почему незакрытые двери самопроизвольно приоткрываются, а закрытые – неподвижны?

Указание. Через прямую и точку вне ее можно провести плоскость, и притом только одну.

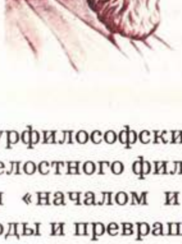
2.10. Сколько приблизительно кирпичей потребуется для строительства 18 столбов высотой 4 м с сечением в виде квадрата со стороной 7 дм? Размер кирпича 1×1,5×3 дм. Отходы составляют 5 %.

Ответ. 8200 кирпичей.

Фалес (ок. 624–548 до н. э.)

Со времен греков говорить «математика» – значит говорить «доказательство». А начало этому положил Фалес.

Э. Куртиус



Фалес Милетский – древнегреческий философ, математик, астроном, основатель ионийской школы натурфилософии, купец и политический деятель. Происходил из знатного финикийского рода. В своей деятельности вопросы практического характера связывал с теоретическими проблемами Вселенной. Фалес много путешествовал, в частности в молодости посетил Египет, где изучал различные науки. Вернувшись на родину, основал в Милете философскую школу. Все свои натурфилософские познания Фалес использовал для создания целостного философского учения. Он полагал, что вода является «началом и концом» Вселенной: все сущее рождается из воды и превращается в нее.

Фалесу принадлежат немалые заслуги в создании научной математики. В его трудах впервые встречаются доказательства теорем. Если египетских землемеров удовлетворял ответ на вопрос «как?», то Фалес, возможно, первым задал вопрос «почему?» и успешно ответил на него. Сегодня известно, что многие математические правила были открыты раньше, чем в Древней Греции. Однако сделано это было опытным путем. Строго логическое доказательство правильности утверждений на основании общих положений, принятых за истинные, было изобретено греками. Еще одна характерная особенность греческой математики состоит в постепенном переходе от одного утверждения к другому с помощью доказательства. Именно такой характер математике придал Фалес. И даже сегодня, приступая к доказательству, скажем, теоремы о свойствах ромба, мы, по сути, рассуждаем почти так же, как это делали его ученики.

Считается, что именно Фалес первым познакомил греков с геометрией. Ему приписывают открытие и доказательство ряда теорем: о делении окружности диаметром пополам; о том, что угол, вписанный в полуокружность, является прямым; о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника; о равенстве вертикальных углов. Фалес установил, что треугольник полностью определяется стороной и прилежащими к ней углами.

Фалес открыл любопытный способ определения расстояния от берега до видимого корабля. Некоторые историки утверждают, что для этого он использовал признак подобия прямоугольных треугольников. Фалесу приписывают также метод определения высот различных предметов, в частности пирамид, по длине тени, когда солнце поднимается над горизонтом на 45°.

Все эти достижения принесли Фалесу славу первого среди знаменитых «семи мудрецов» древности.

Пифагор (ок. 580–500 до н. э.)

Все есть число.

Главный принцип Пифагора

Пифагор родился на острове Самос в семье богатого ювелира. По многим античным источникам, новорожденный мальчик был сказочно красив, а в скором времени проявились и его незаурядные способности.

Слушая в Милете лекции Фалеса и его ученика Анаксимандра – выдающегося философа, географа и астронома, Пифагор приобрел основательные знания. Однако Фалес посоветовал ему продолжить образование в Египте.

На протяжении 22 лет Пифагор изучал математику в мемфисских храмах, а после вместе с египетскими жрецами отправился в Вавилон, где провел еще 12 лет. Там он получил возможность, кроме математики, астрономии, теории музыки, изучить религии и культы, постичь тайны древней магии. Некоторые историки полагают, что какое-то время Пифагор пребывал в Индии.

Около 530 г. до н.э., обогатившись знаниями и опытом, Пифагор вернулся на родину. В Кротоне он основал «Пифагорейский союз» – своего рода религиозно-этическое братство (или тайный монашеский орден), бывшее одновременно и религиозным объединением, и политическим клубом, и научным обществом. Опознавательным знаком членов братства была пятиконечная звезда – пентаграмма, которую они называли символом здоровья. Если кто-нибудь из пифагорейцев попадал в беду, этого знака было достаточно, чтобы «братья» тут же пришли ему на помощь.

Считается, что Пифагор первым доказал теорему, которая носит его имя (сама теорема была известна намного раньше). По легенде, в честь этого открытия ученый принес в жертву быка (кое-кто, правда, полагает, что бык пал жертвой открытия прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5). Причина огромной популярности теоремы Пифагора в единстве трех качеств: простоты, красоты, значимости. Существует несколько сотен различных доказательств этой теоремы (геометрические, алгебраические, механические и др.).

К математическим наукам пифагорейцы относили арифметику, геометрию, астрономию и музыку. Они установили, что высота звучания струны зависит от ее длины, т.е. – от числа, и создали первую математическую теорию музыки. Большой заслугой пифагорейцев является установление факта несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. При этом впервые был применен метод доказательства от противного. Это открытие послужило причиной первого кризиса в основах математики, преодоление которого в дальнейшем (Эвдокс и др.) связано с расширением понятия числа (создание теории иррациональных чисел).

Пифагору приписывают также теорему о сумме внутренних углов треугольника и задачу о покрытии плоскости правильными одноименными многоугольниками (возможны только три варианта: треугольниками, квадратами и шестиугольниками). Имеются сведения, что Пифагор построил «космические» фигуры, т.е. правильные многогранники (так называемые тела Платона). Однако более вероятно, что пифагорейцы знали только три из них: куб, тетраэдр и додекаэдр, а октаэдр и икосаэдр были впервые открыты Теэтетом.

Школа Пифагора много сделала для того, чтобы геометрия стала наукой. Главной особенностью пифагорейского метода является объединение геометрии и арифметики, с помощью чего был найден способ решения задач, которые теперь сводятся к квадратным уравнениям, а также геометрически доказаны некоторые числовые равенства. Пифагор много занимался пропорциями и прогрессиями, а также, вероятно, подобием фигур. Арифметика как практика вычислений не интересовала ученого, и он с гордостью заявлял, что «поставил арифметику выше интересов торговца».

В дальнейшем идеи Пифагора развивали, кроме античных ученых, выдающиеся исследователи нового времени: Коперник и Кеплер, Дюрер и Леонардо да Винчи, Эддингтон и многие другие, нашедшие в научно-философском наследии мыслителя основу для установления закономерностей мироздания.

Имя Пифагора носят кратер на видимой стороне Луны, множество научных премий, а также улиц в разных городах мира.

Вопросы для самоконтроля

1. Какова структура школьного курса геометрии?
2. Каково строение геометрии как науки?
3. В чем состоят различия между планиметрией и стереометрией?
4. Какие геометрические фигуры являются основными в стереометрии?
5. Какое утверждение называется аксиомой?
6. Какие геометрические понятия называют определяемыми, а какие – неопределяемыми?
7. Какими аксиомами дополнена стереометрия?
8. Как определяют единственную плоскость?
9. Какие следствия из аксиом стереометрии вы знаете?
10. Какое утверждение называется теоремой?
11. Какие способы доказательства теоремы вы знаете?
12. Какое количество плоскостей можно провести через три точки?
13. Как проверить, принадлежит ли прямая плоскости?
14. Какой отрезок пересекает плоскость?
15. Что называют сечением фигуры плоскостью?
16. Какие фигуры являются плоскими, а какие – неплоскими?
17. Как определить прямую пересечения плоскостей?
18. Как построить сечение методом следов?

Тест для самоконтроля

Часть 1

Задания 1–16 содержат варианты ответов, из которых правильным является только *один* или *конкретное количество*. Выберите правильный ответ.

1°. Укажите текстовое утверждение, соответствующее сокращенной записи «$M \in \alpha$».

А) Точка M принадлежит прямой α;
Б) точка M принадлежит плоскости α;
В) точка M лежит на прямой α;
Г) прямая α проходит через точку M;
Д) плоскость α проходит через точку M.

2°. Выберите утверждение, интерпретирующее рисунок 2.38.

А) $m \in \beta$, $F \in m$, $Q \notin m$;
Б) $m \subset \beta$, $F \in m$, $Q \notin m$;
В) $m \not\subset \beta$, $F \in m$, $Q \notin m$;
Г) $m \subset \beta$, $F \in m$, $Q \in m$;
Д) $m \not\subset \beta$, $F \notin m$, $Q \in m$.

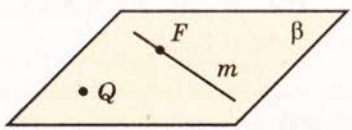


Рис. 2.38

3°. Известно, что P, Q, S – общие точки для двух плоскостей α и β. Укажите два правильных утверждения.

А) Плоскости пересекаются по прямой a, причем $P \in a$, $Q \in a$, $S \in a$;
Б) плоскости пересекаются по прямой a, причем $P \in a$, $Q \in \alpha$, $S \notin \alpha$;
В) плоскости не пересекаются по прямой a, причем $P \in a$ и $P \in \beta$, $Q \in a$ и $Q \in \beta$, $S \in a$ и $S \in \beta$;
Г) плоскости не пересекаются по прямой a, причем $P \in a$, $Q \in a$, $S \in a$ и $\alpha \neq \beta$;
Д) плоскости пересекаются по прямой a, причем $\alpha \cap \beta = P$, $\alpha \cap \beta = Q$, $\alpha \cap \beta = S$.

4°. Известно, что точки X_1, X_2, X_3 лежат на одной прямой x. Выберите правильный вывод.

А) Через x проходит не больше трех плоскостей;
Б) через x проходит одна или две плоскости;
В) через x проходит множество плоскостей;
Г) через x проходит две плоскости;
Д) через x не проходит ни одной плоскости.

5°. Известно, что прямые a, b и c не имеют общей точки, однако попарно пересекаются. Укажите верное утверждение.

А) Прямые a, b и c лежат в двух различных плоскостях;
Б) прямые a, b и c лежат в трех различных плоскостях;
В) прямые a, b и c принадлежат множеству плоскостей;
Г) прямые a, b и c не могут лежать ни в одной из существующих плоскостей;
Д) прямые a, b и c принадлежат только одной плоскости.

6°. В четырехугольнике $ABCD$ некоторые вершины лежат в плоскости α. Укажите утверждения, из которых вытекает принадлежность всех вершин четырехугольника $ABCD$ данной плоскости.

1) $A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $M \in AC$ и $M \in \alpha$;
2) $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $K \in BC$ и $K \in \alpha$;
3) $B \in \alpha$, $D \in \alpha$, $Q \in BD$ и $Q \in \alpha$;
4) $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$;
5) $C \in \alpha$, $D \in \alpha$, $A \in \alpha$.

А) 1, 2 и 4; Б) 2, 4 и 5; В) 3, 4 и 5; Г) 1, 3 и 5; Д) 2, 3 и 4.

7°. В $\triangle ABC$ проведена средняя линия MN ($M \in AB$, $N \in BC$), на которой лежит точка Q. Определите правильные утверждения относительно расположения точки Q.

1) $Q \in MB$;
2) $Q \in MN$;
3) $Q \in (MBN)$;
4) $Q \in (AMB)$;
5) $Q \in AC$;
6) $Q \in (BNC)$;
7) $Q \in (CBM)$;
8) $Q \in (ACN)$.

А) 1, 3, 5 и 6; Б) 2, 3, 5 и 6; В) 3, 4, 7 и 8; Г) 4, 5, 6 и 7; Д) 2, 3, 7 и 8.

8°. Идентифицируйте каждому пересечению плоскостей прямую их пересечения, пользуясь изображением куба (рис. 2.39).

А) $(A_1D_1B_1) \cap (BB_1D)$;
Б) $(A_1B_1C_1) \cap (BB_1C)$;
В) $(BCA_1) \cap (ADD_1)$;
Г) $(A_1C_1B_1) \cap (CC_1D)$;
Д) $(B_1C_1D_1) \cap (AA_1C)$.

1) A_1C_1;
2) C_1D_1;
3) B_1C_1;
4) B_1D_1;
5) A_1D_1.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

9°°. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проведена средняя линия MN ($M \in AB$, $N \in CD$). Укажите, по каким из условий (А–Д) можно сделать вывод, что трапеция $ABCD$ лежит в данной плоскости α.

А) $AC \cap BD = O$;
Б) $MN \subset \alpha$;
В) $MN \subset \alpha$ и $A \in \alpha$;
Г) $CD \subset \alpha$ и $N \in \alpha$;
Д) $AB \subset \alpha$ и $M \in \alpha$.

10°°. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересечен плоскостью, которая проходит через середины трех ребер, выходящих из вершины A. Определите вид фигуры сечения.

А) Тупоугольный треугольник;
Б) прямоугольный треугольник;
В) равносторонний треугольник;
Г) разносторонний треугольник.

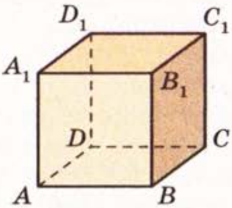


Рис. 2.39

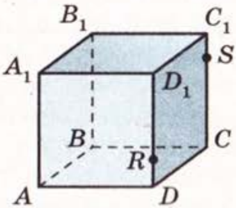


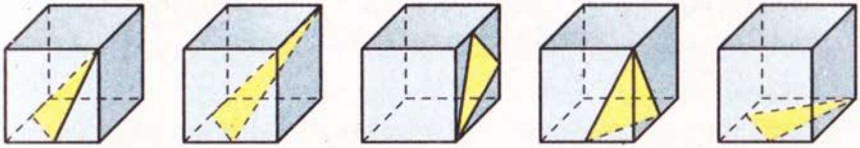
Рис. 2.40

11°°. Выберите плоскости, которые будет пересекать прямая RS (рис. 2.40).

1) (ABA_1); 2) (DD_1A); 3) (DD_1C_1); 4) (BDD_1); 5) $(A_1B_1C_1)$.

А) 1, 2 и 4; Б) 2, 4 и 5; В) 3, 4 и 5; Г) 1, 3 и 5; Д) 2, 3 и 4.

12°°. Выберите среди рисунков 2.41 тот, на котором изображено сечение, образованное плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон одной грани и вершину, соседнюю к точке пересечения ребер, на которых выбраны середины.



А) Б) В) Г) Д)

Рис. 2.41

13°°. Определите два правильных утверждения.

А) Если окружность имеет с плоскостью две общие точки, то все точки этой окружности лежат на этой плоскости;
Б) если две точки – концы диаметра окружности – лежат на плоскости, то все точки окружности принадлежат этой плоскости;
В) если две произвольные точки окружности, не образующие диаметр, лежат на плоскости, то все точки окружности принадлежат этой плоскости;

Г) если хорда окружности и точка окружности, не лежащая на ней, принадлежат одной плоскости, то все точки окружности лежат на этой плоскости;

Д) если две хорды окружности принадлежат некоторой плоскости, то все точки окружности лежат на этой плоскости.

14°°. Три точки в пространстве расположены таким образом, что через них можно провести не меньше 100 различных плоскостей. Укажите верное дополнение этого утверждения.

А) Эти точки лежат в одной плоскости;
Б) эти точки лежат на одной прямой;
В) эти точки не лежат на одной прямой;
Г) эти точки лежат в одной плоскости, но на одной прямой;
Д) эти точки лежат в одной плоскости, но не на одной прямой.

15°°. Известно, что четыре точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Укажите прямую пересечения (1–6) каждой пары плоскостей, заданных условиями (А–Е).

А) (ABC) и (ABD);
Б) (ACD) и (ABC);
В) (BCD) и (ABC);
Г) (ACD) и (BCD);
Д) (BDC) и (ADB);
Е) (ABD) и (ACD).

1) AC;
2) AB;
3) AD;
4) BD;
5) BC;
6) CD.

А	
Б	
В	
Г	
Д	
Е	

16°°. На ребрах AA_1 и CC_1 прямоугольного параллелепипеда обозначены точки P и Q. Определите прямые, пересекающиеся прямой PQ.

А) AD и B_1C_1;
Б) AB и C_1D_1;
В) CD и A_1B_1;
Г) AC и A_1C_1;
Д) BD и B_1D_1.

Часть 2

Выполните задания 17–28 с краткой записью хода рассуждений.

17•. Прямая a пересекает две стороны $\triangle ABC$. Определите, может ли прямая a пересекать третью сторону треугольника.

18•. Три прямые, которые проходят через точку T, пересекают четвертую прямую в точках P, Q и R. Определите расположение точек T, P, Q и R.

19•. Диагонали ромба $PLST$ пересекаются в точке Q. Известно, что вершины ромба P и L принадлежат некоторой плоскости α. Определите, будут ли принадлежать этой плоскости точки S и T. (Ответ запишите в форме «да» или «нет».)

20•. Определите расположение четырех точек M, N, B и C, если известно, что прямые AB и AC пересекаются с некоторой прямой l в точках M и N соответственно.

21$^{\bullet}$. Две вершины треугольника и точка пересечения медиан лежат в одной плоскости α. Определите, будет ли лежать в этой плоскости точка пересечения высот треугольника.

22$^{\bullet}$. Даны четыре точки X_1, X_2, X_3 и X_4, не лежащие на одной прямой. Запишите все возможные плоскости, которые проходят через каждые три из них.

23$^{\bullet}$. Определите максимальное количество плоскостей, которые можно провести через четыре точки, если любые три из них не лежат на одной прямой.

24$^{\bullet}$. Выполните рисунки ко всем случаям расположения некоторой прямой a и точек B и C, не лежащих на ней.

25$^{\bullet}$. Постройте сечение плоскостью, проходящей через точки M, N, K (рис. 2.42).

26$^{\bullet}$. Постройте сечение плоскостью, проходящей через точки S, P, R (рис. 2.43).

27$^{\bullet}$. Постройте сечение плоскостью, проходящей через точки H, V, W (рис. 2.44).

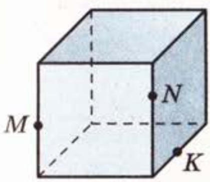


Рис. 2.42

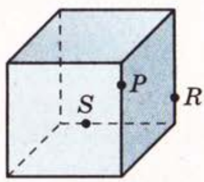


Рис. 2.43

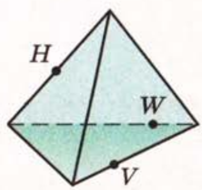


Рис. 2.44

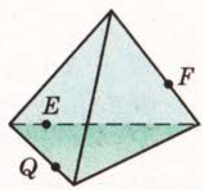


Рис. 2.45

28$^{\bullet}$. Постройте сечение плоскостью, проходящей через точки E, F, Q (рис. 2.45).

• *Часть 3*

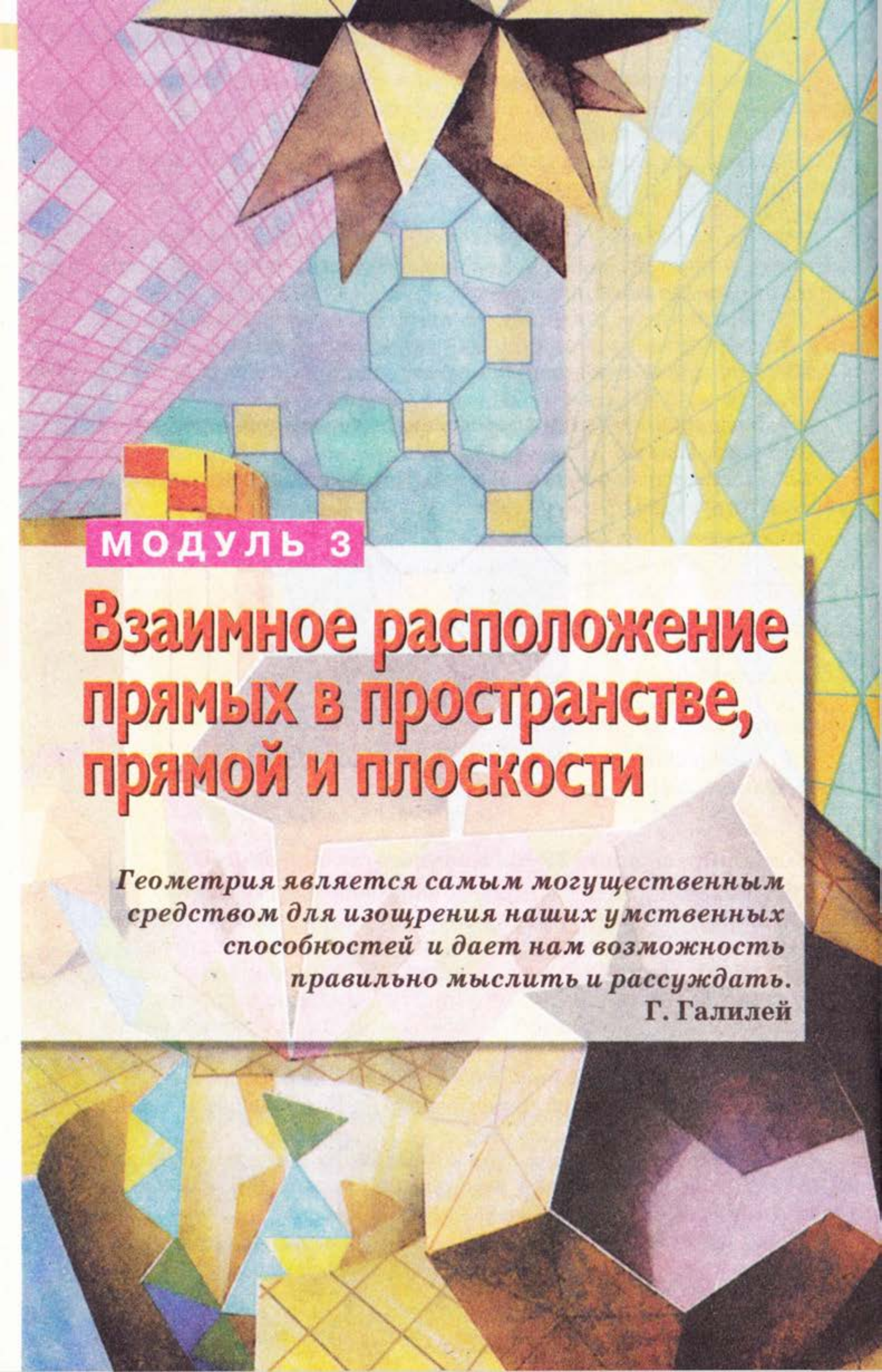
Выполните задания 29–32 с полным обоснованием.

29$^{\bullet\bullet}$. Известно, что две прямые пересекаются в точке O. Докажите, что все прямые, которые не проходят через точку O, но пересекают обе заданные прямые, лежат в одной плоскости.

30$^{\bullet\bullet}$. Докажите, что когда десять прямых проходят через одну точку и пересекают одиннадцатую прямую в других точках, отличных от указанной, то все одиннадцать прямых лежат в одной плоскости.

31$^{\bullet\bullet}$. Постройте сечение треугольной пирамиды $KLMN$ плоскостью, проходящей через точки P, R и S, если $P \in LK$, $R \in KN$, $S \in ML$.

32$^{\bullet\bullet}$. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $PRSTP_1R_1S_1T_1$ плоскостью, проходящей через точки A, B и C, если $A \in PT$, $B \in RR_1$, а точка $C \in (P_1R_1S_1T_1)$.



МОДУЛЬ 3

Взаимное расположение прямых в пространстве, прямой и плоскости

Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать.

Г. Галилей

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ МОДУЛЯ

- *Расположение двух прямых в пространстве*
- *Признак скрещиваемости прямых в пространстве*
- *Свойства параллельных прямых в пространстве*
- *Расположение прямой и плоскости в пространстве*
- *Признак параллельности прямой и плоскости*

Освоив этот модуль, вы узнаете:

- какие прямые пространства могут пересекаться, а какие – нет;
- как расположены в пространстве непересекающиеся прямые;
- как построить на рисунке две параллельные прямые;
- как построить на рисунке две скрещивающиеся прямые;
- как определить, будут ли прямые пересекаться;
- как определить, пересекает ли прямая плоскость;
- как доказать параллельность прямых в пространстве;
- как доказать параллельность прямой и плоскости;
- как найти отдельные линейные измерения, пользуясь свойствами параллельных прямых;
- как найти отдельные линейные измерения, пользуясь свойствами параллельных прямой и плоскости.

§ 3.1. Взаимное расположение прямых в пространстве

Если рассматривать две прямые на плоскости, то они либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке. Те прямые, которые не пересекаются и лежат в одной плоскости, называют ***параллельными***. А те, которые пересекаются, имеют особое название только в одном случае – если пересекаются под прямым углом. Такие прямые называются ***перпендикулярными***.

Существуют ли в пространстве прямые, которые пересекаются и которые не пересекаются? Ответ на этот вопрос дают образы окружающего мира. Имеют ли такие прямые свое название и как их различать – вы узнаете из этого параграфа.

По аксиоме стереометрии, если две прямые пересекаются, то через них можно провести единственную плоскость. Это означает, что любые две пересекающиеся прямые определяют плоскость, а плоскости, в свою очередь, – пространство.

Итак, в пространстве прямые, расположенные в одной плоскости, могут пересекаться или быть параллельными. По аксиоме параллельных прямых, через точку вне прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной. По следствию из аксиомы стереометрии, через прямую и точку вне ее можно провести единственную плоскость. Поэтому выходит, что две параллельные прямые задают плоскость.

Две прямые в пространстве называются ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Если две произвольные прямые a и b пространства параллельны, то используют символ «$\parallel$» и записывают «$a \parallel b$» (читается: «прямая a параллельна прямой b», или «прямые a и b – параллельны»). Отрезки, лежащие на параллельных прямых, также называются ***параллельными***.

Рассмотрим модель куба, изготовленного из «проволочных отрезков», лежащих на соответствующих прямых (рис. 3.1). Среди прямых, на которых лежат ребра куба, есть такие, которые не пересекаются и лежат в одной плоскости (AB и CD, A_1B_1 и C_1D_1, A_1D_1 и BC и т.д.), т.е. являются параллельными, однако есть и такие, которые не пересекаются и не являются параллельными (AA_1 и CD, BB_1 и AD, A_1B и C_1D и т.д.). Такие прямые называются *скрещивающимися*.

Рис. 3.1

Две прямые пространства, которые не пересекаются и не параллельны, называются ***скрещивающимися***.

Понятно, что две скрещивающиеся прямые не могут лежать в одной плоскости. Поэтому говорят, что две прямые скрещиваются, если их нельзя поместить в одну плоскость. Для определения скрещивающихся прямых используют символ «$\dot{-}$». Например $a \dot{-} b$ (читается: «прямые a и b – скрещивающиеся», или «прямая a скрещивается с прямой b»). Особым случаем расположения прямых является их наложение – прямые совпадают.

Итак, расположение двух прямых в пространстве может быть следующим:

1) прямые пересекаются, если они имеют только одну общую точку;

2) прямые параллельны, если они не пересекаются и лежат в одной плоскости;

3) прямые скрещиваются, если они не пересекаются и не параллельны;

4) прямые совпадают, если они имеют хотя бы две общие точки.

Рассмотрим свойства, которыми обладают параллельные прямые в пространстве.

Теорема 1

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну.

Доказательство. Пусть a произвольная прямая пространства, A – точка, не принадлежащая ей (рис. 3.2). Через прямую a и точку A можно провести плоскость. Пусть это будет плоскость α. На плоскости α лежит прямая и точка вне ее. Через эту точку можно провести прямую, параллельную данной. Пусть прямая $b \parallel a$ и $A \in b$. Докажем, что прямая b единственная. Допустим, что существует другая прямая b_1, которая не совпадает с прямой b, параллельна прямой a и проходит через точку A. Поскольку $a \parallel b_1$, то по определению они лежат в одной плоскости, например β.

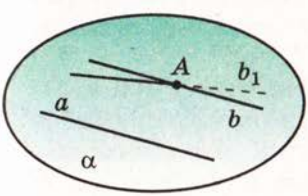


Рис. 3.2

Итак, α и β имеют общую прямую a и точку A, а поэтому совпадают. В плоскости α через точку A проходят две прямые b_1 и b, параллельные прямой a, что противоречит аксиоме параллельности. Получили противоречие, которое доказывает единственность прямой b, что и требовалось доказать. *Теорема доказана.*

Теорема 2 (*признак параллельности прямых*)
Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

Доказательство. Пусть прямые a и b параллельны прямой c (рис. 3.3). Докажем, что прямые a и b параллельны. Случай, когда прямые a, b, c лежат в одной плоскости, был рассмотрен в планиметрии. Это свойство еще называют признаком параллельности прямых. Поэтому будем считать, что эти прямые не лежат в одной плоскости, и докажем, что такой признак имеет место и в пространстве.

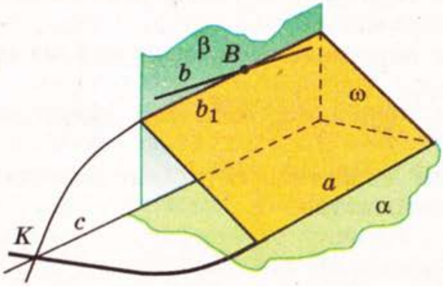


Рис. 3.3

По условию $b \parallel c$, и поэтому эти прямые лежат в одной плоскости, пусть это будет плоскость β. Аналогично $a \parallel c$, поэтому эти прямые будут лежать в некоторой другой плоскости – плоскости α. Выберем на прямой b точку B. Через прямую a и точку B проведем плоскость ω, которая пересечет плоскость β по некоторой прямой b_1 (ω и β имеют общую точку B). Поскольку через точку B в плоскости β уже проходит прямая $b \parallel c$, то $b_1 \nparallel c$, т.е. b_1 пересекает c в некоторой точке K, $K \in c$, а значит $K \in \beta$ и $K \in \alpha$. Однако $K \in b_1$, поэтому $K \in \omega$.

Т.е. точка K принадлежит трем плоскостям α, β и ω. Но все точки, общие для плоскостей α и ω, лежат на прямой a. Поэтому прямая a проходит через точку K, что противоречит условию $a \parallel c$. Итак, b_1 не пересекает прямую c, т.е. b_1 параллельна c. Однако в плоскости β через точку B проходит только одна прямая, параллельная прямой c.

Поэтому прямые b_1 и b совпадают. Поскольку прямая b_1 не пересекает плоскость α, то прямая b_1 не пересекает прямую a и принадлежит плоскости ω. Итак, $b_1 \parallel a$, т.е. $b \parallel a$, что и требовалось доказать. *Теорема доказана.*

Свойство скрещивающихся прямых выражает ***признак***: **если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а вторая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся** (предлагаем доказать это самостоятельно).

Упражнения

3.1°. Известно, что прямые a и b лежат в одной плоскости. Укажите возможные взаимные расположения этих прямых.

А) a и b пересекаются;
Б) a и b не пересекаются;
В) a и b параллельны;
Г) a и b не параллельны;
Д) a и b скрещивающиеся.

3.2°. Две прямые k и l параллельны прямой x. Укажите взаимное расположение прямых k и l.

А) Скрещиваются; Б) параллельны; В) пересекаются.

3.3°. На рисунке 3.4 изображены две плоскости α и β, пересекающиеся по прямой b. Укажите взаимное расположение прямых a и c, если известно, что $a \parallel b$, $c \nparallel b$.

А) Параллельны; Б) скрещиваются; В) пересекаются.

3.4°. Точка M не лежит на плоскости треугольника ABC (рис. 3.5). Подберите скрещивающиеся к прямым (А–В).

А) MA; 1) AB;
Б) MC; 2) AC;
В) MB. 3) BC.

А	
Б	
В	

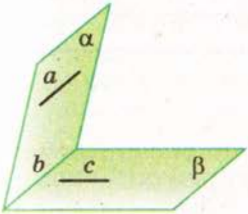


Рис. 3.4

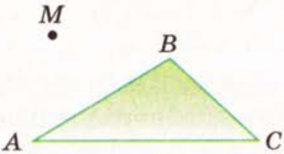


Рис. 3.5

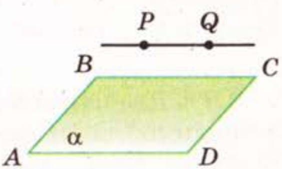


Рис. 3.6

3.5°. Прямая PQ, не лежащая на плоскости прямоугольника $ABCD$, параллельна BC (рис. 3.6). Дайте название каждой паре прямых.

А) PQ и AB; 1) Скрещивающиеся;
Б) PQ и CD; 2) параллельные;
В) PQ и AD. 3) пересекающиеся.

А	
Б	
В	

3.6°. Точка M находится вне плоскости треугольника ABC (рис. 3.7). На серединах отрезков MA, MC и MB обозначены точки K, F и P соответственно. Выберите три пары параллельных прямых.

1) KP; 3) KF; 5) PM; 7) AB; 9) AC.
2) PF; 4) KM; 6) FM; 8) BC;

А) 1 и 6; В) 2 и 4; Д) 3 и 9; Ж) 5 и 8;
Б) 1 и 7; Г) 2 и 8; Е) 3 и 5; З) 4 и 9.

3.7°°. Прямые m и n пересекаются, а прямая d параллельна прямой n. Укажите возможное взаимное расположение прямой m и d.

А) Параллельны; Б) пересекаются; В) скрещиваются.

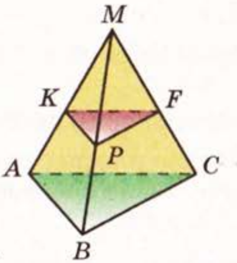


Рис. 3.7

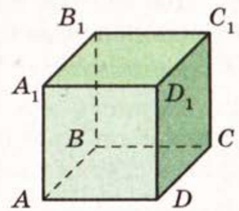


Рис. 3.8

3.8°°. На рисунке 3.8 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выберите такое взаимное расположение прямых в пространстве (А–В), которое бы соответствовало четырем из пяти заданных пар прямых (1–5), и такое, которое не подходит ни одной паре прямых.

А) Параллельны; 1) D_1D и B_1C;
Б) скрещиваются; 2) B_1C_1 и D_1C;
В) пересекаются. 3) A_1B и D_1C;
4) AD и D_1B_1;
5) CD и BC_1.

А				
Б				
В				

3.9°°. Два параллелограмма $ABCD$ и $ABKZ$ принадлежат различным плоскостям. Укажите параллельные прямые.

А) DA и KB; В) CD и KZ; Д) CB и KB.
Б) BC и AZ; Г) DA и ZA;

3.10°°. Определите геометрическую фигуру, образованную всеми отрезками, которые соединяют любые точки двух ребер прямоугольного параллелепипеда, лежащие на скрещивающихся прямых.

А) Треугольник; В) плоскость; Д) отрезок.
Б) четырехугольник; Г) треугольная пирамида;

3.11°. Докажите, что через прямую можно провести две различные плоскости.

3.12°. Даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько можно провести различных плоскостей, проходящих через три из этих точек?

3.13°. Точки A, B, C лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.

3.14°. Даны две плоскости, пересекающиеся по прямой a, и прямая b, которая лежит в одной из этих плоскостей и пересекает другую. Докажите, что прямые a и b пересекаются.

3.15°. Даны три различные плоскости, которые попарно пересекаются. Докажите, что когда две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.

3.16°. Докажите, что когда диагонали четырехугольника пересекаются, то его вершины лежат в одной плоскости.

3.17°°. Треугольник MNZ и параллелограмм $MNPS$ не принадлежат одной плоскости. Точки Q и R – соответственно середины сторон MZ и NZ. Докажите, что $QR \parallel PS$.

3.18°°. Параллелограмм $ABCD$ и трапеция $MBCN$ (BC – основание) не принадлежат одной плоскости. Докажите, что $MN \parallel AD$.

3.19°°. Трапеции $ABCD$ и $PZCD$ (CD – общее основание трапеций) не принадлежат одной плоскости. Точки Q и R – середины отрезков CB и DA, а точки M и N – середины отрезков DP и CZ соответственно. Докажите параллельность прямых MN и QR.

3.20°°. Точки K, Z, M, N – середины отрезков SA, AC, BC, SB треугольной пирамиды $SABC$. Найдите периметр четырехугольника $KZMN$, если боковые ребра равны b, а стороны основания – a.

3.21°°. Четыре точки пространства A, B, C, D не принадлежат одной плоскости. Точки M, N, K, Z – середины соответствующих отрезков AD, BD, BC, AC, причем $CD = AB$. Докажите перпендикулярность прямых MK и NZ.

§ 3.2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Прямая является подмножеством точек плоскости. Она состоит из множества точек. Такие рассуждения приводят к тому, что прямая и плоскость могут иметь множество общих точек, одну или ни одной общей точки. Случаи, когда прямая принадлежит плоскости и когда прямая пересекает плоскость, нам известны (рис. 3.9). Другие случаи расположения прямой и плоскости рассмотрим в следующих параграфах.

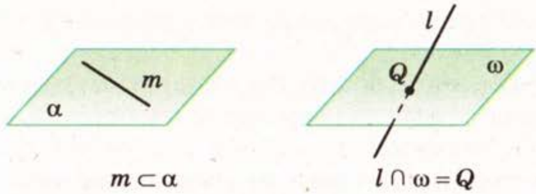


Рис. 3.9

Теорема 3

Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая также пересекает эту плоскость.

Доказательство. Пусть даны параллельные прямые a и b, прямая a пересекает плоскость α в точке A (рис. 3.10). Докажем, что вторая прямая b также пересекает плоскость α, т.е. имеет с ней общую точку, и притом только одну.

Обозначим β плоскость, которой принадлежат параллельные прямые a и b. Поскольку различные плоскости α и β имеют общую точку A, то, по аксиоме стереометрии, они имеют некоторую общую прямую c. Одна из параллельных прямых a плоскости β пересекает прямую c. Поэтому ее пересекает вторая, параллельная ей, прямая b. Точка B является точкой пересечения прямых b и c – общей точкой прямой b и плоскости α.

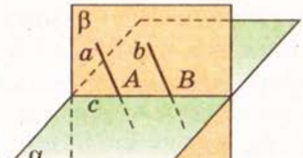


Рис. 3.10

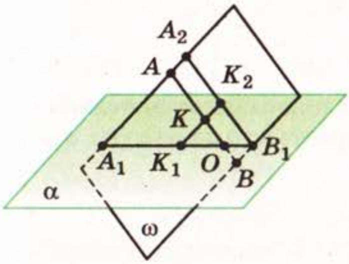
Допустим, что прямая b имеет с плоскостью α какую-либо другую общую точку. Тогда, по следствию из аксиом стереометрии, b принадлежит α. Поскольку прямая b принадлежит и плоскости β, то она совпадает с прямой c, которая является линией пересечения плоскостей α и β. Из этого вытекает, что прямая a одновременно пересекает и прямую b и параллельна ей. Получили противоречие, что и требовалось доказать. *Теорема доказана.*

Задача

Отрезок AB пересекает плоскость α в точке O. Через его концы A, B и точку K, которая делит отрезок в отношении $5:2$, считая от точки A, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость соответственно в точках A_1, B_1, K_1. Найдите длину отрезка BB_1, если известно, что $AA_1 = 45$ см, $KK_1 = 10$ см.

Решение

Поскольку прямые AA_1, BB_1, KK_1 параллельны и пересекают прямую AB, то они лежат в одной плоскости ω (рис. 3.11). Точки A_1, B_1, K_1 лежат на одной прямой – прямой пересечения плоскости ω с плоскостью α.



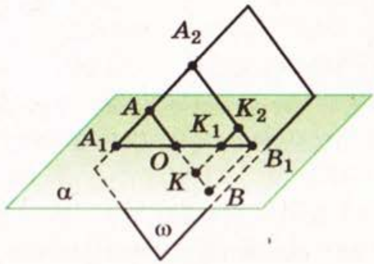


Рис. 3.11

Проведем в плоскости ω через точку B_1 прямую $B_1A_2 \parallel BA$, где A_2 – точка пересечения этой прямой с прямой AA_1, а K_2 – с прямой KK_1. Поскольку четырехугольники BB_1K_2K и BB_1A_2A – параллелограммы, то $KK_2 = AA_2 = BB_1$. Обозначим длину этих отрезков через x.

Тогда $A_1A_2 = AA_2 + AA_1 = x + 45$, $K_1K_2 = KK_2 \pm KK_1 = x \pm 10$ (взаимное расположение точек K, K_1, K_2 может быть различным: рис. 3.11, *а* и рис. 3.11, *б*). Из подобия треугольников $B_1K_1K_2$ и $B_1A_1A_2$ имеем: $\dfrac{K_1K_2}{A_1A_2} = \dfrac{B_1K_2}{B_1A_2} = \dfrac{BK}{BA} = \dfrac{2}{5+2} = \dfrac{2}{7}$.

Итак, $\dfrac{x \pm 10}{x + 45} = \dfrac{2}{7}$, отсюда $x = 4$ см или $x = 32$ см.

Ответ. 4 см или 32 см.

Отметим, что прямая пересекает плоскость, когда у нее с плоскостью одна общая точка.

Упражнения

3.22°. Выберите правильное утверждение.

А) Через точку пространства, не лежащую на прямой, можно провести множество прямых, параллельных данной;

Б) две прямые, параллельные третьей, пересекаются в одной точке;

В) если две точки прямой принадлежат плоскости, то прямая пересекает плоскость;

Г) через прямую и точку вне ее можно провести две различные плоскости;

Д) через точку пространства, не лежащую на плоскости, можно провести множество прямых, которые будут пересекать эту плоскость.

3.23°. Точки A и C принадлежат плоскости α, точки B и D принадлежат плоскости β. Укажите четыре прямые, которые будут пересекать плоскость β.

А) AC; Б) CD; В) BD; Г) AB; Д) BC; Е) AD.

3.24°. Отрезки AB, AC, KB, KD пересекают плоскость α. Выберите отрезки, которые будут пересекать плоскость α.

1) AK; 2) AD; 3) BD; 4) KC; 5) CD.

А) 1 и 3; Б) 2 и 4; В) 3 и 5; Г) 2 и 5; Д) 1 и 4.

3.25°. Известно, что прямые AB, AC и AD, лежащие в одной плоскости, пересекают плоскость α в точках B_1, C_1, D_1. Выберите фигуру, которую можно получить, последовательно соединив точки B_1, C_1, D_1.

А) Треугольник; Б) прямая; В) отрезок; Г) луч.

3.26°. Треугольник ABC пересекает плоскость α в точках B_1 и C_1 (рис. 3.12). Найдите длину отрезка B_1C_1, если известно, что $AB_1 : B_1B = 2 : 3$, $BC = 15$ см, $BC \parallel B_1C_1$.

А) 5 см; Б) 10 см; В) 7,5 см; Г) 6 см; Д) 9 см.

3.27°°. Через точку вне плоскости проведены прямые OA, OB, OC, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки K, M, N – середины отрезков OA_1, OB_1, OC_1 соответственно. Найдите соотношение периметров треугольников KMN и $A_1B_1C_1$ (рис. 3.13).

А) 1 : 3; Б) 2 : 3; В) 1 : 2; Г) 1 : 4; Д) 1 : 10.

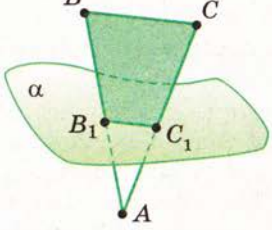


Рис. 3.12

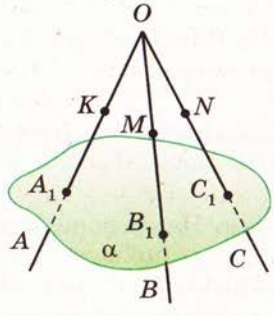


Рис. 3.13

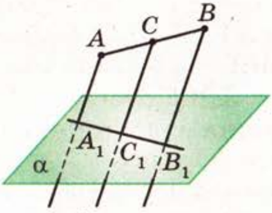


Рис. 3.14

3.28°°. Через концы отрезка AB (рис. 3.14), который не пересекает плоскость α, и его середину C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Найдите длину отрезка CC_1, если $AA_1 = 12$ см, $BB_1 = 16$ см.

А) 6 см; Б) 8 см; В) 12 см; Г) 14 см; Д) 20 см.

3.29°°. Две вершины A и B треугольника ABC (рис. 3.15) принадлежат плоскости α, а C – не принадлежит ей. Через точку D, принадлежащую стороне AC, проведена прямая $DD_1 \parallel BC$. Найдите длину отрезка DD_1, если известно, что $AD_1 = 4{,}5$ см, $D_1B = 1{,}5$ см, $BC = 8$ см.

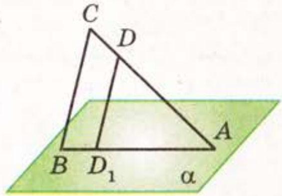


Рис. 3.15

А) 6 см; В) 2 см; Д) 4 см.

Б) 3,5 см; Г) 6,5 см;

3.30°°. Через концы отрезка MN, который не пересекает плоскость α, и его середину K проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках M_1, N_1, K_1 соответственно. Найдите длину отрезка MM_1, если $KK_1 = 9$ см, $NN_1 = 15$ см.

А) 3 см; Б) 5 см; В) 8 см; Г) 6 см; Д) 4 см.

3.31°°. Из точек P и Z плоскости α проведены вне ее параллельные отрезки $PK = 6$ см и $ZM = 9$ см. Прямая MK пересекает плоскость α в точке O. Найдите расстояние MO, если $MK = 6$ см.

А) 12 см; Б) 9 см; В) 15 см; Г) 18 см; Д) 10 см.

3.32•. Сторона AB треугольника ABC принадлежит плоскости α, а две другие – не принадлежат ей. Точка X – произвольная точка луча AC. Постройте точку пересечения прямой $XX_1 \parallel BC$ с плоскостью α.

3.33•. Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ принадлежит плоскости α, а три другие стороны трапеции не принадлежат ей. Постройте точку X – точку пересечения прямой, содержащей другую боковую сторону трапеции, с плоскостью α.

3.34•. Найдите при указанных требованиях задачи 3.33 длину отрезка AX, если $AD : BC = 2 : 3$, $AB = 2$ см.

3.35•. Сторона AD прямоугольника $ABCD$ принадлежит плоскости α, а все другие – нет. На стороне DC выбрали точку M так, что $DM : MC = 2 : 3$. Постройте точку пересечения прямой MX с плоскостью α, если $MX \parallel AC$.

3.36•. Сторона TS прямоугольника $TPRS$ принадлежит плоскости α, а все другие – нет. На стороне RS выбрали точку M так, что $SM : MR = 2 : 3$, и провели прямую $MN \parallel TR$, точка N принадлежит плоскости α. Найдите длину отрезка TN, если $TS = 10$ см.

3.37••. Точка C делит отрезок AB в отношении $AC : CB = 2 : 3$. Параллельные прямые, которые проходят через точки A, B, C, пересекают некоторую плоскость в точках A_1, B_1, C_1. Найдите отношение $A_1B_1 : A_1C_1$.

3.38••. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость α. Докажите, что прямые AD и DC также пересекают плоскость α.

3.39••. Треугольники ABC и ABD не лежат в одной плоскости. Докажите, что любая прямая, параллельная отрезку CD, пересекает плоскости данных треугольников.

§ 3.3. Параллельность прямой и плоскости

Рассмотренные в параграфах 3.1 и 3.2 случаи не исчерпывают всех возможных вариантов расположения прямой относительно плоскости. Рассмотрим случай, когда у прямой с плоскостью нет ни одной общей точки. В таком случае говорят, что прямая *параллельна плоскости.*

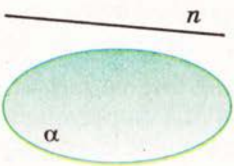


Рис. 3.16

Прямая называется ***параллельной*** плоскости, если не имеет с ней ни одной общей точки.

Параллельность прямой и плоскости обозначают символом «$\parallel$». Например $n \parallel \alpha$ (рис. 3.16). Проверить параллельность прямой и плоскости можно, пользуясь признаком.

Теорема 4 (***признак параллельности прямой и плоскости***)

Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Доказательство. Пусть α – плоскость, m – прямая, которая ей не принадлежит, m_1 – прямая, принадлежащая α, и $m_1 \parallel m$. Если $m \parallel m_1$ (рис. 3.17), то они лежат в одной плоскости β. Тогда m_1 – прямая, все точки которой общие для плоскостей α и β. Пусть прямая m пересекает плоскость α, тогда эта точка пересечения является общей точкой для плоскостей α и β, т.е. принадлежит прямой m_1. Это означает, что прямые m и m_1 пересекаются. Получили противоречие условию. Итак, прямая m не может иметь с плоскостью α общих точек, поэтому параллельна ей, что и требовалось доказать. *Теорема доказана.*

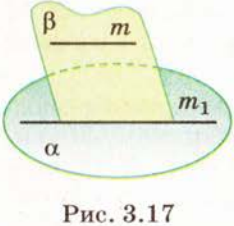


Рис. 3.17

Отрезок называется ***параллельным плоскости***, если он принадлежит прямой, которая параллельна плоскости. Например, в помещении, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда, стыки стен с потолком параллельны полу, и наоборот – стыки стен с полом параллельны потолку и т.д. Аналогично можно рассматривать такое расположение на модели прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.18):

$AA_1 \parallel (CC_1D_1D)$, $AD \parallel (BB_1C_1C)$, $AA_1 \parallel (BB_1C_1C)$,
$BB_1 \parallel (A_1ADD_1)$, $DD_1 \parallel (BB_1C_1C)$, $AD_1 \parallel (BB_1C_1C)$ и т.д.

Следствие 1. *Если прямая параллельна плоскости, то через каждую точку этой плоскости на ней можно провести прямую, параллельную данной прямой.*

Например, на плоскости α находится множество прямых, которым параллельна прямая b (рис. 3.19).

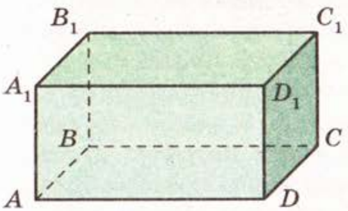


Рис. 3.18

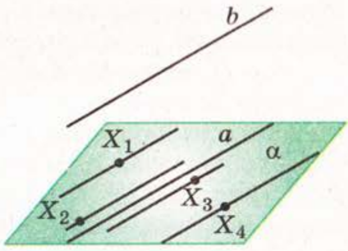


Рис. 3.19

Следствие 2. *Существует множество прямых, параллельных одной и той же плоскости.*

Например, вне плоскости α находится множество параллельных ей прямых, которые могут принадлежать или не принадлежать одной плоскости (рис. 3.20).

Следствие 3. *Если прямая параллельна каждой из пересекающихся плоскостей, то она параллельна и прямой их пересечения.*

Например, на рисунке 3.21 изображены $\alpha \cap \beta = l$, $m \parallel \alpha$ и $m \parallel \beta$. Вывод: $m \parallel l$.

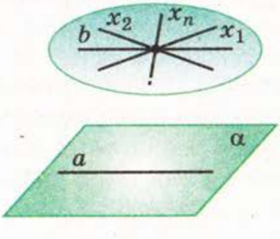


Рис. 3.20

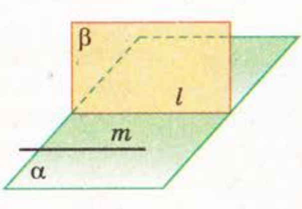


Рис. 3.21

Итак, через точку А вне плоскости α можно провести:

– **множество прямых, параллельных плоскости α,**

– одну прямую b, параллельную прямой a плоскости α,

– множество прямых, скрещивающихся с прямой a плоскости α.

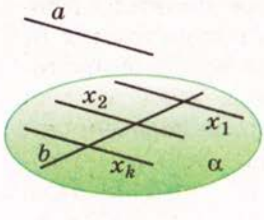


Рис. 3.22

Задача 1 Докажите, что все прямые, пересекающие одну из двух скрещивающихся прямых и параллельные другой, лежат в одной плоскости.

Дано: прямые a, b – скрещивающиеся.

Доказать, что все прямые, пересекающие b и параллельные a, лежат в одной плоскости.

Доказательство	Почему именно так?
Проведем несколько произвольных прямых x_1, x_2, ..., x_k, пересекающих одну из двух скрещивающихся, например b, и параллельных прямой a (рис. 3.22). Поскольку $x_1 \parallel a$ и $x_2 \parallel a$, то $x_1 \parallel x_2$, т.е. x_1 и x_2 принадлежат некоторой плоскости. Назовем ее α. Отсюда следует, что прямые x_1, a, $x_2 \subset \alpha$. Аналогично рассуждая, получаем, что прямые x_3, x_4, ..., x_k, ... также принадлежат плоскости α. Итак, все прямые x_1, x_2, x_3, ... принадлежат плоскости α.	Скрещивающиеся прямые a и b не пересекаются и не параллельны. Нужно выбрать одну из них, с котрой будем выполнять пересечение, например b. Тогда на прямой b выбираем некую точку, через которую проводим прямую, параллельную прямой a (по аксиоме). Пусть это прямая x_1. Это определяет единственную плоскость, допустим α. На прямой выбираем еще одну точку, через которую проводим прямую $x_2 \parallel a$, причем $x_2 \cap b$. Приходим к выводу: $x_1 \parallel a$ и $x_2 \parallel a$, то $x_1 \parallel x_2$, а это означает, что $x_2 \subset \alpha$. Такие рассуждения можно провести для любой прямой, пересекающей прямую b и параллельной прямой a.

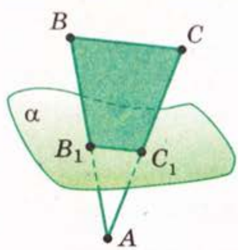


Рис. 3.23

Задача 2 Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC соответственно в точках B_1 и C_1, $BC \parallel \alpha$ (рис. 3.23). Найдите длину стороны BC треугольника ABC, если $B_1C_1 = 6$ см и $CC_1 : C_1A = 3 : 2$.

Дано: $\triangle ABC$, α, $BC \parallel \alpha$, $AB \cap \alpha = B_1$, $AC \cap \alpha = C_1$, $CC_1 : C_1A = 3 : 2$, $B_1C_1 = 6$ см.

Найти: BC.

Решение	Почему именно так?
B_1C_1 – прямая пересечения (ABC) и α. $BC \parallel \alpha$, поэтому $BC \parallel B_1C_1$, $\triangle AB_1C_1 \backsim \triangle ABC$ (по углам). $$\frac{CC_1}{C_1A} = \frac{3}{2} = \frac{3k}{2k}.$$ $CC_1 = 3k$, $C_1A = 2k$, тогда $AC = 5k$. $$\frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}, \frac{AC_1}{AC} = \frac{2}{5}.$$ $$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{2}{5} = \frac{2k}{5k},$$ $B_1C_1 = 6$ см, $2k = 6$, $k = 3$, $BC = 5k = 5 \cdot 3 = 15$ (см). *Ответ.* 15 см.	Плоскость треугольника ABC пересекается с плоскостью α в двух точках B_1 и C_1, через которые проходит единственная прямая B_1C_1 – прямая пересечения плоскостей. $BC \parallel \alpha$, поэтому $BC \parallel x$, $x \subset \alpha$. Однако через BC и x проходит единственная плоскость (BCC_1B_1). Итак, $BC \parallel B_1C_1$. Далее используем обобщенную теорему Фалеса (о пропорциональных отрезках) или подобие треугольников.

Упражнения

3.40°. Определите, сколько прямых, параллельных плоскости, можно построить через точку вне этой плоскости.

А) Одну; Б) две; В) три; Г) много; Д) ни одной.

3.41°. Известно, что прямая a параллельна плоскости α. Выберите правильные утверждения.

А) Прямая a параллельна только одной прямой плоскости α;

Б) прямая a скрещивается с любой прямой плоскости α, кроме одной;

В) на плоскости α существует множество прямых, параллельных a, и множество скрещивающихся с a прямых;

Г) на плоскости α существует только одна прямая, параллельная a, которая проходит через любую точку плоскости;

Д) прямая a имеет на плоскости α множество прямых, которые проходят через одну точку, и только одна из них параллельна ей, а все другие – скрещивающиеся.

3.42°. Определите количество плоскостей, которые можно провести через вершину C треугольника ABC параллельно AB.

А) Одну; В) ни одной; Д) много.

Б) две; Г) одну или ни одной;

3.43°. Плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC соответственно в точках B_1 и C_1, $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1C_1 = 12$ см, $BC \parallel \alpha$. Определите сторону BC треугольника ABC (рис. 3.24).

А) 15 см; Б) 16 см; В) 18 см; Г) 24 см; Д) 20 см.

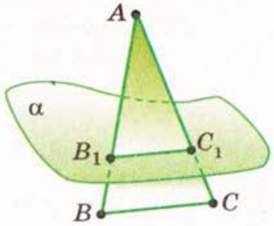


Рис. 3.24

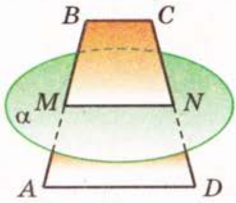


Рис. 3.25

3.44°. Плоскость α, параллельная основанию AD трапеции $ABCD$, пересекает ее боковые стороны в точках M и N, являющихся их серединами. Найдите длину отрезка MN, если $AD = 17$ см, $BC = 9$ см (рис. 3.25).

А) 16 см; Б) 12 см; В) 13 см; Г) 10 см; Д) 13,5 см.

3.45°. Плоскость α, параллельная основанию равнобокой трапеции, пересекает стороны AB и CD в точках M и N соответственно, $AD = 20$ см, $MN = 16$ см. Найдите периметр трапеции $ABCD$, если M – середина AB и $AB = 8$ см (рис. 3.25).

А) 44 см; Б) 40 см; В) 52 см; Г) 48 см; Д) 36 см.

3.46°°. Плоскости α и β пересекаются по прямой c. На плоскости α проведена прямая a, параллельная прямой c. Укажите взаимное расположение прямой a и плоскости β.

А) Прямая a пересекает плоскость β;
Б) прямая a принадлежит плоскости β;
В) прямая a параллельна плоскости β.

3.47°°. Укажите грани куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, которым параллельна прямая A_1B_1 (рис. 3.26).

1) AA_1D_1D; 3) $ABCD$; 5) $B_1C_1D_1A_1$;
2) BB_1C_1C; 4) DD_1C_1C; 6) $AD\,D_1A_1$.

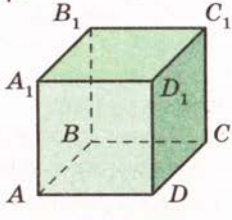


Рис. 3.26

А) 1 и 2; Б) 2 и 3; В) 3 и 4; Г) 4 и 5; Д) 5 и 6.

3.48°°. Дан треугольник PRT. Плоскость α, параллельная прямой PT, пересекает сторону PR в точке S, а сторону RT – в точке Q. Определите длину стороны PT треугольника PRT, если $SR = 7$ см, $SQ = 3$ см и $SP = 35$ см (рис. 3.27).

А) 17 см; Б) 21 см; В) 18 см; Г) 22 см; Д) 30 см.

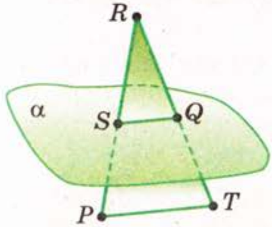


Рис. 3.27

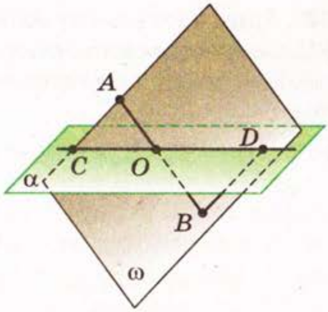


Рис. 3.28

3.49°°. Отрезок AB длиной 24 см пересекается плоскостью α в точке O, которая делит его в отношении 3 : 5, начиная от точки A. Через концы отрезка A и B проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках C и D. Определите сумму длин отрезков CO и AO, если $OD = 10$ см (рис. 3.28).

А) 15 см; Б) 12 см; В) 18 см; Г) 21 см; Д) 16 см.

3.50•. На рисунке 3.29 изображены отрезки. Известно, что $AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 = CC_1$. Докажите, что $B_1C_1 = BC$.

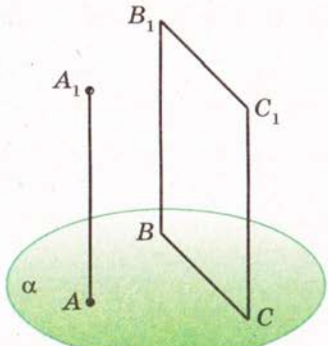


Рис. 3.29

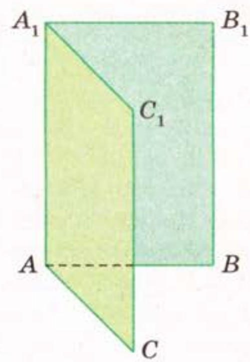


Рис. 3.30

3.51•. На рисунке 3.30 изображены два четырехугольника. Известно, что $A_1C_1 = AC$ и $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1A_1 = BA$ и $B_1A_1 \parallel BA$. Докажите, что $CC_1 \parallel BB_1$.

3.52•. Параллелограммы $ABCD$ и ABC_1D_1 принадлежат разным плоскостям. Докажите, что четырехугольник CDD_1C_1 – также параллелограмм.

3.53•. Дан ромб $ABCD$, в котором меньшая диагональ равна его стороне. Плоскость, параллельная этой диагонали, пересекает две смежные стороны ромба в точках M и N – серединах этих сторон. Найдите периметр ромба, если $MN = 6$ см.

3.54•. Дан треугольник MNK. Плоскость, параллельная прямой MN, пересекает сторону MK в точке Q, а сторону NK – в точке P. Найдите длину отрезка KP, если $QP = 9$ см, $MN = 13$ см, $PN = 8$ см.

3.55•. Через один конец O отрезка OA проведена плоскость. Через другой конец A и точку B этого отрезка проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость в точках A_1 и B_1. Найдите длину отрезка AA_1, если:

1) $BB_1 = 12$ см, $OB : AB = 3 : 2$; 3) $BB_1 = 18$ см, $OA : OB = 5 : 3$;
2) $OA = 8$ см, $OB : BB_1 = 4 : 5$; 4) $OB = a$, $AB = b$, $BB_1 = c$.

3.56••. Точка M не принадлежит плоскости трапеции $ABCD$ с основанием AD. Докажите, что $AD \parallel (BMC)$.

3.57••. Докажите, что плоскость α, которая проходит через середины двух ребер основания тетраэдра и вершину, не принадлежащую его основанию, параллельна третьему ребру основания тетраэдра.

3.58••. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке O. Через концы A и B отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите:
1) AA_1, если известно, что $OA : OB = 4 : 5$, $BB_1 = 15$ см;
2) OA_1 и OB_1, если $AA_1 : BB_1 = 5 : 6$, $A_1B_1 = 22$ см.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

3.1. Как расположены относительно друг друга оси железнодорожных вагонов?

3.2. Как расположены оси железнодорожных вагонов относительно рельсов?

3.3. Выберите среди окружающих вас предметов модели параллельных и скрещивающихся прямых.

3.4. Почему ящики комодов или письменных столов иногда двигаются рывками, с остановками?

Указание. Отрезки параллельных прямых, находящиеся между двумя другими параллельными прямыми, равны.

3.5. Почему вставленый в насос поршень, как правило, движется без преград, плавно?

Указание. Отрезки параллельных прямых, находящиеся между двумя другими параллельными прямыми, равны.

3.6. Нужно проверить, параллельны ли плинтусы пола коридора. Можно ли это сделать с помощью измерительной ленты или достаточно длинной палки?

3.7. Общая касательная двух конических катков равна 100 мм и образует с осью вращения каждого конуса углы соответственно 30° и 60°. Вычислите радиусы оснований конических катков.

Ответ. 50 мм; ≈ 87 мм.

Евклид (ок. 365 – 300 до н.э.)

Если труд Евклида не смог зажечь ваш юношеский энтузиазм, – вы не рождены быть теоретиком.

А. Эйнштейн

Сведений о жизни Евклида почти не сохранилось. До наших дней дошли только 2–3 легенды и главный его труд – выдающиеся «Начала». Эта работа состоит из 13 книг, содержащих основы планиметрии, стереометрии, арифметики. Главная особенность «Начал» в том, что они построены по единой логической схеме, справедливо признанной образцом дедуктивной системы. Небольшое количество основных положений принимается без доказательств, и на основе этой системы аксиом и других достоверных утверждений с удивительной ясностью и размахом возводится величественное здание геометрии.

Книги «Начал» и сегодня привлекают внимание математиков, а их логическое построение повлияло на научное мышление более, чем любое другое произведение.

Наука располагает незначительными сведениями о жизни и деятельности Евклида. Прокл (V в. н. э.), комментатор работ ученого, не уточняя дат жизни и места рождения, сообщает, что «этот ученый муж» жил в период царствования Птолемея I. Некоторые биографические данные сохранились на страницах арабской рукописи XII в.: «Евклид, сын Наукрата, известный под именем Геометра, ученый древнего времени, по своему происхождению грек, по местожительству сириец, родом из Тира». По приглашению царя Птолемея Евклид переехал в Александрию, где организовал математическую школу и написал для ее учеников свои знаменитые «Начала» (ок. 325 г. до н. э.).

После Библии «Начала» – популярнейший письменный памятник древности. На протяжении двух тысячелетий сочинение Евклида было настольной книгой школьников всего мира, с папируса перешедшей на пергамент, а позднее – на бумагу и электронные носители. На протяжении последних четырех столетий «Начала» печатались 2500 раз: в среднем ежегодно выходило 6–7 изданий. К началу XX в. книга считалась основным учебником по геометрии не только для школ, но и для университетов.

По свидетельству Паппа Александрийского (III в. н. э.), Евклид был человеком мягкого характера, очень скромным и независимым. Одна из легенд гласит, что однажды царь Птолемей I решил изучить геометрию и позвал Евклида, чтобы тот указал ему легкий путь к математике. «К геометрии нет царских путей», – ответил ученый. Другая легенда утверждает, что как-то к Евклиду пришел юноша и стал постигать геометрию под его руководством. Усвоив несколько теорем, молодой человек поинтересовался, какую пользу получит, изучив «Начала». Евклид не ответил ученику. Он позвал раба и приказал: «Дай ему грош, он хочет извлечь выгоду из обучения».

Над входом в Академию Платона было написано: «Да не войдет сюда тот, кто не знает геометрии».

Описание основных фигур геометрии. Мы довольно часто употребляем выражения *точка зрения*, *болевая точка*, *точка опоры*, *сдвинуть с мертвой точки*, *точка отсчета*, *критическая точка*, *попасть в точку*, *дойти до точки* и т.п. Возможно, вы продолжите этот ряд? Что означают эти выражения? Что их объединяет? Общее заметить несложно – это слово «точка». Однако следует обратить внимание и на суть выражений: в каждом из них речь идет о том, что не имеет протяженности. Существует множество практических задач, для решения которых необходимо определить расположение тела в пространстве. Размеры тела в подобных задачах во внимание не принимаются. Скажем, если мы ищем некий географический объект, например город, на карте, то его реальные размеры для нас неважны. (Вы можете привести и другие примеры.) В результате абстрагирования от размеров предмета приходят к неопределяемому, идеальному понятию геометрической точки. Представить ее можно, например, как след от укола иглы или след от тонко заостренного карандаша на бумаге, от мела на доске и т.п.

Математические модели возникли как специальный способ приблизительного описания определенного объекта, явления, проблемы. Разумеется, реально их не существует. Тогда с какой целью их создают? Каковы функции математических моделей? (В ответе на поставленный вопрос желательно отразить, что математическая модель реальных явлений позволяет исследовать их математическими средствами и, соответственно, решить определенную практическую задачу.)

Еще одна математическая модель – геометрическая прямая, о которой вы также знаете из курса планиметрии. Всем понятны выражения: *прямая речь*, *прямая дорога*, *прямой наследник* или *родственник*, *прямое соединение*, *прямое указание*, *прямая противоположность* и т.д. (продолжите ряд). Здесь мы употребляем прилагательное «прямой», но в каком значении? Очевидно, речь идет о том, что происходит в одном направлении, не разветвляется, имеет только одно измерение. Вспомните, как выглядят планы домов на схеме. (Возможно, вы столкнетесь с ними в профессиональной деятельности, когда будете строить или перепланировывать дом.) Стены изображают в виде прямых линий, пренебрегая их толщиной, поскольку в первую очередь интересуются расположением комнат, окон и т.п. Коммуникации (например, электрический кабель) также отображаются на планах без учета толщины. Можно привести еще много примеров (приведите), когда абстрагируются от материала, размеров, принимая во внимание только длину. Но не забудьте, что для математической модели геометрической прямой важно то, что она бесконечна и не является волнистой, закрученной и т.п. Приблизительное представление о части прямой может дать луч света, туго натянутая струна, провод, след от мела, проведенного по доске вдоль линейки и т.п.

Далее переходим к еще одному неопределяемому понятию. Сначала вспомним выражения: *наши интересы лежат в одной плоскости*, *катится по наклонной плоскости*, *рассмотреть вопрос в другой плоскости* (продолжите ряд). Вы, наверное, догадались, что речь пойдет о создании третьей математической модели – плоскости. Представить часть плоскости поможет хорошо отполированная доска, гладь озера в тихую погоду или оконное стекло, зеркало и т.п. Какими практическими задачами обусловлена необходимость создания этого идеального понятия, изучения его свойств? Например, задачи строителя (стены комнаты должны быть параллельны между собой и иметь гладкую поверхность, междуэтажные перекрытия), задачи закройщика и т.п.

Если вы поняли суть построения математических моделей, то вам несложно будет ответить на такой вопрос: может ли один и тот же реальный объект служить в одном случае моделью для точки, в другом – для прямой, потом, например, для прямоугольника или прямоугольного параллелепипеда? Приведите примеры. Ответ может быть таким: «Возьмем, к примеру, дом. Когда нас интересует его расположение на карте, мы не принимаем во внимание его размеры (модель точки). Если интересует расположение относительно определенной улицы (перпендикулярно или параллельно), то это модель отрезка. Если необходимо вычислить площадь, которую занимает фундамент дома, то мы изображаем его как прямоугольник. Для изготовления макета дома следует воспринимать его как модель прямоугольного параллелепипеда».

Вопросы для самоконтроля

1. Как могут быть расположены прямые в пространстве?
2. Какие прямые называются параллельными, а какие – скрещивающимися?
3. Могут ли параллельные прямые быть скрещивающимися? А скрещивающиеся – параллельными? Ответ обоснуйте.
4. Всегда ли можно провести плоскость через четыре точки?
5. Какие признаки параллельности прямых вы знаете?
6. Могут ли две прямые быть параллельными, если не существует третьей прямой, которой они параллельны?
7. Может ли плоскость пересекать только одну сторону параллелограмма; трапеции; выпуклого четырехугольника?
8. Каков признак скрещивающихся прямых?
9. Могут ли две прямые быть скрещивающимися, если они обе параллельны третьей прямой?
10. Может ли прямая, скрещивающаяся с одной из двух параллельных прямых, быть параллельной другой прямой?
11. Можно ли в пространстве провести такую прямую, которая была бы параллельна двум различным прямым, не принадлежащим одной плоскости?
12. Как могут быть расположены прямые в пространстве относительно плоскости?
13. Какая прямая называется параллельной плоскости?
14. Как могут быть расположены две прямые, если одна из них принадлежит плоскости, а другая пересекает эту плоскость?
15. Как могут быть расположены две прямые, каждая из которых скрещивается с третьей?
16. Какую фигуру образуют все прямые, которые пересекают одну из двух скрещивающихся прямых и параллельны второй?
17. Верно ли утверждение: «Прямые, параллельные двум скрещивающимся прямым, скрещивающиеся»?
18. Каков признак параллельности прямой и плоскости?
19. Могут ли две прямые быть параллельными, если каждая из них параллельна одной из двух скрещивающихся прямых?
20. Одинаков ли смысл утверждений: «Прямые принадлежат разным плоскостям» и «Прямые не принадлежат одной плоскости»?
21. Возможно ли, чтобы прямая a не была параллельной плоскости α, но на плоскости α были бы прямые, параллельные a?
22. Верно ли утверждение: «Если две прямые параллельны одной и той же плоскости, то они параллельны между собой»?
23. Сколько прямых, параллельных данной плоскости, можно провести через данную точку?

Тест для самоконтроля

• *Часть 1*

Задания 1–16 содержат варианты ответов, из которых правильным является только *один* или *конкретное количество*. Выберите правильный ответ.

1°. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ расположена на плоскости α, а сторона BC не лежит на ней. Укажите расположение прямой BC относительно плоскости α (рис. 3.31).

А) Пересекает плоскость;

Б) лежит на плоскости;

В) параллельна плоскости.

2°. Две плоскости α и β пересекаются по прямой a (рис. 3.32). Прямая b пересекает плоскости α и β в точках A и B соответственно, не принадлежащих прямой a. Определите взаимное расположение прямых a и b.

А) Пересекаются;

Б) скрещиваются;

В) параллельны.

3°. Известно, что прямая a расположена на плоскости α. Подберите к каждому условию (А–В) вывод (1–3) о взаимном расположении прямых a и b.

А) Прямая b пересекает плоскость α в точке, не принадлежащей прямой a;

Б) прямая b не пересекает прямую a и принадлежит плоскости α;

В) прямая b пересекает плоскость α в точке, принадлежащей прямой a.

1) Пересекаются;

2) скрещиваются;

3) параллельны.

А	
Б	
В	

4°. На рисунке 3.33 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выберите для прямой, содержащей ребро куба DD_1, три параллельные ей прямые.

А) AA_1; Б) A_1B_1; В) BB_1; Г) CC_1; Д) AB.

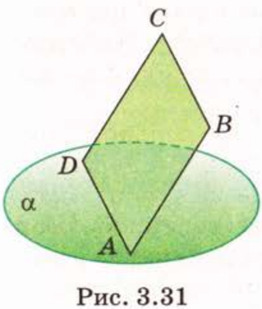


Рис. 3.31

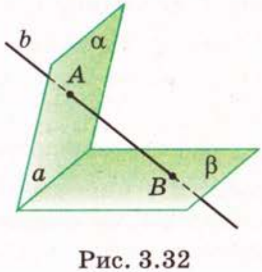


Рис. 3.32

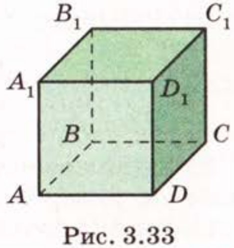


Рис. 3.33

5°. Укажите, пользуясь изображением куба (рис. 3.33), прямые, скрещивающиеся с прямой DC.

А) AB; Б) A_1B_1; В) AA_1; Г) C_1D_1; Д) BB_1.

6°. Укажите грани куба (рис. 3.33), параллельные ребру AB.

А) DD_1A_1A; В) $A_1B_1C_1D_1$; Д) $CBAD$.
Б) DD_1C_1C; Г) BB_1C_1C;

7°. Укажите грани куба (рис. 3.33), которые пересекает прямая B_1C_1.

А) ABB_1A_1; В) DCC_1D_1; Д) $DABC$.
Б) DD_1A_1A; Г) $C_1D_1A_1B_1$;

8°. Дан треугольник PRQ (рис. 3.34). Плоскость α пересекает стороны PR и PQ в его серединах – точках A и B соответственно. $PA = 6$ см, $AB = 8$ см, $BQ = 9$ см. Поставьте в соответствие каждому элементу треугольника его числовое значение.

А) Длина PR; 1) 18 см;
Б) длина RQ; 2) 46 см;
В) длина PQ; 3) 12 см;
Г) периметр $\triangle PAB$; 4) 16 см;
Д) периметр $\triangle PRQ$. 5) 23 см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

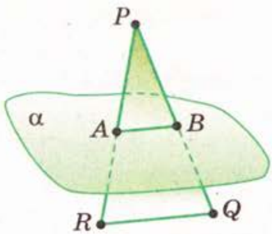


Рис. 3.34

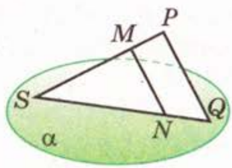


Рис. 3.35

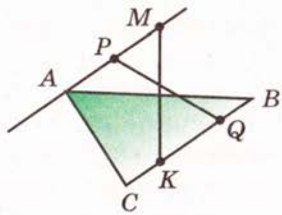


Рис. 3.36

9°°. Через один конец S отрезка SP проведена плоскость α (рис. 3.35). Точка M принадлежит отрезку SP. Через точки M и P проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках N и Q. Найдите длину отрезка MN, если $SN = 5$ см, $NQ = 2$ см, $PQ = 14$ см.

А) 9 см; Б) 8 см; В) 10 см; Г) 12 см; Д) 11 см.

10°°. Прямая MA (рис. 3.36) пересекает плоскость (ABC). $P \in AM$, $K \in CB$, $Q \in CB$, $K \in CQ$. Определите взаимное расположение прямых MK и PQ.

А) Скрещиваются; Б) пересекаются; В) параллельны.

11°°. Дан правильный треугольник LMN (рис. 3.37), сторона которого равна 6 см. Точка K не принадлежит плоскости треугольника LMN, причем $KL = KM = KN = 8$ см. Точки A, B, C,

D – середины отрезков KL, KN, NM, ML соответственно. Найдите периметр полученного параллелограмма $ABCD$.

А) 14 см; В) 32 см; Д) 28 см.
Б) 24 см; Г) 7 см;

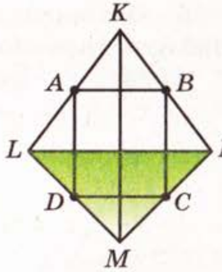


Рис. 3.37

12°°. Катеты прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$, рис. 3.38) равны 3 см и 4 см. Через середины катетов параллельно гипотенузе проведена плоскость α, пересекающая треугольник по отрезку A_1B_1. Найдите длину этого отрезка.

А) 1,5 см; Б) 2 см; В) 3,5 см; Г) 2,5 см; Д) 5 см.

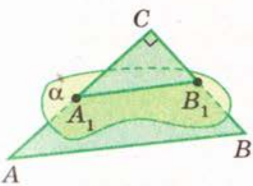


Рис. 3.38

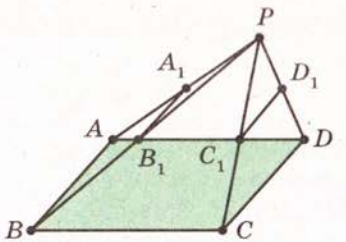


Рис. 3.39

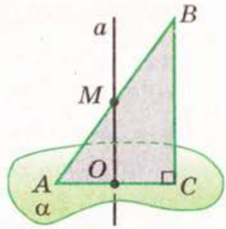


Рис. 3.40

13°°. Стороны прямоугольника $ABCD$ (рис. 3.39) равны 6 см и 8 см. Точка P не принадлежит плоскости ($ABCD$). Найдите площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, в котором A_1, B_1, C_1, D_1 – середины отрезков PA, PB, PC, PD соответственно.

А) 48 см^2; Б) 24 см^2; В) 36 см^2; Г) 12 см^2; Д) 16 см^2.

14°°. На рисунке 3.40 изображен прямоугольный треугольник ABC, катет которого $AC = 6$ см принадлежит плоскости α. Вершина B этой плоскости не принадлежит. Прямая a, проходящая через середину гипотенузы параллельно катету BC, пересекает плоскость α в точке O. Найдите длину отрезка MO, если $BM = 5$ см.

А) 5 см; Б) 3 см; В) 4 см; Г) 2 см; Д) 2,5 см.

15°°. Через точку Q отрезка QA проведена плоскость α (рис. 3.41). Точка B принадлежит отрезку AQ, причем $AB : BQ = 1 : 2$. Отрезок CB параллелен плоскости α и равен 5 см. Прямая ACпересекает плоскость α в точке D. Найдите расстояние между точками Q и D.

А) 10 см; Б) 7,5 см; В) 12,5 см; Г) 15 см; Д) 17,5 см.

16°°. На рисунке 3.42 изображены ромб $ABCD$ и равносторонняя трапеция $ABKZ$. AB – линия пересечения этих плоско-

стей. MN – средняя линия $ABKZ$, $MN = 7$ см. $P_{ABCD} = 16$ см. Найдите длину отрезка ZK.

А) 23 см; Б) 11 см; В) 15 см; Г) 14 см; Д) 10 см.

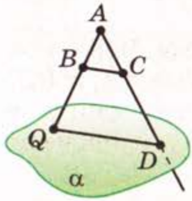


Рис. 3.41

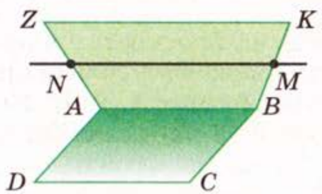


Рис. 3.42

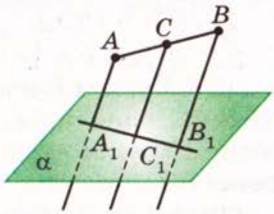


Рис. 3.43

● ***Часть 2***

Выполните задания 17–28 с краткой записью хода рассуждений.

17•. Через катет BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) проведена плоскость α. Через точку D, лежащую на гипотенузе AB, проведена прямая a, параллельная другому катету, которая пересекает плоскость в точке D_1. Найдите длину катета AC, если $BD : DA = 2 : 7$, а $DD_1 = 7$ см.

18•. Через точки M и N, принадлежащие соответственно катетам CA и CB прямоугольного треугольника ABC с острым углом 30°, параллельно гипотенузе проведена плоскость. Найдите периметр треугольника CMN, если гипотенуза $AB = 13$ см, $AC = 5$ см, а $CM : MA = 1 : 4$.

19•. Отрезок AB не пересекает плоскость α (рис. 3.43). Через концы отрезка и его середину проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Найдите длину отрезка AA_1, если $BB_1 = 10$ см, а CC_1 на 4 см длиннее AA_1.

20•. Через конец A отрезка AK проведена плоскость α, а через точку B отрезка AK проведен отрезок BM длиной 8 см, параллельный плоскости α. Прямая KM пересекает плоскость α в точке Q. Найдите расстояние между точками плоскости A и Q, если известно, что $KB : BA = 4 : 7$.

21•. Дан треугольник PQR. Плоскость, параллельная PQ, пересекает сторону PR этого треугольника в точке P_1, а сторону QR – в точке Q_1. Найдите длину отрезка P_1Q_1, если $PQ = 30$ см, а $PP_1 : PR = 2 : 3$.

22•. По условию задачи 21 найдите длину отрезка P_1Q_1, если $PQ = 27$ см, а $PP_1 : P_1R = 2 : 7$.

23•. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC – в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4 : 5$.

24•. Дан треугольник ABC. Плоскость, параллельная прямой AB, пересекает сторону AC этого треугольника в точке A_1, а сторону BC – в точке B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$. Вычислите значение выражения, если $a = 20$ см, $b = 24$ см, $c = 10$ см.

25•. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке O. Через концы отрезка A и B проведены параллельные прямые AA_1 и BB_1, пересекающие плоскость в точках A_1 и B_1. Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 : BB_1 = 2 : 3$ и отрезок OA на 3 см короче отрезка BO.

26•. Отрезок AB пересекает плоскость α в точке O. Через концы отрезка A и B проведены параллельные прямые AA_1 и BB_1, пересекающие плоскость в точках A_1 и B_1, где A_1, B_1 – точки пересечения с плоскостью α. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AO : OB = 2 : 5$ и отрезок OB_1 на 9 см длиннее отрезка OA_1.

27•. Отрезок AB пересекает плоскость. Через его концы и середину – точку Q_1 – проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость соответственно в точках A_1, B_1, Q_1. Определите длину отрезка QQ_1, если $AA_1 = 7$ см, $BB_1 = 11$ см.

28•. Отрезок CD пересекает плоскость. Через его концы и середину – точку M – проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость соответственно в точках C_1, M_1, D_1. Известно, что $CC_1 = 4$ см, $DD_1 = 16$ см. Найдите длину отрезка MM_1.

● *Часть 3*

Выполните задания 29–32 с полным обоснованием.

29••. Дан треугольник ABC, в котором $AC = 9$ см. Известно, что плоскость, параллельная прямой AC, пересекает сторону AB в точке K, а сторону BC – в точке M так, что $MC = 15$ см, а $KM = 4$ см. Определите длину отрезка BC.

30••. Даны треугольник ABC и плоскость α, не пересекающая его. Точки M, N, K – середины сторон AB, BC, AC соответственно. Через точки A, B, C, M, N, K проведены параллельные прямые AA_1, BB_1, CC_1, MM_1, NN_1, KK_1 (A_1, B_1, C_1, M_1, N_1, K_1 – точки пересечения параллельных прямых с плоскостью α). Известно, что $KK_1 = 10$ см, $NN_1 = 9$ см, $BB_1 = 11$ см. Найдите длины отрезков AA_1, CC_1, MM_1.

31••. Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая a, параллельная диагонали BD. Докажите, что прямые a и CD пересекаются.

32••. Через вершину C ромба $ABCD$ проведена прямая b, не лежащая в плоскости ромба, а через вершину A – прямая a, параллельная диагонали BD. Докажите, что прямые a и b скрещивающиеся.

МОДУЛЬ 4

Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Пристальное, глубокое изучение природы – источник самых плодотворных открытий в геометрии.

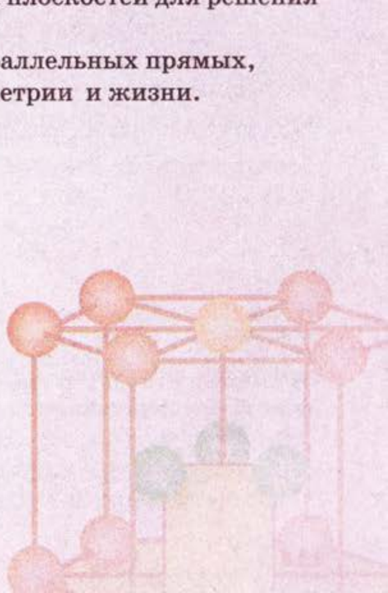
Ж. Фурье

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ МОДУЛЯ

- *Пересекающиеся плоскости пространства*
- *Непересекающиеся плоскости пространства*
- *Расположение прямых на пересекающихся и непересекающихся плоскостях*
- *Свойства параллельных плоскостей*
- *Признак параллельных плоскостей*
- *Параллельное проецирование*
- *Изображение пространственных фигур на плоскости*

Освоив этот модуль, вы узнаете:

- как убедиться, что плоскости будут пересекаться;
- как построить две параллельные плоскости;
- как доказать параллельность плоскостей;
- как выбрать равные фигуры, пользуясь свойствами параллельных плоскостей;
- о свойствах параллельного проецирования;
- как выполнить построение изображений геометрических фигур;
- как направление прямой проецирования влияет на изображение проекций геометрической фигуры;
- как применить свойства параллельных прямых для решения геометрических задач;
- как применить свойства параллельных прямой и плоскости для решения геометрических задач;
- как применить свойства параллельных плоскостей для решения геометрических задач;
- как связано использование свойств параллельных прямых, прямой и плоскости, плоскостей в геометрии и жизни.



8-Geometrija, 10 kl (Biljanina), rus

§ 4.1. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Параллельные плоскости

Если рассматривать две плоскости в пространстве, то их расположение зависит от наличия общих точек. Возможны случаи:

1. Если у двух плоскостей имеется ***одна общая точка***, то они ***пересекаются по прямой***, которая проходит через эту точку (аксиома расположения) (рис. 4.1, *а*). При наличии ***двух общих*** точек ситуация не изменится: через произвольные две точки можно провести только одну прямую, которая будет общей для этих двух плоскостей, т.е. они ***пересекаются по этой прямой***.

Итак, если две плоскости имеют ***одну или много общих точек, лежащих на одной прямой***, то эти плоскости ***пересекаются.***

2. Как известно, через три произвольные точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну (следствие из аксиом стереометрии). Тогда очевидно, что если две плоскости будут иметь ***три и больше общих точек, не лежащих на одной прямой***, то они будут накладываться (рис. 4.1, *б*). В таком случае говорят, что плоскости ***совпадают.***

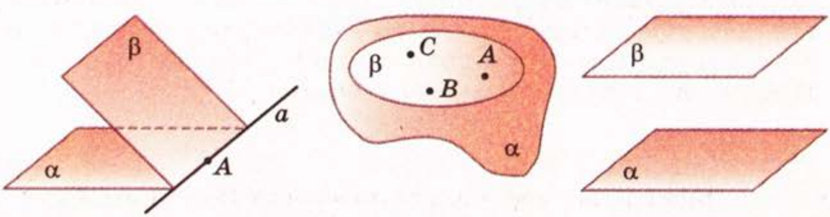
Отсюда вытекает, что плоскости ***совпадают***, если они имеют:

а) общую прямую и точку, не принадлежащую ей;

б) две общие прямые, которые пересекаются;

в) хотя бы три общие точки, не лежащие на одной прямой.

3. Если две различные плоскости не имеют ни одной общей точки, то они называются ***параллельными*** (рис. 4.1, ***в***). Для обозначения параллельности плоскостей используют символ «$\parallel$». Записывают «$\alpha \parallel \beta$» (читают: «плоскость α параллельна плоскости β», или «плоскости α и β параллельны»).



$A \in \alpha$, $A \in \beta$, то $\alpha \cap \beta = a$, плоскости пересекаются
а

$\alpha = \beta$, плоскости совпадают
б

$\alpha \parallel \beta$, плоскости параллельны
в

Рис. 4.1

Итак, ***плоскости в пространстве могут: пересекаться, совпадать или быть параллельными.***

Модели параллельных плоскостей встречаются довольно часто: полки в шкафу, двойные стекла в оконной раме, пол и потолок, перекрытия в многоэтажном доме, ровно сложенные в упаковках диски, учебники и т.д. Выяснить, параллельны ли плоскости, позволяет *признак параллельности плоскостей.*

Теорема 1

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство. Пусть α и β – данные плоскости (рис. 4.2), a и b – две прямые, лежащие на плоскости α и пересекающиеся в точке A. Прямые a_1 и b_1 лежат на плоскости β и соответственно параллельны прямым a и b. Докажем, что плоскости α и β параллельны, ***методом от противного.***

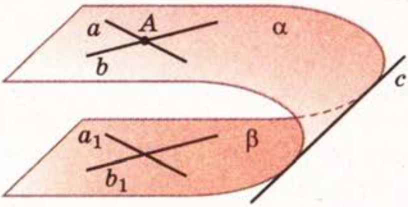


Рис. 4.2

Допустим, что α и β пересекаются по некоторой прямой c. По теореме о параллельности прямой и плоскости, прямые a и b, параллельные прямым a_1 и b_1, параллельны плоскости β. Итак, a и b не пересекают плоскость β, а значит не пересекают и прямую c, принадлежащую β. Таким образом, на плоскости α через точку A проходят две прямые a и b, параллельные c, что невозможно по аксиоме параллельности. Получили противоречие. Итак, предположение неверно, плоскости α и β пересекаться не могут, поэтому α и β параллельны, что и требовалось доказать. *Теорема доказана.*

Теорема 2

Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Доказательство. Пусть α – заданная плоскость, A – точка, не принадлежащая ей. Проведем в плоскости α две произвольные прямые a и b, пересекающиеся в точке B (рис. 4.3),

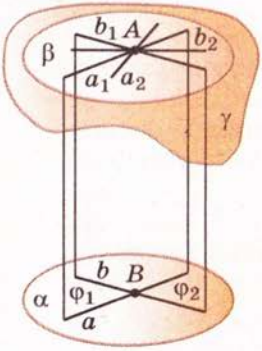


Рис. 4.3

а через точку A – две прямые a_1 и b_1, параллельные им ($a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$). Плоскость β, которая проходит через прямые a_1 и b_1, параллельна плоскости α. Итак, плоскость β построена. Докажем, что она единственная, т.е. не зависит от выбора прямых a_1 и b_1.

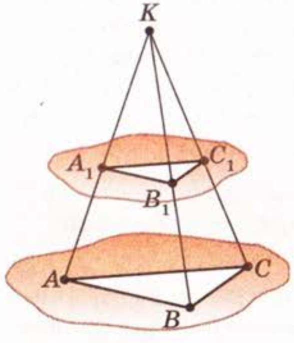
Допустим, что существует другая плоскость γ, которая проходит через точку A и параллельна плоскости α. Далее выполним еще два дополнительных построения:

1. Построим плоскость φ_1, которая содержит параллельные прямые a и a_1. Поскольку плоскость φ_1 имеет с γ общую точку A, то φ_1 пересекает γ по некоторой прямой a_2, проходящей через эту точку. Но поскольку $\gamma \parallel \alpha$, то $a_2 \parallel a$, это противоречит аксиоме параллельности. Итак, прямые a_2 и a_1 совпадают.

2. Построим плоскость φ_2, которая содержит параллельные прямые b_1 и b. Она пересечет плоскость γ по некоторой прямой b_2. Рассуждая аналогично, докажем, что b_2 совпадает с b_1.

Итак, имеем, что через две пересекающиеся прямые a_1 и b_1 проходят две различные плоскости γ и β, однако это противоречит аксиоме принадлежности. Предположение о существовании двух различных плоскостей, параллельных данной, которые бы проходили через одну и ту же точку, неверно. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну, что и требовалось доказать. *Теорема доказана.*

Задача 1



Точка K не принадлежит плоскости треугольника ABC. На отрезках KA, KB и KC выбраны точки A_1, B_1, C_1 соответственно, так что $KA_1 : AA_1 = KB_1 : BB_1 = KC_1 : CC_1$. Докажите, что плоскости (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ параллельны.

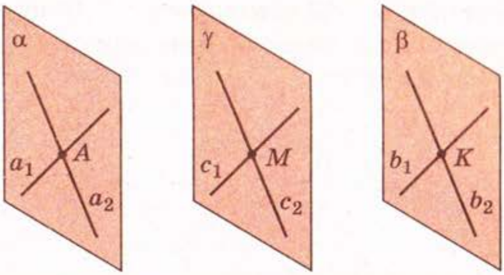
Дано: $\triangle ABC$, $K \notin (ABC)$, $A_1 \in KA$, $B_1 \in KB$, $C_1 \in KC$, $KA_1 : AA_1 = KB_1 : BB_1 = KC_1 : CC_1$.

Доказать: $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

Доказательство	Почему именно так?
По условию задачи: $KA_1 : AA_1 = KB_1 : BB_1 = KC_1 : CC_1$, поэтому $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ и $AC \parallel A_1C_1$ (по обобщенной теореме Фалеса). $A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1$, поэтому $(A_1B_1C_1)$ – единственная плоскость; $AB \cap BC = B$, (ABC) – единственная плоскость. Итак, по признаку параллельности плоскостей, имеем, что $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, ч.т.д.	По обобщенной теореме Фалеса параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки. Поэтому, учитывая условие задачи, получаем параллельность трех пар соответствующих прямых: AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1. Точками A, B, C определяется одна плоскость, а A_1, B_1, C_1 – другая, которые, по признаку параллельности плоскостей, параллельны, ч.т.д.

Задача 2

Даны две параллельные плоскости α и β. Точка M не лежит ни в одной из них. Найдите геометрическое место прямых, которые проходят через точку M и параллельны двум плоскостям α и β.



Решение	Почему именно так?
Пусть плоскости α и β параллельны. Точка M не лежит ни в плоскости α, ни в плоскости β. Возьмем в плоскости α произвольную точку A, через которую проведем две прямые a_1 и a_2. Через точку M проведем соответственно две прямые c_1 и c_2, параллельные a_1 и a_2, а значит, и плоскости α.	Точка M не принадлежит двум данным плоскостям α и β. Ее расположение в пространстве произвольно: или между плоскостями, или вне плоскостей. На решение задачи это не влияет. Через точку вне плоскости можно всегда провести много прямых, параллельных данной плоскости. Каждая прямая,

Две пересекающиеся прямые определяют единственную плоскость, пусть это будет плоскость γ. Тогда $\gamma \parallel \alpha$, по признаку параллельности плоскостей.

Аналогично доказывается, что $\gamma \parallel \beta$.

Через точку M, не лежащую ни в одной из двух плоскостей, можно провести много прямых, параллельных плоскостям α и β, которые будут лежать в одной плоскости, параллельной данным плоскостям.

Ответ. Плоскость.

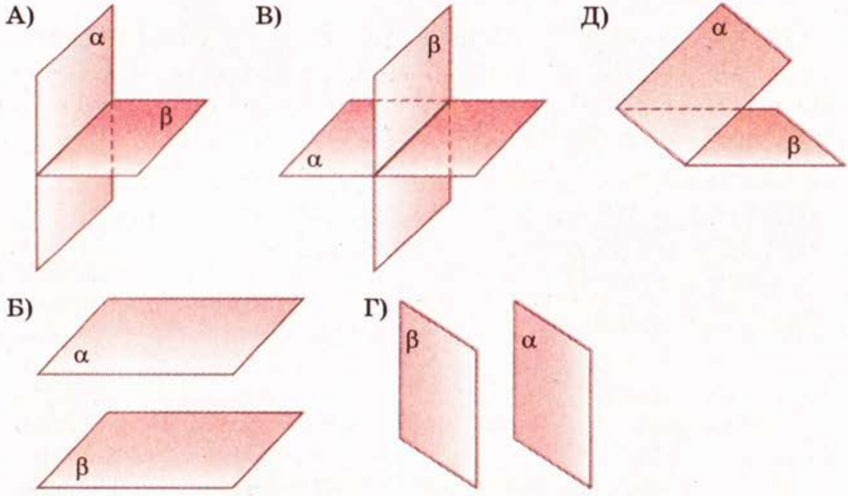
параллельная одной из двух параллельных плоскостей, будет параллельной и другой плоскости. Поскольку через две пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость, то все параллельные данным плоскостям прямые, которые проходят через заданную точку M, принадлежат одной и той же плоскости. Геометрическим местом таких прямых является плоскость.

Упражнения

4.1°. Укажите расположение двух плоскостей α и β, если они не имеют ни одной общей точки.

А) Пересекаются; Б) совпадают; В) параллельны.

4.2°. Укажите три рисунка, на которых изображены две пересекающиеся плоскости.



4.3°. Известно, что плоскости α и β параллельны, прямые a и b принадлежат плоскости α, а прямые c и d – плоскости β. Укажите правильные утверждения.

1) $a \parallel \beta$; 3) $b \parallel \beta$; 5) $c \parallel \alpha$; 7) $a \parallel \alpha$;
2) $c \parallel \beta$; 4) $b \parallel \alpha$; 6) $d \parallel \beta$; 8) $d \parallel \alpha$.

А) 1, 3, 4 и 7; В) 3, 4, 7 и 8; Д) 4, 5, 6 и 8.
Б) 2, 4, 5 и 6; Г) 1, 3, 5 и 8;

4.4°. Плоскости α и β параллельны. Через точку A, не принадлежащую ни одной из них, проведена плоскость ω. Укажите три правильных утверждения.

А) ω – единственная возможная плоскость, параллельная плоскости α;
Б) ω – единственная возможная плоскость, пересекающая плоскость β;
В) ω – единственная возможная плоскость, параллельная плоскости β;
Г) ω – единственная возможная плоскость, пересекающая плоскость α;
Д) ω – единственная возможная плоскость, параллельная и плоскости α, и плоскости β.

4.5°. Две стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ (рис. 4.4) параллельны двум прямым a и b соответственно, которые пересекаются и принадлежат плоскости α. Укажите взаимное расположение плоскостей $(ABCD)$ и α.

А) Пересекаются; Б) совпадают; В) параллельны.

4.6°. Известно, что сторона AB прямоугольника $ABCD$ параллельна некоторой плоскости α, а сторона AD не параллельна этой плоскости. Определите взаимное расположение (1–3) плоскостей $(ABCD)$ и α.

А) Пересекаются; Б) параллельны; В) совпадают.

4.7°°. На рисунке 4.5 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите взаимное расположение (1–3) плоскостей, заданных условиями (А–Д).

А) $A_1B_1C_1D_1$ и $B_1A_1D_1C_1$;
Б) ADD_1A_1 и $ABCD$;
В) ABB_1A_1 и C_1D_1DC;
Г) $BADC$ и ABB_1A_1;
Д) CC_1B_1B и ADD_1A_1.

1) Пересекаются;
2) параллельны;
3) совпадают.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

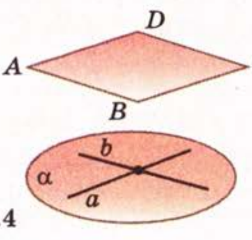


Рис. 4.4

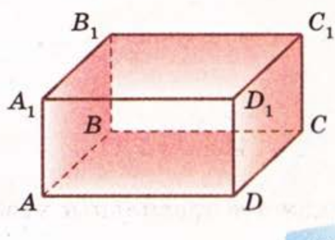


Рис. 4.5

4.8°°. В прямоугольном параллелепипеде выбрана вершина B (рис. 4.5). Укажите три пары граней (1–6), которые пересекаются по ребру, содержащему точку B.

1) $ABCD$; 3) BCC_1B_1; 5) CDD_1C_1;

2) $A_1B_1C_1D_1$; 4) ADD_1A_1; 6) ABB_1A_1.

А) 1 и 4; Б) 3 и 6; В) 2 и 5; Г) 1 и 3; Д) 1 и 6.

4.9°°. Укажите грань прямоугольного параллелепипеда, которая проходит через точку A_1 параллельно грани $ABCD$ (рис. 4.5).

А) D_1A_1AD; В) $D_1A_1B_1C_1$; Д) ABB_1A_1.
Б) D_1C_1CD; Г) D_1A_1BD;

4.10°°. Две диагонали ромба параллельны плоскости ω. Определите, как расположены плоскость ромба и ω.

А) Параллельны; Б) совпадают; В) пересекаются.

4.11°°. Точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC (рис. 4.6). Точки K, Z, M – середины отрезков DA, DB, DC соответственно. Определите взаимное расположение плоскостей (ABC) и (KZM).

А) Пересекаются; Б) совпадают; В) параллельны.

4.12°°. Точка S не принадлежит плоскости параллелограмма $ABCD$ (рис. 4.7). Точки K, Z, M, N принадлежат отрезкам SA, SB, SC, SD соответственно, причем $SK = AK$, $SZ = BZ$, $SM : MC = 2 : 1$, $SN : ND = 2 : 1$. Определите взаимное расположение плоскостей $(ABCD)$ и $(KZMN)$.

А) Пересекаются; Б) совпадают; В) параллельны.

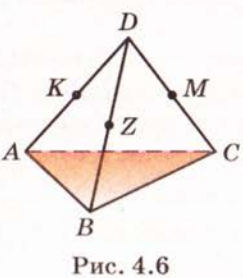


Рис. 4.6

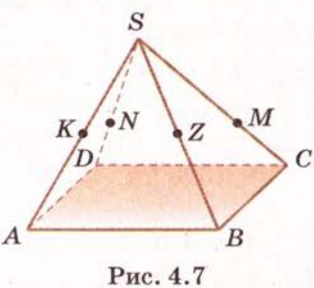


Рис. 4.7

4.13°°. Две параллельные прямые l и m и точка K, которая не лежит ни на одной из них, принадлежат плоскости α. Через прямую l и точку K провели плоскость β, а через прямую m и точку K – плоскость γ. Определите взаимное расположение плоскостей β и γ.

А) Пересекаются; Б) параллельны; В) совпадают.

4.14°°. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Укажите количество плоскостей, которые проходят через прямую a и параллельны прямой b.

А) Одна; Б) две; В) три; Г) ни одной; Д) много.

4.15•. Докажите, что через любые две скрещивающиеся прямые можно провести единственную пару параллельных плоскостей.

4.16•. Плоскости α и β параллельны. Докажите, что каждая прямая плоскости α параллельна плоскости β.

4.17•. Точка O – общая середина каждого из отрезков AA_1, BB_1, CC_1, которые не лежат в одной плоскости. Докажите, что плоскости (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ параллельны.

4.18•. Три прямые, проходящие через одну точку, пересекают данную плоскость в точках A, B, C, а параллельную ей плоскость – в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

4.19••. Даны параллелограмм $ABCD$ и плоскость, которая его не пересекает. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Найдите длину отрезка DD_1, если $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 1$ м.

4.20••. Докажите, что все прямые, проходящие через данную точку параллельно данной плоскости, лежат в одной плоскости.

4.21••. Плоскости α и β параллельны плоскости γ. Определите, могут ли плоскости α и β пересекаться. Ответ обоснуйте.

4.22••. На ребрах AA_1 и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обозначены соответствующие точки M и N (рис. 4.8), являющиеся серединами этих ребер, а на грани CDD_1C_1 – точка O, которая является центром этой грани.

1) Определите взаимное расположение плоскостей (MNO) и (ABC); (BDM) и $(B_1C_1D_1)$.

2) В случае пересечения плоскостей, постройте их линию пересечения.

3) Вычислите площадь сечения куба, построенного плоскостью, которая проходит через точки B_1 и D_1 параллельно ребру AA_1, если ребро куба равно $3\sqrt{2}$ см.

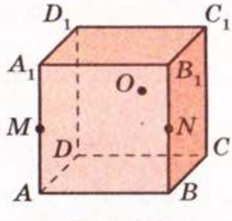


Рис. 4.8

§ 4.2. Свойства параллельных плоскостей

Параллельные плоскости имеют определенные свойства. Рассмотрим их.

С в о й с т в о 1. **Если две параллельные плоскости пересечь третьей, то прямые их пересечения параллельны.**

Доказательство. Пусть γ – секущая плоскость для плоскостей α и β, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$ (рис. 4.9), имеем две прямые a и b; они могут не пересекаться или пересекаться только в одной точке как прямые одной плоскости γ. $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, причем $\alpha \parallel \beta$. a и b не пересекаются и лежат в одной плоскости γ, тогда они параллельны, $a \parallel b$, ч.т.д.

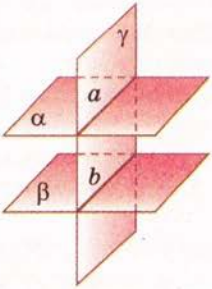


Рис. 4.9

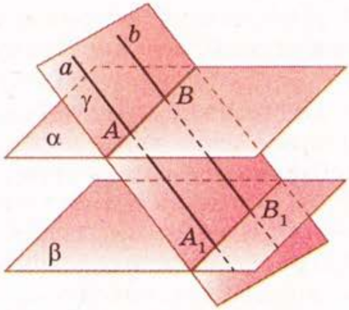


Рис. 4.10

Свойство 2. **Параллельные плоскости, пересекая две параллельные прямые, отсекают на них равные отрезки.**

Доказательство. Пусть a и b – данные параллельные прямые, α и β – параллельные плоскости, пересекающие их соответственно в точках A, B, A_1, B_1 (рис. 4.10).

Поскольку прямые a и b параллельны, то они лежат в одной плоскости γ. Плоскость γ пересекает плоскость α по прямой AB, а плоскость β – по прямой A_1B_1, которые по свойству 1 параллельны. Поэтому ABB_1A_1 – параллелограмм. Таким образом, $AA_1 = BB_1$, ч.т.д.

Свойство 2 иногда формулируется так: *отрезки параллельных прямых, находящиеся между двумя параллельными плоскостями, равны.*

Свойство 3. **Две плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны между собой.**

Доказательство. Пусть $\alpha \parallel \gamma$, $\beta \parallel \gamma$. Допустим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда плоскости α и β имеют общую точку. Через эту точку проходит две плоскости α и β, параллельные плоскости γ. Однако через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну, поэтому мы пришли к противоречию. Итак, $\alpha \parallel \beta$, ч.т.д.

Задача 1

Докажите, что плоскость, пересекающая одну из двух параллельных плоскостей, пересекает и другую плоскость.

Дано: α, β, γ; $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$.

Доказать: плоскость γ пересекается с плоскостью β.

Доказательство	Почему именно так?
Докажем, что плоскость γ пересекается с плоскостью β, методом от противного (рис. 4.9). Пусть γ и β не пересекаются, тогда $\gamma \parallel \beta$. По условию задачи,	Для доказательства требования задачи важно выбрать метод доказательства: прямой или от противного. В общих случаях

$\alpha \parallel \beta$ и $\gamma \cap \alpha = a$, тогда $a \subset \alpha$ и $a \subset \gamma$. Т.е. существует такая точка A на прямой a, через которую проведены две разные плоскости, параллельные плоскости β. Это противоречит теореме о существовании плоскости, параллельной данной. Итак, $\gamma \nparallel \beta$, т.е. плоскость γ пересекается с плоскостью β, ч.т.д.

чаще используют метод от противного. Сделав предположение, противоположное требованию задачи, мы приходим к выводу: $\gamma \parallel \beta$, $\alpha \parallel \beta$. Отсюда, по транзитивности, $\gamma \parallel \alpha$, что противоречит условию задачи. Полученное противоречие доказывает требование задачи.

Итак, ***плоскость, пересекающая одну из двух параллельных плоскостей, пересекает и другую.***

Задача 2

Докажите, что прямая, которая пересекает одну из параллельных плоскостей, пересекает и другую.

Дано: $\alpha \parallel \beta$, $m \not\subset \alpha$ и $m \not\subset \beta$,
$m \cap \alpha = A$.

Доказать: прямая m пересекает плоскость β.

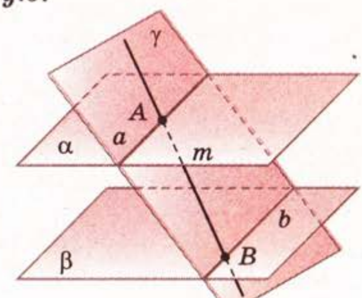


Рис. 4.11

Доказательство

Построим произвольную плоскость γ (рис. 4.11), которая проходит через прямую m. A – общая точка прямой m и плоскости α, а значит и плоскости γ. Поэтому $\alpha \cap \gamma = a$, $A \in a$. Тогда, по задаче 1, $\gamma \cap \beta = b$, где b – прямая пересечения γ и β. Получили, что $a \parallel b$. Прямая m, принадлежащая γ, пересекает прямую a в точке A, следовательно, и прямую b, т.е. плоскость β.

Можно было бы доказать требование задачи методом от противного: предположив, что прямая m не пересекает плоскость β. Тогда, если $m \cap \alpha = A$ и m не пересекается с β, то $m \subset \alpha$, что противоречит условию задачи. Итак, прямая m пересекает плоскость β, что и требовалось доказать.

Итак, ***любая прямая, пересекающая одну из двух параллельных плоскостей, пересекает и другую.***

Задача 3

Две параллельные плоскости α и β пересекают сторону BA угла ABC в точках D и D_1, а сторону BC – соответственно в точках E и E_1. Найдите длину отрезка DE, если $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см (рис. 4.12).

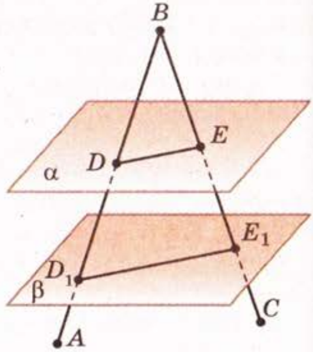


Рис. 4.12

Дано: плоскости α и β, $\alpha \parallel \beta$,
$AB \cap \alpha = D$, $AB \cap \beta = D_1$,
$BC \cap \alpha = E$, $BC \cap \beta = E_1$,
$D_1E_1 = 54$ см, $BD = 12$ см,
$BD_1 = 18$ см.

Найти: DE.

Решение	Почему именно так?
Пусть $\alpha \parallel \beta$, плоскость α пересекает стороны угла ABC в точках D и E, а плоскость β – в точках D_1 и E_1. По условию $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см. Учитывая, что $DE \parallel D_1E_1$, имеем: $\triangle DBE$ подобен $\triangle D_1BE_1$. Итак, $\frac{BD}{DE} = \frac{BD_1}{D_1E_1}$; $DE = \frac{BD \cdot D_1E_1}{BD_1}$; $DE = \frac{12 \cdot 54}{18} = 36$ (см). *Ответ.* 36 см.	Через точки A, B, C проведем плоскость (ABC), пересекающую две параллельные плоскости α и β по параллельным прямым DE и D_1E_1. Тогда полученные треугольники DBE и D_1BE_1 подобны и их соответствующие стороны пропорциональны. Находим неизвестный член пропорции и получаем решение задачи.

Упражнения

4.23°. Известно, что прямые пересечения двух плоскостей α и β третьей плоскостью γ параллельны. Укажите взаимное расположение плоскостей α и β.

А) Пересекаются; В) параллельны или пересекаются.

Б) параллельны;

4.24°. На рисунке 4.13 изображены параллельные плоскости α и β. Точки A, B, C, D, M принадлежат плоскости α, а точки A_1, B_1, C_1, D_1, M_1 – плоскости β. Известно, что прямые AA_1, BB_1,

CC_1, DD_1, MM_1 попарно параллельны и $AA_1 = 7$ см. Укажите два отрезка, длина которых также равна 7 см.

А) CC_1; В) DM_1; Д) BD_1.

Б) AC_1; Г) MM_1;

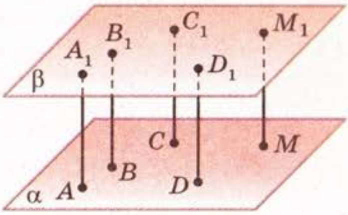


Рис. 4.13

4.25°. Через две параллельные прямые AB и CD провели плоскость γ, которая пересекла параллельные плоскости α и β по прямым AC и BD соответственно. $BD = 15$ см. Укажите правильное утверждение для отрезка AC (рис. 4.14).

А) $AC = 3$ см; В) $AC = 15$ см; Д) $AC = 30$ см.

Б) $AC = 5$ см; Г) $AC = 20$ см;

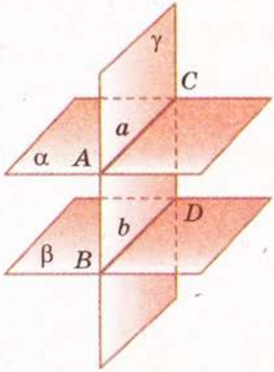


Рис. 4.14

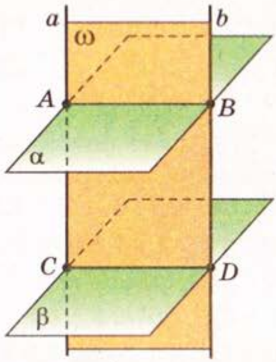


Рис. 4.15

4.26°. Плоскость ω, которой принадлежат две параллельные прямые a и b (рис. 4.15), пересекает две параллельные плоскости α и β по прямым AB и CD. Определите четыре возможных названия четырехугольника $ABDC$.

А) Квадрат; В) ромб; Д) параллелограмм.

Б) прямоугольник; Г) трапеция;

4.27°. Определите взаимное расположение плоскостей α и β, если прямая k пересекает плоскость α и принадлежит плоскости β.

А) Пересекаются; В) параллельны.

Б) совпадают;

4.28°°. Укажите две пары скрещивающихся прямых, которые принадлежат параллельным плоскостям (AA_1B_1) и (CC_1D_1) куба (рис. 4.16).

А) AB и D_1D; В) A_1B_1 и CD; Д) BB_1 и DD_1.

Б) AA_1 и CC_1; Г) A_1B и DC;

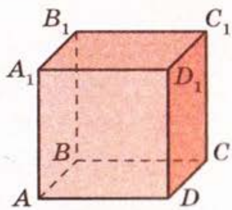


Рис. 4.16

4.29°°. Установите соответствие правильных утверждений (А–Б) и (1–5) для прямых, принадлежащих параллельным плоскостям (BCC_1) и (AA_1D_1) куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.16).

А) Скрещивающиеся прямые;
Б) параллельные прямые.

1) AD и CB_1;
2) A_1D и BC_1;
3) A_1D_1 и BC;
4) DD_1 и B_1C_1;
5) A_1D и B_1C.

А	Б

4.30°°. Две прямые a и b, пересекаясь в точке O, пересекают параллельные плоскости α и β соответственно в точках A, B и C, D. Виберите, пользуясь рисунком 4.17, три правильных утверждения.

А) $\angle OCD = \angle OBA$;
Б) $\angle CDO = \angle ABO$;
В) $CO : OB = OD : OA$;
Г) $\Delta OCD = \Delta OBA$;
Д) $\Delta COD \sim \Delta BOA$.

4.31°°. Укажите по условию задачи 4.30 длину (1–5) отрезка CO для каждого из случаев (А–Д).

А) $CO : OB = 2 : 3$, $CB = 12$ см;
Б) $CD : AB = 1 : 4$, $OB = 6$ см;
В) $AO = OD$, $OB = 3$ см;
Г) $AB = CD$, $OB = 4{,}5$ см;
Д) $CO - OB = 1{,}5$ см, $CB = 10{,}5$ см.

1) 6 см;
2) 3 см;
3) 1,5 см;
4) 4,8 см;
5) 4,5 см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

4.32°°. Точки A, B, C принадлежат плоскости α, параллельной плоскости β. Через эти точки провели параллельные прямые, которые пересекли плоскость β в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 4.18). Найдите периметр $\Delta A_1B_1C_1$, если $\angle ABC = 90°$, $AB = 5$ см, $BC = 12$ см.

А) 29 см; Б) 34 см; В) 30 см; Г) 22 см; Д) 24 см.

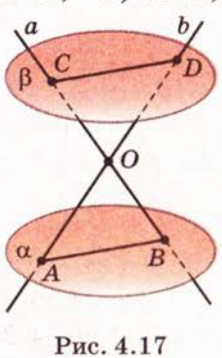


Рис. 4.17

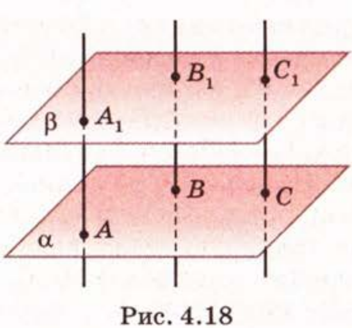


Рис. 4.18

4.33•. Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной плоскости проведены параллельные прямые, пересекающие другую плоскость в точках A_1 и B_1. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB = a$.

4.34•. Могут ли иметь равные длины отрезки непараллельных прямых, находящихся между параллельными плоскостями?

4.35•. Даны куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки F, P, Q – середины отрезков C_1D_1, C_1B_1, C_1C соответственно. Докажите, что плоскости (FPQ) и (D_1B_1C) параллельны.

4.36•. Даны куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки M, N, R – середины отрезков A_1D_1, C_1D_1, D_1D соответственно. Докажите, что плоскость (MNR) параллельна плоскости (A_1DC_1).

4.37•. Точка M не принадлежит плоскости треугольника ABC. Точки Q, P, K принадлежат отрезкам MA, MB, MC соответственно и $\angle MAB + \angle AQP = 180°$, $\angle MKQ = \angle MCA$. Докажите, что плоскости (ABC) и (QPK) параллельны.

4.38•. Точка D не принадлежит плоскости треугольника ABC. Точки T, S, F – середины отрезков AB, AC, AD соответственно. Докажите, что плоскость (TSF) параллельна плоскости (BCD).

4.39•. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.19). Докажите параллельность плоскостей (B_1D_1K) и (BDL), где точки K и L – середины отрезков CC_1 и AA_1 соответственно.

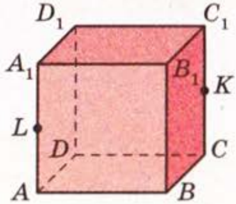


Рис. 4.19

4.40••. Даны параллельные плоскости α и β. Через точки M и N плоскости α проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках K и L. Докажите, что четырехугольник $MNLK$ – параллелограмм. Вычислите периметр четырехугольника $MNLK$, если $ML = 14$ см, $NK = 8$ см и $MK : MN = 9 : 7$.

4.41••. Два луча OF и OP пересекают параллельные плоскости α и β в точках F_1, P_1, F_2, P_2 соответственно. Определите OP_1, если $F_1P_1 = 3$ см, $F_2P_2 = 5$ см, $P_1P_2 = 4$ см.

4.42••. Два луча с началом в точке O пересекают одну из параллельных плоскостей в точках A_1 и B_1, а другую – в точках A_2 и B_2. Вычислите длину отрезка A_1B_1, если $OA_1 = 16$ см, $A_1A_2 = 24$ см, $A_2B_2 = 50$ см.

4.43••. Из точки P, не принадлежащей данной плоскости α, проведены четыре луча, пересекающих эту плоскость в точках A, B, C, D.

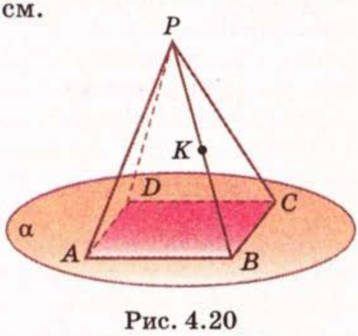


Рис. 4.20

Постройте через точку K – середину отрезка PB (рис. 4.20):

1) плоскость, параллельную плоскости (ABC);

2) плоскость, параллельную плоскости (PCA).

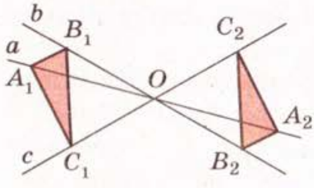


Рис. 4.21

4.44••. Прямые a, b и c, не принадлежащие одной плоскости, пересекаются в точке O (рис. 4.21). На каждой из этих прямых взяты точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ так, что $OA_1 = OA_2$, $OB_1 = OB_2$, $OC_1 = OC_2$. Докажите, что $(A_1B_1C_1) \parallel (A_2B_2C_2)$.

4.45••. Докажите, что можно построить две параллельные плоскости, которые отсекают на трех данных попарно скрещивающихся прямых равные отрезки.

4.46••. Три плоскости параллельны. Прямые a и b пересекают эти плоскости соответственно в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3. Известно, что $A_1A_2 = 5$ см, $B_1B_2 = 6$ см, $B_1B_2 : B_2B_3 = 2 : 5$. Определите длину отрезков A_1A_3 и B_1B_3.

§ 4.3. Параллельное проецирование. Изображение плоских и пространственных фигур на плоскости

Чтобы изобразить пространственные фигуры на плоскости, прибегают к разным методам. Один из них – параллельное проецирование.

Параллельное проецирование – это метод изображения произвольной геометрической фигуры на плоскости, при котором все точки фигуры переносятся на плоскость по прямым, параллельным заданной, называющейся ***направлением проецирования***.

Модели параллельного проецирования можно сравнить с тенью на плоской поверхности стены или земли при солнечном освещении. Итак, чтобы выполнить параллельное проецирование, сначала задают фигуру и плоскость, на которую проецируют, – ***плоскость проекции***. Далее задают прямой направление проецирования – ***проецирующую прямую***. Она должна пересекать плоскость проекции.

Пусть заданы произвольная плоскость α, проецирующая прямая l и точка A, не принадлежащая ни прямой l, ни плоскости α (рис. 4.22, *а*).

Проведем через точку A параллельно l прямую a, которая пересекает плоскость α в точке A_0 (рис. 4.22, *б*). Найденная таким образом точка A_0 называется ***параллельной проекцией точки A*** на плоскость α. Т.е. мы выполнили параллельное проецирование точки A на плоскость α.

Каждая геометрическая фигура состоит из точек. Поэтому, проецируя последовательно точки фигуры на плоскость, полу-

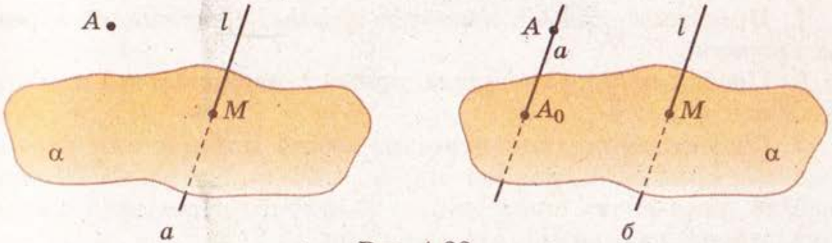


Рис. 4.22

чаем изображение, которое называют *проекцией* этой фигуры, а способ выполнения изображения – *параллельным проецированием*.

Отметим, что если точка принадлежит проецирующей прямой, ее проекцией будет точка пересечения прямой с плоскостью (точка M на рис. 4.22), а если точка принадлежит плоскости проекции, то ее проекция совпадает с точкой плоскости.

Рассмотрим параллельное проецирование для изображения геометрических фигур на плоскость. Пусть F произвольная геометрическая фигура, которую нужно спроецировать на плоскость α. Возьмем произвольную прямую l, пересекающую плоскость α, и проведем через вершины фигуры F (точки A, B, L, K, D, C) прямые, параллельные l. Точки A_1, B_1, L_1, K_1, D_1, C_1 – точки пересечения этих прямых с плоскостью проекции α – будут проекцией вершин фигуры. Понятно, что отрезки (DK, KL, LB, ...) перейдут в отрезки плоскости проекции (D_1K_1, K_1L_1, L_1B_1, ...), все точки фигуры перейдут в точки плоскости проекции, образовав изображение F_1 фигуры F (рис. 4.23).

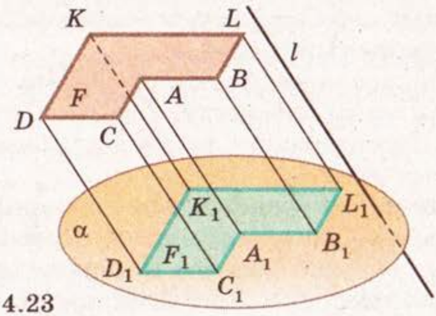


Рис. 4.23

Для параллельного проецирования важно знать его направление. От него зависит общий вид изображения проекции. Например, проекцией отрезка, параллельного проецирующей прямой, будет точка (рис. 4.24, *а*), а проекцией отрезка, не параллельного проецирующей прямой, – отрезок (рис. 4.24, *б*).

Итак, параллельное проецирование имеет свои свойства для прямых и отрезков, не параллельных направлению проецирования:

1. Проекцией прямой является прямая, а проекцией отрезка – отрезок.

2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

3. Соотношения длин отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняются (рис. 4.24, *б*), т.е. равны соотношению длин своих проекций, в частности середина отрезка проецируется в середину его проекции.

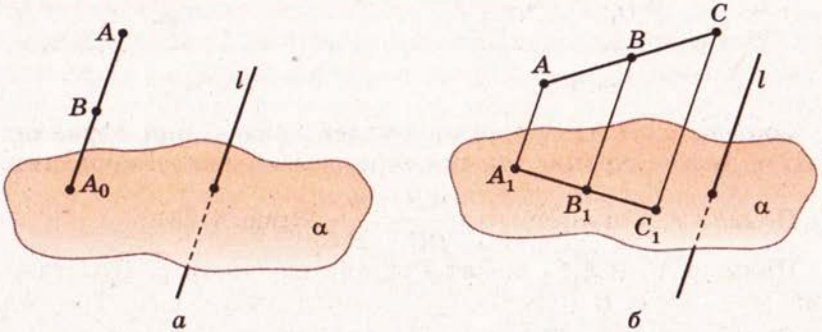


Рис. 4.24

Отметим, что длины проекций отрезков, параллельных плоскости проекций, сохраняются, т.е. равны длинам самих отрезков. Отсюда вытекает, что плоская фигура, плоскость которой параллельна плоскости проекции, проецируется в равную себе фигуру.

Приведем некоторые свойства изображения фигуры на плоскости, вытекающие из вышеописанного построения.

Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости рисунка отрезками (рис. 4.24, *б*).

Действительно, все прямые, которые проецируют точки отрезка AC, лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость α по прямой A_1C_1. Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1.

Отметим, что рассмотренные выше отрезки, которые проецируются, не параллельны направлению проецирования.

Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости рисунка параллельными отрезками (рис. 4.25).

Пусть AC и BD – параллельные отрезки некоторой фигуры. Их проекции – отрезки A_1C_1 и B_1D_1 – параллельны, поскольку их получили в результате пересечения параллельных плоскостей с плоскостью α (первая из этих плоскостей проходит через прямые AC и AA_1, а вторая – через прямые BD и BB_1. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой, то плоскости параллельны).

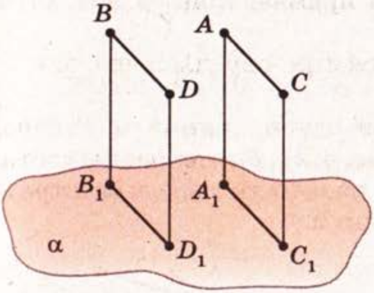


Рис. 4.25

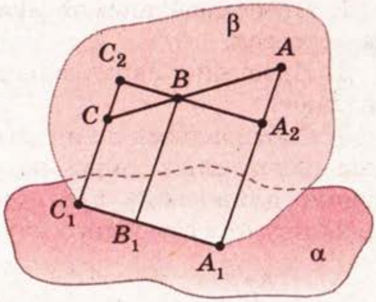


Рис. 4.26

Соотношения длин отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняются при параллельном проецировании.

Покажем, например, что $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ (рис. 4.26).

Прямые AC и A_1C_1 лежат в одной плоскости β. Проведем в ней через точку B прямую A_2C_2, параллельную A_1C_1. Треугольники BAA_2 и BCC_2 подобны. Из подобия треугольников и равенств $A_1B_1 = A_2B$ и $B_1C_1 = BC_2$ вытекает пропорция: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

Задача

Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

Решение

При параллельном проецировании сохраняются соотношения отрезков прямой. Поэтому середина стороны треугольника проецируется в середину проекции этой стороны. Отсюда вытекает, что проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

Упражнения

4.47°. Выберите три фигуры, которые могут быть параллельными проекциями двух параллельных прямых.

А) Прямая; В) луч; Д) две точки;
Б) точка; Г) две параллельные прямые; Е) отрезок.

4.48°. Известно, что l – проецирующая прямая параллельного проецирования. AB и CD – отрезки, причем $AB \parallel CD$, $AB \nparallel l$,

$CD \nparallel l$. Укажите взаимное расположение проекций A_1B_1 и C_1D_1 отрезков AB и CD на плоскости α.

А) $A_1B_1 \parallel C_1D_1$; В) $A_1B_1 \subset C_1D_1$; Д) $A_1B_1 \dot{-} C_1D_1$.
Б) $A_1B_1 \cap C_1D_1$; Г) $C_1D_1 \subset A_1B_1$;

4.49°. Дано l – направление параллельного проецирования, $AB \nparallel l$. Выберите фигуру, которая может быть проекцией отрезка AB.

А) Прямая; Б) точка; В) две точки; Г) луч; Д) отрезок.

4.50°. Дано l – направление параллельного проецирования, $a \cap b = O$, $a \nparallel l$ и $b \nparallel l$. Укажите две фигуры, которые могут быть проекциями прямых a и b.

А) Одна прямая;
Б) две пересекающиеся прямые;
В) две параллельные прямые;
Г) две скрещивающиеся прямые;
Д) угол.

4.51°. Дано l – направление параллельного проецирования, $ABCD$ – параллелограмм, $l \nparallel (ABCD)$. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ – проекция $ABCD$ на плоскость α. Укажите, какими фигурами может быть четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$.

А) Ромб; В) прямоугольник; Д) параллелограмм.
Б) квадрат; Г) трапеция;

4.52°. Укажите пять фигур, в которые может проецироваться квадрат $ABCD$.

А) Параллелограмм; В) трапеция; Д) квадрат;
Б) прямоугольник; Г) ромб; Е) отрезок.

4.53°°. Определите такую фигуру из условий (А–В), которая может быть параллельной проекцией четырех из пяти заданных фигур (1–5), и такую, которая не может быть параллельной проекцией ни для одной из них. (Прямая параллельного проецирования не параллельна плоскости фигуры.)

А) Трапеция;
Б) параллелограмм;
В) треугольник.

1) Прямоугольник;
2) квадрат;
3) прямоугольный треугольник;
4) ромб;
5) параллелограмм.

А					
Б					
В					

4.54°°. Известно, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ является параллельной проекцией трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) на плоскость α. Определите вид четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$.

А) Ромб;
Б) параллелограмм;
В) трапеция ($A_1B_1 \parallel C_1D_1$);
Г) трапеция ($A_1D_1 \parallel B_1C_1$);
Д) прямоугольник.

4.55°°. Известно, что $\triangle A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией $\triangle ABC$ на плоскость α; AM – медиана $\triangle ABC$, AK и AH – биссектриса и высота $\triangle ABC$; M_1, K_1, H_1 – соответственно параллельные проекции точек M, K, H на плоскость α. Укажите правильные утверждения.

1) Если $\triangle ABC$ – правильный, то $\triangle A_1B_1C_1$ – правильный;
2) если $\triangle ABC$ – прямоугольный, то $\triangle A_1B_1C_1$ – прямоугольный;
3) если AM – медиана $\triangle ABC$, то A_1M_1 – медиана $\triangle A_1B_1C_1$;
4) если AK – биссектриса $\triangle ABC$, то A_1K_1 – биссектриса $\triangle A_1B_1C_1$;
5) если AH – высота $\triangle ABC$, то A_1H_1 – высота $\triangle A_1B_1C_1$;
6) если $BK : KC = 2 : 3$, то $B_1K_1 : K_1C_1 = 2 : 3$;
7) если $\angle A = 30°$, $BC = 20$ см, то $\angle A_1 = 30°$, $B_1C_1 = 20$ см.

А) 1, 3 и 5; Б) 2, 6 и 7; В) 1 и 2; Г) 3 и 6; Д) 4 и 7.

4.56°°. Известно, что A_1B_1 – параллельная проекция отрезка AB (рис. 4.27) на плоскость α; $C_1 \in A_1B_1$, C_1 – параллельная проекция точки C, где $C \in AB$; $AB = 48$ см, $A_1B_1 = 36$ см. Установите соответствие между условием (А–Д) и выводом (1–5).

А) $AC = 24$ см;
Б) $AC = 12$ см;
В) $AC = 8$ см;
Г) $AC = 32$ см;
Д) $AC = 36$ см.

1) $A_1C_1 = 9$ см;
2) $A_1C_1 = 6$ см;
3) $A_1C_1 = 27$ см;
4) $A_1C_1 = 18$ см;
5) $A_1C_1 = 24$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

4.57•. Нарисуйте произвольный треугольник, выберите прямую параллельного проецирования и постройте параллельную проекцию этого треугольника на некоторую плоскость α.

4.58•. Докажите, что если $\triangle A_1B_1C_1$ – параллельная проекция $\triangle ABC$ и $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$, то $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

4.59•. На рисунке 4.28 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какие основные свойства параллельного проецирования применяются при его построении?

4.60•. Сформулируйте правила построения тетраэдра.

4.61•. Может ли быть трапеция параллельной проекцией параллелограмма? Ответ обоснуйте.

4.62••. Точки A и B лежат по одну сторону плоскости α; точки A_1 и B_1 – соответственно параллельные проекции точек A и B на плоскость α.

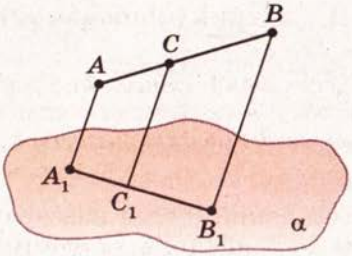


Рис. 4.27

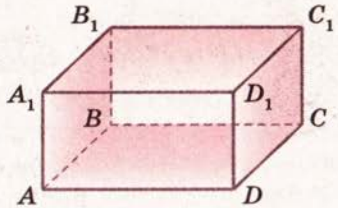


Рис. 4.28

1) Постройте точку C пересечения прямой AB с плоскостью α, если $AA_1 > BB_1$.

2) Постройте параллельную проекцию точки D – середины отрезка BC – на плоскость α.

3) Запишите возможные соотношения отрезка.

4.63••. Определите фигуру параллельных проекций относительно прямой проецирования AA_1 на плоскость $A_1B_1C_1D_1$ в прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

1) грани $ABCD$;
2) грани CC_1D_1D;
3) грани AA_1D_1D;
4) сечения ADC_1B_1;
5) сечения BCD_1A_1;
6) отрезка AC_1;
7) $\triangle BDC$;
8) сечения AB_1D_1.

4.64••. Постройте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и найдите площадь параллельной проекции $\triangle DB_1C$:

1) на грань B_1C_1CB;
2) на грань $ABCD$;
3) на грань $A_1B_1C_1D_1$, если ребро куба равно 6 см.

4.65••. Треугольник $A_1B_1C_1$ – параллельная проекция равностороннего треугольника ABC. Точка M лежит на стороне AC, $AM : AC = 1 : 4$. Постройте проекцию прямой, которая перпендикулярна к прямой AC и проходит через точку M.

4.66••. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ является изображением при параллельном проецировании ромба с острым углом 60°. Постройте из вершины этого угла высоты ромба.

4.67••. Треугольник $A_1B_1C_1$ является изображением при параллельном проецировании прямоугольного треугольника с острым углом 60°. Постройте изображение биссектрисы этого угла.

4.1. Каждая грань деревянного бруска – прямоугольник. Докажите, что какой бы способ распиливания этого бруска по продольным ребрам не применили, каждое полученное сечение будет параллелограммом.

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (ок. 1170–1228)

Более двух столетий книги Фибоначчи были непревзойденным образцом математических произведений для европейцев...

К. Рыбников

Леонардо Пизанский, более известный под прозвищем Фибоначчи, был одним из основоположников математики Нового времени в Западной Европе. Роль его книг в развитии математики и распространении в Европе математических знаний трудно переоценить. Будущий ученый родился в г. Пиза (Италия). Отец его был делопроизводителем пизанской фактории в Алжире, где Леонардо и получил математическое образование. Под руководством местных учителей он ознакомился с арифметикой и алгеброй арабов, а позднее расширил и пополнил свои знания во время путешествий в Египет, Сирию, Грецию, Сицилию и Прованс.

Вернувшись на родину, Фибоначчи решил «добавить к индийскому методу кое-что от себя, кое-что от геометрического искусства Евклида и составить трактат», который должен был ознакомить «род латинян» с основными достижениями математики и помочь им успешно вести торговые дела с использованием математических расчетов.

Этот трактат, состоящий из 15 разделов, был написан в 1202 г. и получил название «Книга абака» (словом «абак» – счетная доска – Фибоначчи называл арифметические вычисления).

К основным работам ученого принадлежат также: «Практика геометрии» (1220) и «Книга квадрата» (1225). «Практика геометрии» содержит применение алгебраических методов к решению геометрических задач. Используя работы Евклида и других греческих авторов, Фибоначчи рассматривает такие темы, как площадь плоских фигур, измерение круга, многоугольник, сфера, цилиндр.

Работы талантливого ученого, свыше двух столетий служившие неисчерпаемым источником математических знаний, составили основу для дальнейших успехов итальянской математической школы во времена Возрождения.

Леонардо да Винчи (1452–1519)

Ни одно... исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства.

Леонардо да Винчи

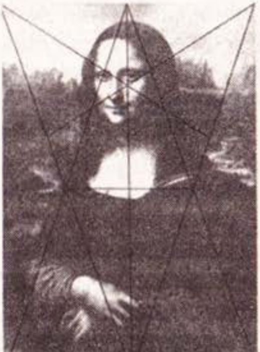
Природа щедро одарила Леонардо да Винчи красотой, интеллектом и талантами. Гении такого уровня рождаются на Земле раз в тысячелетие.

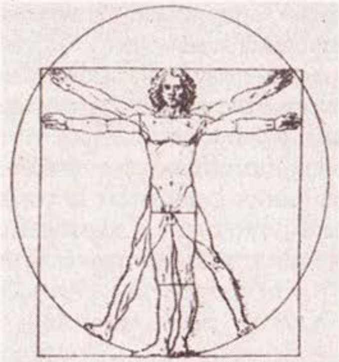
Родился Леонардо неподалеку от Венеции, в селении Анкиано. В 14 лет он стал учеником флорентийского художника Андреа Вероккьо, поскольку по своему происхождению не мог заниматься более уважаемым ремеслом, чем живопись. В 20 лет его провозгласили «мастером», самобытным и непревзойденным художником.

Леонардо да Винчи жил и работал в Милане, Венеции, Флоренции, Риме, Париже и других городах Европы. Художник изобрел принцип рассеяния (или сфумато). Предметы на его полотнах не имеют четких контуров: все, как в жизни, – размыто, переходит из одного состояния в другое, а потому дышит, живет, пробуждает фантазию. Благодаря эффекту сфумато (прием в изобразительном искусстве) появилась несравненная улыбка знаменитой «Джоконды». Все 120 шедевров гения также «рассеялись» по миру и постепенно открываются человечеству.

Леонардо да Винчи высоко ценил математику. Он разработал теорию перспективы, а также большое внимание уделял теории построения правильных многоугольников и делению окружности на равные части. Некоторые построения мастер выполнял точно, а некоторые – приблизительно.

Кроме этого, рассматривал вопрос построения равновеликих фигур и решил первую задачу о построении прямоугольника, равновеликого данному кругу. Среди геометрических за-





дач, которые решал ученый, – нахождение высоты предмета по его тени и нахождение ширины реки, основывающихся на сходстве треугольников.

Леонардо принадлежит введение термина «золотое сечение» для определения деления отрезка в крайнем и среднем отношении. Такое деление изучалось еще древними греками, а позже – Лукой Пачоли в книге «Божественная пропорция», иллюстрации к которой выполнил Леонардо.

Особенно следует упомянуть задачи об определении центра масс полукруга и тетраэдра, решая которые, ученый высказал много оригинальных мыслей. В нахождении площади эллипса Леонардо применил метод, который получил развитие только у математиков следующих поколений под названием «метод неделения». Сквозь призму математических знаний он лучше понимал перспективу картин и глубже внедрялся в окружающий мир. Математика в его жизни была верным и надежным помощником.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие плоскости называются параллельными?
2. Существуют ли на плоскости α прямые, пересекающие плоскость β, если $\alpha \parallel \beta$?
3. Можно ли утверждать, что плоскости параллельны, когда две прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости?
4. Как расположена плоскость треугольника по отношению к некоторой плоскости, если две стороны треугольника параллельны этой плоскости?
5. Как формулируется признак параллельности плоскостей?
6. Сколько плоскостей, параллельных плоскости треугольника, можно провести через точку вне треугольника?
7. Можно ли считать плоскость α совпадающей с несколькими плоскостями?
8. В каком случае плоскости пересекаются?
9. Каково взаимное расположение плоскостей в пространстве?
10. Может ли прямая, пересекающая одну из двух пересекающихся плоскостей, не пересекать другую?
11. Может ли прямая, пересекающая одну из двух параллельных плоскостей, не пересекать другую?
12. Всегда ли будут равными отрезки параллельных прямых, которые отсекаются параллельными плоскостями?
13. Могут ли между параллельными плоскостями быть равными отрезки непараллельных прямых?

14. Можно ли утверждать о параллельности плоскостей α и β, если плоскость γ пересекает эти плоскости по параллельным прямым?

15. Как расположены плоскость трапеции и плоскость α, если диагонали этой трапеции параллельны плоскости α?

16. Могут ли скрещивающиеся прямые принадлежать параллельным плоскостям?

17. Могут ли три грани куба быть параллельными одной плоскости?

18. Как строят параллельную проекцию геометрической фигуры?

19. Каковы основные свойства параллельного проецирования?

20. Какая фигура может быть параллельной проекцией трапеции?

21. Можно ли утверждать, что когда проекцией являются параллельные прямые, то геометрической фигурой, которую проецируют, являются также параллельные прямые?

22. Могут ли длины проекций отрезка и самого отрезка быть различными?

23. Может ли параллельная проекция квадрата быть прямоугольником; параллелограммом?

24. Какой елемент треугольника проецируется сам в себя?

25. Каково взаимное расположение проекций двух пересекающихся прямых?

26. Могут ли проекции скрещивающихся прямых совпадать?

27. Любое ли изображение геометрической фигуры является ее параллельной проекцией?

28. Можно ли разносторонний треугольник считать изображением равностороннего; равнобедренного треугольника?

29. Можно ли тупоугольный треугольник считать изображением прямоугольного; остроугольного треугольника?

30. Каковы общие требования для выполнения изображения прямоугольного параллелепипеда; куба; пирамиды?

31. Можно ли параллелограмм считать изображением ромба; квадрата; прямоугольника?

Тест для самоконтроля

• ***Часть 1***

Задания 1–16 содержат варианты ответов, из которых правильным является только *один* или *конкретное количество*. Выберите правильный ответ.

1°. Две стороны AB и AC треугольника ABC параллельны некоторой плоскости α (рис. 4.29). Укажите расположение плоскостей (ABC) и α.

А) Пересекаются; Б) совпадают; В) параллельны.

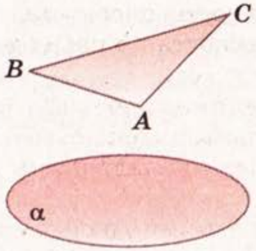


Рис. 4.29

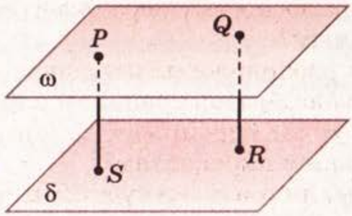


Рис. 4.30

2°. Плоскости ω и δ параллельны (рис. 4.30). Точки P, Q принадлежат плоскости ω, а точки S, R – плоскости δ и $PS \parallel QR$. Сравните длины отрезков PS и QR.

А) $PS > QR$; Б) $PS < QR$; В) $PS = QR$.

3°. Укажите по условию предыдущей задачи две пары равных отрезков.

1) PS; 2) PR; 3) QR; 4) PQ; 5) QS; 6) RS.

А) 1 и 2; Б) 1 и 3; В) 3 и 5; Г) 2 и 5; Д) 4 и 6.

4°. Две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью. Укажите взаимное расположение прямых пересечения.

А) Совпадают; В) скрещиваются;
Б) пересекаются; Г) параллельны.

5°. Две стороны AB и BC трапеции $ABCD$ параллельны плоскости α. Определите взаимное расположение плоскостей $(ABCD)$ и α.

А) Параллельны; Б) пересекаются; В) совпадают.

6°. Две плоскости α и β параллельны некоторой прямой AB. Определите взаимное расположение плоскостей α и β.

А) Пересекаются; Б) совпадают; В) параллельны.

7°. Определите, какой фигурой может быть квадрат при параллельном проецировании.

1) Произвольный четырехугольник; 5) ромб;
2) равнобокая трапеция; 6) трапеция;
3) параллелограмм; 7) прямоугольник;
4) прямоугольная трапеция; 8) квадрат.

А) 1, 2, 6 и 7; В) 1, 3, 5 и 7; Д) 3, 5, 6 и 7.
Б) 2, 4, 6 и 8; Г) 3, 5, 7 и 8;

8°. Отрезок A_1B_1 – параллельная проекция отрезка AB на плоскость α, точка O – середина отрезка AB, O_1 – проекция точки O на плоскость α. Найдите длину отрезка O_1B_1, если $A_1B_1 = 36$ см.

А) 18 см; Б) 12 см; В) 9 см; Г) 36 см; Д) 27 см.

9°°. Определите взаимное расположение плоскостей сечений изображенного на рисунке 4.31 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если точки K, L, M, N – середины ребер AB, CD, CC_1, BB_1 соответственно.

А) Пересекаются; Б) параллельны; В) совпадают.

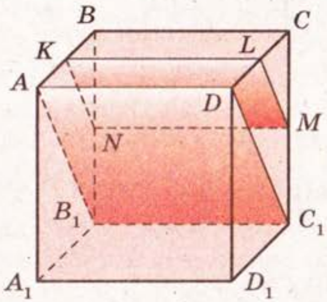


Рис. 4.31

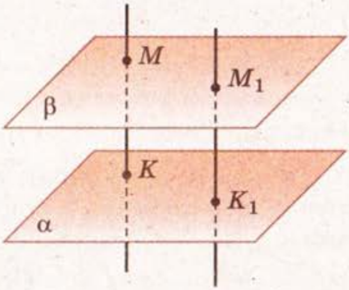


Рис. 4.32

10°°. Определите взаимное расположение прямых MK и M_1K_1, если параллельные плоскости α и β пересекают их в точках M, K, M_1, K_1 (рис. 4.32), причем $MM_1 \nparallel KK_1$.

А) Скрещиваются; В) параллельны.

Б) пересекаются;

11°°. Выберите правильные обоснования параллельности плоскостей (ABB_1) и (DD_1C_1) изображенного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ по признаку параллельности плоскостей (рис. 4.33).

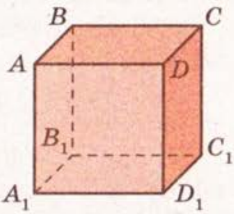


Рис. 4.33

1) $AB \parallel C_1D_1$, $B_1B \parallel D_1D$ и $B_1A \parallel C_1D$;

2) $AB \parallel C_1D_1$, $BB_1 \parallel DD_1$ и $AB \cap BB_1$, $C_1D \cap DD_1$;

3) $B_1B \parallel D_1D$, $A_1A \parallel C_1C$, $AB \parallel C_1D_1$ и $A_1B_1 \parallel CD$;

4) $BB_1 \cap B_1A$, $DD_1 \cap C_1D$ и $B_1B \parallel D_1D$, $B_1A \parallel DC_1$;

5) $A_1B \cap AB_1$, $D_1C \cap C_1D$ и $A_1B \parallel D_1C$, $B_1A \parallel C_1D$.

А) 1, 2 и 4; Б) 2, 3 и 5; В) 2, 4 и 5; Г) 1, 4 и 5; Д) 2, 3 и 4.

12°°. Укажите правила построения изображения проекций прямоугольного параллелепипеда.

1) Противоположные ребра проекций – равные отрезки;

2) противоположные ребра проекций – параллельные отрезки;

3) углы всех граней проекций – прямые;

4) все грани проекций – прямоугольники;

5) все грани проекций – параллелограммы;

6) все грани проекций – квадраты.

А) 1, 2 и 4; Б) 1, 2 и 5; В) 3, 4 и 6; Г) 2, 5 и 6; Д) 1, 3 и 6.

13°°. Укажите требования для построения изображения правильной треугольной пирамиды (основание пирамиды – правильный треугольник, боковые грани пирамиды – равнобедренный треугольник).

1) Ребра основания пирамиды – равные отрезки;

2) не все ребра основания пирамиды – равные отрезки;

3) боковые ребра пирамиды – равные отрезки;

4) не все боковые ребра пирамиды – равные отрезки;

5) все грани пирамиды – треугольники.

А) 1, 3 и 5; Б) 1, 4 и 5; В) 2, 3 и 5; Г) 2, 4 и 5; Д) 2, 3 и 5.

14°°. Прямая a лежит на плоскости α, прямая b – на плоскости β, причем $\alpha \parallel \beta$. Укажите количество возможных общих точек для прямых a и b (рис. 4.34).

А) Одна; Б) две; В) три; Г) множество; Д) ни одной.

15°°. Через параллельные прямые m и n проведена плоскость γ, пересекающая параллельные плоскости α и β по прямым MN и M_1N_1. Укажите возможный вид четырехугольника MNN_1M_1.

1) Трапеция;
2) параллелограмм;
3) произвольный четырехугольник;
4) ромб;
5) прямоугольник.

А) 1 или 2, или 4; Б) 2 или 4, или 5; В) 3 или 4, или 5; Г) 1 или 3, или 4; Д) 1 или 4, или 5.

16°°. Точки K и L принадлежат плоскости α, а точки M и H – плоскости β, $\alpha \parallel \beta$, отрезки KM и LH пересекаются в точке O (рис. 4.35). Найдите длину отрезка KM при выполнении дополнительных условий (А–Д). Идентифицируйте условие (А–Д) и правильный ответ (1–5).

А) $KL = 6$ см, $MH = 5$ см, $OM = 10$ см;	1) $KM = 20$ см;	А	
Б) $OM = 9$ см, $OL = 4$ см, $OH = 12$ см;	2) $KM = 10$ см;	Б	
В) $KL = 3$ см, $MH = 4$ см, $OM = 8$ см;	3) $KM = 22$ см;	В	
Г) $OK = 8$ см, $OL = 6$ см, $OH = 9$ см;	4) $KM = 14$ см;	Г	
Д) $KL = 10$ см, $OK = 4$ см, $MH = 15$ см.	5) $KM = 12$ см.	Д	

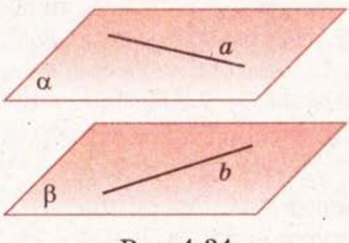


Рис. 4.34

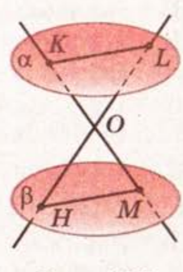


Рис. 4.35

Часть 2

Выполните задания 17–28 с краткой записью хода рассуждений.

17°. Даны две параллельные плоскости α и β. Точки K и H принадлежат плоскости α, точки C и P – плоскости β. Отрезки KP и CH пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка OP, если $KH = 13{,}5$ см, $KO = 9{,}6$ см, $CP = 4{,}5$ см.

18°. Параллельные плоскости α и β пересекают стороны угла ACB в точках A_1, B_1, A_2, B_2 соответственно. Найдите длину отрезка CB_1, если $CA_1 : A_1A_2 = 1 : 3$ и $CB_2 = 12$ см.

19°. Сторона AB треугольника ASB параллельна каждой из параллельных плоскостей α и β. Плоскости α и β пересекают сторону AS соответственно в точках A_1 и A_2, а сторону BC – в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка A_1B_1, если $AB = 18$ см, A_2 – середина отрезка AS, а A_1 – середина отрезка A_2S.

20°. Даны прямоугольник $ABCD$ и точка S, не принадлежащая плоскости этого прямоугольника. Точку S соединили отрезками со всеми вершинами прямоугольника $ABCD$. Через точку D_1 – середину отрезка SD – провели плоскость α, параллельную плоскости $(ABCD)$, которая пересекла отрезки SA, SB и SC в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Найдите периметр четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если $AD = 8$ см, $AB = 6$ см.

21°. Из точки S, не принадлежащей ни одной из двух параллельных плоскостей α, β и не лежащей между ними, проведены три луча, которые пересекают плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, а плоскость β – в точках A_2, B_2, C_2. Вычислите периметр $\triangle A_1B_1C_1$, если $A_2B_2 = 8$ см, $B_2C_2 = 10$ см, $A_2C_2 = 12$ см и $SA_1 : SA_2 = 2 : 3$.

22°. Из точки S, не принадлежащей ни одной из двух параллельных плоскостей α, β и не лежащей между ними, проведены три луча, которые пересекают плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, а плоскость β – в точках A_2, B_2, C_2. Вычислите площадь $\triangle A_1B_1C_1$, если $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ – правильные, $A_2C_2 = 4\sqrt{3}$ см, $SA_1 : SA_2 = \sqrt{3} : 2$.

23°. Даны параллельные плоскости α и β. $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \beta$, $D \in \beta$. Отрезки AC и BD пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка KD, если $AB = 2$ см, $CD = 4$ см и $KB = 5$ см.

24°. На параллельных плоскостях α и β выбраны пары точек A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно так, что A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке Q. Вычислите длину отрезка QA_1, если $A_1B_1 = 6$ см, $QA_2 = 2{,}5$ см, $QB_2 : QA_2 = 3 : 1$.

25°. На параллельных плоскостях α и β изображены $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ соответственно. Найдите площадь $\triangle A_2B_2C_2$, если $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$, $A_1B_1 = 4$ см, $B_1C_1 = 3$ см, $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

26°. При параллельном проецировании ромба $ABCD$ на плоскость α получили четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, в котором

$A_1B_1 \parallel C_1D_1$. $K \in AB$, точка K_1 – проекция точки K на плоскость α, причем $KA : KB = 2 : 3$. Найдите длину отрезка A_1K_1, если $A_1B_1 = 15$ см.

27•. При параллельном проецировании равнобокой трапеции $ABCD$ (AC – основание) получили четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Диагональ трапеции точкой O делит ее среднюю линию MN в отношении $3 : 5$. Найдите длины отрезков M_1O_1 и O_1N_1 (M_1, O_1, N_1 – проекции точек M, O, N соответственно на плоскость α), если $M_1N_1 = 24$ см.

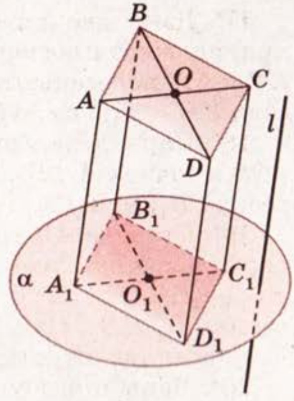


Рис. 4.36

28•. На рисунке 4.36 изображено параллельное проецирование квадрата $ABCD$ на плоскость α, l – направление проецирования, O – центр квадрата. Плоскости (ABC) и α – параллельные, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. Найдите площадь проекции $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AO = 8$ см.

Часть 3

Выполнение задания 29–32 с полным обоснованием.

29••. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $BC < AD$), $M \in BC$ и $BM : MC = 1 : 3$.

1) Постройте параллельную проекцию $ABCD$ на плоскость α.

2) Постройте параллельную проекцию точки M на плоскость α.

3) Постройте параллельную проекцию перпендикуляра, проведенного из точки M к основанию AD.

4) Вычислите длины отрезков B_1M_1 и M_1C_1, если $B_1C_1 = 18$ см.

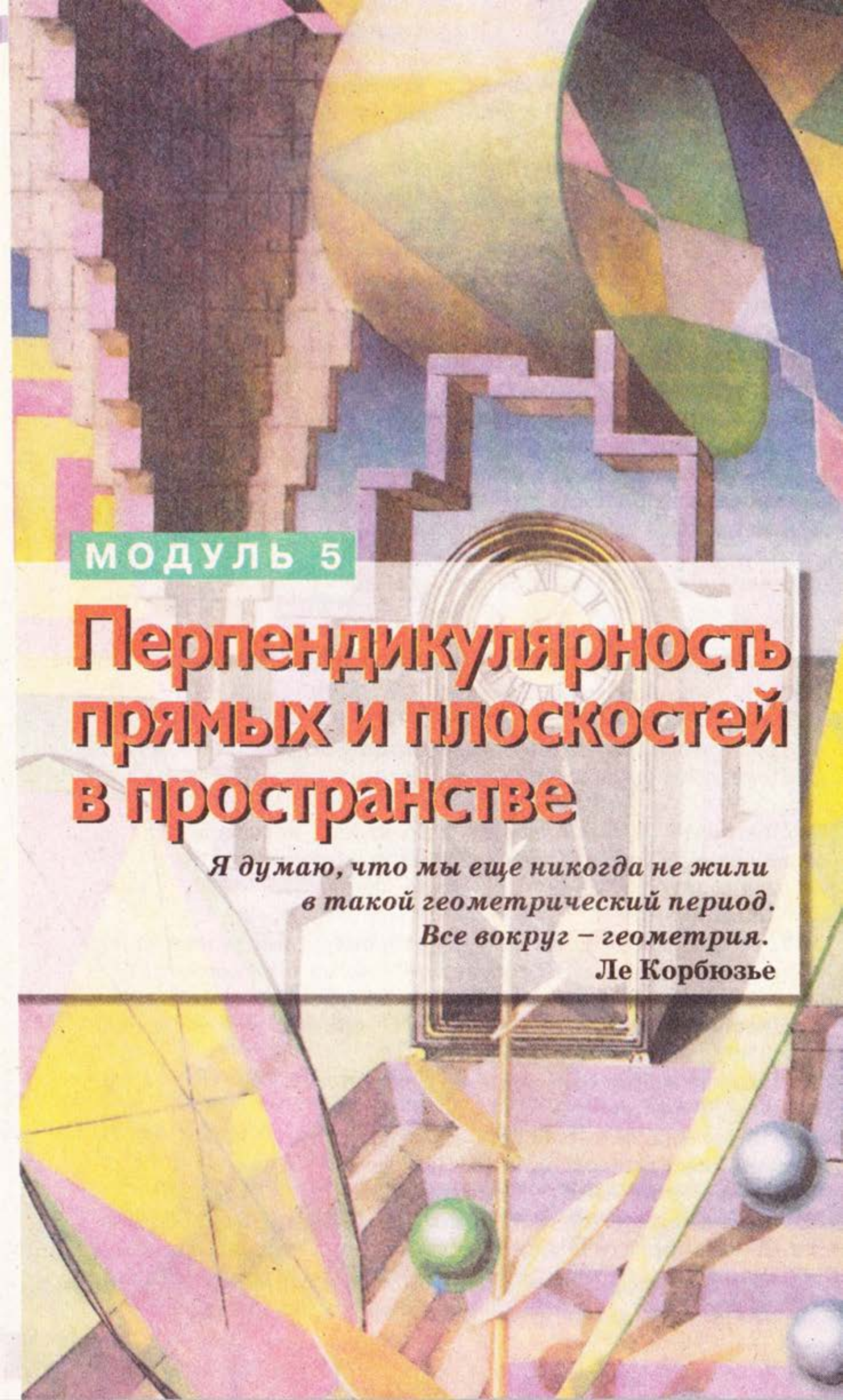
30••. Точки A и B лежат по одну сторону от плоскости α; A_1, B_1 – проекции точек A, B соответственно на плоскость α; O – середина отрезка BB_1, $BB_1 < AA_1$.

1) Постройте точку пересечения C прямой AO с плоскостью α.

2) Найдите длину отрезка A_1C, если $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 4$ см, $A_1B_1 = 9$ см.

31••. Через середины ребер AD, DC и A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость сечения (MNK), а через AA_1 и точку C_1 – плоскость сечения (AA_1C_1). Докажите, что $(MNK) \parallel (AA_1C)$.

32••. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что любая плоскость, параллельная прямым AB и CD, пересекает прямые AC, AD, BD, BC в вершинах параллелограмма.



МОДУЛЬ 5

Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

Я думаю, что мы еще никогда не жили
в такой геометрический период.
Все вокруг – геометрия.
Ле Корбюзье

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ МОДУЛЯ

- *Перпендикулярные прямые пространства и прямые, перпендикулярные некоторой плоскости пространства*
- *Признаки перпендикулярности прямых пространства, прямой и плоскости*
- *Построение прямой, перпендикулярной некоторой плоскости*
- *Свойства прямой и плоскости, перпендикулярных между собой*
- *Перпендикуляр и наклонная*
- *Теорема о трех перпендикулярах*
- *Признак перпендикулярности плоскостей*

Освоив этот модуль, вы узнаете:

- **каково отличие между свойствами перпендикулярных прямых на плоскости и в пространстве;**
- **как построить прямую, перпендикулярную некоторой плоскости пространства;**
- **как использовать признаки перпендикулярности прямых при решении задач;**
- **как использовать признаки перпендикулярности прямых и плоскостей при решении задач;**
- **как связаны параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве;**
- **какие отрезки называют перпендикуляром и наклонной к плоскости;**
- **как сравнить длины проекций наклонных, имея длины наклонных;**
- **как сравнить длины наклонных, имея длины проекций наклонных;**
- **как определить, будет ли прямая перпендикулярна к наклонной;**
- **как определить, будет ли прямая перпендикулярна к проекции наклонной;**
- **как применить признак перпендикулярности плоскостей для нахождения длины отрезка, концы которого лежат на перпендикулярных прямых.**

10-Geometrija, 10 kl (Biljanina), rus

§ 5.1. Перпендикулярность прямых в пространстве

В модуле 3 мы рассматривали взаимное расположение прямых в пространстве. Естественно, что пересекающиеся прямые образуют углы. Углом между прямыми является меньший из двух смежных. Например, на рисунке 5.1 изображены две пересекающиеся прямые AB и CD. $\angle DOB$ – угол между ними. Очевидно, что наибольшим углом между прямыми может быть угол 90°. Такие прямые называются *перпендикулярными*.

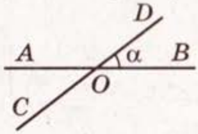


Рис. 5.1

Две прямые в пространстве называются ***перпендикулярными***, если они пересекаются под прямым углом.

Свойства перпендикулярных прямых пространства выражают теоремы 1–4.

Теорема 1

Через произвольную точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Доказательство. Пусть a – данная прямая и A – точка на ней (рис. 5.2). Возьмем вне прямой a произвольную точку X и проведем через эту точку и прямую a плоскость α (следствие из аксиом). В плоскости α через точку A можно провести прямую b, перпендикулярную a ($b \perp a$). *Теорема доказана.*

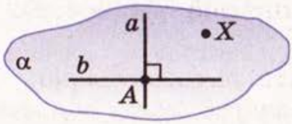


Рис. 5.2

Теорема 2

Если две пересекающиеся прямые соответственно параллельны двум перпендикулярным прямым, то они также перпендикулярны.

Доказательство. Пусть a и b – данные перпендикулярные прямые и $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, а также прямая a пересекает b в точке O, а прямая a_1 пересекает b_1 в точке O_1 (рис. 5.3). Тогда a_1 и b_1 лежат в плоскости β, а прямые a и b – в плоскости α, которые будут параллельными по признаку параллельности плоскостей. Соединим точки O и O_1. Выберем на прямой a_1 точку A_1, а на прямой b_1 – точку B_1. Проведем $AA_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1$. Тогда $AA_1 \parallel BB_1$.

Четырехугольники O_1A_1AO и O_1B_1BO – параллелограммы, отсюда $O_1A_1 = OA$ и $O_1B_1 = OB$. Поскольку $AA_1 \parallel BB_1$, то они лежат в одной плоскости γ, пересекающей плоскость β по прямой A_1B_1, а плоскость α – по прямой AB, которые параллельны, т.е. $A_1B_1 \parallel AB$.

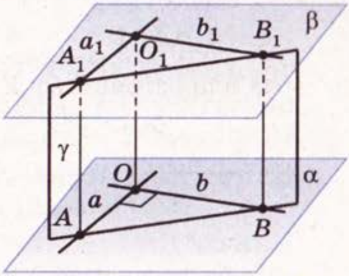


Рис. 5.3

Итак, четырехугольник AA_1B_1B – параллелограмм, у которого $A_1B_1 = AB$. Таким образом, треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. $a \perp b$, отсюда $\angle AOB = 90°$, поэтому $\angle A_1O_1B_1 = 90°$. Итак, прямая a_1 перпендикулярна прямой b_1. *Теорема доказана.*

Теорема 3

Через любую точку пространства, не принадлежащую прямой, можно провести прямую, перпендикулярную данной (рис. 5.4, *а*).

Теорема 4

Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых и лежит с ними в одной плоскости, то она перпендикулярна и второй прямой (рис. 5.4, *б*).

Доказательство теорем 3 и 4 выполните самостоятельно.

Расположение трех прямых в пространстве, когда они между собой попарно перпендикулярны и имеют общую точку, является особым случаем (рис. 5.4, *в*).

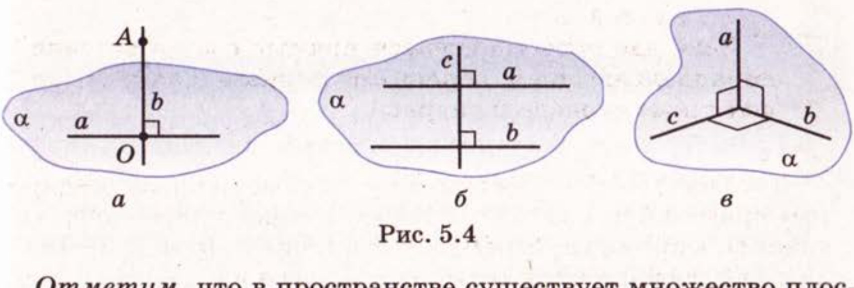


Рис. 5.4

Отметим, что в пространстве существует множество плоскостей, которые можно провести через одну и ту же прямую. Выбирая точку A вне прямой, мы попадем на одну из этих плоскостей и в выбранной плоскости к данной прямой через точку A проводим прямую, перпендикулярную данной.

Итак, в пространстве к прямой можно провести сколь угодно много перпендикулярных прямых, проходящих через данную точку этой прямой.

Задача 1

Прямые AB, AC и AD попарно перпендикулярны (рис. 5.5). Найдите отрезок CD, если $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см.

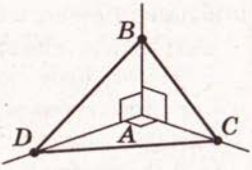


Рис. 5.5

Дано: $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AB \perp AD$;
$AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см.

Найти: CD.

Решение

Из $\triangle ABC$ ($\angle A = 90°$) по теореме Пифагора $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

$AB = 3$ см,

$BC = 7$ см, поэтому

$9 + AC^2 = 49$, отсюда $AC^2 = 40$ см^2.

Из $\triangle ACD$ ($\angle A = 90°$) по теореме Пифагора $AC^2 + AD^2 = CD^2$.

$AC^2 = 40$ см^2,

$AD = 1{,}5$ см, поэтому $40 + 2{,}25 = CD^2$,

$CD^2 = 42{,}25$ см^2,

$CD > 0$; $CD = 6{,}5$ см.

Ответ. 6,5 см.

Почему именно так?

Каждая пара данных прямых AB, AC и AD – перпендикулярна, т.е. образует прямые углы. Соединив последовательно точки B с C, C с D и D с B, получим прямоугольные треугольники.

1) $\triangle ABC$ ($\angle A = 90°$): известны катет и гипотенуза, неизвестна сторона, являющаяся вторым катетом. CA – сторона $\triangle ACD$.

2) $\triangle ACD$ ($\angle A = 90°$): один катет известен по условию, второй – найден из $\triangle ABC$; неизвестной является третья сторона – гипотенуза. По теореме Пифагора составляем выражение и выполняем вычисление длины отрезка CD.

Упражнения

5.1°. Выберите правильное определение перпендикулярных прямых в пространстве.

А) Прямые, которые пересекаются под прямым углом;

Б) прямые, которые лежат в одной плоскости, пересекаются и образуют равные углы;

В) прямые, которые пересекаются и образуют равные углы;

Г) прямые, которые при пересечении образуют два равных смежных угла;

Д) прямые, которые лежат в одной плоскости и не являются параллельными.

5.2°. Укажите, сколько перпендикулярных прямых можно провести к прямой пространства через данную точку на ней.

А) Одну; Б) две; В) три; Г) четыре; Д) много.

5.3°. Укажите количество прямых, перпендикулярных данной, которые проходят через точку вне данной прямой.

А) Одна; Б) две; В) три; Г) четыре; Д) много.

5.4°. Известно, что прямые a, b принадлежат плоскости α, а a_1, b_1 – плоскости β, $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$, причем a и b – перпендикулярные. Выберите правильное утверждение.

А) $a_1 \parallel b_1$; Б) $a_1 \perp b_1$; В) $a_1 \parallel b$; Г) $a_1 \perp b$; Д) $a \perp b_1$.

5.5°°. Укажите взаимное расположение в пространстве прямых, перпендикулярных одной и той же прямой.

А) Пересекаются или скрещиваются;

Б) пересекаются или параллельны;

В) параллельны или скрещиваются;

Г) только скрещивающиеся;

Д) только параллельны.

5.6°°. На рисунке 5.6 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажите тройку попарно перпендикулярных прямых.

А) DD_1, AA_1, AD; Г) A_1B_1, C_1B_1, B_1B;
Б) A_1A, AB, BC; Д) C_1D, BC, AB.
В) A_1B_1, A_1D_1, D_1C_1;

5.7°°. Вычислите периметр $\triangle AB_1C$, если ребро куба равно 4 см (рис. 5.6).

А) 12 см; Б) $6\sqrt{2}$ см; В) $4\sqrt{2}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см; Д) $16\sqrt{2}$ см.

5.8°°. Вычислите площадь $\triangle D_1AC$, если ребро куба равно 8 см (рис. 5.6).

А) $18\sqrt{3}$ см²; В) $24\sqrt{3}$ см²; Д) $16\sqrt{3}$ см².

Б) $32\sqrt{3}$ см²; Г) $36\sqrt{3}$ см²;

5.9•. На попарно перпендикулярных лучах OX, OY, OZ (рис. 5.7) выбраны точки M, N, K так, что $OM = ON = OK$. Докажите, что треугольник MNK – правильный. Запишите формулой периметр и площадь $\triangle MNK$, если $OM = a$.

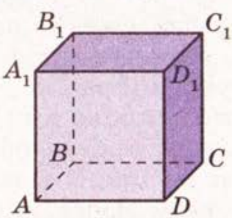


Рис. 5.6

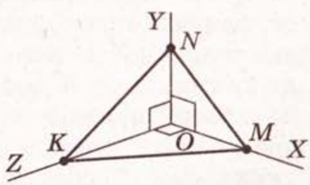


Рис. 5.7

5.10•. На попарно перпендикулярных лучах OX, OY, OZ выбраны точки A, B, C соответственно (рис. 5.8). Найдите периметр полученного треугольника ABC, если:

1) $OA = OB = OC = 5$ см;

2) $OA = OC = 5$ см, $OB = 6$ см;

3) $OA = 3$ см, $OB = 4$ см, $OC = 5$ см;

4) $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = 3a$.

5.11••. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором точки O и O_1 – центры противоположных граней. Докажите, что прямая OO_1 перпендикулярна диагоналям этих граней.

5.12••. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.9) через отрезок DC_1 и точку B проведена плоскость. Вычислите периметр полученного сечения, если a, b, c – измерения параллелепипеда, причем $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 6$ см.

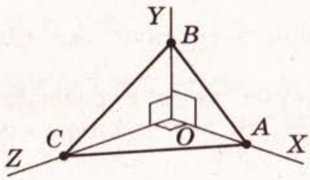


Рис. 5.8

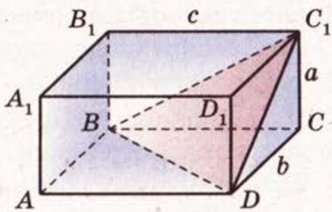


Рис. 5.9

5.13••. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите периметр сечения, полученного плоскостью, проведенной через отрезок DC_1 и точку B, если a, b, c – измерения параллелепипеда, причем $a = 4$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см.

5.14••. На ребрах AD и BC правильного тетраэдра $ABCD$ обозначены точки M и K, являющиеся серединами этих ребер. Докажите перпендикулярность прямых:

1) KM и AD; 2) KM и BC.

§ 5.2. Перпендикулярность прямой и плоскости в пространстве

Мы уже рассматривали взаимное расположение прямой и плоскости, детально ознакомились со случаем, когда прямая не пересекает плоскость. В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда прямая пересекает плоскость и, кроме того, образует с произвольной прямой этой плоскости, проходящей через точку пересечения, прямой угол. Такую прямую называют ***перпендикулярной*** плоскости. Все другие неперпендикулярные прямые, пересекающие плоскость, называют ***наклонными***.

Моделью прямой, перпендикулярной плоскости, может быть установленная вышка, столб, вкопанный в землю, гвоздь, вбитый в стену, и т.п.

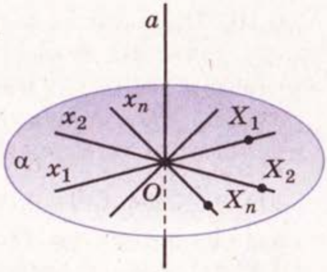


Рис. 5.10

Прямая, пересекающая плоскость, называется ***перпендикулярной этой плоскости***, если она перпендикулярна произвольной прямой, которая лежит на этой плоскости и проходит через их точку пересечения.

Чтобы определить, будет ли прямая a перпендикулярной плоскости α, нужно через точку ее пересечения с плоскостью O провести множество прямых x_1, x_2, ..., x_n (рис. 5.10) и доказать, что она перпендикулярна каждой из них. Этот путь нерациональный. Поэтому, чтобы установить перпендикулярна ли прямая плоскости, пользуются *признаком перпендикулярности прямой и плоскости*.

Теорема 5 (***признак перпендикулярности прямой и плоскости***)

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости, то она перпендикулярна и данной плоскости.

Доказательство. Пусть α – данная плоскость, c – прямая, пересекающая ее в точке O, a и b – прямые, которые принадлежат плоскости α, проходят через точку O (рис. 5.11) и перпендикулярны прямой c ($c \perp a$, $c \perp b$). Докажем, что $c \perp \alpha$, т.е., что прямая c перпендикулярна любой прямой x плоскости α, которая проходит через точку O. Для этого выполним дополнительное построение:

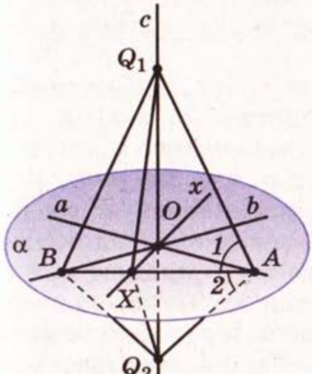


Рис. 5.11

1) отложим в разных полупространствах на прямой c от точки O равные отрезки OQ_1 и OQ_2;

2) обозначим на прямой a некоторую точку A, а на прямой b – точку B; соединим точки: A с Q_1, A с Q_2, B с Q_1, B с Q_2 и A с B;

3) проведем через точку O произвольную прямую x, которая пересечет AB в точке X, и также соединим ее с Q_1 и Q_2.

Рассмотрим образованные при этом треугольники.

1. $\triangle Q_1AQ_2$. AO – медиана и высота; $OQ_1 = OQ_2$ по построению; OA –

общая сторона треугольников Q_1OA и Q_2OA; $\angle Q_1OA = \angle Q_2OA = 90°$. Итак, $\triangle Q_1OA = \triangle Q_2OA$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $Q_1A = Q_2A$.

2. $\triangle Q_1BQ_2$. Равенство отрезков Q_1B и Q_2B доказывается аналогично, как и равенство отрезков Q_1A и Q_2A.

3. $\triangle Q_1BA = \triangle Q_2BA$, поскольку $Q_1A = Q_2A$ и $Q_1B = Q_2B$, AB – общая сторона. Отсюда вытекает равенство соответствующих углов: $\angle Q_1BA = \angle Q_2BA$, $\angle Q_1AB = \angle Q_2AB$.

4. $\triangle Q_1XA = \triangle Q_2XA$ по двум сторонам и углу между ними: $Q_1A = Q_2A$; XA – общая сторона; $\angle Q_1AX = \angle Q_2AX$ по доказательству выше. Итак, $Q_1X = Q_2X$, т.е. $\triangle Q_1XQ_2$ – равнобедренный: Q_1Q_2 – основание треугольника, O – середина Q_1Q_2, поэтому XO – медиана $\triangle Q_1XQ_2$. В равнобедренном треугольнике медиана является высотой, т.е. $XO \perp Q_1Q_2$, а это означает, что $x \perp c$. Поскольку прямая x – произвольная прямая плоскости α, проходит через точку пересечения прямой c и плоскости α, перпендикулярна прямой c, то $c \perp \alpha$. *Теорема доказана.*

Отметим, что вы впервые столкнулись с таким громоздким доказательством. Доказательство не следует заучивать наизусть или запоминать шаги, необходимо понять его и последовательно, опираясь на известные факты, изложить рассуждения. Для этого важно спланировать последовательность логических шагов и не допускать ошибок.

Итак, для установления перпендикулярности прямой и плоскости достаточно проверить перпендикулярность прямой двум прямым плоскости, проходящим через точку их пересечения (по признаку).

Из данной теоремы вытекают два следствия.

Следствие 1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и второй прямой.

Доказательство. Пусть α – плоскость, a_1 и a_2 – две прямые, пересекающие ее в точках A_1 и A_2, причем $a_1 \parallel a_2$, $a_1 \perp \alpha$ (рис. 5.12). Проведем через точку A_1 произвольную прямую x_1 на плоскости α, а через точку A_2 – прямую x_2, параллельную x_1. Поскольку прямая a_1 перпендикулярна плоскости α, то прямые a_1 и x_1 перпендикулярны. Тогда, по теореме 2, прямые a_2 и x_2 также перпендикулярны. Таким образом, прямая a_2 перпендикулярна произвольной прямой x_2, которая лежит

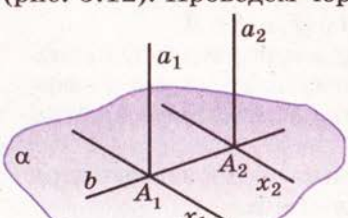


Рис. 5.12

на плоскости α и проходит через их точку пересечения A_2. Это определяет перпендикулярность прямой a_2 к плоскости α.

Следствие 2. Две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.

Доказательство. Пусть a и b две прямые, перпендикулярные плоскости α (рис. 5.13). Допустим, что прямые a и b не параллельные. Выберем на прямой b точку C, которая не принадлежит плоскости α. Проведем через точку C прямую b_1, параллельную прямой a. Она перпендикулярна плоскости α по предыдущему следствию. Пусть прямая b_1 пересекает плоскость α в точке B_1, а прямая b пересекает α в точке B. Тогда пряма BB_1 перпендикулярна пересекающимся прямым b и b_1. А это невозможно, предположение неверно. Таким образом, прямые параллельны.

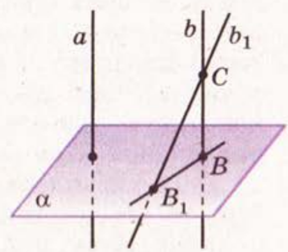


Рис. 5.13

Задача

Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости.

Доказательство

Рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть точка A принадлежит плоскости α (рис. 5.14). Тогда через точку A в плоскости α проведем прямую a. Выбрав точку K, не принадлежащую α, проведем через нее и прямую a плоскость β (следствие из аксиом). Проведем в плоскости α прямую $c \perp a$, а в плоскости β – прямую $b \perp a$. Через эти две прямые проходит плоскость γ, которая будет перпендикулярна прямой a (теорема о перпендикулярности прямой и плоскости).

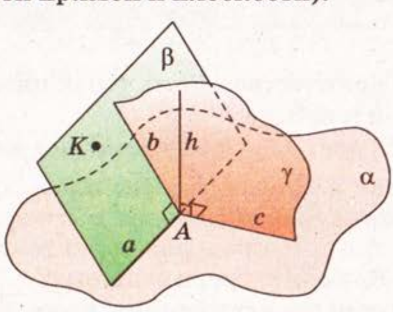


Рис. 5.14

Тогда в плоскости γ достаточно провести прямую $h \perp c$. Она будет перпендикулярна и прямой a, поскольку лежит в γ и проходит через точку пересечения. Поскольку h перпендикулярна двум прямым плоскости α, то она перпендикулярна и самой плоскости. Итак, мы построили прямую h, которая перпендикулярна плоскости α и проходит через заданную точку A.

Второй случай. Пусть точка A не принадлежит плоскости α. Выбрав произвольную точку B на плоскости α, аналогично предыдущему случаю, проведем прямую $l \perp \alpha$, которая проходит через точку B. Тогда через эту прямую и точку A можно провести некоторую плоскость φ, а на ней – некоторую прямую h, которая проходит через точку A параллельно l. Прямая h будет перпендикулярна α (если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то вторая также перпендикулярна). Построение выполнено. Итак, прямую построить можно. Ч.т.д.

Подытоживая сказанное выше, приходим к таким выводам:

1. Через точку вне прямой в пространстве можно провести ***единственную*** прямую, перпендикулярную данной (см. рис. 5.4, *а*).

2. Через точку на прямой в пространстве можно провести ***бесконечное количество*** прямых, перпендикулярных данной (рис. 5.10).

3. Через заданную точку на плоскости можно провести ***одну и только одну*** прямую, перпендикулярную данной плоскости (рис. 5.10).

4. Через заданную точку, не принадлежащую плоскости, можно провести ***одну и только одну*** прямую, перпендикулярную данной плоскости (рис. 5.14).

Упражнения

5.15°. Укажите количество общих точек плоскости и прямой, перпендикулярной к ней.

А) Одна; Б) две; В) бесконечное количество.

5.16°. На рисунке 5.15 изображены плоскость α и прямая a, которая перпендикулярна плоскости α и пересекает ее в точке M. Прямые $b_1, b_2, ..., b_n$ проходят через точку M и принадлежат плоскости α. Выберите среди заданных $b_1, b_2, ..., b_n$ все прямые, которые будут перпендикулярны прямой a.

А) Прямая b_1;

Б) прямые b_1 и b_2;

В) прямые $b_1, b_2, ..., b_{10}$;

Г) прямые $b_1, b_2, ..., b_n$, где n – конечное натуральное число;

Д) прямые $b_1, b_2, ..., b_n$, где n – бесконечное натуральное число.

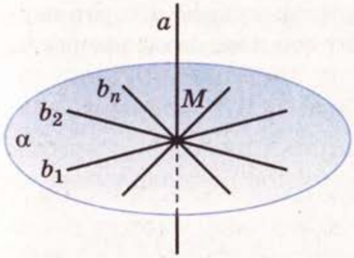


Рис. 5.15

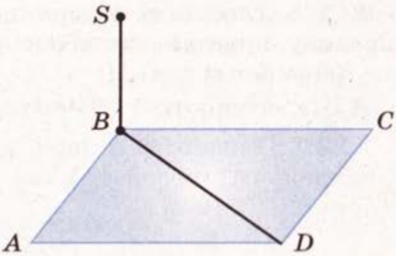


Рис. 5.16

5.17°. Прямая SB – перпендикулярна плоскости параллелограмма $ABCD$ (рис. 5.16). Укажите прямые, которым перпендикулярна прямая SB.

1) AB; 2) BC; 3) AD; 4) BD; 5) CD.

А) 1, 2 и 3; Б) 1, 2 и 4; В) 2, 3 и 4; Г) 2, 3 и 5; Д) 1, 3 и 5.

5.18°. Известно, что некоторая прямая l перпендикулярна сторонам AB и AC треугольника ABC. Определите взаимное расположение прямой l и плоскости (ABC).

А) Прямая l пересекает плоскость (ABC), но не перпендикулярна ей;

Б) прямая l принадлежит плоскости (ABC);

В) прямая l перпендикулярна плоскости (ABC);

Г) прямая l параллельна плоскости (ABC).

5.19°. Прямая KO перпендикулярна плоскости параллелограмма $ABCD$ (рис. 5.17). Выберите пару прямых, перпендикулярных прямой KO.

А) AB и BD; Г) AD и BC;

Б) AB и CD; Д) AC и CD.

В) AC и BD;

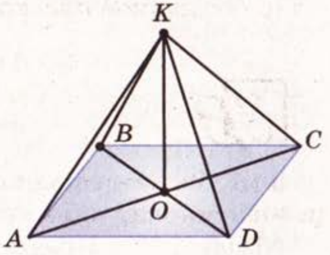


Рис. 5.17

5.20°°. Одна из прямых, которая содержит сторону параллелограмма, перпендикулярна плоскости α. Определите взаимное расположение прямой, содержащей противоположную сторону этого параллелограмма, и плоскости α.

А) Принадлежит плоскости α;

Б) параллельны между собой;

В) перпендикулярны между собой.

5.21°°. Прямая MB перпендикулярна сторонам AB и BC треугольника ABC. X – произвольная точка стороны AC (рис. 5.18). Определите вид треугольника MBX.

А) Остроугольный; Б) тупоугольный; В) прямоугольный.

5.22°°. Плоскость α перпендикулярна прямой b, а прямая b перпендикулярна плоскости φ. Укажите взаимное расположение плоскостей α и φ.

А) Пересекаются; Б) параллельны; В) совпадают.

5.23°°. Плоскость α перпендикулярна прямой b, а прямая b параллельна прямой c. Укажите взаимное расположение плоскости α и прямой c.

А) $c \parallel \alpha$; Б) $c \perp \alpha$; В) $c \subset \alpha$; Г) $c \cap \alpha$, $\angle(c\alpha) \neq 90°$.

5.24°°. Через точки M, N, K – середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 соответственно (рис. 5.19) – проведена плоскость (MNK). Определите плоскости, которым будет перпендикулярно ребро куба DD_1.

1) (ADD_1); 2) (CBD); 3) (MNK); 4) (CD_1D); 5) $(A_1D_1C_1)$.

А) 1, 2 и 4; Б) 2, 3 и 4; В) 1, 3 и 5; Г) 2, 3 и 5; Д) 2, 4 и 5.

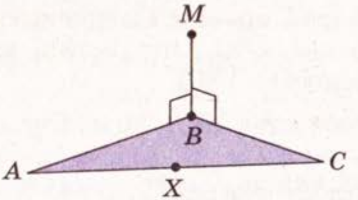


Рис. 5.18

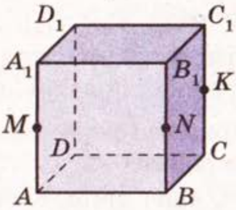


Рис. 5.19

5.25•. Плоскость α перпендикулярна прямой m, а прямая m параллельна прямой n. Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой n.

5.26•. Через точку A некоторого $\triangle ABC$ проведена прямая AM, перпендикулярная плоскости (ABC), а через точку B проведена прямая BN, параллельная AM. Найдите угол NBC.

5.27•. Прямая, содержащая основание AB трапеции $ABCD$, перпендикулярна плоскости α. Докажите, что прямая, содержащая основание CD этой же трапеции, перпендикулярна плоскости α.

5.28•. Через точку B трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проведена прямая HB, перпендикулярная плоскости (ABC), а через точку C – прямая CK, параллельная прямой BH. Докажите, что прямая CK перпендикулярна диагонали AC трапеции $ABCD$.

5.29•. Через вершину B прямоугольной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $\angle A = 90°$) проведена прямая l, перпендикулярная плоскости (ABC), $M \in l$. Докажите, что прямая AB перпендикулярна плоскости (BMC).

5.30••. Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая AK, перпендикулярная плоскости (ABC). Докажите, что прямая AD перпендикулярна плоскости (ABK).

5.31••. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, которая проходит через середину ребра AB перпендикулярно прямой AC.

5.32••. $ABCD$ – параллелограмм, BK и FD – прямые, перпендикулярные плоскости (ABC). Докажите, что плоскости ABK и DFC параллельны.

5.33••. $ABCD$ – параллелограмм, AN и CK – прямые, перпендикулярные плоскости (ABC). Докажите, что плоскости AND и KBC параллельны.

5.34••. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, причем $BO = OD$. Точка M, не принадлежащая плоскости четырехугольника, соединена с его вершинами B, D, C и с точкой O. Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости (MOC), если $MB = MD$, $BD = 6$ см, $OC = 4$ см, $CD = 5$ см.

§ 5.3. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах

Рассмотрим изображение прямой a, перпендикулярной плоскости α (рис. 5.20). Обозначим на прямой a произвольный отрезок.

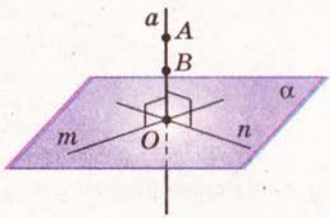


Рис. 5.20

Отрезок называется ***перпендикулярным плоскости***, если он лежит на прямой, перпендикулярной плоскости.

Итак, на прямой a, перпендикулярной плоскости α, можно разместить множество отрезков, которые будут перпендикулярны плоскости α.

На рисунке 5.21 изображены различные случаи расположения перпендикулярного плоскости отрезка:

1) отрезок AB лежит по одну сторону от плоскости α и не пересекает ее (рис. 5.21, *а*);

2) отрезок CD пересекает плоскость α (концы отрезка находятся в разных полупространствах) (рис. 5.21, *б*);

3) отрезок MO лежит по одну сторону от плоскости α и точка O – конец отрезка – принадлежит плоскости α (рис. 5.21, *в*).

Чаще всего на практике встречается третий случай. Такой отрезок MO называют ***перпендикуляром, проведенным из данной точки к плоскости***.

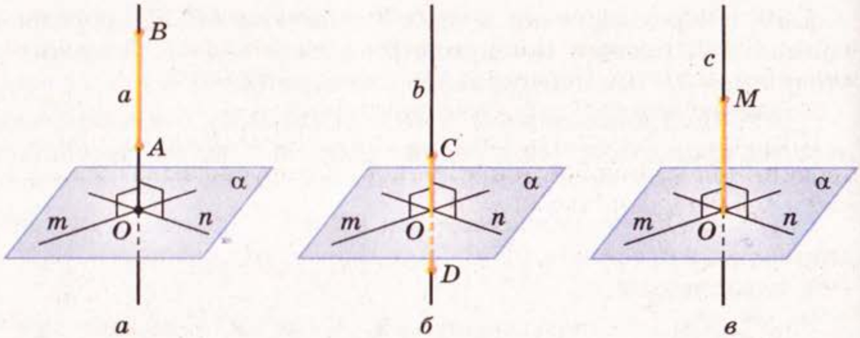


Рис. 5.21

Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, который соединяет данную точку с точкой плоскости и лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости (рис. 5.21, *в*). Конец отрезка, лежащий на плоскости, называется ***основанием перпендикуляра.***

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, который соединяет данную точку с точкой плоскости и не является перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий на плоскости, называется ***основанием наклонной.*** Отрезок, который соединяет основание перпендикуляра и основание наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется ***проекцией наклонной.***

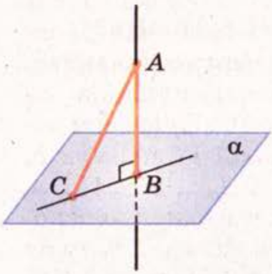


Рис. 5.22

На рисунке 5.22 отрезок AB – перпендикуляр, проведенный из точки A на плоскость α. Отрезок AC – наклонная, проведенная из точки A на ту же плоскость α. Точка B – основание перпендикуляра, а точка C – основание наклонной, отрезок BC – проекция наклонной AC на плоскость α. Угол ACB, образованный наклонной AC и ее проекцией BC, называют *углом наклона наклонной AC к плоскости α.*

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и проекцией этой наклонной на плоскость.

Свойства перпендикуляра и наклонных

Если из одной точки вне плоскости провести к ней перпендикуляр и наклонные, то:

1) из точки, не принадлежащей плоскости, можно провести один и только один перпендикуляр и множество наклонных;

2) длина перпендикуляра меньше длины любой наклонной;

3) наклонные, имеющие равные проекции, равны между собой, и наоборот, равные наклонные имеют равные проекции;

4) из двух наклонных большую длину имеет та, которая имеет большую проекцию, и наоборот, большая наклонная имеет большую проекцию.

Докажите эти свойства самостоятельно.

Широко используется свойство прямой, перпендикулярной проекции наклонной или наклонной, которое называют *теоремой о трех перпендикулярах*.

Теорема 6 (*о трех перпендикулярах*)

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и наклонной. И наоборот, если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Дано: $B \in \alpha$, $AB \perp \alpha$, $a \in \alpha$, $C \in \alpha$, $AC \perp a$.

Доказать: прямая $a \perp CB$.

Доказательство. Докажем вторую часть теоремы. Пусть AB – перпендикуляр к плоскости α, AC – наклонная. Прямая a принадлежит плоскости α, проходит через основание C наклонной и перпендикулярна ей (рис. 5.23). Т.е. $a \perp AC$. Проведем через основание наклонной C прямую b, параллельную AB. $b \perp \alpha$, т.е. $b \perp a$. Прямые b и AB лежат в одной плоскости β. Поскольку $a \perp AC$ и $a \perp b$, то по признаку $a \perp \beta$. $CB \subset \beta$. Итак, $a \perp CB$. Ч.т.д. Первую часть теоремы докажите самостоятельно.

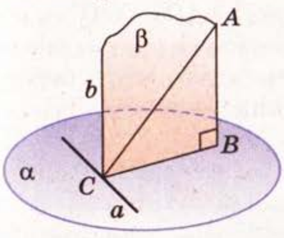


Рис. 5.23

Задача

Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см.

Дано: α, AB – перпендикуляр к плоскости α (рис. 5.24); AC и AD – наклонные; $AC < AD$ на 26 см; $\text{Пр}_\alpha AC = BC = 12$ см; $\text{Пр}_\alpha AD = BD = 40$ см.

Найти: AC и AD.

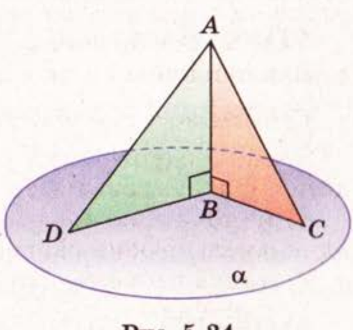


Рис. 5.24

Решение	Почему именно так?
Пусть $AC = x$ см, тогда $AD = (x + 26)$ см. В $\triangle ABC$ ($\angle B = 90°$): $AC = x$ см – гипотенуза; $CB = 12$ см – катет. По теореме Пифагора: $AC^2 = BC^2 + AB^2$, отсюда $AB^2 = AC^2 - BC^2$, $AB^2 = x^2 - 144$. (1) В $\triangle ABD$ ($\angle B = 90°$): $AD = (x + 26)$ см – гипотенуза; $BD = 40$ см – катет. По теореме Пифагора: $AD^2 = BD^2 + AB^2$, отсюда $AB^2 = AD^2 - BD^2$, $AB^2 = (x + 26)^2 - 1600 =$ $= x^2 + 52x + 676 - 1600$, $AB^2 = x^2 + 52x - 924$. (2) Из (1) и (2) имеем: $x^2 + 52x - 924 = x^2 - 144$, $52x = 780$, $x = 15$. $AC = 15$ см, $AD = 15 + 26 = 41$ (см). *Ответ.* 15 см и 41 см.	AB – перпендикуляр к α, поэтому $AB \perp BC$ и $AB \perp BD$. Перпендикуляр, наклонная и ее проекция образуют прямоугольный треугольник. Две различные наклонные, один перпендикуляр и две проекции образуют два прямоугольных треугольника с общим катетом. Составить соотношение между сторонами прямоугольного треугольника можно по теореме Пифагора. Алгебраический метод решения упрощает процесс поиска решения. Находим общий катет для $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$: $AB^2 = AC^2 - BC^2$ и $AB^2 = AD^2 - BD^2$. Отсюда имеем равенство: $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$ и соответствующее уравнение с одной переменной, что приводит к решению задачи.

Упражнения

5.35°. Точка M не принадлежит плоскости α, а точки Q, A, B – принадлежат ей, $MQ \perp \alpha$. Подберите к каждому названию отрезка все возможные его обозначения.

А) Перпендикуляр;
Б) наклонная;
В) проекция наклонной.

1) MA;
2) AQ;
3) MQ;
4) BQ;
5) MB.

А		
Б		
В		

5.36°. Из точки A к плоскости α проведены наклонные AB и AC и перпендикуляр AO (рис. 5.25). Сравните проекции наклонных, если $AB = 2{,}5$ см, $AC = 3$ см.

А) $OB = OC$; Б) $OB < OC$; В) $OB > OC$.

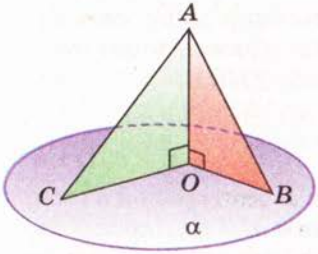


Рис. 5.25

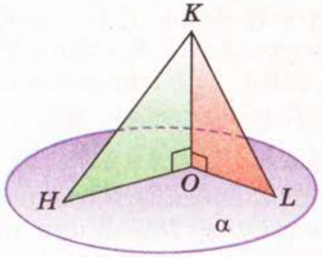


Рис. 5.26

5.37°. К плоскости α проведены перпендикуляр KO и наклонные KH и KL. Выберите три правильных утверждения (рис. 5.26).

А) Если $OH < OL$, то $KO > OL$;

Б) если $OL > OH$, то $KL > KH$;

В) если $KO > OH$, то $KH > OL$;

Г) если $KH < KL$, то $LO > OH$;

Д) если $KO \perp \alpha$, то $KO < KH$ и $KO < KL$.

5.38°. Через точку O – пересечение диагоналей ромба $ABCD$ – проведен перпендикуляр KO к его плоскости (рис. 5.27). Выберите треугольники, которые являются прямоугольными.

1) $\triangle BOK$; 2) $\triangle BDK$; 3) $\triangle AKD$; 4) $\triangle KCB$; 5) $\triangle KOC$.

А) 1 и 3; Б) 2 и 4; В) 1 и 4; Г) 2 и 5; Д) 1 и 5.

5.39°. Отрезок MB – перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$ (рис. 5.28). Выберите правильные утверждения.

1) $MB < MC$; 3) $MA < MC$; 5) $MA = MC$.

2) $MC > MD$; 4) $MA < MD$;

А) 1, 3 и 5; Б) 2, 3 и 4; В) 1, 2 и 4; Г) 2, 3 и 5; Д) 1, 4 и 5.

5.40°°. Отрезок MB – перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$. Укажите, используя рисунок 5.28, прямые углы.

1) $\angle MAB$; 2) $\angle MAD$; 3) $\angle MDA$; 4) $\angle MDC$; 5) $\angle MCD$.

А) 1 и 2; Б) 1 и 3; В) 2 и 4; Г) 2 и 5; Д) 3 и 5.

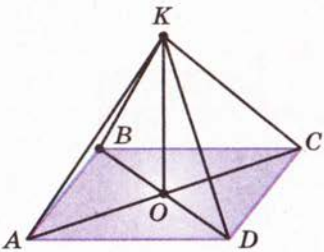


Рис. 5.27

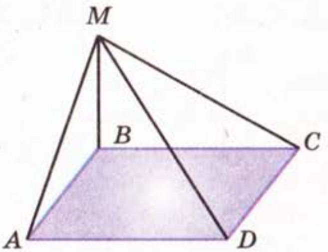


Рис. 5.28

5.41°°. Отрезок HA – перпендикуляр к плоскости прямоугольного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Укажите прямые углы (рис. 5.29).

1) $\angle HBA$; 3) $\angle CHA$; 5) $\angle HCB$;
2) $\angle HAC$; 4) $\angle BAH$; 6) $\angle HBC$.

А) 1 и 3; Б) 2 и 4; В) 1 и 4; Г) 2 и 5; Д) 1 и 5.

5.42°°. К плоскости квадрата $ABCD$ со стороной a см проведен перпендикуляр DM. Длина проекции MB на плоскость квадрата равна l см. Идентифицируйте каждому значенню a соответствующее значение l.

А) $a = 2\sqrt{2}$ см; 1) $l = 4\sqrt{2}$ см;
Б) $a = 4$ см; 2) $l = 6\sqrt{2}$ см;
В) $a = 4\sqrt{2}$ см; 3) $l = 4$ см;
Г) $a = 3\sqrt{2}$ см; 4) $l = 8$ см;
Д) $a = 6$ см. 5) $l = 6$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

5.43°°. К плоскости квадрата $ABCD$, площадь которого равна S см^2, проведен перпендикуляр DM длиной 10 см. Длина наклонной MA равна m см. Идентифицируйте каждой заданной площади квадрата S соответствующее значение m.

А) $S = 21$ см^2; 1) $m = 12$ см;
Б) $S = 96$ см^2; 2) $m = 16$ см;
В) $S = 44$ см^2; 3) $m = 14$ см;
Г) $S = 69$ см^2; 4) $m = 13$ см;
Д) $S = 156$ см^2. 5) $m = 11$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

5.44°°. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.30). Укажите проекцию наклонной DC_1 на каждую из плоскостей, заданных условиями (А–Д).

А) (ABC); 1) DD_1;
Б) $(A_1B_1C_1)$; 2) CD;
В) (BB_1C_1); 3) O_1D;
Г) (A_1D_1D); 4) C_1C;
Д) (BB_1D_1). 5) C_1D_1.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

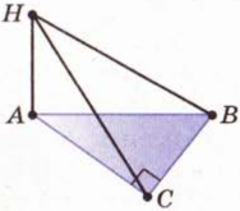


Рис. 5.29

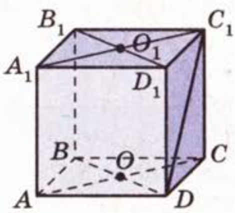


Рис. 5.30

5.45•. Постройте проекцию диагонали B_1D куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на плоскость:

1) (ABC); 2) (BB_1C_1); 3) (DCC_1).

5.46•. Отрезок AM перпендикулярен плоскости треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Докажите, что $\triangle MCB$ – прямоугольный.

5.47•. Из точки M, лежащей вне плоскости треугольника ABC, проведен к этой плоскости перпендикуляр MA длиной 12 см. Найдите длины наклонных MB и MC, если катеты AC и BC равны 4 см и 3 см соответственно.

5.48•. Из точки A, лежащей вне плоскости α, проведены к плоскости перпендикуляр AB длиной 12 см и наклонная AC, которая на 8 см длиннее своей проекции. Найдите длину наклонной.

5.49•. Из точки A к плоскости α проведены две наклонные AB и AC и перпендикуляр AQ. Найдите длины проекций наклонных AB и AC, если $AB = 13$ см, $AC = 15$ см, $AQ = 12$ см.

5.50•. Из точки S, лежащей вне плоскости α, проведены к плоскости перпендикуляр SO длиной 15 см и наклонная SA. Найдите длину проекции этой наклонной на плоскость α, если наклонная длиннее своей проекции на 3 см.

5.51•. Из точки A к плоскости α проведены две наклонные AB и AC длиной 26 см и 30 см соответственно. Проекция наклонной AB равна 10 см. Найдите длину проекции наклонной AC на плоскость α.

5.52•. Из точки M к плоскости α проведены две наклонные MB и MC длиной 13 см и 15 см соответственно и перпендикуляр MA. Найдите длину перпендикуляра, если одна из проекций наклонных на плоскость α на 4 см длиннее другой.

5.53•. Точки K и D принадлежат плоскости α, а M и N – плоскости β ($\alpha \parallel \beta$). Отрезок KM перпендикулярен плоскости α. $KM = 5$ см, $DN = 7$ см. Найдите проекции отрезка DN на плоскости α и β.

5.54•. Точки A и B принадлежат плоскости α, а точки C и D – плоскости β. Отрезок AC перпендикулярен плоскостям α и β, $AC = 10$ см. Проекция отрезка BD на одну из плоскостей α или β равна 24 см. Найдите длину отрезка BD.

5.55••. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна плоскости α, вершины A и C принадлежат плоскости α. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AB = 6$ см.

5.56••. Из некоторой точки к плоскости проведены две наклонные, длины которых относятся как 5 : 6. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если соответствующие проекции наклонных равны 4 см и $3\sqrt{3}$ см.

5.57••. Из некоторой точки пространства проведены к данной плоскости перпендикуляр длиной 12 см и наклонная 15 см. Вычислите длину проекции перпендикуляра на наклонную.

5.58••. Из точки M, взятой вне плоскости β, проведены две наклонные, равные 37 см и 13 см. Длины проекций этих наклонных относятся как 7 : 1. Найдите длину перпендикуляра, проведенного из точки M к плоскости β.

5.59*. Через вершину прямого угла C прямоугольного треугольника ABC к его плоскости проведен перпендикуляр CD длиной 1 дм. Найдите площадь треугольника ADB, если $AC = 3$ дм, $BC = 2$ дм.

5.60••. Стороны треугольника 15 см, 37 см и 44 см. Из вершины наибольшего угла треугольника построен к его плоскости перпендикуляр h длиной 9 см. Найдите длину перпендикуляра h_1, проведенного из конца перпендикуляра h, который не принадлежит плоскости треугольника, к большей стороне треугольника.

5.61••. Стороны треугольника равны 11 см, 13 см и 20 см. Через вершину наименьшего угла проведен перпендикуляр к плоскости треугольника, а из его конца, не принадлежащего треугольнику, опущен перпендикуляр длиной 24 см на противолежащую этому углу сторону. Найдите длину перпендикуляра, проведенного к плоскости треугольника.

5.62••. Из вершины прямого угла C равнобедренного треугольника ABC проведен перпендикуляр CF к плоскости треугольника. Постройте перпендикуляр из точки F до гипотенузы и найдите его длину, если $CF = 24$ см, $AB = 36$ см.

5.63••. Из центра круга O радиуса 4 см проведен к плоскости круга перпендикуляр OA. Через точку B окружности проведена касательная BD и на ней отложен отрезок BC длиной $4\sqrt{3}$ см. Наклонная AC равна 10 см. Найдите длину перпендикуляра OA.

§ 5.4. Перпендикулярность плоскостей

Две пересекающиеся плоскости называются ***перпендикулярными***, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым (рис. 5.31).

Если $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$, $\alpha \cap \beta = c$, $c \perp \gamma$ и $a \perp b$, то $\alpha \perp \beta$.

Моделями перпендикулярных плоскостей в окружающем мире являются различные конфигурации предметов. Например, шкатулка с крышкой, двери, окна, которые открываются, и т.д. Принцип «открывания» частей моделей основывается на перпендикулярности прямых, проведенных перпендикулярно прямой пересечения (линии крепления) (рис. 5.32).

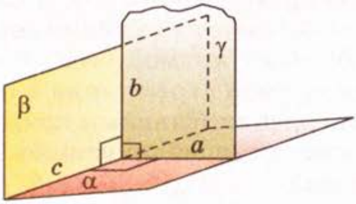


Рис. 5.31

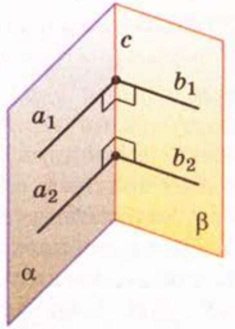


Рис. 5.32

Перпендикулярные плоскости обладают такими свойствами:

1) Любая плоскость, перпендикулярная линии пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым. И наоборот, плоскость, перпендикулярная двум пересекающимся плоскостям, перпендикулярна линии их пересечения.

2) Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной из них и перпендикулярная их линии пересечения, перпендикулярна другой плоскости.

3) Если две плоскости взаимно перпендикулярны и из произвольной точки одной из них опущен перпендикуляр на вторую, то этот перпендикуляр лежит в первой плоскости.

Рассмотрим их несколько позднее. Докажем сначала ***признак перпендикулярности двух плоскостей***.

Теорема 7 (***признак перпендикулярности плоскостей***)

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Дано: α, $a \perp \alpha$; $a \cap \alpha = O$; плоскость β проходит через a.

Доказать: $\beta \perp \alpha$.

Доказательство. Построим произвольную плоскость β через прямую a и некоторую точку K вне ее (рис. 5.33). O – общая точка плоскостей α и β, поэтому они пересекаются по некоторой прямой b, проходящей через точку O. Проведем на плоскости α некоторую прямую $c \perp b$ (на плоскости такая прямая единствен-

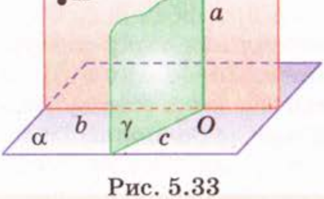


Рис. 5.33

ная). Поскольку $a \perp \alpha$ и $a \cap \alpha = O$, то $a \perp c$ ($O \in c$, $O \in b$, $O \in a$). Итак, прямая c перпендикулярна двум пересекающимся прямым a и b ($c \perp a$ и $c \perp b$). Построим через прямые a и c плоскость γ. Она перпендикулярна прямой b (поскольку две ее прямые перпендикулярны b). Поэтому ее линии пересечения с плоскостями α и β образуют прямой угол. Т.е. плоскость γ, перпендикулярная прямой пересечения b плоскостей α и β, пересекает их по перпендикулярным прямым a и c, что по определению доказывает перпендикулярность плоскостей α и β. *Теорема доказана.*

Теперь вернемся к свойствам перпендикулярных прямых и плоскостей и докажем некоторые из них.

Теорема 8

Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной из них и перпендикулярная линии их пересечения, перпендикулярна второй плоскости.

Дано: $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = c$, $a_1 \subset \alpha$ и $a_1 \perp c$, $c \cap a_1 = A$.

Доказать: $a_1 \perp \beta$.

Доказательство. Пусть плоскости α и β взаимно перпендикулярны (рис. 5.34), т.е. некоторая плоскость γ, перпендикулярная прямой c, пересекает их по перпендикулярным прямым a и b.

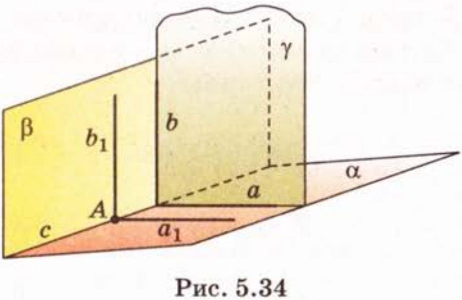


Рис. 5.34

Проведем через точку A прямую b_1, $b_1 \subset \beta$, $b_1 \perp c$. Тогда $a_1 \perp c$ и $b_1 \perp c$, отсюда плоскость, проходящая через прямые a_1 и b_1, будет перпендикулярна прямой c. Поскольку $\alpha \perp \beta$, то перпендикулярными будут и прямые $a_1 \perp b_1$. Кроме того, $a_1 \perp c$ (по условию), поэтому $a_1 \perp \beta$. *Теорема доказана.*

Теорема 9

Если две плоскости взаимно перпендикулярны и из некоторой точки одной из них опущен перпендикуляр на вторую, то этот перпендикуляр лежит в первой плоскости.

Дано: $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = c$, $A \in \beta$, $B \in \alpha$, $AB \perp \alpha$.

Доказать: $AB \in \beta$.

Доказательство. Пусть плоскости α и β взаимно перпендикулярны (рис. 5.35). Тогда некоторая плоскость γ, перпендикулярная прямой c, пересекает их по перпендикулярным прямым a и b.

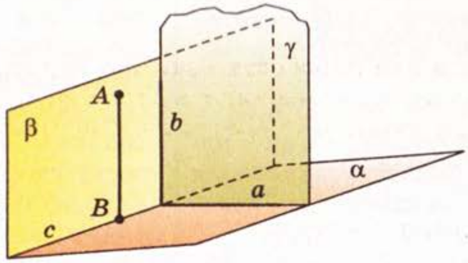


Рис. 5.35

Итак, дано $a \perp b$ и $b \perp c$. Т.е. $b \perp \alpha$. В плоскости β через точку A проведен отрезок $AB \perp \alpha$. По следствию, две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, будут параллельными. $AB \parallel b$. Таким образом, они лежат в одной плоскости – β. Если одна из двух параллельных прямых пересекает в плоскости прямую c, то и другая пересекает ее. Отсюда вытекает, что точка B должна принадлежать прямой c. Тогда она будет общей для двух плоскостей. Но если две точки A и B принадлежат β, то вся прямая принадлежит плоскости β. *Теорема доказана.*

Остальные свойства докажите самостоятельно.

Задача

Из точек P и Q, лежащих на двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 5.36), проведены перпендикуляры PH и QC на прямую пересечения плоскостей α и β. Найдите длину отрезка PQ, если PH = 6 см, $QC = 7$ см, $HC = 6$ см.

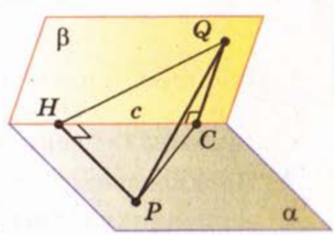


Рис. 5.36

Дано: $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = c$; $PH \perp c$, $H \in c$; $QC \perp c$, $C \in c$; $PH = 6$ см, $QC = 7$ см, $HC = 6$ см.

Найти: PQ.

Решение

Поскольку $\alpha \perp \beta$, $PH \subset \alpha$, $PH \perp c$, то $PH \perp \beta$, отсюда $PH \perp HQ$.

$\triangle PHQ$ ($\angle H = 90°$) – прямоугольный: $PH = 6$ см – катет, HQ – катет, PQ – гипотенуза (искомый отрезок). Рассмотрим на плоскости β $\triangle HQC$: $QC \perp c$, тогда $QC \perp CH$, поэтому $\angle QCH = 90°$ и $\triangle QCH$ – прямоугольный.

Из $\triangle QCH$ ($\angle C = 90°$): $QC = 7$ см – катет; $HC = 6$ см – катет; HQ – гипотенуза, которая является неизвестным катетом для $\triangle PHQ$. Из $\triangle QCH$:
$HQ^2 = QC^2 + HC^2 = 49 + 36 = 85$.
Из $\triangle PHQ$:
$PQ^2 = PH^2 + HQ^2 = 36 + 85 = 121$.

Отсюда, учитывая что $PQ > 0$, имеем $PQ = 11$ см.

Ответ. 11 см.

Почему именно так?

Для каждой геометрической задачи важно построить цепочку логических рассуждений. В этой задаче важно видеть не только прямоугольные треугольники на плоскостях α и β, но и использовать признак и свойства перпендикулярных плоскостей. Таким образом можно выйти на новый прямоугольный треугольник PHQ или QCP, третью сторону которого находят по известному и найденному катетам. В том или ином случае PQ остается наклонной, меняются только перпендикуляры к соответствующим плоскостям α и β и проекции наклонной на плоскость α или на плоскость β.

Упражнения

5.64°. Плоскости β и γ пересекаются по прямой c (рис. 5.37). Плоскость α перпендикулярна прямой c и пересекает плоскость β по прямой m, а плоскость γ – по прямой n, причем $m \perp n$. Укажите взаимное расположение плоскостей β и γ.

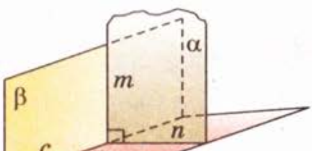


Рис. 5.37

А) Параллельны;

Б) перпендикулярны;

В) пересекаются, но не перпендикулярны.

5.65°. Даны две плоскости α и β, пересекающиеся по прямой l. На плоскости α лежат точки A и C, а на плоскости β – точки B и C, причем $AC \perp BC$, $l \perp AC$, $l \perp BC$. Укажите возможное взаимное расположение плоскостей α и β.

А) $\alpha \cap \beta$; Б) $\alpha \parallel \beta$; В) $\alpha = \beta$; Г) $\alpha \perp \beta$.

5.66°. Даны параллелограмм $ABCD$ и $\triangle ACK$. KH – отрезок плоскости AKC, точка $H \in AC$ (рис. 5.38). Выберите условие, при котором можно утверждать, что плоскости (AKC) и (ABC) перпендикулярны.

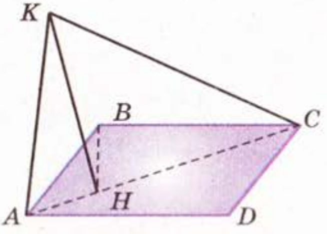


Рис. 5.38

А) KH – медиана $\triangle AKC$ и $BH \perp AC$;

Б) KH – высота $\triangle AKC$ и $BH \perp AC$;

В) KH – биссектриса $\triangle AKC$ и $BH \perp AC$;

Г) KH – произвольный отрезок плоскости (AKC) и $KH \perp AC$;

Д) KH – произвольный отрезок плоскости (AKC) и $KH \perp (ABC)$.

5.67°. Укажите две пары перпендикулярных плоскостей куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.39).

А) (ADD_1) и (BB_1C_1); Г) (BCD) и $(A_1B_1D_1)$;

Б) (CC_1D_1) и (BB_1C); Д) (A_1AB) и (C_1CB).

В) (B_1BA) и (DD_1C_1);

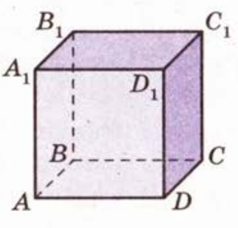


Рис. 5.39

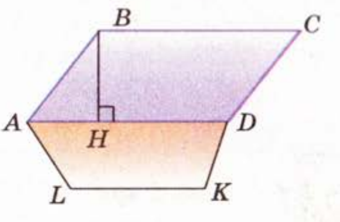


Рис. 5.40

5.68°. Плоскости, в которых лежат параллелограмм $ABCD$ и трапеция $ADKL$, перпендикулярны. BH – высота параллелограмма. Укажите взаимное расположение (1–4) каждой пары прямых (А–Д) (рис. 5.40).

А) BH и LH;
Б) AD и KD;
В) BH и KL;
Г) BC и LK;
Д) BH и HK.

1) Скрещиваются;
2) пересекаются, но не перпендикулярны;
3) параллельны;
4) перпендикулярны.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

5.69°°. Плоскости равносторонних треугольников ABC и ADC перпендикулярны (рис. 5.41). BM – медиана $\triangle ABC$, $BM = 5$ см. Вычислите длину отрезка BD.

А) 10 см; Б) 5 см; В) $5\sqrt{2}$ см; Г) $2{,}5\sqrt{3}$ см; Д) $\sqrt{5}$ см.

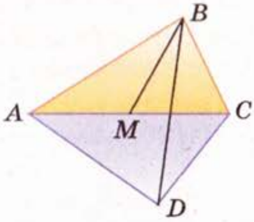


Рис. 5.41

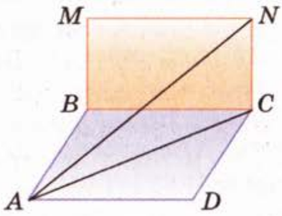


Рис. 5.42

5.70°°. Плоскости квадратов $ABCD$ и $MNCB$ перпендикулярны, $BC = 5$ см (рис. 5.42). Вычислите длину отрезка AN.

А) $5\sqrt{2}$ см; Б) $5\sqrt{3}$ см; В) $5\sqrt{5}$ см; Г) $2\sqrt{5}$ см; Д) $3\sqrt{5}$ см.

5.71°°. Плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) и квадрата $ACPR$ перпендикулярны (рис. 5.43). Сторона квадрата 6 см, гипотенуза $AB = 10$ см. Найдите длину отрезка BP.

А) 6 см; Б) 10 см; В) 8 см; Г) 14 см; Д) 12 см.

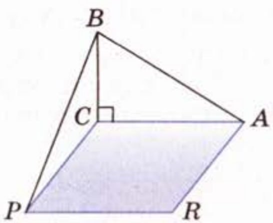


Рис. 5.43

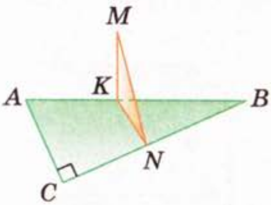


Рис. 5.44

5.72°°. Отрезок MK перпендикулярен плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$). $KN \parallel AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ см, $MK = 8$ см. Найдите длину отрезка MN (рис. 5.44).

А) 20 см; Б) 16 см; В) 14 см; Г) 10 см; Д) 8 см.

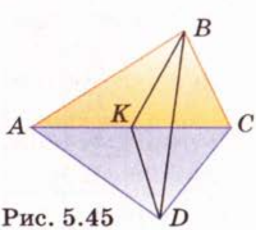


Рис. 5.45

5.73°°. Плоскости равнобедренных треугольников ABC и ADC перпендикулярны (рис. 5.45), AC – их общее основание. BK – медиана $\triangle ABC$, $BK = 8$ см, $DK = 15$ см. Найдите длину отрезка BD.

А) 8 см; В) 17 см; Д) 11,5 см.
Б) 15 см; Г) 23 см;

5.74•. Даны три различные плоскости α, β и φ. Известно, что α перпендикулярна β, а β перпендикулярна φ. Каково взаимное расположение плоскостей α и φ? (Ответ обоснуйте.)

5.75•. Плоскости квадрата $ABCD$ и прямоугольного равнобедренного треугольника ADK ($\angle A = 90°$) перпендикулярны. Сторона квадрата равна 2 см. Найдите длину отрезка KC.

5.76•. Точка S не принадлежит плоскости прямоугольника $ABCD$. $SB \perp BC$ и $SB \perp AB$. Докажите, что плоскость (SAB) перпендикулярна плоскости $(ABCD)$.

5.77•. Из вершин A и C треугольника ABC проведены два отрезка: $NA \perp AB$, $MC \perp AC$, причем $NA \parallel MC$. Докажите, что плоскость $(ANMC)$ перпендикулярна плоскости (ABC).

5.78•. Отрезок MC – перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, $MD \perp AB$. Докажите, что плоскости (MCD) и (ABC) перпендикулярны.

5.79•. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой a. В плоскости α проведена прямая, перпендикулярная прямой a. Докажите, что эта прямая перпендикулярна и плоскости β.

5.80••. Докажите, что когда две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то прямая их пересечения перпендикулярна этой плоскости.

5.81••. Три плоскости попарно перпендикулярны. Докажите, что прямые их пересечения также попарно перпендикулярны.

5.82••. Отрезок длиной 25 см опирается концами на две перпендикулярные плоскости. Расстояния от концов отрезка до плоскостей равны 7 см и 15 см. Вычислите проекции отрезка на каждую из плоскостей.

5.83••. Отрезок длиной 25 см опирается концами на две перпендикулярные плоскости. Проекции отрезка на эти плоскости равны 24 см и 20 см. Вычислите длину перпендикуляров к данным плоскостям.

5.1. Как при помощи измерений проверить, является ли перпендикулярной полу линия, по которой соединяются две смежные стены комнаты?

5.2. Как при помощи рулетки проверить вертикальность столба?

5.3. Как проверить, перпендикулярна ли плоскость колеса оси, на которую оно насажено?

5.4. Почему сосульки, свисающие с крыши весной, можно считать параллельными между собой, пренебрегая их толщиной?

5.5. Во время выполнения задания по определению вертикальности столбиков для забора ученик проверил вертикальность первого из них, а далее, измеряя высоту каждого столбика и расстояния между ними внизу и вверху, принял решение относительно вертикальности. Правильно ли ученик выполнял задание?

5.6. Почему поверхность двери, независимо от того закрыта она или открыта, расположена вертикально к полу?

5.7. Наглядной моделью перпендикулярных прямой и плоскости являются колесо со спицами и ось (рис. 5.46). Ось перпендикулярна каждой спице. Во время движения колеса спицы описывают плоскость круга, на которой содержится множество отрезков, пересекающихся в одной точке. Если ось расположена горизонтально, то в какой плоскости будет вращаться колесо? Почему?

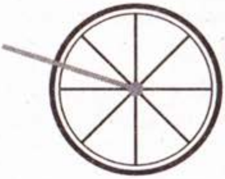


Рис. 5.46

Указание. В плоскости, перпендикулярной оси колеса.

5.8. Десятиклассники выполняют на уроке физической культуры прыжки в высоту. Подставкой для планки являются кубы с ребром 25 см и прямоугольные параллелепипеды, основание которых 25×25 см, а высота – 50 см. Как организовать прыжки в высоту на:

1) 125 см; 2) 150 см; 3) 175 см?

5.9. На рисунке 5.47 изображены два вертикальных колышка и их тени.

По этим данным нужно найти положение источника света (лампочки, фонаря) и его основы (проекции источника света на горизонтальную плоскость). Решите задачу и ответьте на вопросы.

1. Существенно ли, что колышки вертикальные?
2. Существенно ли, что плоскость, на которую падают тени, горизонтальная?
3. Все ли данные, приведенные на рисунке, являются необходимыми?

Решение. Построения, необходимые для решения основной задачи, представлены на рисунке 5.48.

Для нахождения положения источника света направление колышек не имеет значения; для нахождения положения основы источника света нужно быть уверенным, что колышки вертикальны. Если колышки вертикальны, а тени падают на горизонтальную плоскость, то для решения задачи достаточно задать на рисунке один колышек с тенью и лишь направление тени от второго колышка.

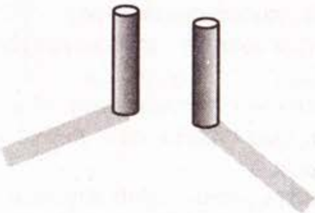


Рис. 5.47

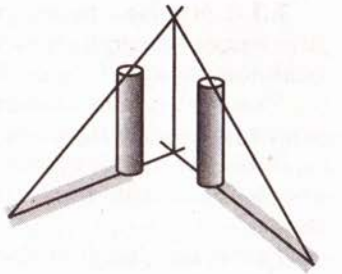


Рис. 5.48

5.10. Круглый стол накрыт квадратной скатертью из тонкой ткани (центр квадрата совпадает с центром круга). На сколько углы скатерти ближе к полу, чем середины сторон? Принять сторону квадрата (скатерти) за a.

Ответ. $\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2} \approx 0{,}207a.$

5.11. Перпендикулярность стены проверяют при помощи отвеса (шнур с грузиком). Если он плотно прилегает к поверхности стены, считается, что вертикальность выдержана. Правильно ли это? На чем основывается такой способ проверки?

Указание. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

5.12. Как наметить линии, по которым нужно отпилить часть балки, чтобы плоскость распиливания была перпендикулярной любому ребру этой балки?

Ответ. Чтобы распил был перпендикулярным бруску, через точку A ребра следует провести перпендикулярно к нему прямые AB и AC, а потом распилить по ним брусок.

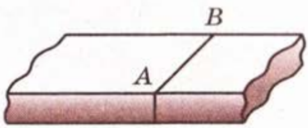


Рис. 5.49

5.13. Каким образом следует использовать теорему Пифагора для того, чтобы проверить, перпендикулярны ли друг другу соседние стены помещения?

Решение. Предположим, что стены помещения вертикальные, а пол горизонтальный. По нижнему краю стен от точки, лежащей на линии их пересечения, отложим отрезки AB и AC длиной 3 и 4 произвольные единицы (например, дециметров). Отрезки будут перпендикулярны к линии пересечения плоскостей стен. Тогда угол, образованный построенными отрезками, – это линейный угол двугранного угла между стенами, и он будет прямым тогда и только тогда, когда длина отрезка BC будет равняться 5 единицам.

5.14. Чтобы проверить вертикальность столба, наблюдение ведут из двух пунктов, не лежащих на одной прямой с основой столба. Обоснуйте такой способ проверки.

Указание. Воспользуйтесь признаком перпендикулярности прямой и плоскости.

5.15. На недоступном возвышении установлен высокий столб. Как при помощи отвеса проверить его вертикальность?

Решение. Достаточно установить, что столб находится в одной плоскости с некоторой вертикальной линией, а также в одной плоскости (другой) с некоторой другой вертикальной линией. Если разместить отвес перед собой таким образом, чтобы верхние концы отвеса и столба оказались на одной линии с глазом, то линии отвеса и столба должны совпасть. Обоснование этого способа проверки состоит в том, что, во-первых, вертикальный столб должен находиться в одной плоскости с произвольной вертикальной прямой, а во-вторых, если две параллельные прямые лежат в двух пересекающихся плоскостях, то эти прямые параллельны линии пересечения плоскостей.

5.16. Горизонтальний луч, параллельный плоскости одного из двух вертикальных плоских зеркал, отражается от второго зеркала по прямой, перпендикулярной плоскости первого зеркала. Найдите угол между зеркалами.

Указание. Воспользуйтесь законами отражения света.

Ответ. 45°.

5.17. Горизонтальный луч отражается от двух вертикальных плоских зеркал. Причем сначала луч параллелен плоскости одного зеркала, а после двух отражений – плоскости второго зеркала. Найдите угол между зеркалами.

Ответ. 60°.

5.18. Квадратная стальная платформа толщиной 5 м и площадью 4 м^2 подвешена горизонтально на четырех тросах. Длина каждого троса 2 м. Вычислите углы наклона тросов к платформе. Поместится ли на эту платформу цилиндрический бак, высота которого 0,9 м, а диаметр основания 0,6 м?

Ответ. 45°; бак поместится на платформе.

Гиясаддин Абу-ль-Фатх Омар ибн Ибрахим аль-Хайям Нишапури (1048–1131)

Омар Хайям – выдающийся персидский ученый и поэт. Его научные работы посвящены математике, астрономии, философии. Хайям предложил детальную классификацию и теорию графического решения кубических уравнений. Особое внимание ученый уделял теории параллельных прямых и впервые заменил пятый постулат Евклида более простым утверждением. Можно считать, что именно он впервые вывел некоторые теоремы неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана. Мировую славу принесли Омару Хайяму его замечательные рубаи, которые по праву принадлежат к шедеврам мировой лирики. Математические произведения Омара Хайяма, дошедшие до наших дней, характеризуют его как выдающегося ученого своего времени.

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856)

Из всех языков мира лучшим является язык математики.

Н.И. Лобачевский

Н.И. Лобачевский родился в Нижнем Новгороде в семье землемера. «Бедность окружила его колыбель», – вспоминал один из преподавателей ученого. После смерти отца плачевное положение семьи усугубилось. Спасаясь от крайней нужды, мать с тремя малолетними детьми переехала в Казань. Там Лобачевский и прожил почти всю жизнь. Благодаря своим феноменальным способностям в 14 лет он был зачислен в университет, в 18 лет стал магистром, в 21 – адъюнктом (доцентом), а в 23 – профессором. Тогда и началась 30-летняя профессорская деятельность в родном университете, ректором которого Николай Иванович избирался шесть раз подряд.

В историю математики Лобачевский вошел как первый ученый, выступивший с новой теорией геометрии (за это открытие он по праву удостоен титула «Коперник геометрии»). Русский математик выдвинул смелое предположение о существовании геометрии, основанной на отрицании аксиомы параллельности

Евклида. Всю жизнь ученый посвятил созданию «воображаемой геометрии», которая сегодня называется геометрией Лобачевского. По этой теории к данной прямой можно провести бесконечное множество прямых, ей параллельных. То была истинная революция в науке: «остановить Солнце, легче было сдвинуть Землю... свести параллели к схождению» (В.Ф. Каган).

При жизни ученого его гениальные идеи не были признаны. Геометрия Лобачевского получила распространение только через 15 лет после его смерти, когда наконец стало понятно, что «Лобачевский был не только Коперником геометрии, но и Коперником всего нашего мышления» (Э.Т. Белл).

Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1866)

Моя главная работа – новое объяснение известных законов природы.

Г. Риман

Риман был человеком блестящей интуиции. Своей всеобъемлющей гениальностью он превзошел современников. Там, где пробуждалось его любопытство, он всегда приступал к исследованию по-новому, не сдерживаемый традициями, не признавая рамок какой-либо системы.

Родился ученый в деревне Брезеленц близ г. Данненберга (Нижняя Саксония) в семье лютеранского пастора. Он рос болезненным мальчиком, отличался от ровесников несмелостью и скромностью. В школе Риман не был блестящим учеником. По желанию отца он поступил на теологический факультет Геттингенского университета, однако вскоре его способности и интерес к точным наукам возобладали и молодой студент решил полностью посвятить себя математике. В 25 лет он защитил диссертацию и получил степень доктора математики, в 29 был назначен профессором университета в Геттингене. Научная деятельность Римана продолжалась лишь 15 лет, но ее результатом стал значительный вклад почти во все области математики.

Огромное влияние на развитие математических и физических идей оказал труд Римана «О гипотезах, лежащих в основе геометрии», в котором он дал классификацию всех существующих видов геометрии, включая уже открытые неевклидовы геометрии, и показал возможность создания новых геометрических пространств. Успехов в науке Риман достиг благодаря своему универсальному подходу к явлениям природы, необыкновенному ощущению и пониманию связей между, как казалось раньше, разнородными явлениями.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие прямые пространства называются перпендикулярными?
2. Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой, можно провести через точку этой прямой?
3. Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой, можно провести через точку, которая не лежит на этой прямой?
4. Как расположены две прямые пространства, перпендикулярные одной и той же прямой?
5. Какая прямая называется перпендикулярной к плоскости?
6. Как упрощает требования перпендикулярности прямой и плоскости их признак?
7. Можно ли утверждать, что прямая перпендикулярна плоскости круга, если она перпендикулярна одному из его диаметров?
8. Можно ли утверждать, что прямая перпендикулярна плоскости параллелограмма, если она перпендикулярна каждой из его диагоналей и проходит через точку их пересечения?
9. Известно, что прямая a перпендикулярна некоторой прямой b и плоскости α. Каково взаимное расположение прямой b и плоскости α?
10. Плоскость γ пересекает плоскость α, но не пересекает плоскость β. Каково взаимное расположение плоскостей α и β?
11. Какие две плоскости называются перпендикулярными?
12. Можно ли провести прямую, перпендикулярную каждой из двух пересекающихся плоскостей?
13. Какой отрезок называют перпендикуляром к плоскости, а какой – наклонной?
14. Как построить проекцию наклонной на плоскость?
15. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
16. Как сравнить длины наклонных, проведенных к плоскости из одной точки, имея длины их проекций?
17. Как сравнить длины проекций наклонных, имея длины наклонных, проведенных к плоскости из одной точки?
18. Может ли перпендикуляр иметь длину больше, чем длина наклонной, если они проведены из одной точки?
19. Может ли проекция наклонной быть длиннее самой наклонной?
20. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соединили точки A_1 и B. Как объяснить, что $A_1B \perp BC$?
21. Будет ли в прямоугольном параллелепипеде отрезок D_1C перпендикулярен BC?
22. Известно, что плоскости α и β – перпендикулярные. Каждая ли прямая плоскости α будет перпендикулярной плоскости β?

23. Известно, что прямая a перпендикулярна плоскости β и принадлежит плоскости α. Можно ли утверждать, что плоскость α перпендикулярна плоскости β?

Тест для самоконтроля

Часть 1

Задания 1–16 содержат варианты ответов, из которых правильным является только *один* или *конкретное количество*. Выберите правильный ответ.

1°. Даны прямая m и точка M, лежащая на ней. Укажите количество прямых, проходящих через точку M перпендикулярно прямой m.

А) Одна; Б) две; В) три; Г) много; Д) ни одной.

2°. Даны плоскость α и точка $O \in \alpha$. Укажите количество прямых, которые проходят через точку O перпендикулярно плоскости α.

А) Одна; Б) две; В) три; Г) много; Д) ни одной.

3°. Даны плоскость ω и точка $Q \notin \omega$. Укажите количество прямых, которые проходят через точку Q перпендикулярно плоскости ω.

А) Одна; Б) две; В) три; Г) много; Д) ни одной.

4°. Прямая AM проходит через вершину A треугольника ABC и $AM \perp AB$, $AM \perp AC$. Укажите взаимное расположение прямой AM и плоскости треугольника ABC.

А) Прямая параллельна плоскости треугольника;

Б) прямая лежит на плоскости треугольника;

В) прямая перпендикулярна плоскости треугольника;

Г) прямая пересекает плоскость треугольника, но не перпендикулярна ей.

5°. Прямая MB перпендикулярна плоскости прямоугольника $ABCD$ (рис. 5.50). Выберите прямые, перпендикулярные прямой MB.

1) AB; 2) AD; 3) BD; 4) DC; 5) BC; 6) AC.

А) 1, 3 и 5; Б) 2, 4 и 6; В) 1, 2 и 5; Г) 3, 4 и 6; Д) 1, 3 и 6.

6°. На рисунке 5.51 изображены прямоугольник $ABCD$, $S \notin (ABC)$, $SB \perp (ABC)$. Выберите треугольники, у которых один из углов прямой по теореме о трех перпендикулярах.

1) $\triangle ASB$; 2) $\triangle ASD$; 3) $\triangle SBD$; 4) $\triangle SCD$; 5) $\triangle SBC$.

А) 1 и 3; Б) 2 и 4; В) 3 и 5; Г) 2 и 6; Д) 1 и 4.

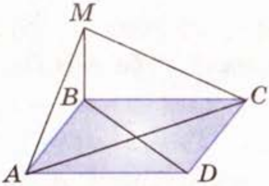


Рис. 5.50

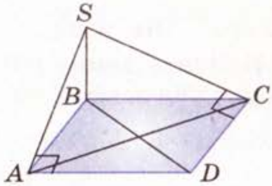


Рис. 5.51

7°. Отрезок KC перпендикулярен плоскости параллелограмма $ABCD$ (рис. 5.52). Укажите взаимное расположение плоскостей (KCD) и $(ABCD)$.

А) Параллельны; В) перпендикулярны;

Б) совпадают; Г) пересекаются, но не перпендикулярны.

8°. Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AO и наклонная AB. $AO = 6$ см, $AB = 9$ см. Найдите длину проекции наклонной AB на плоскость α.

А) 6 см; Б) 9 см; В) 7,5 см; Г) $3\sqrt{5}$ см; Д) $5\sqrt{3}$ см.

9°°. Через вершину B ромба $ABCD$ проведена прямая SB, перпендикулярная плоскости ромба. Выберите три правильных утверждения.

А) $SB \perp AD$; В) $SB \perp CD$; Д) $SB \perp DB$.

Б) $SB \perp BA$; Г) $SB \perp CB$;

10°°. Через вершину B квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр BH (рис. 5.53). Определите взаимное расположение диагонали квадрата AC и наклонной HO (O – точка пересечения диагоналей квадрата).

А) Скрещиваются; В) перпендикулярны;

Б) пересекаются; Г) параллельны.

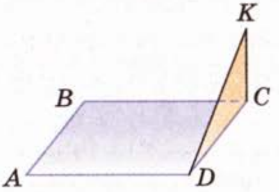


Рис. 5.52

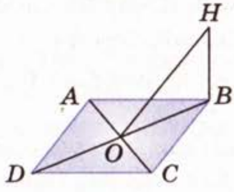


Рис. 5.53

11°°. Из точек A и C, не принадлежащих плоскости α, проведены к плоскости два перпендикуляра AB и CD. $AB = 9$ см, $CD = 17$ см, $AC = 10$ см. Найдите длину отрезка BD.

А) 8 см; Б) 6 см; В) 10 см; Г) 5 см; Д) 12 см.

12°°. Сторона квадрата $ABCD$ равна $\sqrt{2}$ см. Через вершину B к плоскости квадрата проведен перпендикуляр $SB = 1$ см. Вычислите длину отрезка SA.

А) $\sqrt{2}$ см; Б) $\sqrt{3}$ см; В) $\sqrt{5}$ см; Г) 1 см; Д) 2 см.

13°°. Найдите длину BD_1 – диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если ребро куба равно 2 см.

А) $3\sqrt{2}$ см; Б) $2\sqrt{2}$ см; В) $2\sqrt{3}$ см; Г) $4\sqrt{2}$ см; Д) $4\sqrt{3}$ см.

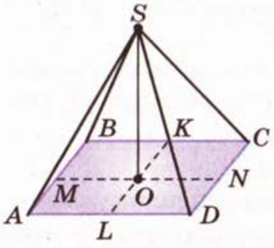


Рис. 5.54

14°°. В прямоугольнике $ABCD$ проведены оси симметрии MN и KL, пересекающиеся в точке O (рис. 5.54). Из точки O проведен перпендикуляр OS. Определите пары перпендикулярных плоскостей.

1) (MSN) и (ABC); 4) (KSL) и (MSN);
2) (MSN) и (ASC); 5) (ASC) и (BSD).
3) (KSL) и (ABC);

А) 1, 2 и 3; В) 3, 4 и 5; Д) 1, 2 и 5.
Б) 2, 3 и 4; Г) 1, 3 и 4;

15°°. Из точки A к плоскости α проведены две наклонные $AB = 15$ см и $AC = 13$ см. Вычислите проекцию наклонной AC, если проекция наклонной AB равна 9 см.

А) 9 см; Б) 12 см; В) 5 см; Г) 10 см; Д) 6 см.

16°°. Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AK и две наклонные $AT = 13$ см и $AQ = 7$ см. Найдите длину проекции наклонной AQ на плоскость α, если проекция наклонной AT на α равна 12 см.

А) $2\sqrt{3}$ см; Б) 4 см; В) $4\sqrt{2}$ см; Г) $3\sqrt{3}$ см; Д) $2\sqrt{6}$ см.

Часть 2

Выполните задания 17–28 с короткой записью хода рассуждений.

17•. К плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) через вершину C проведен перпендикуляр MC длиной 3 см. Найдите длину наклонной MA, если $AB = 6$ см, а $BC = 2\sqrt{5}$ см.

18•. Через точку O пересечения диагоналей прямоугольника $MNKL$ проведен перпендикуляр SO к его плоскости. Найдите длину отрезка SO, если $MS = 13$ см, $ML = 6$ см, $LK = 8$ см.

19•. Сторона квадрата $ABCD$ равна 2 см. Из точки A к плоскости квадрата проведен перпендикуляр $MA = 1$ см. Найдите длину отрезка MC.

20•. Отрезок SB – перпендикуляр, проведенный к плоскости квадрата. Найдите длину отрезка SD, если $AB = 12$ см, $SC = 16$ см.

21•. Из точки K к плоскости α проведены перпендикуляр KO и наклонная KM. Найдите длину наклонной, если она на 2 см длиннее перпендикуляра, а длина проекции этой наклонной равна 10 см.

22•. Из точки M к плоскости α проведены перпендикуляр MB и наклонная MA. Проекция наклонной длиннее перпендикуляра на 7 см. Найдите длину проекции наклонной, если наклонная $MA = 17$ см.

23•. Плоскости равносторонних треугольников MNK и MNF перпендикулярны. Высоты этих треугольников равны $4\sqrt{2}$. Найдите длину отрезка KF.

24•. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. OM – перпендикуляр, проведенный к плоскости квадрата.
$MA = 53$ см, $AB = 28\sqrt{2}$ см. Найдите длину отрезка MO.

25•. Из данной точки к плоскости α проведены две наклонные, разность длин которых составляет 6 см. Их проекции на эту же плоскость α соответственно равны 27 см и 15 см. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость α.

26•. Из точки к плоскости проведены перпендикуляр и две наклонные длиной 4 см и 8 см. Найдите длину перпендикуляра, если их проекции относятся как 1 : 7.

27•. В правильном $\triangle ABC$ со стороной 8 см провели медиану AO. Через точку O построили перпендикуляр OD к плоскости треугольника длиной 4 см. Найдите длину отрезка AD.

28•. Отрезок BK – медиана равнобедренного треугольника с основанием AC длиной 24 см и боковыми сторонами, равными 20 см. Через вершину B проведен перпендикуляр к плоскости треугольника BS, равный $8\sqrt{5}$ см. Найдите длину отрезка SK.

Часть 3

Выполните задания 29–32 с полным обоснованием.

29••. Из точек A и B, лежащих в перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AH и BQ на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если $AH = a$, $BQ = b$, $HQ = c$.

30••. Из точек M и N, лежащих в перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры MK и NT на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка MN, если $MT = a$, $NK = b$, $KT = c$.

31••. Отрезки AC и BD – два перпендикуляра, проведенные к плоскости α. Точки A и B лежат по разные стороны плоскости α. Найдите длину отрезка AB, если $AC = 30$ см, $BD = 18$ см и $CD = 16$ см.

32••. Плоскость трапеции $ABCD$ и плоскость треугольника ABM пересекаются по прямой l. $AB = 8$ см, $BM = 6$ см, $AM = 10$ см. Определите условия, при которых прямая l будет перпендикулярной плоскости (CBM).

МОДУЛЬ 6

Углы и расстояния в пространстве

Каждый человек со здравым смыслом
не поддаст сомнению,
что геометрические утверждения
должны получать чисто практическое
применение в окружающей среде.

Г. Гельмгольц

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ МОДУЛЯ

- *Углы между прямыми в пространстве*
- *Углы между прямой и плоскостью в пространстве*
- *Углы между плоскостями*
- *Расстояния в пространстве*
  - *между точками и прямыми*
  - *между точкой и прямой*
  - *между точкой и плоскостью*
  - *между плоскостью и параллельной ей прямой*
  - *между параллельными плоскостями*
- *Ортогональное проецирование. Площадь ортогональной проекции многоугольника*
- *Практическое применение свойств параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей*

Освоив этот модуль, вы узнаете:

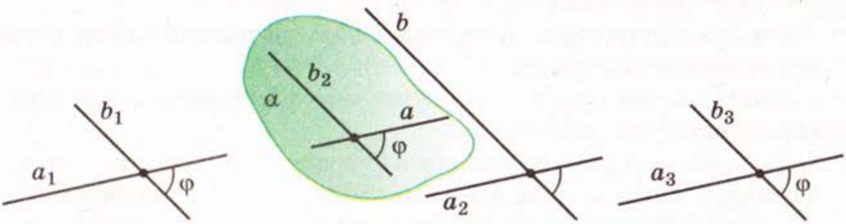
- как определить угол между двумя прямыми пространства, лежащими в одной плоскости;
- как определить угол между двумя скрещивающимися прямыми;
- как определить угол между двумя прямыми пространства, не лежащими в одной плоскости;
- как определить угол между прямой и плоскостью в пространстве;
- как определить угол между двумя плоскостями;
- как найти длину отрезка, определяющего расстояние между точкой и прямой (плоскостью);
- как найти длину отрезка, определяющего расстояние между двумя прямыми (плоскостями);
- как найти длину отрезка, определяющего расстояние между двумя скрещивающимися прямыми;
- как применить ортогональное проецирование при решении задач;
- как найти площадь ортогональной проекции многоугольника;
- как применить отношение между прямыми и плоскостями в пространстве, измерение расстояний и углов в пространстве для описания объектов окружающего мира.

§ 6.1. Углы в пространстве

В планиметрии *угол* – это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, которые выходят из одной точки – вершины угла (лучи – стороны угла). Такое определение понятия угла переносится и в стереометрию. Углы в пространстве рассматриваются между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями. Опишем и определим каждый из этих случаев.

1. Угол между двумя прямыми в пространстве

Две прямые, лежащие в одной плоскости, при пересечении образуют смежные и вертикальные углы. В модуле 1 мы повторили все свойства таких углов (вертикальные углы равны, а смежные – дополняют друг друга до 180°). В пространстве (аналогично планиметрии) также сохраняются все названия и понятия об углах и их величинах. Меньший из углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, называют ***углом между прямыми***. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90°. Считают, что параллельные прямые также образуют угол, равный 0°. В стереометрии рассматривают угол между скрещивающимися прямыми. Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b (рис. 6.1, *б*). Выберем в пространстве произвольную точку и проведем через нее две прямые, параллельные скрещивающимся (рис. 6.1, *а*, *в*), или выберем точку на одной из скрещивающихся (рис. 6.1, *б*) и построим только одну прямую, параллельную второй. Угол между построенными прямыми называют углом между скрещивающимися прямыми.



а *б* *в*

Рис. 6.1

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между прямыми, которые пересекаются и соответственно параллельны скрещивающимся. φ – угол между скрещивающимися прямыми b и a (рис. 6.1). Он не зависит от выбора пересекающихся прямых, поскольку параллельное перенесение сохраняет равенство соответствующих углов с параллельными сторонами. Например, если $b \dot{-} a$, $a \subset \alpha$, то углом между прямыми b и a будет угол между прямыми a и b_2, где $b_2 \parallel b$, $b_2 \subset \alpha$ (рис. 6.1, *б*).

Итак, $\angle(ab) = \angle(a_1b_1) = \angle(ab_2) = \angle(ba_2) = \angle(a_3b_3)$.

Если $\angle(a_2b) = 90°$, то $\angle(ab) = 90°$. Однако о перпендикулярности скрещивающихся прямых не говорят, поскольку выдерживается определение понятия перпендикулярных прямых.

2. *Угол между прямой и плоскостью в пространстве*

Об угле наклона прямой к плоскости говорят в том случае, когда прямая пересекает эту плоскость. Чтобы построить, например, угол между прямой a и плоскостью α ($O \in a$, $O \in \alpha$), последовательно выполняют такие шаги (рис. 6.2):

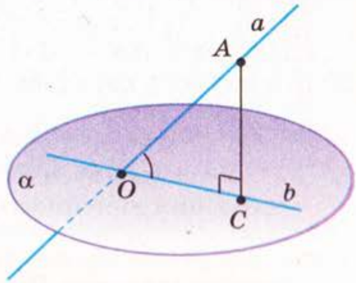


Рис. 6.2

1) выбирают точку A прямой a ($A \notin \alpha$);

2) проводят из точки A перпендикуляр к плоскости α ($AC \perp \alpha$, $C \in \alpha$);

3) проводят через точки плоскости O и C прямую b.

Прямую b называют проекцией прямой a на плоскость α.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость. Если прямая a перпендикулярна α, то угол между ней и плоскостью равен $90°$, если параллельна, то – $0°$.

Угол между прямой a и плоскостью α обозначают «$\angle$» или «$\hat{\ }$»: $\angle(a\alpha)$ или $(\widehat{a\alpha})$. Читают: «угол между прямой a и плоскостью α».

3. *Угол между двумя плоскостями пространства*

Прямая на плоскости разбивает ее на две полуплоскости. Две полуплоскости могут иметь общую прямую и не образовывать одну плоскость. В этом случае они образуют фигуру, которую называют *двугранным углом*.

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями вместе с общей прямой, их ограничивающей. Эту прямую называют *ребром двугранного угла*.

Если двугранный угол пересечь плоскостью, перпендикулярной его ребру, то лучи, по которым она пересекает заданные полуплоскости, образуют ***линейный угол***, например $\angle(ab)$ (рис. 6.3). Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

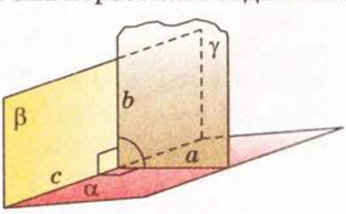


Рис. 6.3

Пересекающиеся плоскости образуют четыре угла. Чтобы определить угол между двумя плоскостями, проводят плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется *углом между данными плоскостями*. Т.е. ***угол между двумя пересекающимися плоскостями*** – это угол между двумя прямыми, которые принадлежат этим плоскостям и перпендикулярны прямой их пересечения.

$\angle(\alpha\beta) = \angle(ab)$, где $\alpha \cap \beta = c$, $a \perp c$, $a \subset \alpha$, $b \perp c$, $b \subset \beta$ (рис. 6.3).

Если линейный угол – 90°, то плоскости перпендикулярны. Если плоскости параллельны, то угол между ними равен 0°.

Теорема 1

Угол между плоскостями не зависит от места построения линейного угла.

Доказательство. Выберем точки A и B (рис. 6.4), принадлежащие прямой a – линии пересечения плоскостей α и β, – и построим два линейных угла для плоскостей α и β. Для этого проведем плоскости $\gamma_1 \perp a$ и $\gamma_2 \perp a$, которые пересекут плоскости α и β по прямым a_1 и b_1, a_2 и b_2. Прямые a_1 и a_2 лежат в плоскости α и перпендикулярны прямой a, значит $a_1 \parallel a_2$ и $b_1 \parallel b_2$. Если к плоскости γ_1 применить параллельный перенос, который переводит точку A в точку B, то прямая a_1 совпадет с прямой a_2, а прямая b_1 – с прямой b_2. Это возможно, поскольку прямые параллельны. А потому плоскости γ_1 и γ_2 совпадают, отсюда совпадение линейных углов и соответственно их равенство. *Теорема доказана.*

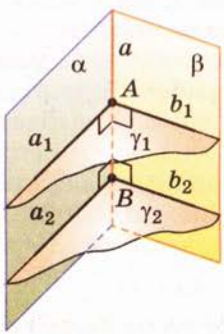


Рис. 6.4

Задача

Концы отрезка длиной 24 см принадлежат двум перпендикулярным плоскостям. Расстояния от концов отрезка до линии пересечения данных плоскостей равны 12 см и $12\sqrt{2}$ см. Найдите углы, образованные отрезком с этими плоскостями.

Дано: α, β, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = c$; AB – отрезок, $A \in \alpha$, $B \in \beta$; $AA_1 \perp c$, $BB_1 \perp c$, $A_1 \in c$, $B_1 \in c$; AB = 24 см, $AA_1 = 12\sqrt{2}$ см, BB_1 = 12 см.

Найти: углы, образованные отрезком AB с плоскостями α и β.

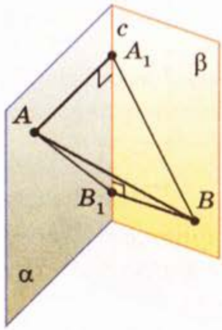


Рис. 6.5

Решение	Почему именно так?
A_1 и B_1 – проекции точек A и B на плоскости β и α соответственно. Поскольку $\alpha \perp \beta$, c (или A_1B_1) – прямая пересечения этих плоскостей, то $BB_1 \perp \alpha$, $AA_1 \perp \beta$. Итак, $\triangle ABA_1$ и $\triangle ABB_1$ – прямоугольные, у которых: $AA_1 = 12\sqrt{2}$ см, $BB_1 = 12$ см, $AB = 24$ см (по условию). Из $\triangle ABB_1$ ($\angle AB_1B = 90°$): $\sin\angle BAB_1 = \frac{BB_1}{AB} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, $\angle BAB_1 = 30°$. Из $\triangle ABA_1$ ($\angle AA_1B = 90°$): $\sin\angle ABA_1 = \frac{AA_1}{AB} = \frac{12\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle ABA_1 = 45°$. *Ответ.* 30°; 45°.	В этой задаче важно построить проекции концов отрезка на другую, перпендикулярную ей, плоскость. При этом следует помнить, что они должны лежать на прямой пересечения данных перпендикулярных плоскостей, согласно свойствам перпендикулярных плоскостей. Далее, рассматривая прямоугольные треугольники, нужно правильно использовать определение синуса угла как отношения противолежащего катета к гипотенузе и таблицу значений: $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Упражнения

6.1°. Известно, что прямые a и b, расположенные в пространстве, перпендикулярны и угол между ними равен α. Выберите правильное утверждение.

А) $\alpha = 30°$; Б) $\alpha = 45°$; В) $\alpha = 60°$; Г) $\alpha = 90°$; Д) $\alpha = 120°$.

6.2°. Прямая a перпендикулярна плоскости ω и пересекает ее в точке O (рис. 6.6). Прямая b проходит через точку O и принадлежит ω. Укажите величину угла между прямыми a и b.

А) 60°; В) 120°; Д) 30°.
Б) 90°; Г) 45°;

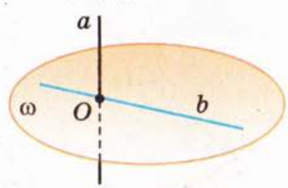


Рис. 6.6

6.3°. Из точки B к плоскости ψ проведены перпендикуляр BA и наклонная BC, угол между которыми 45°. Определите длину перпендикуляра, если длина проекции 6 см.

А) 2 см; Б) 3 см; В) 4 см; Г) 6 см; Д) 9 см.

6.4°. Даны прямые a и b, угол между которыми α. Определите для каждого возможного взаимного расположения этих прямых (А–Г) величину угла α (1–4).

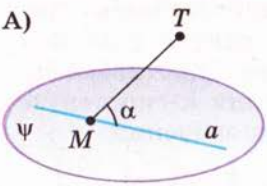
А) $a \parallel b$; 1) $0° < \alpha \leqslant 90°$;
Б) $a \cap b$; 2) $\alpha = 90°$;
В) $a \perp b$; 3) $\alpha = 0°$;
Г) $a \dot{-} b$. 4) $0° < \alpha < 90°$.

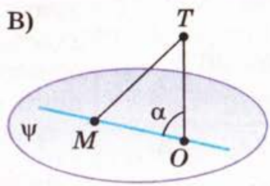
А	
Б	
В	
Г	

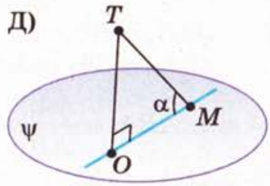
6.5°. Укажите три величины углов, которые могут определять величину угла между скрещивающимися прямыми.

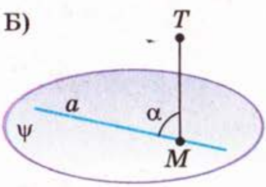
А) 0°; Б) 50°; В) 180°; Г) 75°; Д) 45°.

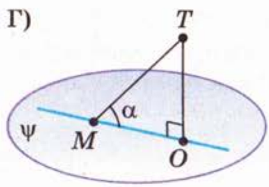
6.6°. Из точки T под углом 45° к плоскости ψ проведена наклонная TM. Укажите два рисунка, на которых правильно изображен угол между наклонной и плоскостью.

А)


В)


Д)


Б)


Г)


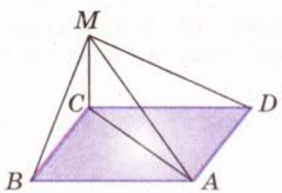


Рис. 6.7

6.7°. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведен перпендикуляр MC к его плоскости (рис. 6.7). Укажите соответствующее каждому углу между прямой и плоскостью (А–Г) его обозначение (1–6).

А) Угол между MB и (ABC); 1) $\angle MCD$;
Б) угол между MD и (ABC); 2) $\angle MBC$;
В) угол между MC и (ABC); 3) $\angle MDC$;
Г) угол между MA и (ABC). 4) $\angle MCB$;
5) $\angle MAC$;
6) $\angle MCA$.

А	
Б	
В	
Г	

6.8°. Перпендикуляр SB проведен к плоскости квадрата $ABCD$ (рис. 6.8).

Выберите название угла, сответствующее четырем из пяти определенных условий (1–5), и название, которое бы не подходило ни к одному из них.

А) Прямой угол;
Б) острый угол;
В) тупой угол.

1) $\angle SAD$;
2) $\angle SAB$;
3) $\angle SDB$;
4) $\angle SDC$;
5) $\angle SDA$.

А				
Б				
В				

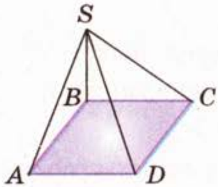


Рис. 6.8

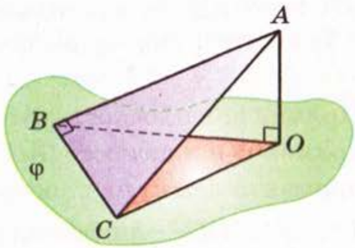


Рис. 6.9

6.9°°. Через катет BC треугольника ABC ($\angle B = 90°$) проведена плоскость φ (рис. 6.9). Укажите угол между плоскостями (ABC) и φ.

А) $\angle ACD$; Б) $\angle BCO$; В) $\angle ABO$; Г) $\angle AOC$; Д) $\angle ABO$.

6.10°°. Плоскость α проходит через основание AC равнобедренного треугольника ABC, BH – перпендикуляр к плоскости α, BD – медиана $\triangle ABC$ (рис. 6.10). Укажите угол между плоскостями (ABC) и α.

А) $\angle BDH$; В) $\angle BCH$; Д) $\angle AHC$.
Б) $\angle BAH$; Г) $\angle BHD$;

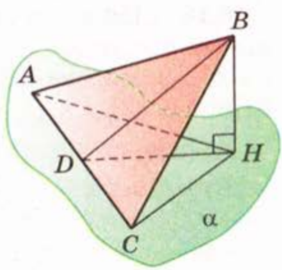


Рис. 6.10

6.11°°. Из точки K к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная длиной 24 см. Угол между наклонной и плоскостью равен 30°. Найдите длину перпендикуляра.

А) $24\sqrt{3}$ см; Б) $24\sqrt{2}$ см; В) $12\sqrt{3}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см; Д) 12 см.

6.12°°. Из точки A к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, длина которой 20 см. Угол между наклонной и плоскостью 60°. Найдите длину перпендикуляра.

А) 10 см; Б) $10\sqrt{2}$ см; В) $10\sqrt{3}$ см; Г) $20\sqrt{2}$ см; Д) $20\sqrt{3}$ см.

6.13°°. Из точки M к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, угол между которыми 60°. Найдите длину наклонной, если перпендикуляр равен 20 см.

А) $20\sqrt{2}$ см; Б) $10\sqrt{3}$ см; В) $20\sqrt{3}$ см; Г) 40 см; Д) $10\sqrt{2}$ см.

6.14°°. Плоскости квадрата $ABCD$ и прямоугольного треугольника ABM ($\angle B = 90°$) пересекаются по прямой AB (рис. 6.11). Укажите угол между этими плоскостями.

А) $\angle MKL$; Б) $\angle MBD$; В) $\angle MBC$; Г) $\angle MAD$; Д) $\angle MAC$.

6.15°°. К плоскости квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр SB. Точка S соединена с вершиной A квадрата. Определите, каким является треугольник SAD.

А) Прямоугольным; Б) остроугольным; В) тупоугольным.

6.16°°. Угол ABC – линейный угол двугранного угла с ребром m. Укажите взаимное расположение прямой m и плоскости (ABC).

А) Прямая m и плоскость (ABC) параллельны;

Б) прямая m и плоскость (ABC) перпендикулярны;

В) прямая m лежит на плоскости (ABC).

6.17°°. Угол MKN – линейный угол двугранного угла с ребром c. Укажите взаимное расположение плоскости (MKN) и прямой c.

А) Прямая c лежит на плоскости (MKN);

Б) прямая c параллельна плоскости (MKN);

В) прямая c перпендикулярна плоскости (MKN).

6.18°°. На плоскости α лежат две прямые a и b_1, пересекающиеся под углом 30°. Прямые b и b_1 – параллельные, а прямые a и b – скрещивающиеся. Определите угол между прямыми a и b (рис. 6.12).

А) $(\widehat{ab}) = 150°$; В) $(\widehat{ab}) = 30°$; Д) $(\widehat{ab}) = 90°$.
Б) $(\widehat{ab}) = 0°$; Г) $(\widehat{ab}) = 60°$;

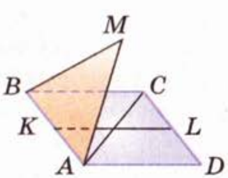


Рис. 6.11

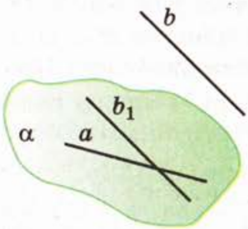


Рис. 6.12

6.19°°. Из точки A к плоскости α проведены наклонная AB и перпендикуляр AC. Угол между наклонной и плоскостью α равен 60°, $AB = a$. Укажите два выражения, по которым можно найти длину проекции наклонной AB на плоскость α.

А) $a\sin 60°$; Б) $a\cos 60°$; В) $\dfrac{a}{\sin 60°}$; Г) $\dfrac{a}{\cos 60°}$; Д) $a\sin 30°$.

6.20°°. На рисунке 6.13 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором проведено сечение ABC_1D_1. Определите угол наклона плоскости сечения к плоскости $(ABCD)$ (рис. 6.13).

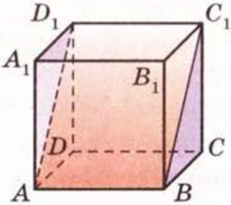


Рис. 6.13

А) 90°; В) 135°; Д) 150°.
Б) 45°; Г) 30°;

6.21•. Из точки к плоскости проведена наклонная длиной 12 см. Найдите угол, который образует наклонная с плоскостью, если проекция наклонной равна 6 см.

6.22•. Из точки A к плоскости α проведены перпендикуляр AO длиной $5\sqrt{3}$ см и наклонная AK. Найдите угол, который образует наклонная AK с плоскостью α, если ее проекция равна 5 см.

6.23•. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Одна, длиной $4\sqrt{3}$ см, образует с плоскостью угол 60°, а другая – угол 30°. Найдите длину второй наклонной.

6.24•. Докажите, что равные наклонные, проведенные к одной плоскости из одной точки, взятой вне плоскости, образуют с плоскостью равные углы.

6.25•. Точка O – центр квадрата. OM – перпендикуляр к плоскости $(ABCD)$. Докажите, что наклонные MA, MB, MC, MD наклонены к плоскости $(ABCD)$ под одинаковым углом.

6.26•. Точка O – центр квадрата. OS – перпендикуляр к плоскости $(ABCD)$. Точки K, L, M, N – середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Докажите, что наклонные SK, SL, SM, SN наклонены к плоскости $(ABCD)$ под одинаковым углом.

6.27•. $ABCD$ – прямоугольник, MA – перпендикуляр к плоскости прямоугольника, $DC = 3$ см, $BC = 4$ см. Прямая MC наклонена к плоскости прямоугольника под углом 60°. Найдите длину перпендикуляра MA.

6.28•. Через сторону равностороннего треугольника проведена плоскость α так, что проекции двух других сторон этого треугольника на плоскость α взаимно перпендикулярны. Докажите, что эти стороны образуют с плоскостью α углы 45°.

6.29•. Из точки A к плоскости проведены две наклонные AB и AC, равные $3\sqrt{2}$ см каждая, и перпендикуляр AO. Угол между наклонными 60°, а угол между их проекциями – прямой. Найдите длину перпендикуляра AO.

6.30•. Из точки к плоскости проведены две наклонные, угол между которыми равен 60°, а угол между их проекциями – 90°. Длины проекций этих наклонных на плоскость равны 3 см каждая. Найдите длину перпендикуляра, проведенного от точки к плоскости.

6.31••. Через сторону BC треугольника ABC проходит плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол $60°$. Из вершины A треугольника к плоскости α построен перпендикуляр AH. Найдите длину перпендикуляра AH, если высота треугольника AM равна $6\sqrt{3}$ см.

6.32••. Через гипотенузу AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проходит плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол $30°$. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из точки C на плоскость α, если $AB = 20$ см.

6.33••. Сторона AB равностороннего $\triangle ABC$ принадлежит α, а вершина C не принадлежит ей. Из вершины C проведен перпендикуляр CO к плоскости α, длина которого равна $2\sqrt{3}$ см. Вычислите угол между плоскостями (ABC) и α, если длина высоты $\triangle ABC$ равна $4\sqrt{3}$ см.

6.34••. Из вершины B квадрата $ABCD$ к плоскости α проведен перпендикуляр BO длиной $3\sqrt{3}$ см. Вычислите угол между плоскостями квадрата $ABCD$ и α, если сторона квадрата $AD = 6$ см и принадлежит плоскости α.

6.35••. Один из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника длиной 6 см лежит в плоскости α, а другой – наклонен к ней под углом $45°$. Найдите угол между гипотенузой и плоскостью α.

6.36••. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC катет AC лежит в плоскости α, а катет BC образует с этой плоскостью угол $45°$. Найдите длину перпендикуляра BH, проведенного к плоскости α, и угол наклона гипотенузы к плоскости α, если гипотенуза равна 30 см.

6.37••. Две плоскости пересекаются под углом $60°$. Концы отрезка AB, который равен 25 см, лежат в этих плоскостях. К линии пересечения плоскостей построены перпендикуляры $AC = 5$ см и $BD = 8$ см. Найдите длину отрезка CD.

6.38••. Две плоскости пересекаются под углом $30°$. Концы отрезка AB, который равен 5 см, лежат в этих плоскостях. К линии пересечения плоскостей построены перпендикуляры AC и BD. Найдите длину отрезка BD, если $AC = 4\sqrt{3}$ см, $CD = 3$ см.

6.39••. Через сторону равностороннего треугольника проведена плоскость α так, что проекции двух других сторон треугольника на эту плоскость взаимно перпендикулярны. Докажите, что эти стороны образуют с плоскостью α углы $45°$.

6.40••. Из точки B под углом $45°$ к плоскости α проведены наклонная BA и прямая AC ($AC \subset \alpha$), образующая угол $45°$ с проекцией наклонной AB на плоскость α. Определите длину отрезка BC и его угол наклона к плоскости α, если $AB = AC = a$.

§ 6.2. Расстояния в пространстве

Одним из ключевых понятий геометрии является *длина отрезка*. Через него вводится много других понятий, связанных с понятием расстояния. Как известно, ***расстоянием между двумя точками A и B*** называется длина отрезка AB (рис. 6.14). Расстояние от точки A до прямой l равно длине перпендикуляра AO, проведенного из этой точки на данную прямую (рис. 6.15). Поскольку все другие отрезки AX с концами в точке A и произвольной точке X прямой, отличной от O, – наклонные, то их длина больше длины перпендикуляра. Поэтому говорят, что расстояние от точки до прямой – это длина наименьшего из всех возможных отрезков, проведенных из этой точки к прямой. Такой отрезок является перпендикуляром к прямой. Опираясь на такие рассуждения, определим понятие расстояния между некоторыми другими фигурами в пространстве.

Рис. 6.14

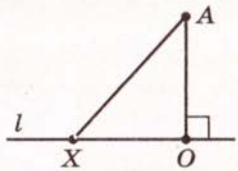


Рис. 6.15

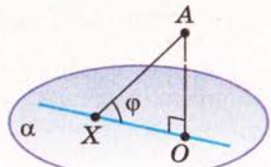


Рис. 6.16

Рассмотрим плоскость α и точку A, не принадлежащую ей (рис. 6.16). Понятно, что за расстояние от точки A до плоскости α следует выбрать длину перпендикуляра AO, проведенного из этой точки к плоскости, поскольку все другие отрезки AX, где X – произвольная точка плоскости, отличная от O, будут наклонными и поэтому их длина больше чем AO.

Итак, ***расстояние от точки до плоскости*** равно длине перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости.

Если точка принадлежит плоскости, то в этом случае расстояние от нее до плоскости равно нулю.

Расстояние от точки A до отрезка BC (рис. 6.17) определяется по такому алгоритму: 1) проводим перпендикуляр AO из точки A к прямой BC; 2) если основание O этого перпендикуляра принадлежит данному отрезку BC, то искомое расстояние равно

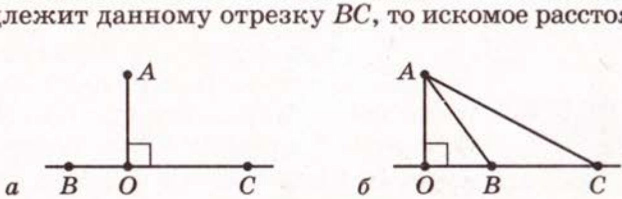


Рис. 6.17

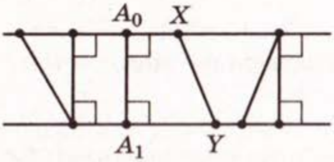


Рис. 6.18

длине отрезка AO (рис. 6.17, *а*); в другом случае оно равно длине отрезка AB или AC (в зависимости от того, какая из точек – B или C – лежит ближе к точке O) (рис. 6.17, *б*). Аналогично определяется расстояние от точки до луча.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине общего перпендикуляра этих прямых (рис. 6.18). Это вытекает из того, что все такие перпендикуляры A_0A_1 равны между собой, а каждый отрезок с концами X и Y на данных прямых, не являющийся их общим перпендикуляром, имеет длину, большую чем длина общего перпендикуляра A_0A_1.

Теорема 2 ***(о расстоянии между параллельными прямой и плоскостью)***

Расстояние между параллельными прямой и плоскостью равно длине общего перпендикуляра, проведенного из произвольной точки прямой к плоскости.

Данная теорема доказывается рассуждениями, аналогичными приведенным выше, о расстоянии между параллельными прямыми.

Теорема 3 ***(о расстоянии между параллельными плоскостями)***

Расстояние между параллельными плоскостями равно длине общего перпендикуляра, проведенного из произвольной точки одной плоскости ко второй.

Доказательство. Пусть имеем две параллельные плоскости α и β (рис. 6.19). Поскольку прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и второй, то перпендикуляр AA_1, проведенный из произвольной точки A одной из этих плоскостей ко второй, будет перпендикуляром и к первой, т.е. их общим перпендикуляром. Поскольку любые два попарно взятых общих перпендикуляра AA_1, BB_1 и CC_1 параллельных плоскостей α и β параллельны, то они равны между собой как отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями. Для полного доказательства теоремы остается показать, что любой отрезок CX с концами в данных плоскостях α и β, не являющийся их общим перпендикуляром,

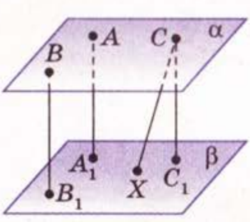


Рис. 6.19

больше общего перпендикуляра CC_1. А это вытекает из того, что перпендикуляр CC_1 к плоскости β меньше наклонной CX к этой плоскости. *Теорема доказана.*

Понятие расстояния между точками широко применяется в разнообразных сферах жизни человека – от науки до быта и досуга. Используется оно в тех случаях, когда размерами реальных объектов, расстояние между которыми вычисляется, в данных условиях можно пренебречь. Так мы говорим о расстоянии между звездами, планетами, передатчиками и принимателями информации, населенными пунктами, ядрами атома и электронами на его орбите и т.п.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Сначала рассмотрим определение перпендикуляра, проведенного к двум скрещивающимся прямым, и докажем его существование и единственность.

Общим перпендикуляром к двум скрещивающимся прямым называется отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный каждой из них.

Теорема 4

Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром к параллельным плоскостям, проходящим через эти прямые.

Доказательство. Действительно, пусть a и b – данные скрещивающиеся прямые (рис. 6.20). Проведем прямые a_1 и b_1, соответственно параллельные a и b, так, что прямая a_1 пересекается с прямой b, а прямая b_1 – с a. Через прямые a и b_1 и b и a_1, которые попарно пересекаются, проводим плоскости α и β.

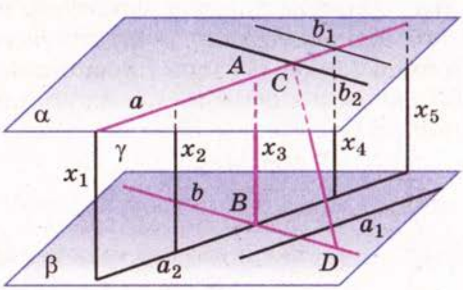


Рис. 6.20

Плоскости α и β – параллельные. Произвольные прямые x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, которые пересекают прямую a и перпендикулярны плоскости α, лежат в одной плоскости. Назовем ее γ.

Эта плоскость пересекает плоскость β по прямой a_2, параллельной a. Пусть точка B – точка пересечения прямых a_2, b и некой прямой x, а точка A – точка пересечения той же прямой x и a. Тогда прямая AB, перпендикулярная плоскости α, перпендикулярна и плоскости β, поскольку $\beta \parallel \alpha$. Отсюда вытекает, что $AB \perp a$ и $AB \perp b$.

Отрезок AB – общий перпендикуляр к плоскостям α и β, а следовательно, и к прямым a и b. Докажем, что он единственный. Пусть прямые a и b имеют другой общий перпендикуляр CD. Проведем через точку C прямую b_2, параллельную b. Прямая CD перпендикулярна прямой b, а следовательно, и b_2. Поскольку она перпендикулярна прямым a и b_2, которые проходят через точку C, то она перпендикулярна плоскости α. Тогда CD параллельна прямой AB. Имеем, что через прямые AB и CD, как через параллельные прямые, можно провести плоскость и она будет содержать скрещивающиеся прямые AC и BD. А это невозможно. Получили противоречие. *Теорема доказана.*

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

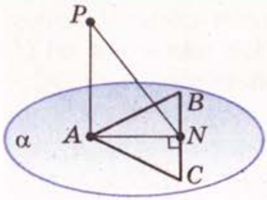


Рис. 6.21

Задача 1

Отрезок PA перпендикулярен плоскости треугольника ABC, стороны AB, BC и AC которого соответственно равны 13 см, 14 см и 15 см. Найдите расстояние от точки P до стороны BC, если $PA = 16$ см.

Решение

Пусть AN – высота данного остроугольного треугольника ABC (рис. 6.21). Тогда, по теореме о трех перпендикулярах, $PN \perp BC$ и длина PN будет расстоянием от точки P до стороны BC. Определим ее из прямоугольного треугольника PAN (поскольку $PA \perp (ABC)$, то $\angle PAN = 90°$). Для этого предварительно найдем AN.

Из формулы для площади треугольника $AN = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$.

Необходимую площадь определим по формуле Герона:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84\ (\text{см}^2).$$

Тогда $AN = 12$ см и $PN = \sqrt{PA^2 + AN^2} = 20$ (см).
Ответ. 20 см.

Задача 2

Прямая OK перпендикулярна плоскости ромба, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что расстояния от точки K до всех сторон ромба равны между собой.

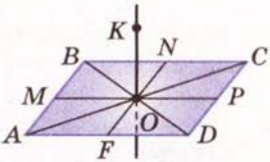


Рис. 6.22

Доказательство

Пусть $ABCD$ – ромб и O – точка пересечения его диагоналей (рис. 6.22). Тогда O – центр вписанной в ромб окружности. Пусть M, N, P, F – точки касания сторон к окружности. Тогда $OM = ON = OF = OP = r$. Поскольку $OP \perp DC$, $OM \perp AB$, $OF \perp AD$, $ON \perp BC$, то по теореме о трех перпендикулярах $KM \perp AB$, $KN \perp BC$, $KP \perp DC$, $KF \perp AD$. Итак, KM, KN, KP, KF – расстояния от точки K до сторон ромба. Из равенства треугольников KOP, KOF, KOM, KON вытекает, что $KM = KF = KN = KP$. Ч.т.д.

Задача 3

Точка M не лежит в плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) и находится на расстояниях MK и MD от прямых, содержащих катеты BA и BC (рис. 6.23). MO – перпендикуляр к плоскости этого треугольника. Докажите, что четырехугольник $BKOD$ – прямоугольник.

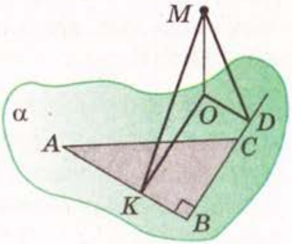


Рис. 6.23

Доказательство

Поскольку отрезки MK и MD – расстояния от точки M соответственно до прямых AB и BC, то $MK \perp AB$ и $MD \perp BC$. По условию $MO \perp (ABC)$, поэтому OK и OD – проекции наклонных MK и MD на плоскость (ABC) и $OK \perp AB$, $OD \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах). Однако $AB \perp BC$ по условию, поэтому $BKOD$ – прямоугольник. Ч.т.д.

Упражнения

6.41°. Точка K не принадлежит плоскости ω, а точки A, B, C, D, M лежат на плоскости ω (рис. 6.24). Укажите отрезок, который является расстоянием между точками K и C.

А) KA; Б) KC; В) KB; Г) AC; Д) CB.

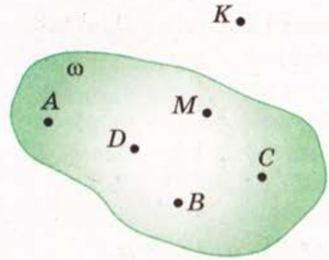


Рис. 6.24

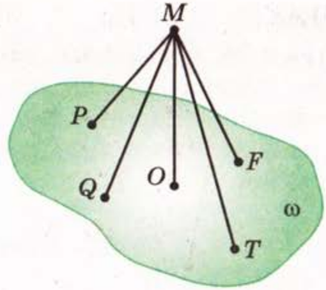


Рис. 6.25

6.42°. Из точки M к плоскости ω проведен перпендикуляр MO (рис. 6.25). Точка $M \notin \omega$, а точки T, P, Q, F принадлежат плоскости ω. Выберите отрезок, выражающий расстояние от точки M до плоскости ω.

А) MT; Б) MF; В) MO; Г) MP; Д) MQ.

6.43°. MB – перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$ (рис. 6.26). O – центр квадрата, N – середина стороны CD. Укажите отрезок, выражающий расстояние от точки M до плоскости $(ABCD)$.

А) MO; Б) MA; В) MD; Г) MB; Д) MN.

6.44°. MB – перпендикуляр к плоскости квадрата $ABCD$ (рис. 6.26). O – центр квадрата, N – середина стороны CD. Укажите отрезок, выражающий расстояние от точки M до стороны квадрата CD.

А) MO; Б) MC; В) MD; Г) MB; Д) MN.

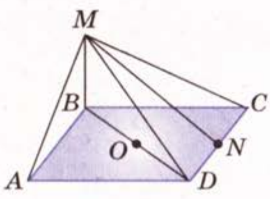


Рис. 6.26

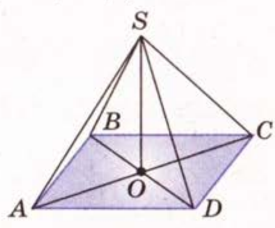


Рис. 6.27

6.45°. Отрезок SO – перпендикуляр к плоскости ромба $ABCD$ (рис. 6.27). Укажите отрезок, выражающий расстояние от точки S до диагонали BD.

А) SB; Б) AO; В) SD; Г) CO; Д) SO.

6.46°. Плоскости α и β параллельны (рис. 6.28). Точки A, B, C принадлежат плоскости α, а точки K, L, M – плоскости β. $AL \perp \beta$, $CM \parallel AL$, $BK \nparallel AL$. Укажите отрезки, выражающие расстояние между плоскостями α и β.

1) AK; 2) AL; 3) BK; 4) CM; 5) CL.

А) 1 и 3; Б) 2 и 4; В) 3 и 5; Г) 1 и 4; Д) 2 и 3.

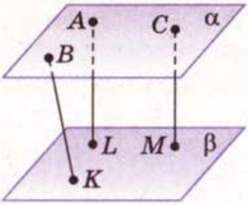


Рис. 6.28

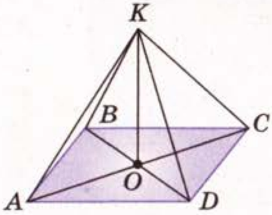


Рис. 6.29

6.47°. Точки A, B, C принадлежат плоскости α, а точки K, L, M – плоскости β. $\alpha \parallel \beta$, $BK \perp \beta$, $AL = 4$ см, $CM = 6$ см, $BK = 3$ см, $BM = 5$ см, $AK = 7$ см. Укажите расстояние между плоскостями α и β.

А) 3 см; Б) 4 см; В) 5 см; Г) 6 см; Д) 7 см.

6.48°. Точка K не принадлежит плоскости прямоугольника $ABCD$ (рис. 6.29) и отдалена от каждой из его вершин на 10 см. Стороны прямоугольника равны 3 см и 4 см. Укажите два отрезка, длина которых равна 10 см.

А) KO; Б) BD; В) BK; Г) AC; Д) KD.

6.49°. Плоскости, в которых лежат параллелограмм $ABCD$ и трапеция $ABKM$, перпендикулярны (рис. 6.30). AB – линия пересечения плоскостей. DR – высота параллелограмма. Укажите отрезок, который является расстоянием между прямой CD и плоскостью $ABKM$.

А) AD; Б) DM; В) CB; Г) DR; Д) DK.

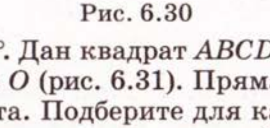


Рис. 6.30

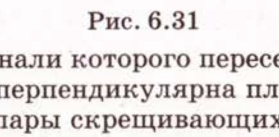


Рис. 6.31

6.50°. Дан квадрат $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O (рис. 6.31). Прямая MC перпендикулярна плоскости квадрата. Подберите для каждой пары скрещивающихся прямых отрезок, выражающий расстояние между ними.

А) AB и MC;
Б) AD и MC;
В) BD и MC.

1) MO;
2) CO;
3) BC;
4) MA;
5) CD.

А	
Б	
В	

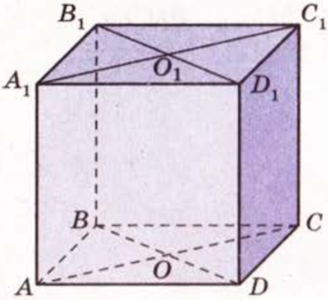


Рис. 6.32

6.51°°. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.32) O и O_1 – точки пересечения соответствующих диагоналей граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Идентифицируйте каждой паре скрещивающихся прямых расстояние между ними.

А) AD и CC_1; 1) B_1C_1;
Б) A_1B_1 и CC_1; 2) C_1O_1;
В) BD и CC_1; 3) BC;
Г) A_1D_1 и CC_1; 4) CD;
Д) AB и CC_1; 5) C_1D_1;
Е) B_1D_1 и CC_1. 6) OC.

А	
Б	
В	
Г	
Д	
Е	

6.52°°. В прямоугольном $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) проведены $MN \parallel AC$ ($M \in AB$, $N \in BC$). Точка $K \notin (ABC)$ и KM – перпендикуляр к плоскости (ABC). Укажите отрезок, являющийся расстоянием от точки K до прямой BC (рис. 6.33).

А) KM; Б) KC; В) KN; Г) KB; Д) MN.

6.53°°. Отрезок KM – перпендикуляр к плоскости треугольника ABC, проведенный через точку M – середину гипотенузы AB (рис. 6.33). Найдите расстояние от точки K до стороны BC, если $AC = 24$ см, $KM = 12$ см.

А) $6\sqrt{5}$ см; Б) $4\sqrt{13}$ см; В) $4\sqrt{10}$ см; Г) $12\sqrt{2}$ см; Д) $24\sqrt{2}$ см.

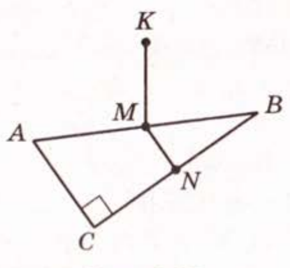


Рис. 6.33

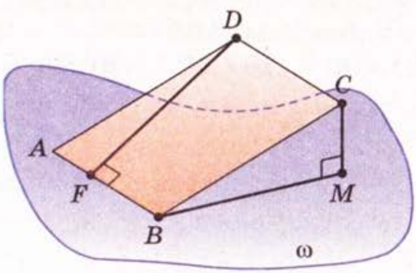


Рис. 6.34

6.54°°. Сторона параллелограмма AB принадлежит плоскости ω, DF – высота параллелограмма, CM – перпендикуляр к плоскости ω (рис. 6.34). Укажите отрезок, выражающий расстояние от прямой CD до плоскости ω.

А) DA; Б) DF; В) CM; Г) BM; Д) BC.

6.55°°. На рисунке 6.35 изображена окружность с центром O, вписанная в $\triangle ABC$, M, N, K – точки касания, S – не принадлежит плоскости (ABC). Укажите тройку отрезков, которые являются расстоянием от точки S до сторон $\triangle ABC$.

А) SA, SB, SC; В) MO, NO, KO; Д) BK, KO, OC.
Б) SM, SN, SK; Г) SO, SA, SM;

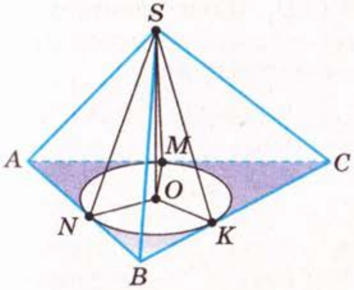


Рис. 6.35

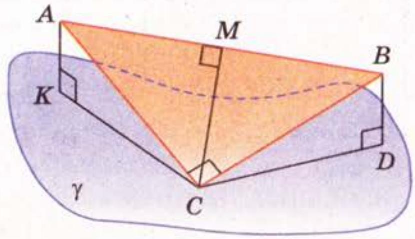


Рис. 6.36

6.56°°. Через вершину C прямоугольного $\triangle ABC$ проведена плоскость γ (рис. 6.36). Гипотенуза AB параллельна плоскости γ, $AK \perp \gamma$ и $BD \perp \gamma$, $CM \perp AB$. Укажите отрезки, которые выражают расстояние от гипотенузы AB до плоскости γ.

1) MC; 2) AK; 3) BC; 4) BD; 5) AC.
А) 1 и 2; Б) 2 и 3; В) 3 и 4; Г) 5 и 4; Д) 2 и 4.

6.57°°. Дан разносторонний треугольник ABC. Точка $M \notin (ABC)$, O – основание перпендикуляра, проведенного из точки M к плоскости (ABC). $MA = MB = MC = 5$ см. Укажите три правильных утверждения.

А) Точка M равноудалена от сторон $\triangle ABC$;
Б) точка O равноудалена от вершин $\triangle ABC$;
В) точка M равноудалена от вершин $\triangle ABC$;
Г) точка O равноудалена от сторон $\triangle ABC$;
Д) O – центр вписанной окружности в $\triangle ABC$;
Е) O – центр описанной окружности вокруг $\triangle ABC$.

6.58°°. В ромбе $ABCD$ проведены высоты MN и KL, пересекающиеся в точке O (рис. 6.37). O – точка пересечения диагоналей ромба, F – точка, не принадлежащая плоскости $(ABCD)$, FO – перпендикуляр к плоскости $(ABCD)$.

Укажите три правильных утверждения.

А) Точка F равноудалена от сторон ромба;
Б) точка O равноудалена от вершин ромба;
В) O – центр описанной окружности вокруг ромба;
Г) O – центр вписанной окружности в ромб;
Д) точка F равноудалена от вершин ромба;
Е) точка O равноудалена от сторон ромба.

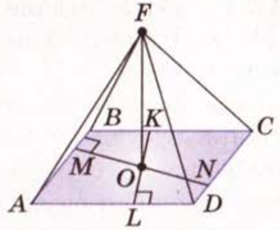


Рис. 6.37

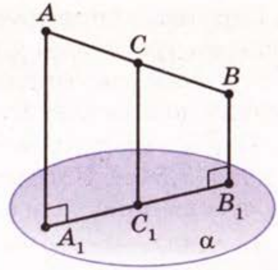


Рис. 6.38

6.59°°. Концы отрезка AB, не пересекающего плоскость α, отдалены от нее на a см и b см (рис. 6.38). Точка C – середина отрезка AB – отдалена от плоскости α на x см. Идентифицируйте каждому условию (А–Д) правильный ответ (1–5).

А) $a = 5$ см, $b = 7$ см; 1) $x = 7$ см;
Б) $a = 3$ см, $b = 5$ см; 2) $x = 8$ см;
В) $a = 6$ см, $b = 8$ см; 3) $x = 5$ см;
Г) $a = 7$ см, $b = 9$ см; 4) $x = 6$ см;
Д) $a = 4$ см, $b = 6$ см. 5) $x = 4$ см.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

6.60°°. Катеты прямоугольного треугольника равны 10 см и 18 см. Через середину гипотенузы – точку O – проведен перпендикуляр OM к плоскости треугольника. Определите расстояние от точки M до каждого катета, если $OM = 12$ см.

А) 13 см и 15 см; В) 12 см и 15 см; Д) 9 см и 12 см.
Б) 12 см и 13 см; Г) 5 см и 12 см;

6.61•. Отрезок KM не пересекает плоскость α. Точка K отдалена от нее на 1,8 см, а точка F – середина отрезка KM – на 4 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости α.

6.62•. Через вершину B квадрата $ABCD$ со стороной 8 см проведен перпендикуляр SB к плоскости квадрата. Найдите расстояние от точки S до диагоналей квадрата, если $SB = 7$ см.

6.63•. Расстояние от точки M до сторон квадрата равно 13 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна 10 см.

6.64•. Дан равнобедренный прямоугольный $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Через вершину C проведен перпендикуляр CK к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки K до гипотенузы AB, если $AB = 36$ см, $CK = 24$ см.

6.65•. Расстояние от точки M до всех вершин квадрата равно 5 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости квадрата, если диагональ квадрата равна 5 см.

6.66$^{\bullet}$. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12 см. Вне плоскости треугольника находится точка S, отдаленная от каждой вершины треугольника на 10 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника.

6.67$^{\bullet}$. Точка отдалена от всех вершин прямоугольного треугольника на 6,5 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника, если его катеты равны 3 см и 4 см.

6.68$^{\bullet}$. Точка O – центр квадрата со стороной 4 см. AO – прямая, перпендикулярная плоскости квадрата; отрезок $AO = 2\sqrt{2}$ **см.** Найдите расстояние от точки A до вершин квадрата.

6.69$^{\bullet}$. Стороны треугольника ABC равны 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего угла треугольника к его плоскости проведен перпендикуляр AD, равный 15 см. Найдите расстояние от точки D до стороны BC треугольника.

6.70$^{\bullet}$. Стороны треугольника ABC равны 11 см, 13 см и 20 см. Через вершину наименьшего угла к плоскости треугольника проведен перпендикуляр BM. Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника, если расстояние от точки M до наименьшей стороны треугольника равно 15 см.

6.71$^{\bullet\bullet}$. Две плоскости взаимно перпендикулярны. Точка A отдалена от них на 20 см и 21 см. Найдите расстояние от точки A до линии пересечения этих плоскостей.

6.72$^{\bullet\bullet}$. Две плоскости α и β взаимно перпендикулярны. Точка M отдалена от плоскости α на 12 см, а от прямой пересечения плоскостей – на 37 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости β.

6.73$^{\bullet\bullet}$. Точка M находится вне плоскости квадрата $ABCD$ на одинаковом расстоянии от всех вершин. Определите взаимное расположение плоскостей (AMC) и (BDM).

6.74$^{\bullet\bullet}$. Из точки O пересечения диагоналей прямоугольника к плоскости этого прямоугольника проведен перпендикуляр. Докажите, что произвольная точка этого перпендикуляра равноудалена от вершин прямоугольника.

6.75$^{\bullet\bullet}$. Докажите, что расстояние от середины отрезка до плоскости, которая его не пересекает, равно полусумме расстояний от концов отрезка до этой плоскости.

6.76$^{\bullet\bullet}$. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12 см. Вне плоскости треугольника дана точка, которая находится на расстоянии 10 см от каждой из его вершин. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника.

6.77$^{\bullet\bullet}$. Диагонали ромба равны 12 см и 16 см. Точка M находится вне плоскости ромба и отдалена от всех сторон ромба на 8 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ромба.

6.78••. Равнобокая трапеция, периметр которой равен 48 см, а острый угол – 60°, лежит в плоскости α. Точка, равноудаленная от всех сторон трапеции, находится на расстоянии 3 см от плоскости α. Найдите расстояние от этой точки до сторон трапеции.

6.79••. Дан треугольник со сторонами 26 см, 28 см и 30 см. Точка M отдалена от всех сторон треугольника на 17 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника.

6.80••. Периметр правильного треугольника равен $36\sqrt{3}$ см, а расстояние от некоторой точки до каждой из сторон треугольника – 10 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника.

6.81••. Площадь равностороннего треугольника равна $27\sqrt{3}$ см^2. Найдите расстояние между плоскостью треугольника и точкой, которая отдалена от каждой из его вершин на 10 см.

6.82••. Из точки к плоскости правильного треугольника со стороной $8\sqrt{3}$ см проведен перпендикуляр длиной 5 см. Основанием перпендикуляра является одна из вершин треугольника. Найдите расстояние от точки до стороны треугольника, которая не содержит основания перпендикуляра.

6.83••. Из точки к плоскости прямоугольника со сторонами 9 см и 12 см проведен перпендикуляр, основанием которого является одна из вершин прямоугольника. Расстояние от противолежащей вершины прямоугольника до этой точки равно 39 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости прямоугольника.

6.84••. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Прямая a лежит в плоскости α, а прямая $b \perp \alpha$. Точка $K \in b$ и отдалена от прямой a на 13 см. Найдите расстояние от точки K до плоскости α, если расстояние между a и b равно 5 см.

6.85••. Даны две скрещивающиеся прямые m и n. Прямая n лежит в плоскости α, а прямая $m \perp \alpha$. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, если точка A ($A \in m$) отдалена от плоскости α на 6 см, а от прямой n – на 10 см.

§ 6.3. Ортогональное проецирование

Параллельное проецирование, направление которого перпендикулярно плоскости проекции, называется ***ортогональным проецированием***. Проекция фигуры, образующаяся при ортогональном проецировании, называется *ортогональной проекцией*, или просто *проекцией* этой фигуры.

Поскольку ортогональное проецирование является особым видом параллельного проецирования, то для него выполняются все свойства последнего. Ортогональной проекцией прямой a, не

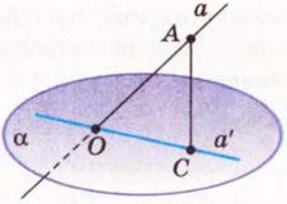


Рис. 6.39

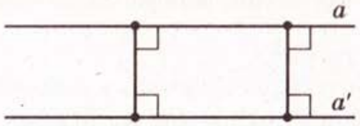


Рис. 6.40

перпендикулярной плоскости проекции, является некоторая прямая a' (рис. 6.39), а прямой a, параллельной плоскости проекции α, – прямая a', параллельная прямой a (рис. 6.40).

Отметим, что прямые, перпендикулярные одной из параллельных плоскостей, перпендикулярны и остальным, поэтому ортогональное проецирование на одну из таких плоскостей будет ортогональным и на остальные плоскости. Очевидно, что ортогональные проекции фигуры на параллельные плоскости равны между собой.

Ортогональное проецирование также имеет только ему присущие свойства. Одно из них выражает теорема о площади ортогональной проекции многоугольника.

Площадь ортогональной проекции

Теорема 5

Площадь ортогональной проекции произвольного многоугольника на плоскость равна произведению площади самого многоугольника на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

Доказательство. Как пример многоугольника возьмем $\triangle ABC$ (рис. 6.41). Проекцией $\triangle ABC$ на плоскость α является $\triangle AB_1C$. Проведем высоту BK треугольника ABC. По теореме о трех перпендикулярах B_1K – высота $\triangle AB_1C$. Угол BKB_1 – угол между плоскостью $\triangle ABC$ и плоскостью проекции. Пусть $\angle BKB_1 = \varphi$. Тогда

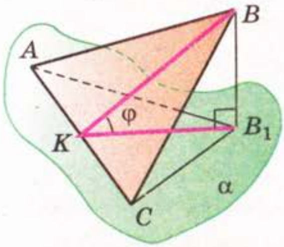


Рис. 6.41

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK; \; S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2}AC \cdot B_1K.$$

Учитывая, что $\triangle KBB_1$ прямоугольный ($\angle B_1 = 90°$), имеем: $B_1K = BK \cdot \cos\varphi$. Поэтому

$$S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2}AC \cdot B_1K = \frac{1}{2}AC \cdot BK \cdot \cos\varphi = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi.$$

Итак, $S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi$. *Теорема доказана.*

Чтобы доказать теорему для произвольного многоугольника, его разбивают на треугольники. Тогда для каждого треугольника и его проекции можно записать равенство

$$S_{\text{проекции } \triangle i} = S_{\triangle i} \cdot \cos\varphi,$$

где $i = 1, \ldots, k$, поскольку угол между плоскостями этих треугольников и плоскостью их проекций будет один и тот же. Все эти равенства сложим почленно:

$$S_{\text{проекции } \triangle 1} + S_{\text{проекции } \triangle 2} + \ldots + S_{\text{проекции } \triangle k} = S_{\text{проекции многоугольника}};$$

$$S_{\triangle 1} + S_{\triangle 2} + \ldots + S_{\triangle k} = S_{\text{многоугольника}}.$$

Получим в левой части равенства площадь проекции многоугольника, а в правой – площадь самого многоугольника, умноженную на косинус угла между их плоскостями. Отсюда

$$S_{\text{проекции многоугольника}} = S_{\text{многоугольника}} \cdot \cos\varphi.$$

Т.е. и для этого случая теорема истинна.

Задача

Ортогональной проекцией треугольника является треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Плоскость треугольника образует с плоскостью проекции угол 60°. Вычислите площадь данного треугольника.

Решение

Воспользуемся рисунком 6.41. Известно, что площадь проекции треугольника вычисляют по формуле:

$$S_{\text{проекции треугольника}} = S_{\text{треугольника}} \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между плоскостью треугольника и плоскостью проекции.

По формуле Герона найдем площадь $\triangle AB_1C$:

$$S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p – полупериметр треугольника, a, b, c – его стороны.

$$S_{\triangle AB_1C} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} =$$
$$= 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Тогда $S_{\triangle ABC} = \dfrac{S_{\triangle AB_1C}}{\cos\varphi} = \dfrac{84}{\cos 60^\circ} = 84 : \dfrac{1}{2} = 168 \text{ (см}^2\text{)}$.

Ответ: 168 см^2.

Упражнения

6.86°. Ортогональное проецирование на плоскость ω задается прямой проецирования, образующей с плоскостью угол α. Укажите величину угла α.

А) 0°; Б) 30°; В) 45°; Г) 60°; Д) 90°.

6.87°. Угол ABC – линейный, измеряющий двугранный угол с ребром a. Укажите взаимное расположение прямой a и плоскости (ABC).

А) Прямая не пересекает плоскость;

Б) прямая пересекает плоскость под острым углом;

В) прямая пересекает плоскость под прямым углом.

6.88°. Даны две параллельные плоскости α и β. Отрезки AB и CD принадлежат плоскости α, $AB \parallel CD$. Отрезки A_1B_1 и C_1D_1 – их ортогональные проекции на плоскость β (рис. 6.42). Укажите взаимное расположение отрезков A_1B_1 и C_1D_1.

А) $A_1B_1 \cap C_1D_1$; Б) $A_1B_1 \perp C_1D_1$; В) $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

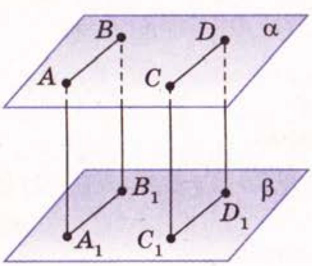


Рис. 6.42

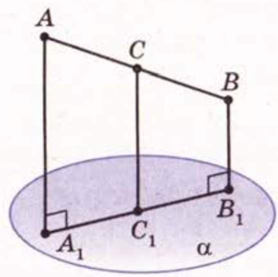


Рис. 6.43

6.89°. A_1B_1 – ортогональная проекция отрезка AB на плоскость α. $AB = 20$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 12$ см. Найдите длину отрезка B_1C_1 (рис. 6.43).

А) 9 см; Б) 6 см; В) 4 см; Г) 10 см; Д) 8 см.

6.90°. Выберите две фигуры, которые могут быть ортогональной проекцией трапеции.

А) Квадрат; В) прямоугольник; Д) трапеция.

Б) отрезок; Г) параллелограмм;

6.91°. Ортогональной проекцией отрезка AB длиной 5 см на плоскость ω является отрезок AC длиной 3 см. Найдите косинус угла наклона α отрезка AB к плоскости ω (рис. 6.44).

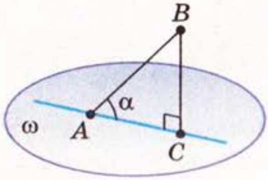


Рис. 6.44

А) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; Б) $\cos\alpha = 1$; В) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; Г) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; Д) $\cos\alpha = \frac{4}{3}$.

6.92°. Найдите угол между плоскостями (ABC) и (ABD), если расстояние от точки C до прямой AB вдвое больше, чем расстояние от точки C до плоскости (ABD) (рис. 6.45).

А) 90°; Б) 60°; В) 30°; Г) 45°; Д) 75°.

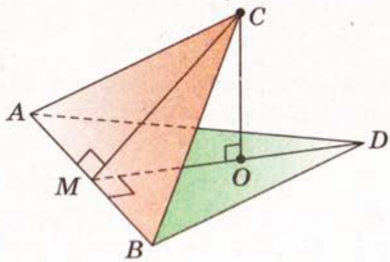


Рис. 6.45

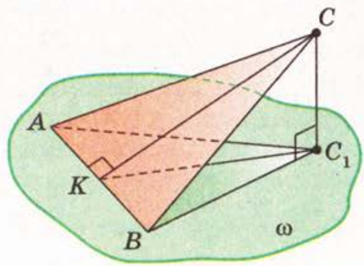


Рис. 6.46

6.93°. Через сторону AB треугольника ABC проведена плоскость ω (рис. 6.46). Точка $C_1 \in \omega$, $CC_1 \perp \omega$. Укажите ортогональную проекцию $\triangle ABC$ на плоскость ω.

А) $\triangle CC_1A$; Б) $\triangle CC_1B$; В) $\triangle C_1KB$; Г) $\triangle AC_1K$; Д) $\triangle AC_1B$.

6.94°. Даны две плоскости α и β, пересекающиеся под углом 30°. Точка A принадлежит плоскости α и отдалена от плоскости β на 12 см. Найдите расстояние от точки A до прямой пересечения этих плоскостей.

А) 12 см; Б) 6 см; В) 24 см; Г) 18 см; Д) 30 см.

6.95°°. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.47). Укажите ортогональную проекцию $\triangle C_1BD$ на каждую из плоскостей, заданных условиями (А–Д).

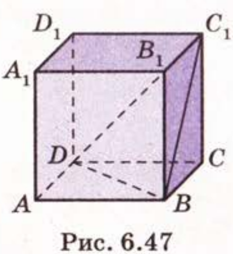


Рис. 6.47

А) ($ABCD$);
Б) (CDD_1C_1);
В) ($A_1B_1C_1D_1$);
Г) (AA_1D_1D);
Д) (AA_1B_1B).

1) $\triangle D_1AD$;
2) $\triangle CBD$;
3) $\triangle B_1BA$;
4) $\triangle C_1B_1D_1$;
5) $\triangle C_1DC$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

6.96°°. Точки A, B и C лежат на одной прямой. $AB = 2$ см, $BC = 5$ см. Точки A_1, B_1 и C_1 –

их ортогональные проекции на плоскость α. Найдите отношение отрезков A_1B_1 и B_1C_1.

А) 2 : 5; Б) 3 : 5; В) 2 : 7; Г) 3 : 7; Д) 5 : 7.

6.97°°. Площадь $\triangle ABC$ равна 18 см^2, $KC \perp (ABC)$. Найдите площадь $\triangle ABK$, если угол между плоскостями (ABK) и (ABC) равен α (рис. 6.48).

А) $\alpha = 30°$; 1) $S_{\triangle ABK} = 36$ см^2;

Б) $\alpha = 45°$; 2) $S_{\triangle ABK} = 18\sqrt{2}$ см^2;

В) $\alpha = 60°$. 3) $S_{\triangle ABK} = 36\sqrt{3}$ см^2;

4) $S_{\triangle ABK} = 12\sqrt{3}$ см^2;

5) $S_{\triangle ABK} = 12\sqrt{2}$ см^2.

А	
Б	
В	

6.98°°. Треугольник ACB является ортогональной проекцией треугольника AKB на плоскость (ABC). Площадь $\triangle ABC$ равна S_0 см^2, а площадь $\triangle AKB$ – S см^2. Идентифицируйте заданным площадям S_0 и S соответствующее значение $\cos\alpha$, где α – угол между плоскостями (ABC) и (AKB).

А) $S_0 = 8$ см^2, $S = 10$ см^2; 1) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$;

Б) $S_0 = 5$ см^2, $S = 15$ см^2; 2) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

В) $S_0 = 9$ см^2, $S = 21$ см^2; 3) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$;

Г) $S_0 = 6$ см^2, $S = 12$ см^2; 4) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$;

Д) $S_0 = 12$ см^2, $S = 18$ см^2. 5) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	

6.99°°. К плоскости квадрата $ABCD$ через точку A проведен перпендикуляр AK (рис. 6.49). Найдите площадь $\triangle KDC$, если сторона квадрата равна 8 см, а $\angle KDA = 45°$.

А) $8\sqrt{2}$ см^2; В) $32\sqrt{2}$ см^2; Д) $128\sqrt{2}$ см^2.

Б) $16\sqrt{2}$ см^2; Г) $64\sqrt{2}$ см^2;

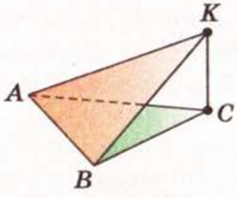


Рис. 6.48

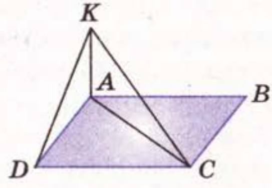


Рис. 6.49

14-Geometrija, 10 kl (Biljanina), rus

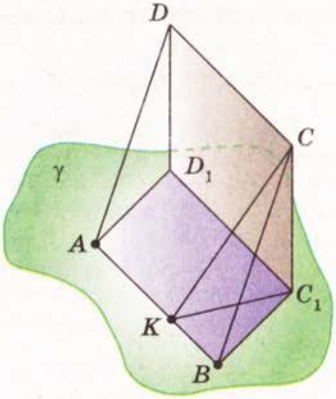


Рис. 6.50

6.100°°. Ортогональной проекцией параллелограмма $ABCD$ на плоскость γ является четырехугольник ABC_1D_1. $CK \perp AB$, $CK = 12$ см, $AB = 15$ см, $\angle CKC_1 = 60°$. Найдите площадь параллелограмма ABC_1D_1 (рис. 6.50).

А) $180\sqrt{2}$ см^2; Г) 45 см^2;

Б) $180\sqrt{3}$ см^2; Д) 30 см^2.

В) 90 см^2;

6.101•. Угол между плоскостями равносторонних треугольников ABC и ABD равен 60°. Найдите расстояние CD, если $AB = 4\sqrt{3}$ см.

6.102•. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка CD, если $AC = 3$ см, $BD = 4$ см, $AB = 13$ см.

6.103•. Дан параллелограмм со сторонами 6 см и 8 см и углом между ними 60°. Найдите площадь ортогональной проекции параллелограмма на плоскость, наклоненную к его плоскости под углом 30°.

6.104•. Дана трапеция с основаниями 7 см и 9 см и высотой 5 см. Найдите угол между плоскостью трапеции и плоскостью ее ортогональной проекции, если площадь этой проекции 20 см^2.

6.105•. Все двугранные углы при основании четырехугольной пирамиды равны между собой. Какая из точек является основанием высоты пирамиды?

6.106•. Одна из боковых граней треугольной пирамиды перпендикулярна основанию, а двугранные углы, образованные основанием с двумя другими боковыми гранями, равны между собой. Какая из точек является основанием высоты пирамиды?

6.107•. Через конец A отрезка AB проведена плоскость α. Точка C делит отрезок AB в отношении 3 : 5, начиная от точки A. Вычислите проекцию отрезка AC на плоскость α, если проекция отрезка AB на эту плоскость равна 48 см.

6.108••. Ортогональной проекцией равнобокой трапеции с высотой 12 см и основаниями 3 см и 9 см на плоскость, параллельную основаниям трапеции, является четырехугольник, в который можно вписать окружность. Определите угол между плоскостью трапеции и плоскостью проекции.

6.109••. Прямая AB параллельна плоскости α; прямая CD пересекает AB под углом $45°$ и образует с плоскостью α угол $30°$. Докажите, что плоскость, которая проходит через прямые AB и CD, образует с плоскостью α угол $45°$.

6.110••. Ортогональной проекцией равнобокой трапеции с основаниями 3 см и 9 см на плоскость, параллельную основаниям трапеции, является четырехугольник, в который можно вписать окружность. Угол между плоскостью трапеции и плоскостью проекции $30°$. Определите площадь проецируемой фигуры.

6.111••. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB лежат в разных плоскостях, угол между которыми равен α. $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см. Найдите угол α и площадь ортогональной проекции треугольника ABC на плоскость (ABD).

6.112••. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB лежат в разных плоскостях, угол между которыми равен α. $AB = 32$ см, $AC = 65$ см, $AD = 20$ см, $CD = 63$ см. Найдите угол α и площадь ортогональной проекции треугольника ABC на плоскость (ABD).

6.113••. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB лежат в разных плоскостях, угол между которыми равен α. $AB = 24$ см, $AC = 13$ см, $AD = 37$ см, $CD = 35$ см. Найдите угол α и площадь ортогональной проекции треугольника ABD на плоскость треугольника ABC.

6.114••. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB лежат в разных плоскостях, угол между которыми равен α. $AB = 32$ см, $AC = 65$ см, $AD = 20$ см, $CD = 63$ см. Найдите угол α и площадь ортогональной проекции треугольника ABD на плоскость треугольника ABC.

6.1. Какие измерения следует произвести, чтобы определить:

1) высоту башни, к основанию которой невозможно подойти;
2) расстояние до здания известной высоты, если к нему невозможно приблизиться?

6.2. Почему тени исчезают в полдень?

6.3. Как измерить высоту дерева, не поднимаясь на его верхушку?

Михаил Васильевич Остроградский (1801–1862)

Математика – наивысшая философская наука, наука истинных поэтов.

М.В. Остроградский

М.В. Остроградский родился 24 сентября 1801 г. в деревне Пашенная (ныне Пашенивка) на Полтавщине в семье помещика средней руки. В 1816 г. будущий ученый поступил вольнослушателем в Харьковский университет, а в сентябре 1817 г. был зачислен студентом физико-математического факультета. Вскоре, оставив обучение, он переехал в Париж, где посещал лекции в Сорбонне и Коллеж де Франс. Математическое дарование Остроградского привлекло внимание известных французских математиков – Лапласа, Коши, Фурье, Ампера, Пуассона, Навье и др. В 1828 г. Михаил Васильевич вернулся в Россию с заслуженной репутацией талантливого ученого и в декабре был избран Петербургской академией наук адъюнктом примерной математики. В 1830 г. он получил звание экстраординарного академика, а через год – ординарного.

М.В. Остроградский вошел в историю не только как выдающийся ученый. Он был также талантливым педагогом, чья деятельность сыграла решающую роль в развитии науки, и прежде всего математики, механики и инженерии, в тогдашней Российской империи. Михаил Васильевич активно пропагандировал физико-математические достижения, создал множество учебников по математике и механике, по которым учились поколения ученых и инженеров.

Украинец Остроградский стал первым отечественным ученым, вышедшим на уровень величайших математиков XIX в. и в эпоху бурного развития науки вместе со славной плеядой европейских ученых создававшим основы современной математики, механики и физики.

Давид Гильберт (1862–1943)

Математический анализ можно в известном смысле назвать единой симфонией бесконечного.

Д. Гильберт

Научная деятельность немецкого математика Д. Гильберта воплотила в себе лучшие традиции выдающихся ученых прошлого. Чрезвычайно острое абстрактное мышление соединялось у него с умением не отрываться от конкретного физического содержания проблемы.

Родился Гильберт близ Кенигсберга в семье судьи. Вся его творческая жизнь была связана с Геттингеном – общепризнанным центром мировой математической мысли того времени.

В 1900 г. на Международном математическом конгрессе в Париже Гильберт сформулировал 23 важнейшие математические проблемы, являющиеся своего рода завещанием математиков прошлого столетия своим преемникам. Этими проблемами занимались ученые всего мира, а решившие хотя бы одну из них считались достойными мирового признания. Имя Гильберта встречается во всех разделах современной математики. Пространство Гильберта, система аксиом Гильберта, теорема Гильберта о базисе, проблемы Гильберта – эти понятия навсегда вошли в науку и известны каждому человеку с математическим образованием. Д. Гильберта всегда отличала оригинальность суждений. «Иногда случается, – говорил он, – что мировоззрение человека становится все уже и уже, направляясь к одной точке. Именно она и становится его точкой зрения». На вопрос, что побудило его заняться физикой, ученый остроумно ответил: «Физика слишком сложна для физиков, чтобы они ею занимались». Один из учеников Гильберта, оставив математику, взялся писать романы. «Почему он начал заниматься этим? – удивлялись все вокруг. – Как может бывший математик писать романы?» «Но это же совсем просто, – отвечал Гильберт. – Для математики у него недоставало фантазии, в то время как ее вполне хватало для написания романов».

Современники немецкого ученого еще при жизни признавали его чрезвычайный талант. «В моих воспоминаниях Гильберт остался величайшим гением, которого я когда-либо видел», – писал М. Лауэ. «Давид Гильберт был одним из действительно великих математиков своего времени. Его труды и его вдохновляющая личность ученого оказали глубокое влияние на развитие математических наук, даже до настоящего времени» (Р. Курант).

Вопросы для самоконтроля

1. Как найти угол между наклонной и плоскостью, к которой она проведена?
2. Может ли угол между прямой и плоскостью быть тупым?
3. Как найти угол между двумя пересекающимися плоскостями?

4. Может ли угол между плоскостями быть тупым?
5. Как найти расстояние от точки до плоскости?
6. Как найти расстояние между двумя параллельными прямыми?
7. Как найти расстояние между прямой и плоскостью, которые параллельны?
8. Как найти расстояние между двумя параллельными плоскостями?
9. Как найти расстояние между скрещивающимися прямыми?
10. Какую фигуру образуют основания всех возможных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки под одинаковыми углами?
11. Могут ли две наклонные различной длины, проведенные из одной точки к плоскости, быть наклоненными к этой плоскости под одинаковым углом?
12. Как сравнить длины ребер тетраэдра, если они образуют равные углы с плоскостью основания?
13. Может ли двугранный угол быть тупым?
14. Какую фигуру образуют точки, равноудаленные от сторон треугольника?
15. Что является геометрическим местом точек, равноудаленных от вершин прямоугольника?
16. Может ли расстояние от точки до плоскости быть больше произвольного расстояния от этой точки до прямой, которая принадлежит этой плоскости?
17. Может ли быть сечением куба прямоугольный треугольник?
18. Может ли быть сечением куба тупоугольный треугольник?
19. Можно ли провести одну прямую, которая образовывала бы прямой угол с каждой стороной треугольника; квадрата; прямоугольника?
20. Как найти расстояние от отрезка до плоскости, если он не находится на прямой, параллельной этой плоскости?
21. Можно ли утверждать, что любая точка прямой, проходящая через середину отрезка, равноудалена от концов этого отрезка?
22. Можно ли утверждать, что любая точка плоскости, проходящая через середину отрезка, равноудалена от концов этого отрезка?
23. Обязательно ли три точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от плоскости, принадлежат плоскости, которая параллельна данной?
24. Может ли ортогональная проекция отрезка быть равной длине этого отрезка?

25. Может ли ортогональная проекция отрезка быть больше длины отрезка?
26. Могут ли ортогональные проекции прямых совпадать?
27. Может ли ортогональная проекция куба быть квадратом?
28. Как построить ортогональную проекцию геометрической фигуры?
29. Какова связь между площадью многоугольника и площадью его ортогональной проекции?
30. Может ли площадь ортогональной проекции многоугольника быть равной площади этого многоугольника?

Тест для самоконтроля

• *Часть 1*

Задания 1–16 содержат варианты ответов, из которых правильным является только *один* или *конкретное количество*. Выберите правильный ответ.

1°. Укажите длину стороны AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$), если $AB = 10$ см, $\angle B = 45°$.

А) 5 см; Б) 2,5 см; В) $2\sqrt{10}$ см; Г) $5\sqrt{3}$ см; Д) $5\sqrt{2}$ см.

2°. Через сторону AK параллелограмма $AKLP$ проведена плоскость δ (рис. 6.51). PB – перпендикуляр к плоскости δ. Определите угол между прямой AP и плоскостью δ.

А) $\angle APB$; В) $\angle APK$; Д) $\angle PAB$.
Б) $\angle APL$; Г) $\angle PLK$;

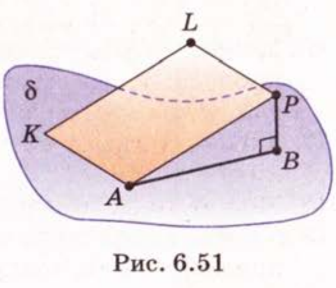


Рис. 6.51

3°. Из точки M к плоскости α под углом 45° проведены наклонная MA и перпендикуляр MB. Найдите длину наклонной MA, если длина ее проекции на плоскость α равна $3\sqrt{2}$ см.

А) 5 см; Б) 9 см; В) 6 см; Г) 18 см; Д) 12 см.

4°. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6.52). Укажите величину угла между прямыми AB и D_1C.

А) 0°; Б) 30°; В) 45°; Г) 60°; Д) 90°.

5°. Треугольник MNA является ортогональной проекцией треугольника MNB на плоскость (MNA) (рис. 6.53). Укажите правильные утверждения.

1) $MB\widehat{\ }(MNA) = \angle BMA$; 4) $(MNB)\widehat{\ }(MNA) = \angle BNA$;
2) $MB\widehat{\ }(MNA) = \angle BMN$; 5) $BN\widehat{\ }(MNA) = \angle BNM$;
3) $(MNB)\widehat{\ }(MNA) = \angle BMA$; 6) $BN\widehat{\ }(MNA) = \angle BNA$.

А) 1, 3 и 5; Б) 2, 4 и 6; В) 1 и 5; Г) 2 и 6; Д) 1 и 6.

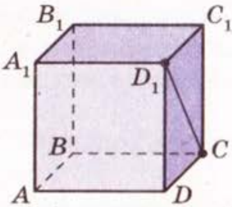


Рис. 6.52

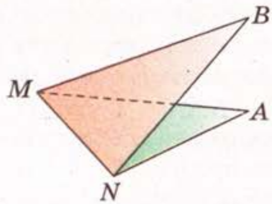


Рис. 6.53

6°. Точка M отдалена от каждой вершины правильного треугольника ABC со стороной 3 см на 2 см. Определите расстояние от точки M до плоскости (ABC).

А) 1 см; Б) 2 см; В) $\sqrt{2}$ см; Г) $\sqrt{3}$ см; Д) 0,5 см.

7°. Точки A, B, C лежат на прямой, перпендикулярной плоскости γ (рис. 6.54). Точки B, F, M принадлежат плоскости γ. Укажите углы, градусная мера которых 90°.

1) $\angle ABF$; 3) $\angle AFB$; 5) $\angle ABM$; 7) $\angle MCB$;
2) $\angle BAM$; 4) $\angle CBF$; 6) $\angle BFC$; 8) $\angle CBM$.

А) 1, 2, 5 и 7; В) 2, 4, 6 и 8; Д) 3, 4, 5 и 6.
Б) 1, 4, 5 и 8; Г) 2, 5, 7 и 8;

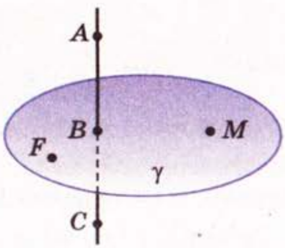


Рис. 6.54

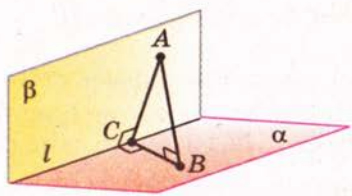


Рис. 6.55

8°. Две плоскости α и β пересекаются по прямой l под углом 45° (рис. 6.55). Точка A принадлежит плоскости β и находится на расстоянии 6 см от плоскости α. Найдите расстояние от точки A до прямой l.

А) 6 см; Б) $3\sqrt{2}$ см; В) $2\sqrt{3}$ см; Г) $6\sqrt{2}$ см; Д) 8 см.

9°°. На рисунке 6.56 изображен куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором проведена диагональ B_1D. Выполните ортогональное проецирование этого отрезка на каждую из граней куба и приведите в соответствие угол между прямой B_1D и соответствующей плоскостью.

А) $B_1D \widehat{\ } (ABC)$;
Б) $B_1D \widehat{\ } (B_1C_1D_1)$;
В) $B_1D \widehat{\ } (BB_1C_1)$;
Г) $B_1D \widehat{\ } (AA_1D_1)$;
Д) $B_1D \widehat{\ } (ABB_1)$;
Е) $B_1D \widehat{\ } (DCC_1)$.

1) $\angle DB_1C$;
2) $\angle B_1DC_1$;
3) $\angle B_1DB$;
4) $\angle AB_1D$;
5) $\angle D_1B_1D$;
6) $\angle A_1DB_1$.

А	
Б	
В	
Г	
Д	
Е	

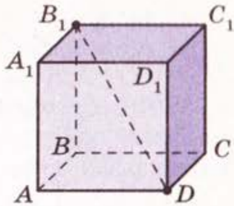


Рис. 6.56

10°°. Из точки K к плоскости ω проведена наклонная длиной 16 см. Длина проекции этой наклонной на плоскость ω равна 8 см. Найдите угол наклона этой наклонной к плоскости ω.

А) 30°; Б) 60°; В) 20°; Г) 80°; Д) 50°.

11°°. Точка A находится на расстоянии 12 см и 16 см от двух взаимно перпендикулярных плоскостей (рис. 6.57). Найдите расстояние от точки A до прямой пересечения этих плоскостей.

А) 12 см; Б) 16 см; В) 14 см; Г) 20 см; Д) 28 см.

12°°. Ребро куба равно a. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей одной грани куба до вершины противоположной ей грани.

А) $\frac{a}{2}$; Б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; В) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; Г) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; Д) a.

13°°. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите расстояние между прямыми DD_1 и AC_1.

А) $\frac{a}{2}$; Б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; В) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; Г) $a\sqrt{2}$; Д) $a\sqrt{3}$.

14°°. Вершина A равностороннего треугольника ABC отдалена от плоскости γ на $3\sqrt{3}$ см (рис. 6.58). Определите угол между плоскостями (ABC) и γ, если длина стороны треугольника равна 12 см.

А) 15°; Б) 30°; В) 45°; Г) 60°; Д) 90°.

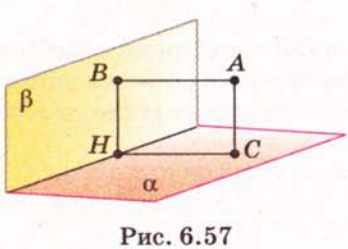


Рис. 6.57

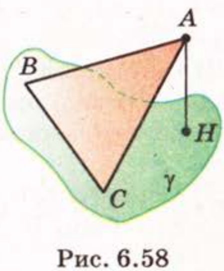


Рис. 6.58

15°°. Ортогональной проекцией треугольника ABC является прямоугольный треугольник AKB с гипотенузой 15 см и катетом 9 см. Угол между плоскостями этих треугольников равен 30°. Найдите площадь треугольника ABC.

А) $36\sqrt{3}$ см²; В) $54\sqrt{2}$ см²; Д) 108 см².

Б) $36\sqrt{2}$ см²; Г) $54\sqrt{3}$ см²;

16°°. Расстояние от точки M до сторон квадрата равно 13 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости квадрата, если его сторона 10 см.

А) 8 см; Б) 11 см; В) 12 см; Г) 14 см; Д) 15 см.

Часть 2

Выполните задания 17–28 с краткой записью хода рассуждений.

17•. Стороны треугольника ABC равны 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего угла треугольника к его плоскости проведен перпендикуляр AF длиной 15 см. Найдите расстояние от точки F до стороны BC треугольника ABC.

18•. Ортогональной проекцией прямоугольника со сторонами 4 см и 6 см является четырехугольник, площадь которого равна 12 см². Найдите угол наклона плоскости прямоугольника к его ортогональной проекции.

19•. Из точки, которая отдалена от плоскости α на 4 см, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы 30° и 45° соответственно, а угол между их проекциями равен 150°. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

20•. Две плоскости пересекаются под углом 60°. Точка A находится на расстоянии 10 см от этих плоскостей. Найдите расстояние от точки A до прямой пересечения этих плоскостей.

21•. Две плоскости пересекаются под углом 60°. Точка B находится на одном расстоянии от этих плоскостей и на расстоянии 16 см от прямой пересечения плоскостей. Найдите расстояние от точки B до этих плоскостей.

22•. Концы отрезка AB принадлежат перпендикулярным плоскостям α и β. Точки A_1 и B_1 – проекции точек A и B соответственно на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 = 3$ см, $BB_1 = 4$ см, $A_1B_1 = \sqrt{11}$ см.

23•. В середине двугранного угла, градусная мера которого 120°, задана точка, расположенная на расстоянии a от каждой грани. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

24•. Плоскости равносторонних треугольников ABC и KBC перпендикулярны. Найдите угол между плоскостями (AKC) и (ABK).

25•. Ортогональной проекцией отрезка AB на плоскость α является отрезок A_1B_1. C – середина отрезка AB. C_1 – проекция точки C на плоскость α. Найдите длины отрезков AA_1 и BB_1, если $CC_1 = 24$ см, $AA_1 : BB_1 = 3 : 5$.

26•. Дан квадрат $ABCD$, сторона которого 6 см. Точка F отдалена от каждой вершины квадрата на 7 см. Найдите расстояние от середины отрезка FC до середины стороны AB.

27•. Из вершины B прямоугольного равнобедренного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) проведен перпендикуляр MB длиной $\sqrt{2}$ см к плоскости (ABC). Найдите площадь треугольника MAC, если $BC = \sqrt{2}$ см.

28•. Точка M удалена от плоскости правильного треугольника ABC на 3 см, а от всех его сторон – на $2\sqrt{3}$ см. Найдите сторону треугольника ABC.

Часть 3

Выполните задания 29–32 с полным обоснованием.

29••. Ребро правильного тетраэдра равно a. Найдите расстояние от его вершины до противоположной грани.

30••. Из точки к плоскости проведены две наклонные, образующие с этой плоскостью углы, сумма которых 90°. Докажите, что проекции наклонных на данную плоскость соотносятся между собой как квадраты длин наклонных.

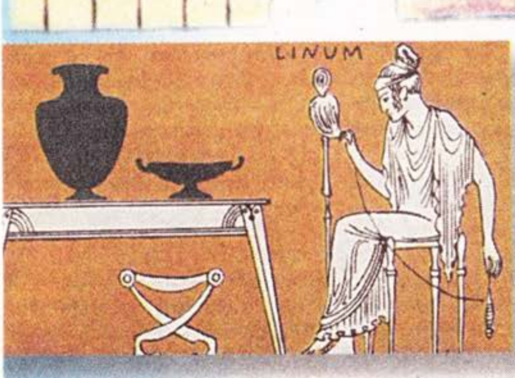
31••. Равнобокая трапеция, периметр которой равен 48 см, а острый угол 60°, лежит в плоскости α. Точка, равноудаленная от всех сторон трапеции, находится на расстоянии 3 см от плоскости α. Найдите расстояние от этой точки до сторон трапеции.

32••. Ортогональной проекцией треугольника, площадь которого 48 см^2, является треугольник со сторонами 14 см, 16 см и 6 см. Вычислите угол между плоскостью этого треугольника и плоскостью его проекции.

МОДУЛЬ 7

Обобщение и систематизация изученного

Геометрия есть
познание всего сущего.
Платон



КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ МОДУЛЯ

- *Основные фигуры геометрии и их расположение в пространстве*
- *Перпендикуляр и наклонная к плоскости*
- *Расстояния и углы в пространстве*
- *Сечение*
- *Проецирование*

Освоив этот модуль, вы узнаете:

- как различать определяемые и неопределяемые понятия, аксиомы и теоремы, свойства геометрических фигур;
- какие пространственные геометрические фигуры являются плоскими, а какие – не плоскими;
- как называют основные понятия стереометрии;
- как формулируются аксиомы стереометрии и следствия из них; определения параллельных и скрещивающихся прямых, параллельных прямой и плоскости, параллельных плоскостей; свойства и признаки параллельности прямых и плоскостей; определение перпендикулярных прямых в пространстве, прямой, перпендикулярной плоскости, перпендикулярных плоскостей; свойства и признаки перпендикулярных прямых и плоскостей;
- как используются аксиомы стереометрии, изученные формулы, свойства для решения несложных геометрических задач;
- как решить несложные задачи на построение сечений куба, прямоугольного параллелепипеда и пирамиды; на применение свойств и признаков параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей;
- как найти и изобразить параллельные и перпендикулярные прямые и плоскости на рисунках и моделях;
- как построить изображения фигур и выполнить на них несложные построения;
- как вычислить расстояния и углы в пространстве;
- как применить отношения параллельности и перпендикулярности между прямыми и плоскостями в пространстве, а также измерения расстояний и углов в пространстве при описании отношений между объектами окружающего мира; изученные свойства и признаки при решении задач;
- как установить и обосновать в пространстве взаимное расположение прямых и плоскостей, в частности параллельность прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей, взаимосвязь параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, скрещиваемость прямых;
- как классифицировать взаимное расположение прямых, прямых и плоскостей, плоскостей в пространстве.

§ 7.1. Основные фигуры геометрии и их расположение в пространстве

Данный модуль предназначен для повторения всего того, что рассматривалось в курсе стереометрии в этом учебном году. В мини-конспекте систематизированы и обобщены основные темы курса, условно разбитые на блоки: основные фигуры геометрии и их расположение в пространстве; перпендикуляр и наклонная к плоскости, расстояния и углы в пространстве; сечения и проецирование.

Согласно структуре построения геометрии как науки для нее определены:

Основные фигуры (неопределяемые) – точка, прямая, плоскость (§ 2.1).

Аксиомы (§ 1.1, § 2.1)

I. Принадлежности

I_1. Какой бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

I_2. Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

I_3. Какой бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

II. Взаимного расположения

II_1. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

II_2. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

II_3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

II_4. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

III. Измерения

III_1. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

III_2. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

IV. Откладывания

IV_1. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины и притом только один.

IV_2. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и притом только один.

IV_3. Каков бы ни был треугольник, существует треугольник, равный ему, в заданном расположении относительно данной полупрямой.

V. Параллельности

V_1. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

Следствия из аксиом (§ 2.2)

1. Через прямую и точку, не принадлежащую ей, можно провести плоскость, и притом только одну.

2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.

3. Через три точки, не принадлежащие прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Взаимное расположение прямых в пространстве (§ 3.1)

Две прямые в пространстве могут:

- пересекаться (если имеют только одну общую точку; если пересекаются под прямым углом, то взаимно перпендикулярны);
- совпадать (имеют две и более общих точек);
- быть параллельными (лежат в одной плоскости и не имеют ни одной общей точки);
- быть скрещивающимися (не лежат в одной плоскости).

Свойства перпендикулярных прямых (§ 5.1).

1. Через произвольную точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

2. Если две пересекающиеся прямые соответственно параллельны двум перпендикулярным прямым, то они также перпендикулярны.

3. Через любую точку пространства, не принадлежащую прямой, можно провести прямую, перпендикулярную данной (см. рис. 5.4, *а*).

4. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых и лежит с ними в одной плоскости, то она перпендикулярна и второй прямой (см. рис. 5.4, *б*).

Свойство параллельности прямых (§ 3.1). Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Признак параллельности прямых (§ 3.1). Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

Признак скрещиваемости прямых (§ 3.1). Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а вторая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве **(§ 3.2)**

Прямая и плоскость в пространстве могут:

• пересекаться (если имеют только одну общую точку; если прямая при пересечении плоскости перпендикулярна произвольной прямой этой плоскости, проходящей через точку пересечения, то прямая перпендикулярна и плоскости);

• быть параллельными (не имеют ни одной общей точки);

• иметь две и более общих точек (прямая принадлежит плоскости).

Свойства перпендикулярности прямой и плоскости (§ 5.2).

1. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой.

2. Две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.

Свойства параллельности прямой и плоскости (§ 3.3).

1. Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая также пересекает эту плоскость.

2. Если прямая параллельна плоскости, то через каждую точку, взятую на этой плоскости, проходит прямая этой плоскости, параллельная данной прямой (см. рис. 3.19).

3. Через произвольную точку, которая не принадлежит плоскости, проходит множество прямых, параллельных этой плоскости (см. рис. 3.20).

4. Если прямая параллельна каждой из плоскостей, которые пересекаются, то она параллельна и прямой их пересечения (см. рис. 3.21).

Признак перпендикулярности прямой и плоскости (§ 5.2). Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости, то она перпендикулярна и данной плоскости.

Признак параллельности прямой и плоскости (§ 3.3). Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве **(§ 4.1)**

Две плоскости в пространстве могут:

• пересекаться по прямой (если имеют одну общую точку; две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым (см. рис. 5.31));

• быть параллельными (не имеют ни одной общей точки);

• совпадать (имеют две общие прямые, которые пересекаются; общие три точки, не лежащие на прямой; общую прямую и точку, не принадлежащую прямой).

Свойства перпендикулярности плоскостей (§ 5.4).

1. Любая плоскость, перпендикулярная линии пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым, которые образуют угол между плоскостями. И наоборот, плоскость, перпендикулярная двум пересекающимся плоскостям, перпендикулярна прямой их пересечения.

2. Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной из них и перпендикулярная их линии пересечения, перпендикулярна второй плоскости.

3. Если две плоскости взаимно перпендикулярны и из произвольной точки одной из них опущен перпендикуляр на вторую, то этот перпендикуляр лежит в первой плоскости.

Свойства параллельности плоскостей (§ 4.2).

1. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

2. Если две параллельные плоскости пересечь третьей, то прямые их пересечения параллельны.

3. Параллельные плоскости, пересекая две параллельные прямые, отсекают на них равные отрезки (отрезки параллельных прямых, находящихся между двумя параллельными плоскостями, равны).

4. Две плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны между собой.

Признак перпендикулярности плоскостей (§ 5.4). Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Признак параллельности плоскостей (§ 4.1). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым второй плоскости, то эти плоскости параллельны.

Упражнения

7.1°. Укажите количество плоскостей, которые можно провести через три точки, лежащие на одной прямой.

А) Одну; Б) две; В) три; Г) четыре; Д) сколь угодно.

7.2°. Укажите количество различных плоскостей, которые можно провести через четыре точки, если каждые три из них не лежат на одной прямой.

А) Одну; Б) две; В) три; Г) четыре; Д) сколь угодно.

7.3°. Точка K не принадлежит плоскости четырехугольника $ABCD$. Определите такое взаимное расположение прямых в пространстве, которое справедливо для четырех из пяти заданных пар прямых (1–5), и такое, которое не удовлетворяет ни одной паре прямых.

А) Параллельны;
Б) пересекаются;
В) скрещиваются.

1) KC и AB;
2) KA и BC;
3) KB и CD;
4) KD и AB;
5) KB и CB.

А			
Б			
В			

7.4°. Через основание AD трапеции $ABCD$ проведена плоскость α, а через середины сторон AD и CD – прямая PQ. Укажите взаимное расположение прямой PQ и плоскости α.

А) $PQ \perp \alpha$; Б) $PQ \cap \alpha$; В) $PQ \parallel \alpha$; Г) $PQ \subset \alpha$.

7.5°. Известно, что плоскость α пересекает боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$, $BC \parallel \alpha$. Укажите взаимное расположение плоскости α и стороны AD трапеции $ABCD$.

А) Параллельны; В) перпендикулярны;
Б) пересекаются; Г) принадлежит плоскости.

7.6°. Известно, что диагональ и сторона трапеции параллельны плоскости α. Укажите взаимное расположение плоскости α и плоскости, в которой лежит трапеция.

А) Пересекаются; Б) параллельны; В) совпадают.

7.7°. Три параллельные прямые a, b и c пересекают плоскость α в трех точках A, B и C, не принадлежащих одной прямой. Определите взаимное расположение плоскости, содержащей прямые a и b, и плоскости, содержащей прямые a и c.

А) Совпадают; Г) пересекаются по прямой b;
Б) параллельны; Д) пересекаются по прямой c.
В) пересекаются по прямой a;

7.8°. Две параллельные прямые a и b, пересекают две параллельные плоскости α и β в точках A, A_1 и B, B_1 соответственно. Укажите пары равных отрезков, если $AB \neq AA_1$.

1) $AA_1 = BB_1$; 3) $A_1B_1 = AA_1$; 5) $A_1B_1 = BB_1$.
2) $AB = BB_1$; 4) $AB = A_1B_1$;

А) 1 и 3; Б) 2 и 4; В) 3 и 5; Г) 1 и 4; Д) 2 и 5.

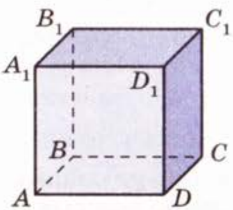


Рис. 7.1

7.9°. Укажите плоскости куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.1), которые пересекаются по прямой CC_1.

А) (ABC) и (CDD_1); Г) (DD_1C_1) и (B_1C_1C);
Б) (B_1BC) и (BCD); Д) (CBD) и (C_1CB_1).
В) $(D_1B_1C_1)$ и (B_1BC);

7.10°. Укажите пары параллельных плоскостей куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.1).

1) (ABC) и (CDD_1); 4) (BCC_1) и (CDB);
2) $(A_1B_1C_1)$ и (BCD); 5) (ADD_1) и (CBB_1).
3) (D_1DC) и (ABB_1);

А) 1, 2 и 3; Б) 2, 3 и 4; В) 2, 3 и 5; Г) 1, 2 и 4; Д) 1, 3 и 5.

7.11°°. Укажите плоскости куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.1), перпендикулярные плоскости CDD_1C_1.

1) AA_1D_1D; 2) $ABCD$; 3) ABB_1A_1; 4) BCC_1B_1; 5) $A_1B_1C_1D_1$.

А) 1, 2, 3 и 4; В) 1, 3, 4 и 5; Д) 1, 2, 3 и 5.
Б) 2, 3, 4 и 5; Г) 1, 2, 4 и 5;

7.12°°. Известно, что плоскость α перпендикулярна прямой b, а прямая b перпендикулярна плоскости γ. Укажите взаимное расположение плоскостей α и γ.

А) Параллельны; В) перпендикулярны;
Б) пересекаются; Г) совпадают.

7.13°°. Плоскости (ABC) и ω параллельны. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, где A_1, B_1, C_1, D_1 – точки плоскости ω; $AA_1 = 12$ см. Найдите длину отрезка CC_1.

А) 12 см; Б) 8 см; В) 6 см; Г) 4 см; Д) 15 см.

7.14°°. Даны три различные плоскости α, β и φ. Известно, что плоскость α перпендикулярна β, а плоскость β перпендикулярна φ. Укажите взаимное расположение плоскостей α и φ.

А) Пересекаются или совпадают;

Б) параллельны или совпадают;

В) параллельны или перпендикулярны;

Г) перпендикулярны или пересекаются;

Д) параллельны или пересекаются.

7.15°°. Известно, что плоскость α параллельна прямой b, а прямая b перпендикулярна плоскости φ. Укажите взаимное расположение плоскостей α и φ.

А) Параллельны;

Б) перпендикулярны;

В) совпадают;

Г) пересекаются, но не перпендикулярны;

Д) параллельны или пересекаются.

7.16°°. Плоскость α параллельна стороне AC треугольника ABC и пересекает его стороны в точках M и K. M – середина AC (рис. 7.2). Найдите длину отрезка MK, если $AB = 20$ см.

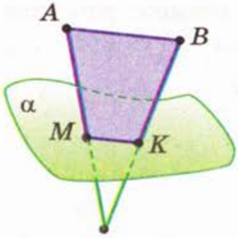


Рис. 7.2

А) 15 см; В) 12 см; Д) 8 см.
Б) 16 см; Г) 10 см;

7.17°°. Прямые OA, OB и OC попарно перпендикулярны, $OA = 4$ см, $OB = 3$ см, $AC = 5$ см. Найдите длину отрезка BC.

А) 3 см; В) $3\sqrt{2}$ см; Д) $3\sqrt{3}$ см.
Б) 4 см; Г) $2\sqrt{3}$ см;

7.18°°. Докажите, что когда диагонали четырехугольника пересекаются, то его вершины лежат в одной плоскости.

7.19•. Точка C лежит на прямой AB, точка D не лежит на прямой AB. Докажите, что плоскости (ABD) и (CDB) совпадают.

7.20•. Даны две прямые, пересекающиеся в точке A. Докажите, что все прямые, которые пересекают обе данные прямые и не проходят через точку A, лежат в одной плоскости.

7.21•. Даны две пересекающиеся прямые a и b. Точки A и A_1 лежат на прямой a, а точки B и B_1 – на прямой b. Докажите, что прямые AB и A_1B_1 лежат в одной плоскости.

7.22•. Точки A, B, C не лежат на одной прямой. $M \in AB$, $K \in AC$, $X \in MK$. Докажите, что точка X принадлежит плоскости (ABC).

7.23•. Прямые a и b пересекаются в точке O, $A \in a$, $B \in b$, $Y \in AB$. Докажите, что прямые a, b и точка Y лежат в одной плоскости.

7.24•. Прямые a и b пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой b и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

7.25•. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость α. Докажите, что прямые AD и DC также пересекают плоскость α.

7.26•. Докажите, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

7.27•. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

7.28•. Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая a, параллельная диагонали BD. Докажите, что прямые a и CD пересекаются.

7.29••. Докажите, что все прямые, пересекающие одну из двух скрещивающихся прямых и параллельные второй, лежат в одной плоскости.

7.30••. $ABCD$ – параллелограмм. Плоскость α проходит через его вершины A и B и не проходит через вершину C. Докажите, что $CD \parallel \alpha$.

7.31••. Плоскости α и β пересекаются по прямой AB. Прямая a параллельна плоскости α и плоскости β. Докажите, что прямые a и AB параллельны.

7.32••. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так, что точка M не принадлежит плоскости параллелограмма, $MA = MC$ и $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна плоскости параллелограмма.

7.33••. Прямая AM перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что прямая BD перпендикулярна плоскости (AMO).

7.34••. Докажите, что когда две плоскости α и β перпендикулярны прямой a, то они параллельны.

7.35••. В тетраэдре $ABCD$ точка M – середина BC, $AB = AC$, $DB = DC$. Докажите, что плоскость $(ADM) \perp BC$.

7.36••. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые можно провести параллельные плоскости.

7.37••. $ABCD$ – параллелограмм, BE и FD – перпендикуляры к плоскости (ABC). Докажите, что $(ABE) \parallel (DFC)$.

7.38••. $ABCD$ – параллелограмм, AN и CK – перпендикуляры к плоскости (ABC). Докажите, что $(ADN) \parallel (KBC)$.

7.39••. Плоскости α и β параллельны плоскости δ. Докажите, что плоскости α и β параллельны.

§ 7.2. Перпендикуляр и наклонная к плоскости, расстояния и углы в пространстве

Перпендикуляр и наклонная (§ 5.3)

Перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной плоскости, называется отрезок, который соединяет данную точку с точкой плоскости и лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости (см. рис. 5.21, *в*). Конец отрезка, лежащий на плоскости, называется ***основанием перпендикуляра.***

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, который соединяет данную точку с точкой плоскости и не является перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий на плоскости, называется ***основанием наклонной***. Отрезок, который соединяет основание перпендикуляра и основание наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется ***проекцией наклонной***.

Если из одной точки вне плоскости провести к ней перпендикуляр и наклонные, то:

1) длина перпендикуляра меньше длины любой наклонной;

2) наклонные, имеющие равные проекции, равны между собой;

3) из двух наклонных большую длину имеет та, которая имеет большую проекцию.

Теорема (*о трех перпендикулярах*)

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и наклонной. И наоборот, если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Углы в пространстве (§ 6.1)

Меньший из углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, называется ***углом между прямыми***. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90°. Угол между параллельными прямыми равен 0°. ***Углом между скрещивающимися*** прямыми называется угол между прямыми, которые пересекаются и соответственно параллельны скрещивающимся.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость. Если прямая $a \perp \alpha$, то угол между ними равен 90°, если $a \parallel \alpha$, то – 0°.

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями вместе с общей прямой, их ограничивающей. Эту прямую называют ***ребром двугранного угла***.

Если двугранный угол пересечь плоскостью, перпендикулярной его ребру, то лучи, по которым она пересекает заданные полуплоскости, образуют ***линейный угол*** (см. рис. 6.3).

Углом между пересекающимися плоскостями называется угол между прямыми, образованными пересечением этих плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной их линии пересечения. Угол между параллельными плоскостями равен 0°.

Расстояния в пространстве (§ 6.2)

Расстоянием между двумя точками A и B называется длина отрезка AB. ***Расстояние от точки A до прямой l*** равно длине перпендикуляра AO, проведенного из этой точки к данной прямой (см. рис. 6.15). ***Расстоянием от точки до плоскости*** называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости (см. рис. 6.16). ***Расстояние между двумя параллельными прямыми*** равно длине общего перпендикуляра этих прямых (см. рис. 6.18). ***Расстояние между параллельными прямой и плоскостью*** равно длине общего перпендикуляра, проведенного из какой-нибудь точки прямой к плоскости. ***Расстояние между параллельными плоскостями*** равно длине общего перпендикуляра, проведенного из какой-нибудь точки одной плоскости ко второй.

Общим перпендикуляром к двум скрещивающимся прямым называется отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный каждой из них.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Она равна расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

Сечения (§ 2.3)

Если хотя бы две точки пространственной геометрической фигуры лежат по разные стороны плоскости, то говорят, что плоскость ее пересекает, плоскость называют ***секущей плоскостью.*** Фигура, состоящая из всех общих точек геометрической фигуры и секущей плоскости, называется ***сечением геометрической фигуры.***

Прямую, по которой плоскость сечения пересекает плоскость любой грани многогранника, называют *следом плоскости сечения.* Этим устанавливается количество следов: следов столько, сколько плоскостей граней пересекает плоскость сечения.

При построении сечения следует помнить:

– через две точки, принадлежащие плоскости, проходит только одна прямая, которая принадлежит этой плоскости;

– чтобы построить линию пересечения двух плоскостей, необходимо найти две точки, которые принадлежат обеим плоскостям, и через них провести линию пересечения;

– при построении сечений многогранников секущей плоскостью следует найти отрезки, по которым секущая плоскость пересекается с гранями многогранника.

Проецирование (§ 4.3 и § 6.3)

Чтобы изобразить пространственные фигуры на плоскости, пользуются разными методами. Один из них – параллельное проецирование.

Параллельное проецирование – это метод изображения произвольной геометрической фигуры на плоскости, при котором все точки фигуры переносятся на плоскость по прямым, параллельным заданной (*направление проецирования*). Каждая геометрическая фигура состоит из точек, поэтому, проецируя последовательно точки фигуры на плоскость, получаем изображение – *проекцию* этой фигуры, а способ выполнения изображения – *параллельное проецирование.*

Свойства параллельного проецирования для прямых и отрезков, не параллельных направлению проецирования:

1. Проекцией прямой является прямая, а проекцией отрезка – отрезок.
2. Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.
3. Соотношения длин отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняются (см. рис. 4.26), т.е. равны соотношениям длин своих проекций, в частности середина отрезка проецируется в середину его проекции.

Параллельное проецирование, направление которого перпендикулярно плоскости проекций, называется ***ортогональным проецированием***. Для ортогонального проецирования выполняются все свойства параллельного проецирования.

Площадь ортогональной проекции произвольного многоугольника на плоскость равна произведению площади многоугольника на косинус угла между его плоскостью и плоскостью проекции.

Упражнения

7.40°. Из точки M к плоскости квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр MD. Выберите правильные утверждения.

1) MD – расстояние от точки M до плоскости $(ABCD)$;
2) MB – расстояние от точки M до стороны AB;
3) MC – расстояние от точки M до стороны BC;
4) AM – расстояние от точки M до стороны AB;
5) MB – расстояние от точки M до плоскости $(ABCD)$.

А) 1, 2 и 3; Б) 2, 3 и 4; В) 3, 4 и 5; Г) 1, 3 и 4; Д) 2, 4 и 5.

7.41°. Условиями (А–В) заданы геометрические фигуры, а условиями (1–5) – проекции некоторых геометрических фигур. Выберите такую фигуру среди (А–В), которая может проецироваться в четыре фигуры (1–5), и такую, которая не может проецироваться ни в одну из них.

А) Треугольник;
Б) квадрат;
В) трапеция.

1) Квадрат;
2) трапеция;
3) ромб;
4) прямоугольник;
5) параллелограмм.

А				
Б				
В				

7.42°. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.3). Выберите правильные утверждения относительно определения угла наклона между прямой и плоскостью.

1) $B_1A\widehat{\ }(ABC) = \angle B_1AB$;
2) $C_1B\widehat{\ }(BCD) = \angle C_1BB_1$;
3) $A_1C\widehat{\ }(ACD) = \angle A_1CA$;
4) $D_1B\widehat{\ }(ABD) = \angle D_1CD$;
5) $A_1D\widehat{\ }(DCB) = \angle A_1DB$.

А) 1 и 3; Б) 2 и 4; В) 3 и 5; Г) 1 и 4; Д) 2 и 5.

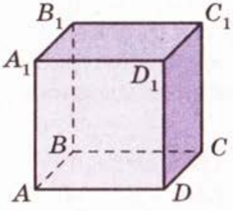


Рис. 7.3

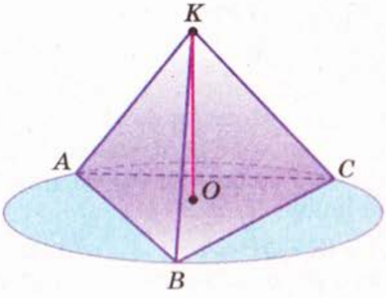


Рис. 7.4

7.43°. Точка O – центр окружности радиуса R, описанной вокруг разностороннего треугольника ABC, а точка K равноудалена от вершин треугольника ABC (рис. 7.4). Укажите правильные утверждения.

1) $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle AOC$;
2) $\triangle KOA = \triangle KOB = \triangle KOC$;
3) $AK\widehat{\ }(ABC) = BK\widehat{\ }(ABC) = CK\widehat{\ }(ABC)$;
4) $AO = BO = CO = R$;
5) $AB = BC = AC = a$, где a – длина отрезка.

А) 1, 2 и 3; Б) 2, 3 и 4; В) 3, 4 и 5; Г) 1, 2 и 4; Д) 1, 3 и 4.

7.44°. Точка O – центр окружности радиуса r, вписанной в разносторонний треугольник ABC, а точка S равноудалена от его сторон (рис. 7.5). $SP \perp AC$, $SQ \perp BC$, $SD \perp AB$. Укажите правильные утверждения.

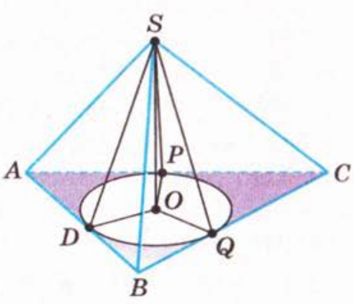


Рис. 7.5

1) $\triangle SAO = \triangle SBO = \triangle SCO$;
2) $\triangle SPO = \triangle SQO = \triangle SDO$;
3) $OP = OQ = OD = r$;
4) $OP \perp AC$, $OQ \perp BC$, $OD \perp AB$;
5) $OA \perp AS$, $OB \perp BS$, $OC \perp CS$.

А) 1, 3 и 4; Б) 2, 3 и 5; В) 2, 4 и 5; Г) 2, 3 и 4; Д) 1, 3 и 5.

7.45°. Прямая MB перпендикулярна сторонам AB и BC треугольника ABC, а точка D принадлежит стороне AC. Определите вид треугольника MBD.

А) Прямоугольный; Б) остроугольный; В) тупоугольный.

7.46°. Прямая KO перпендикулярна диагоналям AC и BD квадрата $ABCD$, пересекающимся в точке O. Определите вид треугольника KOC.

А) Остроугольный; Б) прямоугольный; В) тупоугольный.

7.47°°. Расстояние от точки K до плоскости α равно x см, а наклонная, проведенная из этой самой точки к плоскости, на 3 см длиннее. Определите уравнение, являющееся математической моделью этой задачи, если проекция данной наклонной на плоскость α равна 15 см.

А) $x^2 + (x - 3)^2 = 15^2$; Г) $(x + 3)^2 + 15^2 = x^2$;

Б) $x^2 - (x - 3)^2 = 15^2$; Д) $x^2 + (x + 3)^2 = 15^2$.

В) $x^2 + 15^2 = (x + 3)^2$;

7.48°°. Из точки A к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, длина которой 18 см. Угол между наклонной и плоскостью $60°$. Найдите длину перпендикуляра.

А) 9 см; Б) $9\sqrt{3}$ см; В) $9\sqrt{2}$ см; Г) $6\sqrt{3}$ см; Д) $6\sqrt{2}$ см.

7.49°°. Из точки вне данной плоскости проведены к ней перпендикуляр длиной 6 см и наклонная, длина которой 9 см. Найдите длину проекции перпендикуляра на наклонную.

А) 4 см; Б) 5 см; В) $3\sqrt{2}$ см; Г) $2\sqrt{3}$ см; Д) $6\sqrt{2}$ см.

7.50°°. Точка, взятая на одной из граней двугранного угла, находится от ребра на расстоянии в 2 раза большем, чем от другой грани. Найдите величину двугранного угла.

А) $90°$; Б) $45°$; В) $30°$; Г) $60°$; Д) $15°$.

7.51°°. Точка O – центр квадрата со стороной 4 см. AO – прямая, перпендикулярная плоскости квадрата, $AO = 2\sqrt{2}$ см. Найдите расстояние от точки A до вершин квадрата.

А) 4 см; Б) 8 см; В) $4\sqrt{2}$ см; Г) $3\sqrt{2}$ см; Д) $8\sqrt{2}$ см.

7.52°°. Точка O – центр квадрата $ABCD$. OM – перпендикуляр к плоскости $ABCD$, $AB = 8$ см. Прямая MA наклонена к плоскости квадрата под углом $60°$. Найдите расстояние между точками M и B.

А) $2\sqrt{2}$ см; Б) $3\sqrt{2}$ см; В) $4\sqrt{2}$ см; Г) 8 см; Д) $8\sqrt{2}$ см.

7.53°°. Стороны треугольника ABC равны 10 см, 17 см и 21 см. Из вершины большего угла треугольника к его плоскости проведен перпендикуляр AD, равный 15 см. Найдите расстояние от точки D до стороны BC.

А) 17 см; Б) $\sqrt{241}$ см; В) $17\sqrt{2}$ см; Г) 21 см; Д) $21\sqrt{2}$ см.

7.54°°. $ABCD$ – прямоугольник, MA – перпендикуляр к плоскости прямоугольника, $\angle MCA = 60°$, $DC = 3$ см, $CB = 4$ см. Найдите площадь треугольника MBC.

А) 20 см²; В) $20\sqrt{3}$ см²; Д) $4\sqrt{21}$ см².
Б) $8\sqrt{21}$ см²; Г) $15\sqrt{3}$ см²;

7.55°°. Из точки к плоскости проведены две наклонные, длины которых относятся как 5 : 6. Найдите расстояние от точки до плоскости, если соответствующие проекции наклонных равны 4 см и $3\sqrt{3}$ см.

А) 5 см; Б) 3 см; В) 4 см; Г) 6 см; Д) $\sqrt{11}$ см.

7.56•. Из точки M, взятой вне плоскости β, проведены две наклонные, равные 37 см и 13 см. Проекции этих наклонных относятся как 7 : 1. Найдите расстояние от точки M до плоскости β.

7.57•. Из точки, взятой вне плоскости α на расстоянии 12 см, проведены две наклонные, равные 37 см и 13 см. Найдите отношение проекций этих наклонных на плоскость α.

7.58•. Диагонали ромба равны 12 см и 16 см. Точка M находится вне плоскости ромба и отдалена от всех сторон ромба на 8 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ромба.

7.59•. Точка M равноудалена от сторон ромба и находится на расстоянии 2 см от плоскости ромба. Найдите расстояние от точки M до сторон ромба, если его диагонали равны 12 см и 16 см.

7.60•. Равнобокая трапеция, периметр которой равен 48 см, а острый угол 60°, лежит в плоскости α. Точка, равноудаленная от всех сторон трапеции, находится на расстоянии 3 см от плоскости α. Найдите расстояние от этой точки до сторон трапеции.

7.61•. Трапеция вписана в окружность, причем меньшее ее основание, равное 16 см, стягивает дугу в 60°. На расстоянии 12 см от плоскости трапеции находится точка, равноудаленная от всех вершин трапеции. Найдите расстояние от этой точки до вершин трапеции.

7.62•. Из точки A, взятой вне плоскости α, проведены к ней равные наклонные AB и AC. Расстояние BC между основаниями наклонных равно 10 см. Угол между BC и AB равен 60°, угол между BC и проекцией наклонной AB на плоскость α – 30°. Найдите расстояние от точки A до плоскости α.

7.63•. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Длина одной наклонной равна 13 см, а длина ее проекции – 5 см. Угол между проекциями наклонных равен 120°, а длина отрезка, соединяющего основания наклонных, – 19 см. Найдите длину второй наклонной.

7.64•. В треугольнике ABC стороны $AB = 15$ см, $AC = 13$ см, $CB = 14$ см. Из вершины A проведен к плоскости треугольника перпендикуляр, равный 16 см. Найдите расстояние от концов перпендикуляра до стороны BC.

7.65•. Стороны треугольника равны 17 см, 15 см и 8 см. Через вершину A меньшего угла треугольника проведена прямая AM, перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояние от точки M до прямой, содержащей меньшую сторону треугольника, если известно, что $AM = 20$ см.

7.66••. Катеты прямоугольного треугольника равны 18 см и 32 см. К плоскости треугольника из середины гипотенузы проведен перпендикуляр, равный 12 см. Найдите расстояние от концов перпендикуляра до катетов.

7.67••. Из вершины острого угла прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) проведен перпендикуляр AD к его плоскости. Найдите расстояние от точки D до вершин B и C, если $AC = 15$ см, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см.

7.68••. Точка M находится на одинаковом расстоянии от всех сторон правильного треугольника со стороной 12 см и отдалена от плоскости треугольника на 6 см. Найдите расстояние от точки M до сторон треугольника.

7.69••. Точка M равноудалена от сторон правильного треугольника и находится на расстоянии $6\sqrt{3}$ см от плоскости треугольника. Угол между перпендикуляром и наклонной, проведенными из точки M к плоскости этого треугольника, равен 60°. Найдите сторону этого треугольника.

7.70••. Ортогональной проекцией треугольника, площадь которого равна 48 см^2, является треугольник со сторонами 14 см, 16 см и 6 см. Вычислите угол между плоскостью этого треугольника и плоскостью его проекции.

7.71••. Ортогональной проекцией данного треугольника является треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Плоскость треугольника образует с плоскостью проекции угол 60°. Вычислите площадь данного треугольника.

7.72••. Равнобедренные треугольники имеют общее основание длиной 16 см, а их плоскости образуют между собой угол 60°. Боковая сторона одного треугольника равна 17 см, а боковые стороны другого треугольника взаимно перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников.

7.73••. Равнобедренные треугольники имеют общее основание, равное 16 см. Расстояние между вершинами этих треугольников равно 13 см. Боковая сторона одного треугольника – 17 см. Второй треугольник – прямоугольный. Найдите угол между плоскостями этих треугольников.

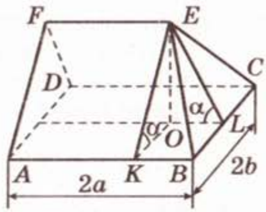
7.74••. Концы отрезка, длина которого равна 24 см, принадлежат двум перпендикулярным плоскостям. Расстояния от концов отрезка до линии пересечения данных плоскостей соответственно равны 12 см и $12\sqrt{2}$ см. Вычислите углы, образованные отрезком с этими плоскостями.

7.75••. Из концов отрезка, принадлежащих двум перпендикулярным плоскостям, до линии пересечения данных плоскостей проведены перпендикуляры, равные $4\sqrt{2}$ см и 4 см. Расстояние между основаниями перпендикуляров равно 4 см. Вычислите углы, образованные отрезком с этими плоскостями.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

7.1. Спроецирована четырехскатная крыша. Докажите, что проекции ребер крыши – это биссектрисы углов прямоугольника, который является общим контуром плана крыши.

7.2. Для дома прямоугольной формы необходимо сделать четырехскатную крышу, изображенную на рисунке, с размерами $AB = 2a$ м, $BC = 2b$ м. Все скаты крыши образуют с горизонтом одинаковый угол, равный α. Вычислите, сколько квадратных метров железа нужно для покрытия крыши, если на швы и отходы предусматривается расход железа, составляющий k % от площади крыши.



Ответ. $\dfrac{4ab}{\cos\alpha}\left(1+\dfrac{k}{100}\right)$ м.

7.3. В безветренную погоду идет «косой» дождь. Как с помощью листа фанеры определить угол, образуемый траекторией падающих капель с горизонтальной плоскостью? Выполните соответствующий рисунок.

Указание. Следует разместить лист фанеры таким образом, чтобы его плоскость была приблизительно перпендикулярна плоскости, которую определяют траектория движения капель и ее проекция на горизонтальную плоскость. Тогда на горизонтальной плоскости получим прямоугольник $ADFE$, на который дождь не падает. Далее следует измерить соответствующие отрезки и найти тангенс угла между ними.

7.4. Над детской кроватью, занимающей площадь S_1, планируют повесить полог из двух одинакового размера прямоугольных занавесок, ширина которых порознь равна длине кровати; каждая занавеска занимает площадь S_2. Обе занавески верхними концами прикреплены к планке, закрепленной параллельно над кроватью и по длине равной длине кровати. Определите высоту планки над кроватью, если ее длина равна n и края занавесок доходят до верхних краев кровати (предполагается, что занавески натянуты в виде плоскостей). Решите задачу для таких числовых данных: $n = 1$ м 20 см, $S_1 = 6000$ см^2, $S_2 = 7800$ см^2. Выполните соответствующий рисунок.

Указание. $\dfrac{\sqrt{4S_2^2 - S_1^2}}{2n}$. *Ответ.* 0,5 м.

7.5. Основанием четырехскатной крыши является прямоугольник со сторонами 18 м и 12 м. Углы наклона скатов крыши одинаковы и равны 40°. Сколько черепицы понадобится для покрытия крыши, если на 1 м^2 уходит 15 штук черепицы?

Указание. Воспользуйтесь (частично) результатом предыдущей задачи.

7.6. Изобразите геометрические образы угла между прямыми, угла между прямой и плоскостью, угла между двумя плоскостями, используя в качестве модели шестигранный карандаш и раскрытую книгу.

7.7. Покажите на изображении крыши (задача 7.1), имеющей две плоскости симметрии, направления, по которым будет стекать дождевая вода.

Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987)

Действительно хорошо преподавать математику может только тот, кто сам ею увлечен.

А.Н. Колмогоров

«Можно прямо сказать, что А.Н. Колмогоров не имеет себе равных среди математиков нашего времени» (П.С. Александров).

Родился А.Н. Колмогоров в Тамбове, где задержалась его мать, возвращаясь из Крыма. Она умерла во время родов, и все заботы о мальчике взяла на себя сестра матери. Нелегким был путь Андрея Николаевича в большую математику. Он рано начал зарабатывать на хлеб – служил проводником на железнодорожном транспорте. Школу окончил экстерном.

В 1920 г. Колмогоров поступил на физико-математический факультет Московского университета и стал учеником Н.Н. Лузина. Будучи студентом, продолжал работать.

Научная деятельность Андрея Николаевича поражает разнообразием интересов, мыслей и глубиной проникновения в суть научных проблем. Вот неполный перечень тех областей математики, в которых ученый добился значительных результатов: теория ортогональных рядов, дескриптивная теория множеств, математическая логика, классическая теория вероятностей, геометрия, случайные процессы, математическая статистика, функциональный анализ, теория приближений, топология, дифференциальные уравнения, теория стрельбы, турбулентность, теория алгоритмов, динамические системы, классическая механика, метрическая теория функций, теория информации, алгоритмическая теория вероятностей. Важной составляющей его исследованияй являются работы в области смежных наук: в физике, биологии, геологии, океанологии, метеорологии, кристаллографии, философии, истории математики и т.д. В каждой области, которой занимался ученый, он достигал вершин.

Значительный вклад Колмогоров сделал и в топологию. Он ввел понятие когомологии, сформулировал идею топологического векторного пространства, а также добился существенных результатов в представлении функций нескольких переменных функциями меньшего числа переменных. Кроме того, Колмогоров работал над усовершенствованием школьных программ по математике, написал несколько школьных учебников.

Начиная с 1920 г. вся деятельность А.Н. Колмогорова была связана с Московским государственным университетом, в котором он создал всемирно известную научную школу. Андрей Николаевич был всецело увлечен наукой, поэтому всю жизнь его окружали талантливые ученики, 10 из которых стали академиками; под его непосредственным руководством более 80 научных сотрудников защитили свои диссертации.

А.Н. Колмогоров – лауреат Ленинской и Государственной премий СССР, награжден семью орденами Ленина, удостоен звания Героя Социалистического Труда. Он был членом более чем 20 зарубежных академий и научных обществ.

А.Н. Колмогорова по праву считают одним из величайших ученых XX в.

Павел Сергеевич Александров (1896–1982)

Русский математик П.С. Александров прожил яркую и красивую жизнь. Родился будущий ученый в семье врача в подмосковном городке Богородске (ныне г. Ногинск). Уже в 14 лет он увлекся математикой, однако вместе с тем хорошо знал и любил литературу, особенно поэзию, музыку, театр.

В 19 лет, на втором году обучения на математическом факультете Московского университета (1913–1917), Александров решил задачу – *теорему о мощности так называемых борелевских множеств* (научным руководителем исследования был Н.Н. Лузин – представитель нового тогда теоретико-множественного направления). Это достижение позволило ему встать в первые ряды московских математиков.

Следующим заданием Лузина, определенным для молодого ученого, стала так называемая континуум-проблема – одна из сложнейших задач того времени. Именно эта задача изменила жизнь Павла Сергеевича. Попытка ее решить была относительно неудачной, поэтому ученый усомнился в своих математических способностях. (Позднее выяснилось, что в рамках идей и методов школы Лузина решение было невозможно.) Александров бросил университет и стал режиссером в театре, заведовал театральной секцией народного образования, читал лекции по литературе и музыке. Однако этот период жизни ученого был недолгим. В 1921 г. он вернулся в Московский университет и никогда больше его не оставлял.

Наиболее продуктивным этапом научной деятельности Александрова стало сотрудничество с П.С. Урысоном. Вместе они создали новое направление геометрии – *основы топологии* и в 1921–1924 гг. сделали фундаментальный вклад в основы теоретико-множественной топологии. За эти работы П.С. Александрова в 1929 г. избирают членом-корреспондентом Академии наук СССР. В 1929 г. он становится профессором Московского университета, а в 1932 г. – президентом Московского математического общества. С 1953 г. Александров – академик АН СССР; в 1954 г. входит в состав редколлегии «Математической энциклопедии», редактирует журнал «Успехи математических наук». В 1969 г. удостоен звания Героя Социалистического Труда.

П.С. Александров разработал гомологическую теорию размерности. Он являлся почетным президентом Московского математического общества (1964), членом многих академий наук и научных обществ, лауреатом многочисленных премий, основателем советской топологической школы, получившей мировое признание. П.С. Александров был высококультурным человеком, наделенным талантами организатора и педагога.

Алексей Васильевич Погорелов (1919–2002)

В школе два главных предмета – родной язык и геометрия. Один учит человека грамотно излагать мысли, второй – дедуктивному мышлению.

А.В. Погорелов

А.В. Погорелов родился 3 марта 1919 г. в г. Короча (Белгородская область).

Интерес к математике у него появился еще в 13–14 лет в связи с успешным выступлением на математических олимпиадах для школьников в годы обучения в средней школе № 80 г. Харькова. Это и определило дальнейшую судьбу ученого. В 1936 г. он стал студентом физико-математического факультета Харьковского университета, а в 1941 г., с началом Великой Отечественной войны, был призван в армию и направлен в Военно-воздушную академию им. Жуковского (Москва).

После окончания войны Алексей Васильевич продолжил обучение и в 1947 г. в Московском университете защитил кандидатскую диссертацию, после чего перевелся в Харьковский университет, где в 1948 г. защитил докторскую диссертацию. Эта работа удостоилась Сталинской премии (1950) – первой из шести престижных премий, которыми были отмечены научные достижения Погорелова. Благодаря фундаментальным результатам ученого отечественная школа геометрии во второй половине XX в. занимала ведущее место в мире.

С 1960 г. Алексей Васильевич начал работать во вновь созданном в Харькове Физико-техническом институте низких температур им. Б.И. Веркина АН УССР, где возглавил отделение геометрии. Уже будучи ученым с мировым именем, Погорелов занялся созданием учебника для школы, в основу изложения которого была положена «строгая и прозрачная система аксиом». Изучая по нему геометрию, выросло не одно поколение школьников. С момента массового внедрения в школы (1982) учебник Погорелова более двух десятилетий переиздавался многомиллионными тиражами на разных языках. В школах Украины он используется и теперь.

В Физико-техническом институте низких температур им. Б.И. Веркина Алексей Васильевич проработал 40 лет – до отъезда в Москву в 2000 г.

Первоклассные учебники А.В. Погорелова для вузов и средней школы, как и все его научно-педагогическое наследие, вошли в сокровищницу мировой науки и продолжают служить людям.

А.В. Погорелов – заслуженный деятель науки и техники Украины, почетный гражданин г. Харькова, лауреат Государственной премии СССР (1950), Международной премии имени Лобачевского (1959), Ленинской премии (1962), Государственной премии УССР (1974), Премии АН УССР им. Крылова (1988), Премии НАН Украины им. Боголюбова (1998).

Тест для самоконтроля

Часть 1

Задания 1–16 содержат варианты ответов, из которых правильным является только *один* или *конкретное количество*. Выберите правильный ответ.

1°. Через три точки пространства проведены различные плоскости. Выберите три возможных расположения этих точек.

А) Лежат на двух параллельных прямых;

Б) лежат на одной прямой;

В) лежат на трех непересекающихся прямых;

Г) лежат на двух пересекающихся плоскостях;

Д) лежат на двух различных пересекающихся прямых.

2°. Точка M не принадлежит плоскости треугольника ABC. Укажите взаимное расположение прямых MC и AB.

А) Совпадают;

Б) скрещиваются;

В) перпендикулярны;

Г) параллельны;

Д) пересекаются, но не перпендикулярны.

3°. Две прямые m и k плоскости α пересекаются в точке O, а две прямые a и b плоскости β – в точке Q. Определите взаимное расположение плоскостей α и β, если $m \parallel a$, $k \parallel b$.

А) Совпадают; Б) пересекаются; В) параллельны.

4°. Укажите скрещивающиеся прямые, которые содержат ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7.6).

А) CD и A_1B_1; Г) AA_1 и CC_1;

Б) B_1C_1 и AD; Д) BB_1 и DD_1.

В) A_1D_1 и AB;

5°. Укажите для правильного треугольника его возможные проекции.

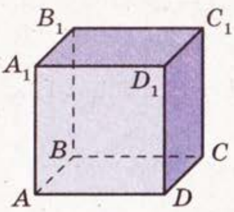


Рис. 7.6

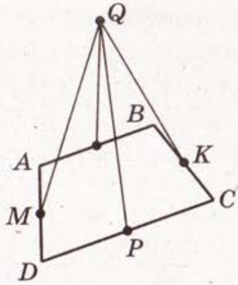


Рис. 7.7

1) Правильный треугольник;
2) равнобедренный треугольник;
3) прямоугольный треугольник;
4) разносторонний треугольник;
5) одна точка;
6) три точки;
7) отрезок;
8) четырехугольник.

А) 1, 2, 4, 5 и 7; В) 1, 2, 4, 7 и 8; Д) 2, 3, 5, 6 и 7.
Б) 2, 3, 4, 5 и 8; Г) 1, 2, 3, 4 и 7;

6°. Точка Q равноудалена от сторон трапеции $ABCD$, $QM \perp AD$, $QP \perp CD$, $DC \parallel AB$ (рис. 7.7). Определите два отрезка, которые будут равными при любом виде трапеции.

1) QA; 2) QM; 3) QD; 4) QP; 5) QC; 6) QB.

А) 1 и 6; Б) 2 и 4; В) 3 и 5; Г) 3 и 6; Д) 1 и 5.

7°. Прямая PA перпендикулярна плоскости ромба $ABCD$, O – точка пересечения его диагоналей. Укажите отрезок, который является расстоянием между скрещивающимися прямыми AP и BD.

А) AC; Б) PC; В) BO; Г) PO; Д) AO.

8°. Прямая KO перпендикулярна диагоналям AC и BD квадрата $ABCD$, пересекающимся в точке O. Определите вид треугольника KOA.

А) Остроугольный; Б) прямоугольный; В) тупоугольный.

9°°. Известно, что прямая a перпендикулярна прямой b, а прямая b перпендикулярна плоскости φ. Укажите взаимное расположение прямой a и плоскости φ.

А) Параллельны; В) перпендикулярны;
Б) пересекаются; Г) прямая принадлежит плоскости.

10°°. Известно, что плоскость α перпендикулярна прямой b, а прямая b параллельна прямой c. Укажите взаимное расположение прямой c и плоскости α.

А) Параллельны;
Б) перпендикулярны;

В) прямая принадлежит плоскости;

Г) параллельны или прямая принадлежит плоскости;

Д) параллельны или пересекаются.

11°°. Плоскость α, параллельная основанию BC трапеции $ABCD$, пересекает стороны AB и CD в точках M и K соответственно. M – середина AB, $AD = 10$ см, $BC = 4$ см (рис. 7.8). Найдите длину отрезка MK.

А) 8 см; В) 14 см; Д) 10,5 см.

Б) 7 см; Г) 12 см;

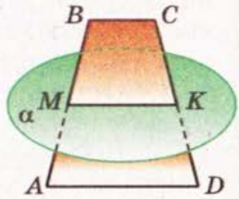


Рис. 7.8

12°°. Концы ребер куба, выходящие из одной вершины, соединены отрезками. Площадь треугольника, который образовался при этом, равна $\sqrt{12}$ см^2. Найдите длину ребра куба.

А) $2\sqrt{2}$ см; Б) $4\sqrt{2}$ см; В) $2\sqrt{3}$ см; Г) 2 см; Д) 3 см.

13°°. Расстояние от точки M до всех вершин квадрата равно 5 см, диагональ квадрата – 6 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости квадрата.

А) 3 см; Б) 4 см; В) 2 см; Г) 5 см; Д) 8 см.

14°°. Отрезок MK – средняя линия треугольника ABC ($M \in AC$, $K \in AB$), в котором $\angle C = 90°$. Отрезок PK – перпендикуляр к плоскости (ABC). Определите прямые углы.

1) PKA; 3) PMC; 5) PMB; 7) PBM;

2) PCB; 4) PBC; 6) PKM; 8) PAC.

А) 1, 4 и 7; Б) 3, 5 и 8; В) 2, 6 и 8; Г) 1, 3 и 6; Д) 2, 4 и 7.

15°°. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через ребра A_1D_1 и BC проведена плоскость. Укажите линейные углы, определяющие угол между плоскостями (A_1D_1CB) и (BCC_1B_1).

1) $\angle C_1D_1C$; 2) $\angle B_1A_1D_1$; 3) $\angle D_1CC_1$; 4) $\angle B_1BA_1$; 5) $\angle B_1A_1B$.

А) 1 и 2; Б) 2 и 3; В) 3 и 4; Г) 4 и 5; Д) 1 и 5.

16°°. Из данной точки к плоскости проведены две наклонные, разность длин которых равна 6 см, их проекции на эту плоскость равны 27 см и 15 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости.

А) 36 см; Б) 39 см; В) 33 см; Г) 30 см; Д) 42 см.

● ***Часть 2***

Выполните задания 17–28 с краткой записью хода рассуждений.

17°. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12 см. Вне плоскости треугольника дана точка, которая находится на расстоянии 10 см от каждой его вершины. Найдите расстояние от этой точки до плоскости треугольника.

18•. Основание и высота равнобедренного треугольника равны 4 см. Данная точка находится на расстоянии 6 см от плоскости треугольника и на одинаковом расстоянии от его вершин. Найдите это расстояние.

19•. Из некоторой точки пространства к данной плоскости проведены перпендикуляр, равный 12 см, и наклонная длиной 13 см. Вычислите проекцию перпендикуляра на наклонную.

20•. К плоскости прямоугольника $ABCD$ через его вершину D проведен перпендикуляр DK, конец которого K удален от стороны AB на 2,4 см, от стороны BC – на 2,8 см, от вершины B – на 3,6 см. Найдите длину перпендикуляра DK.

21•. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен $30°$, больший катет – 6 см. Из вершины острого угла B проведен перпендикуляр $BK = 2\sqrt{6}$ см к плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки K до катета AC.

22•. Дан треугольник со сторонами 26 см, 28 см и 30 см. Точка M удалена от всех сторон треугольника на 17 см и проецируется во внутреннюю точку треугольника. Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника.

23•. Стороны треугольника равны 20 см, 65 см и 75 см. Из вершины большего угла треугольника к его плоскости проведен перпендикуляр, длина которого 60 см. Найдите расстояние от концов перпендикуляра до большей стороны треугольника.

24•. Площадь ромба равна 120 см^2, а его сторона – 12 см. Точка M удалена от всех сторон ромба на 13 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ромба.

25•. Площадь равностороннего треугольника равна $27\sqrt{3}$ см^2. Найдите расстояние между плоскостью треугольника и точкой, удаленной от каждой из его вершин на 10 см.

26•. Из точки, находящейся на расстоянии 4 см от плоскости, проведены к этой плоскости две наклонные длиной 5 см и $4\sqrt{5}$ см. Угол между проекциями этих наклонных равен $60°$. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

27•. Из концов отрезка, принадлежащих двум взаимно перпендикулярным плоскостям, к линии пересечения данных плоскостей проведены перпендикуляры, расстояние между основаниями которых равно 3 см. Проекции отрезка на эти плоскости равны $3\sqrt{2}$ см и $3\sqrt{3}$ см. Вычислите углы, образованные отрезком с данными плоскостями.

28•. Отрезок длиной 25 см опирается концами на две взаимно перпендикулярные плоскости. Расстояния от концов отрезка до плоскостей равны 15 см и 16 см. Найдите проекции отрезка на каждую из плоскостей.

Часть 3

Выполните задания 29—32 с полным обоснованием.

29••. В прямоугольной трапеции $ABCD$ боковые стороны равны 24 см и 25 см, а большая диагональ BD является биссектрисой прямого угла. Из вершины тупого угла C к плоскости трапеции проведен перпендикуляр CM длиной $7\sqrt{15}$ см. Найдите расстояние от точки M до вершины A.

30••. Вершина C равностороннего треугольника ABC, сторона которого 8 см, отдалена от плоскости α на $2\sqrt{3}$ см. Вычислите угол между плоскостью треугольника ABC и плоскостью α, если сторона AB лежит в плоскости α.

31••. Периметр равнобедренного треугольника равен 128 см, а медиана, проведенная к основанию, 32 см. Расстояния от точки пространства до вершин треугольника равны по 65 см. Найдите расстояние от этой точки до плоскости данного треугольника.

32••. Прямая a параллельна плоскости ω. Через точки A и B прямой a проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость ω в точках A_1 и B_1 соответственно. Найдите площадь четырехугольника AA_1B_1B, если $A_1B_1 = 13$ см, $AA_1 = 14$ см, $A_1B = 15$ см.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

1.13. 16 см. **1.14.** 18 см и 30 см. **1.15.** 1 см или 11 см. **1.16.** 51° и 102°. **1.17.** 20 см; 15 см; 40 см; 35 см; 55 см. **1.49.** 13 см. **1.50.** $AB \parallel CD$. **1.51.** $7\frac{2}{3}$ см; $8\frac{2}{3}$ см; $11\frac{2}{3}$ см. **1.52.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **1.53.** 14 см. **1.54.** $8\sqrt{3}$ см. **1.55.** 17 см. **1.56.** 24 см. **1.57.** 4,8 см. **1.58.** 18 см. **1.59.** $48\sqrt{3}$ см. **1.60.** 20 см и 25 см. **1.61.** 10 см. **1.62.** 2,5 см и 12,5 см. **1.63.** 54 см^2. **1.64.** $66\sqrt{3}$ см^2. **1.65.** 25 см. **1.66.** 1) 150 см^2; 2) 336 см^2. **1.67.** $96\sqrt{3}$ см^2. **1.68.** 100π см^2. **1.69.** $10\sqrt{3}$ см^2. **1.81.** 15 см. **1.82.** $64\sqrt{3}$ см^2. **1.83.** $2\sqrt{13}$ см. **1.84.** 240 см^2. **1.85.** 20 см. **1.86.** 1500 см^2. **1.87.** 72 см. **1.88.** 60 см. **3.20.** $a + b$. **3.34.** 4 см. **3.36.** 6 см. **3.37.** 5 : 2. **3.53.** 48 см. **3.54.** 18 см. **3.55.** 1) 20 см; 2) 6,4 см; 3) 30 см; 4) $\frac{c(a+b)}{a}$. **3.58.** 1) 12 см; 2) 10 см и 12 см. **4.19.** 2 м. **4.22.** 3) $18\sqrt{2}$ см^2. **4.33.** a. **4.34.** Да. **4.40.** 32 см. **4.41.** 6 см. **4.42.** 20 см. **4.46.** 17,5 см; 21 см. **4.64.** 3) 18 см^2. **5.9.** $3a\sqrt{2}$ см; $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ см^2. **5.10.** 1) $15\sqrt{2}$ см; 2) $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{61})$ см; 3) $(5 + \sqrt{34} + \sqrt{41})$ см; 4) $a(\sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{13})$ см. **5.12.** $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2}$; $(5 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{13})$ см. **5.13.** $(6\sqrt{5} + 2\sqrt{17})$ см. **5.47.** 13 см и $4\sqrt{10}$ см. **5.48.** 13 см. **5.49.** 5 см и 9 см. **5.50.** 9 см. **5.51.** 24 см и $20\sqrt{2}$ см. **5.52.** 12 см. **5.53.** $2\sqrt{6}$ см. **5.54.** 26 см. **5.55.** 24 см. **5.56.** 3 см. **5.57.** 9,6 см. **5.58.** 12 см. **5.59.** 3,5 дм^2. **5.60.** 15 см. **5.61.** $12\sqrt{3}$ см. **5.62.** 30 см. **5.63.** 6 см. **5.75.** $2\sqrt{3}$ см. **5.82.** 20 см и 24 см. **5.83.** 7 см и 15 см. **6.21.** 60°. **6.22.** 60°. **6.23.** 12 см. **6.27.** $5\sqrt{3}$ см. **6.29.** 3 см. **6.30.** 3 см. **6.31.** 9 см. **6.32.** 5 см. **6.33.** 30°. **6.34.** 60°. **6.35.** 30°. **6.36.** 15 см; 30°. **6.37.** 24 см. **6.38.** 4 см или 8 см. **6.40.** a; 45°. **6.61.** 6,2 см. **6.62.** $\sqrt{68{,}5}$; 8. **6.63.** 12 см. **6.64.** 30 см. **6.65.** $\sqrt{18{,}75}$ см. **6.66.** 8 см. **6.67.** 6 см. **6.68.** 4 см. **6.69.** 17 см. **6.70.** 9 см. **6.71.** 29 см. **6.72.** 35 см. **6.76.** 8 см. **6.77.** 6,4 см. **6.78.** $6\sqrt{3}$ см. **6.79.** 15 см. **6.80.** 8 см. **6.81.** 8 см. **6.82.** 13 см. **6.83.** 36 см. **6.84.** 12 см. **6.85.** 8 см. **6.101.** 6 см. **6.102.** 12 см. **6.103.** 36 см^2. **6.104.** 60°. **6.107.** 18 см. **6.108.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$. **6.110.** 36 см^2. **6.111.** $\alpha = \arccos\frac{1}{14}$; $S = \frac{30}{7}$ см^2. **6.112.** $\alpha = \arccos\frac{2}{21}$; $S = \frac{632}{7}$ см^2. **6.113.** $\alpha = \arccos\frac{1}{14}$; $S = 30$ см^2. **6.114.** $\alpha = \arccos\frac{2}{21}$; $S = \frac{640}{21}$ см^2.

7.56. 12 см. **7.57.** 7 : 1. **7.58.** 6,4 см. **7.59.** 5,2 см. **7.60.** 6 см. **7.61.** 20 см. **7.62.** $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ см. **7.63.** 20 см. **7.64.** 20 см. **7.65.** 25 см. **7.66.** 15 см и 20 см. **7.67.** $3\sqrt{41}$ см и $\sqrt{433}$ см. **7.68.** $4\sqrt{3}$ см. **7.69.** $36\sqrt{3}$ см. **7.70.** 30°. **7.71.** 168 см^2. **7.72.** 13 см. **7.73.** 60°. **7.74.** 45° и 30°. **7.75.** 45° и 30°.

МОДУЛЬ 1. Тест для самоконтроля
Части 2 и 3

Задание	17	18	19	20	21	22
Ответ	50 %	90° и 270°	8,5 см	5 см	$8\sqrt{2}\pi$ см	9 см
Задание	23	24	25	26	27	28
Ответ	28 см и 36 см	4 см	34 см	9 см	52 см	4 см
Задание	29	30	31	32		
Ответ	2,6 см и 33,8 см	120 см	60°	2187 см^2		

МОДУЛЬ 3. Тест для самоконтроля
Части 2 и 3

Задание	17	18	19	20	21	22
Ответ	31,5 см	4,9 см	2 см	22 см	10 см	21 см
Задание	23	24	25	26	27	28
Ответ	8 см	$\frac{bc}{a+c}$; 8 см	21 см	21 см	2 см	6 см
Задание	29	30				
Ответ	27 см	7 см; 12 см; 13 см				

МОДУЛЬ 4. Тест для самоконтроля
Части 2 и 3

Задание	17	18	19	20	21	22
Ответ	3,2 см	3 см	4,5 см	14 см	20 см	$9\sqrt{3}$ см^2
Задание	23	24	25	26	27	28
Ответ	10 см	1,5 см	6 см^2	6 см	9 см и 15 см	128 см^2
Задание	29 (4)	30 (2)				
Ответ	4,5 см; 13,5 см	12 см				

МОДУЛЬ 5. Тест для самоконтроля
Части 2 и 3

Задание	17	18	19	20	21	22
Ответ	5 см	12 см	3 см	$4\sqrt{43}$ см	26 см	15 см
Задание	23	24	25	26	27	28
Ответ	8 см	45 см	36 см	$\sqrt{15}$ см	8 см	24 см

МОДУЛЬ 6. Тест для самоконтроля

Части 2 и 3

Задание	17	18	19	20	21	22
Ответ	17 см	$60°$	$4\sqrt{5}$ см	20 см	8 см	6 см
Задание	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
Ответ	$\frac{2\sqrt{3}a}{3}$ см	$\arccos\frac{1}{5}$	18 см и 30 см	1,75 см	$\sqrt{6}$ см^2	6 см
Задание	**29**	**30**	**31**			
Ответ	$\frac{a\sqrt{6}}{3}$	6 см	$30°$			

МОДУЛЬ 7. Тест для самоконтроля

Части 2 и 3

Задание	17	18	19	20
Ответ	8 см	6,5 см	$11\frac{1}{13}$ см	0,8 см
Задание	**21**	**22**	**23**	**24**
Ответ	6 см	15 см	16 см и $4\sqrt{241}$ см	12 см
Задание	**25**	**26**	**27**	**28**
Ответ	8 см	7 см	$45°$ и $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\arccos\frac{4}{5}$ и $\arccos\frac{3\sqrt{41}}{25}$
Задание	**29**	**30**	**31**	**32**
Ответ	$2\sqrt{610}$ см	$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$	60 см	168 см^2

СОДЕРЖАНИЕ