А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

8

ГЕОМЕТРІЯ

ГІМНАЗІЯ

УДК 373:513
ББК 22.151.0я721
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1/11-852 від 21.03.2008 р.)

ISBN 978-966-474-008-8

ВІД АВТОРІВ

Любі восьмикласники!

У цьому навчальному році ви продовжуватиме вивчати геометрію. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу і красиву науку, а отже, з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі у тестовій формі, розміщені в кінці кожного параграфа.

Кожний пункт завершує особлива рубрика, яку ми назвали «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте». У ній зібрано задачі, для розв'язання яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни. Вони розвивають «геометричний зір» та інтуїцію.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Давайте перетворимо шкільний курс геометрії у зрозумілий і привабливий предмет.

Бажаємо творчого натхнення і терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

- n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;
- $n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- $n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;
- О━ задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;
- ⊙ доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;
- ⊖ доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;
- ⊛ доведення теореми, не обов'язкове для вивчення;
- ▲ закінчення доведення теореми.

ЧОТИРИКУТНИКИ §1

У цьому параграфі розглядається знайома вам з попередніх класів геометрична фігура **чотирикутник**. Ви познайомитеся з окремими видами чотирикутника: паралелограмом, прямокутником, ромбом, квадратом, трапецією. Вивчите властивості цих фігур і дізнаєтеся про ознаки, за допомогою яких серед чотирикутників можна розпізнати зазначені фігури.

Ви побачите, що властивості відрізка, який сполучає середини сторін трикутника, можуть слугувати ключем до розв'язування цілого ряду задач.

Як виміряти дугу кола? Навколо якого чотирикутника можна описати коло? В який чотирикутник можна вписати коло? Вивчивши матеріал цього параграфа, ви отримаєте відповіді на ці запитання.

1. Чотирикутник та його елементи

Відрізки AB і BC, зображені на рисунку 1, мають тільки одну спільну точку B, яка є кінцем кожного з них. Такі відрізки називають **сусідніми**. Наприклад, на рисунку 2 кожні два відрізки є сусідніми.

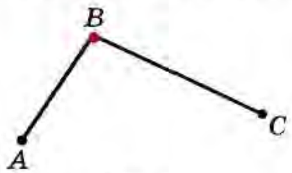


Рис. 1

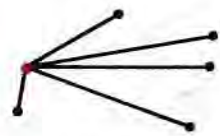
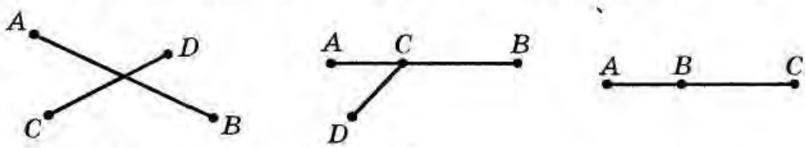


Рис. 2

Відрізки AB і CD на рисунку 3, *а*), *б*) не є сусідніми. Також не є сусідніми відрізки AB і AC на рисунку 3, *в*).



а) *б*) *в*)

Рис. 3

Розглянемо фігуру, яка складається з чотирьох точок A, B, C, D і чотирьох відрізків AB, BC, CD, DA таких, що ніякі два сусідні відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідні відрізки не мають спільних точок (рис. 4).

Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на рисунку 5 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками AB, BC, CD і DA на-

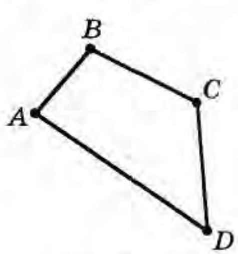


Рис. 4

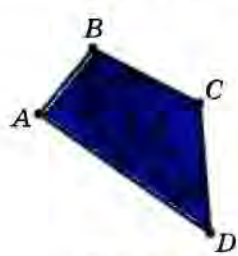


Рис. 5

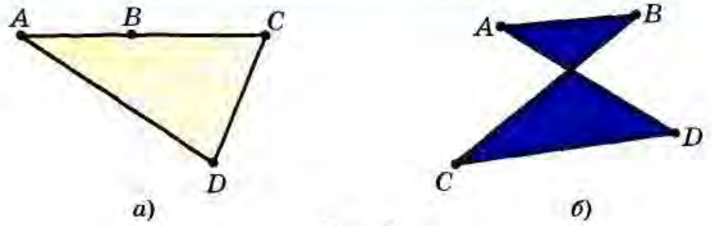


Рис. 6

зивають **чотирикутником**. Точки A, B, C, D називають **вершинами** чотирикутника, а відрізки AB, BC, CD, DA — **сторонами** чотирикутника.

На рисунку **6**, *а*), *б*) зображено фігури, які складаються з чотирьох відрізків AB, BC, CD, DA і частини площини, яку вони обмежують. Проте ці фігури не є чотирикутниками. Поясніть чому.

Сторони чотирикутника, які є сусідніми відрізками, називають **сусідніми сторонами** чотирикутника. Вершини, які належать одній стороні, називають **сусідніми вершинами** чотирикутника. Сторони, які не є сусідніми, називають **протилежними сторонами** чотирикутника. Несусідні вершини називають **протилежними вершинами** чотирикутника.

На рисунку 7 зображено чотирикутник, у якого, наприклад, сторони MQ і MN є сусідніми, а сторони NP і MQ — протилежними. Вершини Q і P — сусідні, а вершини M і P — протилежні.

Чотирикутник називають і позначають за його вершинами. Наприклад, на рисунку 4 зображено чотирикутник $ABCD$, а на рисунку 7 — чотирикутник $MNPQ$. При позначенні чотирикутника букви, що стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам чотирикутника. Наприклад, чотирикутник, зображений на рисунку 7, можна позначити ще так: $PQMN$, або $MQPN$, або $NPQM$ тощо.

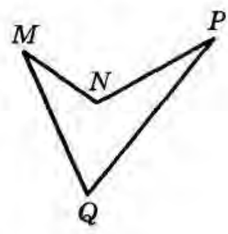
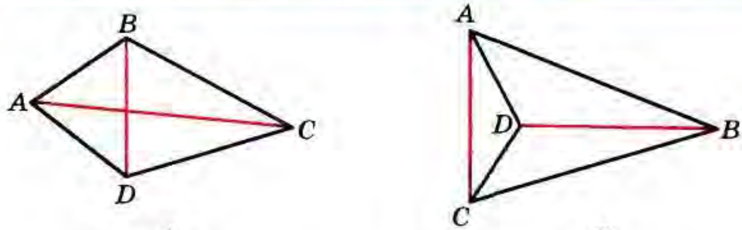


Рис. 7

Відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника, називають **діагоналлю**. На рисунку 8 відрізки AC і BD — діагоналі чотирикутника $ABCD$.



а) *б)*

Рис. 8

Кути ABC, BCD, CDA, DAB (рис. 9) називають **кутами чотирикутника** $ABCD$. У цьому чотирикутнику всі вони менші від розгорнутого кута. Такий чотирикутник називають **опуклим**. Однак у чотирикутнику один з кутів може бути більшим за розгорнутий. Наприклад, на рисунку 10 кут B чотирикутника $ABCD$ більший за 180°. Такий чотирикутник називають **неопуклим**[1].

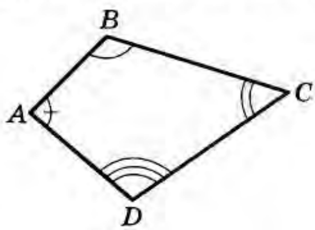


Рис. 9

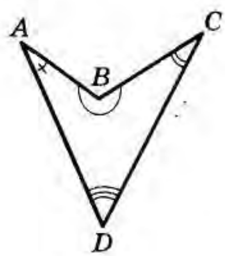
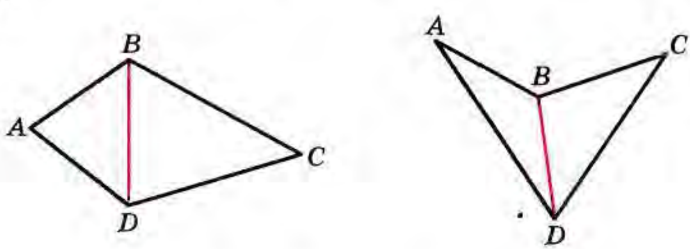


Рис. 10

Теорема 1.1. ***Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.***



а) *б)*

Рис. 11

[1] Докладніше з поняттям «опуклість» ви познайомитесь у пункті 19.

Доведення. ⊙ У чотирикутнику проведемо діагональ, яка розбиває його на два трикутники. Наприклад, на рисунку 11 це діагональ BD. Тоді сума кутів чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі кутів трикутників ABD і CBD. Оскільки сума кутів трикутника дорівнює $180°$, то сума кутів чотирикутника дорівнює $360°$. ▲

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають **периметром** чотирикутника.

Задача. *Доведіть, що довжина будь-якої сторони чотирикутника менша від суми довжин трьох інших його сторін.*

Розв'язання. Розглянемо довільний чотирикутник $ABCD$ (рис. 12). Покажемо, наприклад, що $AB < AD + DC + CB$.

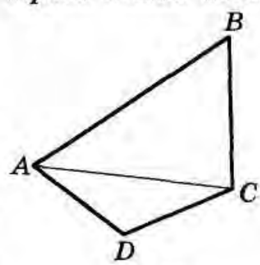


Рис. 12

Проведемо діагональ AC. З $\Delta\ ABC$ за нерівністю трикутника отримуємо: $AB < AC + CB$. Аналогічно з $\Delta\ ADC$: $AC < AD + DC$.

Отже, $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

?

1. Поясніть, які відрізки називають сусідніми.
2. Поясніть, яку фігуру називають чотирикутником.
3. Які сторони чотирикутника називають сусідніми? протилежними?
4. Які вершини чотирикутника називають сусідніми? протилежними?
5. Як називають і позначають чотирикутник?
6. Що називають діагоналлю чотирикутника?
7. Який чотирикутник називають опуклим? неопуклим?
8. Сформулюйте теорему про суму кутів чотирикутника.
9. Що називають периметром чотирикутника?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1.° Накресліть опуклий чотирикутник, у якого:

1) три кути тупі;

2) два сусідніх кути — прямі, а два інших не є прямими;

3) одна діагональ точкою перетину діагоналей ділиться навпіл, а друга не ділиться навпіл;

4) діагоналі перпендикулярні.

2.° Накресліть довільний чотирикутник, позначте його вершини буквами M, K, E, F. Укажіть пари його протилежних сторін, протилежних вершин, сусідніх сторін. Наведіть які-небудь три позначення цього чотирикутника.

3.° Накресліть опуклий чотирикутник, у якого:

1) три кути гострі;

2) два протилежні кути прямі, а решта не є прямими;

3) діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

ВПРАВИ

4.° Серед фігур, зображених на рисунку 13, укажіть чотирикутники.

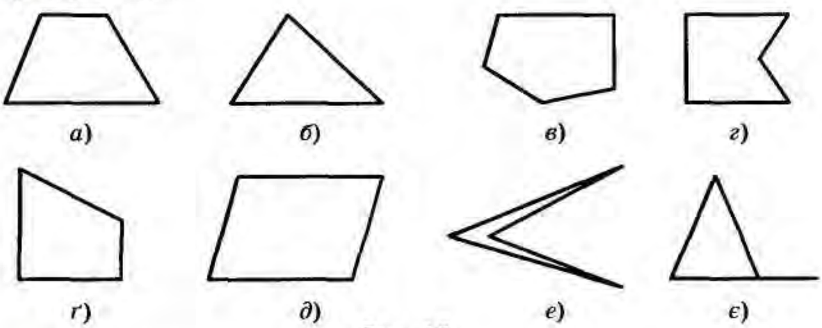


Рис. 13

5.° Серед чотирикутників, зображених на рисунку 14, укажіть: 1) опуклі; 2) неопуклі.

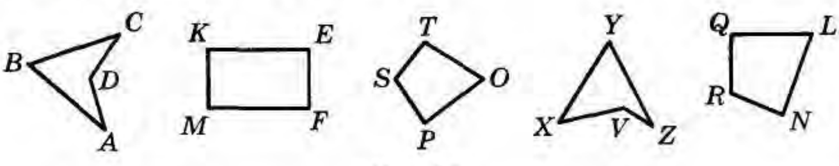


Рис. 14

6.° Наведіть які-небудь 4 позначення чотирикутника, зображеного на рисунку 15. Укажіть:

1) вершини чотирикутника;
2) його сторони;
3) усі пари сусідніх вершин;
4) пари протилежних вершин;
5) усі пари сусідніх сторін;
6) пари протилежних сторін;
7) діагоналі чотирикутника.

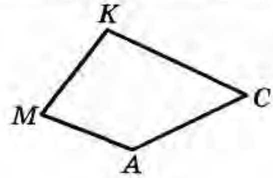


Рис. 15

7.° Чому дорівнює четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути відповідно дорівнюють 78°, 89° і 93°?

8.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони рівні між собою.

9.° У чотирикутнику $ABCD$ $\angle B = 150°$, $\angle A = \angle C = \angle D$. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

10.° Один з кутів чотирикутника у 2 рази менший від другого кута, на 20° менший від третього і на 40° більший за четвертий. Знайдіть кути чотирикутника.

11.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні до чисел 2, 3, 10 і 21. Опуклий чи неопуклий цей чотирикутник?

12.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо три його кути пропорційні до чисел 4, 5 і 7, а четвертий кут дорівнює їх півсумі. Опуклий чи неопуклий цей чотирикутник?

13.° Чи може чотирикутник мати:
1) три прямих кути, а четвертий — гострий;
2) три прямих кути, а четвертий — тупий;
3) чотири прямих кути;
4) чотири гострих кути;
5) два прямих і два тупих кути;
6) два прямих, один гострий і один тупий кути?

У разі позитивної відповіді нарисуйте такий чотирикутник.

14.° Периметр чотирикутника дорівнює 63 см. Знайдіть його сторони, якщо друга сторона становить $\frac{2}{3}$ першої, третя — 50 % другої, а четверта — 150 % першої.

15.° Знайдіть сторони чотирикутника, якщо одна з них на 2 см більша за другу, на 6 см менша від третьої, у 3 рази менша від четвертої, а периметр дорівнює 64 см.

16.° У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і BC рівні, а діагональ BD утворює з цими сторонами рівні кути. Доведіть, що сторони CD і AD теж рівні.

17.° Діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, одна з його сторін дорівнює 6 см. Чому дорівнює протилежна їй сторона чотирикутника?

18.° У чотирикутнику $MNKP$ $MN = NK$, $MP = PK$, $\angle M = 100°$. Знайдіть кут K.

19.° У чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC утворює зі сторонами AB і AD рівні кути та зі сторонами CB і CD теж рівні кути, $AB = 8$ см, $BC = 10$ см. Знайдіть периметр чотирикутника $ABCD$.

20.• У трикутнику ABC $\angle A = 44°$, $\angle B = 56°$. Бісектриси AK і BM трикутника перетинаються в точці O. Знайдіть кути чотирикутника: 1) $MOKC$; 2) $AOBC$.

21.• У трикутнику ABC $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$. Висоти AE і BF трикутника перетинаються в точці H. Знайдіть кути чотирикутника: 1) $CFHE$; 2) $ACBH$.

22.• Знайдіть діагональ чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 80 см, а периметри трикутників, на які ця діагональ розбиває даний чотирикутник, дорівнюють 36 см і 64 см.

23.• Чи можуть сторони чотирикутника дорівнювати:

1) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 9 дм; 2) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 10 дм?

24.•• У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle C = 90°$. Доведіть, що бісектриси двох інших кутів чотирикутника або паралельні, або лежать на одній прямій.

25.•• Доведіть, що коли бісектриси двох протилежних кутів опуклого чотирикутника паралельні або лежать на одній прямій, то два інших кути чотирикутника рівні.

26.•• Побудуйте чотирикутник за його сторонами та одним з кутів.

27.•• Побудуйте чотирикутник за трьома сторонами і двома діагоналями.

28.•• Побудуйте чотирикутник за його сторонами і однією з діагоналей.

29.* Побудуйте чотирикутник $ABCD$ за кутами A і B, сторонами AB і BC та сумою сторін AD і CD.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

30. Пряма c перетинає кожну з прямих a і b (рис.16). Укажіть пари різносторонніх і пари односторонніх кутів, які при цьому утворилися. Яке взаємне розміщення прямих a і b, якщо: 1) $\angle 1 = \angle 4$; 2) $\angle 1 = 20°$, $\angle 3 = 170°$?

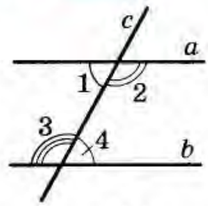


Рис. 16

31. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 17) $\angle C = 110°$, $\angle D = 70°$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

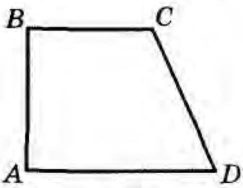


Рис. 17

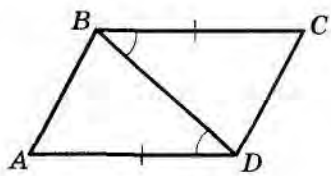


Рис. 18

32. У чотирикутнику $ABCD$ (рис. 17) $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle C = 100°$. Установіть взаємне розміщення прямих BC і AD та прямих AB і CD.

33. На рисунку 18 $AD = BC$, $\angle ADB = \angle CBD$. Доведіть, що $AB = CD$ і $AB \parallel CD$.

34. Відрізок BK — бісектриса трикутника ABC. Пряма DK паралельна стороні AB і перетинає сторону BC у точці D, $\angle BDK = 116°$. Знайдіть $\angle BKD$.

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 12, 13, 14 на с. 197–198.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

35. Білу площину довільно забризкано чорною фарбою. Доведіть, що на площині знайдеться відрізок завдовжки 1 м, кінці якого зафарбовано одним кольором.

2. Паралелограм. Властивості паралелограма

Означення. **Паралелограмом називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.**

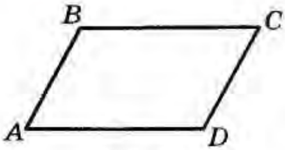


Рис. 19

На рисунку 19 зображено паралелограм $ABCD$: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Теорема 2.1. ***У паралелограма протилежні сторони рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 20 зображено паралелограм $ABCD$. Проведемо діагональ AC. Доведемо, що трикутники ABC і CDA рівні.

У цих трикутниках сторона AC — спільна, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC, кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих AB і CD та січній AC. Отже, $\triangle ABC = \triangle CDA$ за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$ і $BC = AD$. ▲

Теорема 2.2. ***У паралелограма протилежні кути рівні.***

Доведення. ⊙ При доведенні попередньої теореми було встановлено, що $\triangle ABC = \triangle CDA$ (рис. 20). Звідси $\angle B = \angle D$. Також з рівностей $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$ випливає, що $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Отже, $\angle BAD = \angle BCD$. ▲

Теорема 2.3. ***У паралелограма діагоналі точкою перетину діляться навпіл.***

Доведення. ⊙ На рисунку 21 зображено паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведемо, що трикутники AOD і COB рівні.

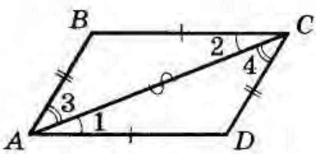


Рис. 20

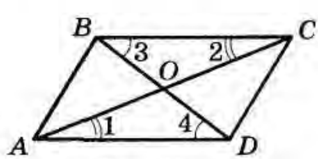


Рис. 21

Дійсно, $\angle 1$ і $\angle 2$ та $\angle 3$ і $\angle 4$ рівні як різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січних AC і BD відповідно. За теоремою 2.1 $AD = BC$. Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AO = OC$, $BO = OD$. ▲

Означення. Висотою паралелограма називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.

На рисунку 22 кожний з відрізків AF, QE, BM, PN, CK є висотою паралелограма $ABCD$.

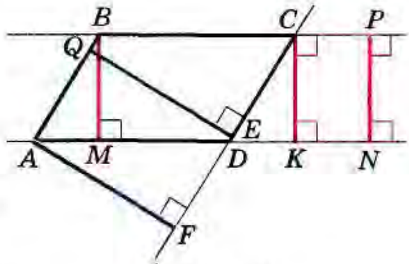


Рис. 22

З курсу геометрії 7-го класу ви знаєте, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої. Тому $AF = QE$ і $BM = PN = CK$.

Кажуть, що **висоти** BM, CK, PN **відповідають сторонам** BC і AD, а висоти AF, QE — сторонам AB і CD.

Задача. *Доведіть, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці.*

Розв'язання. Через кожну вершину даного трикутника ABC проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 23).

З побудови випливає, що чотирикутники AC_1BC і $ABCB_1$ — паралелограми. Звідси $AC_1 = BC = AB_1$. Отже, точка A є серединою відрізка B_1C_1.

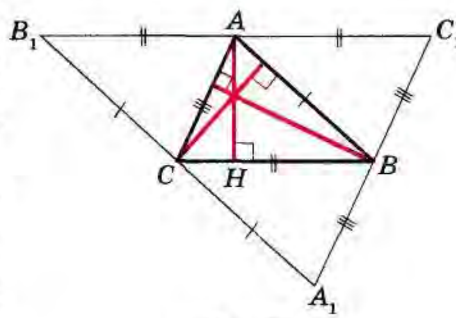


Рис. 23

Проведемо висоту AH трикутника ABC. Оскільки $B_1C_1 \parallel BC$, то $AH \perp B_1C_1$. Звідси пряма AH — серединний перпендикуляр сторони B_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно можна довести, що прямі, які містять дві інші висоти трикутника ABC, є серединними перпендикулярами сторін C_1A_1 і A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$.

Як відомо, серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Приклад. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить протилежну сторону у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 60 см.

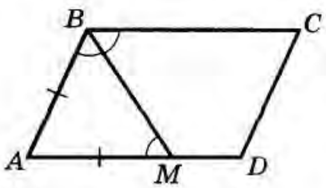


Рис. 24

Розв'язання. Бісектриса тупого кута B паралелограма $ABCD$ (рис. 24) перетинає сторону AD у точці M, $AM : MD = 2 : 1$.

Кути ABM і CBM рівні за умовою.

Кути CBM і AMB рівні як різносторонні при $BC \parallel AD$ та січній BM.

Тоді $\angle ABM = \angle AMB$. Отже, $\triangle BAM$ — рівнобедрений, $AB = AM$.

Нехай $MD = x$ см, тоді $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Периметр паралелограма дорівнює $2\,(AB + AD)$. Ураховуючи умову, маємо:

$$2\,(2x + 3x) = 60;$$
$$x = 6.$$

Отже, $AB = 12$ см, $AD = 18$ см.

Відповідь: 12 см, 18 см.

?

1. Який чотирикутник називають паралелограмом?
2. Яку властивість мають протилежні сторони паралелограма?
3. Яку властивість мають протилежні кути паралелограма?
4. Яку властивість мають діагоналі паралелограма?
5. Що називають висотою паралелограма?
6. Чому дорівнює сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма? Відповідь обґрунтуйте.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

36.° На рисунку 25 зображено паралелограм $ABCD$. Зробіть такий рисунок у зошиті. Проведіть з точок B і M висоти, які відповідають стороні AD паралелограма, а з точки K — висоту, яка відповідає стороні AB.

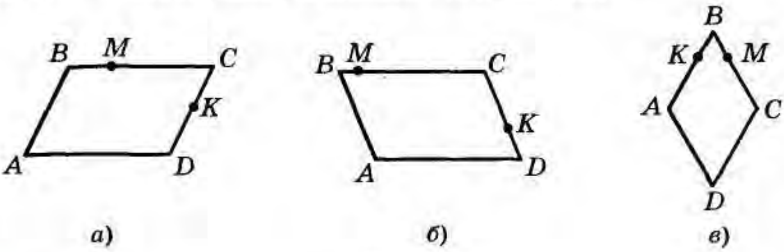


Рис. 25

ВПРАВИ

37.° Дві паралельні прямі перетинають три інші паралельні прямі. Скільки при цьому утворилося паралелограмів?

38.° На рисунку 26 зображено паралелограми. Знайдіть, не виконуючи вимірювань, на яких рисунках величини кутів або довжини відрізків позначено неправильно (довжини відрізків наведено в сантиметрах).

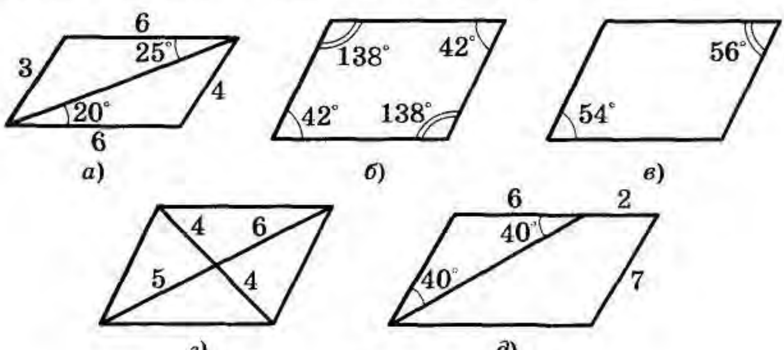


Рис. 26

39.° Чи вистачить 40 см дроту, щоб виготовити з нього паралелограм зі сторонами:

1) 14 см і 8 см;

2) 16 см і 4 см;

3) 12 см і 6 см?

40.° Периметр паралелограма дорівнює 112 см. Знайдіть його сторони, якщо: 1) одна з них на 12 см менша від другої; 2) дві його сторони відносяться як 5 : 9.

41.° Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них у 5 разів більша за другу, а периметр паралелограма дорівнює 96 см.

42.° У паралелограмі $ABCD$ $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см, O — точка перетину його діагоналей. Знайдіть периметр трикутника COD.

43.° Один з кутів паралелограма дорівнює 70°. Знайдіть решту його кутів.

44.° У трикутнику ABC $\angle A = 35°$. Через довільну точку, яка належить стороні BC, проведено дві прямі, паралельні сторонам AB і AC трикутника. Визначте вид чотирикутника, що утворився, та знайдіть усі його кути.

45.° Знайдіть кути паралелограма $ABCD$ (рис. 27), якщо $\angle ABD = 68°$, $\angle ADB = 47°$.

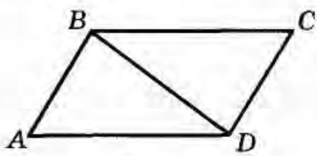


Рис. 27

46.° У паралелограмі $ABCD$ діагональ AC утворює зі стороною AB кут, який дорівнює 32°, $\angle BCD = 56°$. Знайдіть $\angle CAD$ і $\angle D$.

47.° Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці M. Визначте вид трикутника ABM.

48.° Знайдіть кути паралелограма, якщо:

1) сума двох його кутів дорівнює 100°;

2) різниця двох його кутів дорівнює 20°;

3) два його кути відносяться як 3 : 7.

49.° Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них:

1) у 2 рази більший за другий;

2) на 24° менший від другого.

50.° Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 10 см. Чи може одна з його діагоналей дорівнювати 16 см?

51.$^{\bullet}$ Висота BK паралелограма $ABCD$ ділить його сторону AD на відрізки AK і KD такі, що $AK = 4$ см, $KD = 6$ см. Знайдіть кути і периметр паралелограма, якщо $\angle ABK = 30°$.

52.$^{\bullet}$ Один з кутів паралелограма дорівнює 45°. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює 3 см і ділить сторону паралелограма навпіл. Знайдіть цю сторону паралелограма та кути, які утворює діагональ, що сполучає вершини тупих кутів, зі сторонами паралелограма.

53.$^{\bullet}$ У паралелограмі $ABCD$ $\angle C = 30°$, висота BH, проведена до сторони CD, дорівнює 7 см, а периметр паралелограма — 46 см. Знайдіть сторони паралелограма.

54.$^{\bullet}$ Дано паралелограм $ABCD$ і трикутник MKN. Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle N$?

55.$^{\bullet}$ Доведіть, що вершини B і D паралелограма $ABCD$ рівновіддалені від прямої AC.

56.$^{\bullet}$ Доведіть, що будь-який відрізок, який проходить через точку перетину діагоналей паралелограма і кінці якого належать протилежним сторонам паралелограма, ділиться цією точкою навпіл.

57.$^{\bullet}$ Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 24 см, $\angle ABC = 160°$, діагональ AC утворює зі стороною AD кут 10°. Знайдіть сторони паралелограма.

58.$^{\bullet}$ Діагональ BD паралелограма $ABCD$ утворює зі стороною AB кут 65°, $\angle C = 50°$, $AB = 8$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

59.$^{\bullet}$ Знайдіть кути паралелограма $ABCD$, якщо $BD \perp AB$ і $BD = AB$.

60.$^{\bullet}$ Діагональ паралелограма утворює з його сторонами кути 30° і 90°. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 36 см.

61.$^{\bullet}$ Поза паралелограмом $ABCD$ проведено пряму, паралельну його діагоналі BD, яка перетинає прямі AB, BC, CD і AD у точках E, M, F і K відповідно. Доведіть, що $MK = EF$.

62.$^{\bullet}$ Паралельно діагоналі AC паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає відрізки AB і BC та прямі AD

і CD у точках M, N, P і K відповідно. Доведіть, що $PM = NK$.

63. Один з кутів, утворених при перетині бісектриси кута паралелограма з його стороною, дорівнює 24°. Знайдіть кути паралелограма.

64. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть периметр даного паралелограма, якщо $AB = 12$ см, $MC = 16$ см.

65. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 3 : 5, рахуючи від вершини тупого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 66 см.

66. Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ перетинає сторону CD у точці K так, що відрізок CK у 5 разів більший за відрізок KD. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 88 см.

67. У паралелограмі $ABCD$ $AD = 12$ см, $AB = 3$ см, бісектриси кутів B і C перетинають сторону AD у точках E і F, причому точка E лежить між точками A і F. Знайдіть довжину відрізка EF.

68. Кут між висотою BH паралелограма $ABCD$ і бісектрисою BM кута ABC дорівнює 24°. Знайдіть кути паралелограма.

69. Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює гострому куту паралелограма.

70. Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута, дорівнює тупому куту паралелограма.

71. Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 30°. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 4 см і 6 см.

72. Висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, утворюють кут 150°, сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 18 см. Знайдіть висоти паралелограма.

73. Через довільну точку основи рівнобедреного трикутника проведено прямі, паралельні його бічним сторонам.

Доведіть, що периметр утвореного чотирикутника дорівнює сумі бічних сторін даного трикутника.

74.* Через кожну вершину трикутника ABC проведено пряму, паралельну протилежній стороні. Сума периметрів усіх утворених паралелограмів дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

75.* Побудуйте паралелограм:

1) за двома сторонами і кутом між ними;
2) за двома діагоналями і стороною;
3) за стороною, діагоналлю і кутом між ними.

76.* Побудуйте паралелограм:

1) за двома сторонами і діагоналлю;
2) за двома діагоналями і кутом між ними.

77.** Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Побудуйте паралелограм, вершинами якого є дані точки. Скільки розв'язків має задача?

78.** Точка перетину бісектрис двох сусідніх кутів паралелограма належить його стороні. Знайдіть відношення сусідніх сторін паралелограма.

79.** На стороні BC паралелограма $ABCD$ існує така точка M, що $BM = MD = CD$. Знайдіть кути паралелограма, якщо $AD = BD$.

80.** Побудуйте паралелограм:

1) за стороною, проведеною до неї висотою і діагоналлю;
2) за двома діагоналями і висотою;
3) за гострим кутом і двома висотами, які відповідають двом сусіднім сторонам.

81.** Побудуйте паралелограм:

1) за двома сторонами і висотою;
2) за діагоналлю і двома висотами, які відповідають двом сусіднім сторонам.

82.* З вершини B паралелограма $ABCD$ опустили перпендикуляр BE на діагональ AC. Через точку A проведено пряму m, перпендикулярну до прямої AD, а через точку C — пряму n, перпендикулярну до прямої CD. Доведіть, що точка перетину прямих m і n належить прямій BE.

83.* Побудуйте паралелограм за стороною, сумою діагоналей і кутом між діагоналями.

84.* На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ поза ним побудовано рівносторонні трикутники ABM і BCK. Доведіть, що трикутник MKD — рівносторонній.

85.* Через точку, яка належить куту, проведіть пряму так, щоб відрізок, який сполучає точки перетину цієї прямої зі сторонами кута, даною точкою ділився б навпіл.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

86. Довжина відрізка AB дорівнює 24 см. Точка C належить прямій AB, причому $BC = 5AC$. На відрізку AB позначено точку D так, що відрізок $AB = 4BD$. Знайдіть довжину відрізка CD.

87. Скільки існує нерівних між собою:

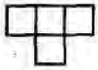
1) прямокутних трикутників зі стороною 5 см і кутом 45°;

2) рівнобедрених трикутників зі стороною 6 см і кутом 30°;

3) прямокутних трикутників зі стороною 7 см і кутом 60°?

88. Діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$ є діаметрами кола з центром O. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

89. Чи можна квадрат розміром 10×10 клітинок розрізати на 25 фігур, що складаються з чотирьох клітинок і мають такий вигляд  ?

3. Ознаки паралелограма

Означення паралелограма дозволяє серед чотирикутників розпізнавати паралелограми. Цій самій меті слугують такі три теореми-ознаки.

Теорема 3.1 (обернена до теореми 2.1). ***Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. ⊙ На рисунку 28 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = CD$ і $BC = AD$. Доведемо, що $AB \parallel CD$ і $BC \parallel AD$.

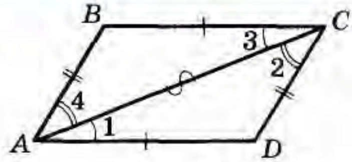


Рис. 28

Проведемо діагональ AC. Трикутники ABC і CDA рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$. Кути 1 і 3 є різносторонніми при прямих BC і AD та січній AC. Отже, $BC \parallel AD$. Аналогічно з рівності $\angle 2 = \angle 4$ випливає, що $AB \parallel CD$.

Отже, у чотирикутнику $ABCD$ кожні дві протилежні сторони паралельні, а тому цей чотирикутник — паралелограм. ▲

Теорема 3.2. ***Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні і паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. ⊙ На рисунку 29 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $BC = AD$ і $BC \parallel AD$. Доведемо спочатку, що $AB = CD$.

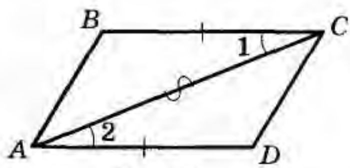


Рис. 29

Проведемо діагональ AC. У трикутниках ABC і CDA маємо: $BC = AD$, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC, а сторона AC — спільна. Отже, $\triangle ABC = \triangle CDA$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$. Отже, у чотирикутнику $ABCD$ кожні дві протилежні сторони рівні. Тому за теоремою 3.1 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. ▲

Теорема 3.3 (обернена до теореми 2.3). ***Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.***

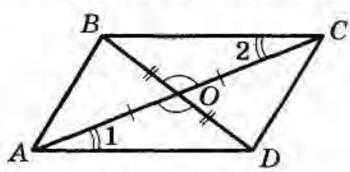


Рис. 30

Доведення. ⊙ На рисунку 30 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому діагоналі AC і BD перетинаються в точці O,

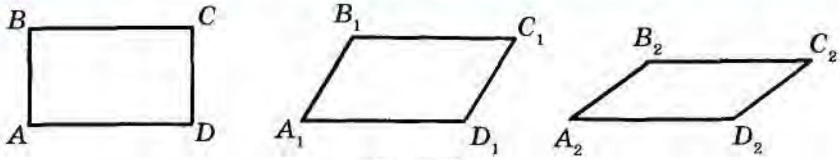


Рис. 31

причому $AO = OC$ і $BO = OD$. Доведемо, що $BC = AD$ і $BC \parallel AD$.

Оскільки кути BOC і DOA рівні як вертикальні, то $\triangle BOC = \triangle DOA$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $BC = AD$ і $\angle 1 = \angle 2$. Кути 1 і 2 є різносторонніми при прямих BC і AD та січній AC. Отже, $BC \parallel AD$.

Таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ дві протилежні сторони рівні й паралельні. За теоремою 3.2 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. ▲

Ви знаєте, що трикутник однозначно задається його сторонами, тобто задача побудови трикутника за трьома сторонами має єдиний розв'язок. Інша справа з паралелограмом. На рисунку 31 зображено паралелограми $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, сторони яких рівні, тобто $AB = A_1B_1 = A_2B_2$ і $BC = B_1C_1 = B_2C_2$. Проте очевидно, що самі паралелограми не є рівними. Тому паралелограм, на відміну від трикутника, не є жорсткою фігурою.

Ця властивість паралелограма широко використовується на практиці. Завдяки його рухомості лампу можна встановлювати в зручне для роботи положення, а розсувну решітку — відсувати на потрібну відстань у двірному прорізі (рис. 32).

а)

б)

Рис. 32

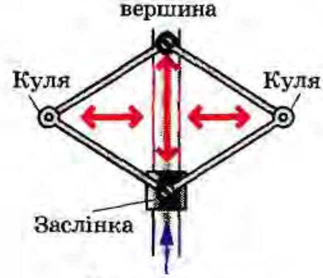


Рис. 33

На рисунку 33 зображено схему механізму, який називають **паралелограмом Уатта** на честь винахідника першої універсальної парової машини. При збільшенні швидкості обертання осі кулі віддаляються від неї під дією відцентрової сили, тим самим піднімаючи заслінку, яка регулює кількість пари.

Задача. *Якщо в чотирикутнику кожні два протилежні кути рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.*

Розв'язання. На рисунку 34 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

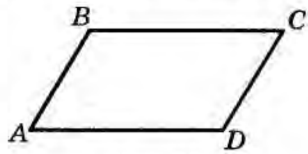


Рис. 34

За теоремою про суму кутів чотирикутника $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Тоді $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

Оскільки $\angle A$ і $\angle B$ — односторонні кути при прямих AD і BC та січній AB, а їх сума дорівнює $180°$, то $BC \parallel AD$.

Аналогічно доводиться, що $AB \parallel CD$.

Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

1. Які ви знаєте ознаки паралелограма? Сформулюйте їх.
2. Серед властивостей і ознак паралелограма вкажіть взаємно обернені теореми.
3. Яка властивість паралелограма широко використовується на практиці?

ВПРАВИ

90.° Доведіть, що коли сума кутів, прилеглих до будь-якої із сусідніх сторін чотирикутника, дорівнює $180°$, то цей чотирикутник — паралелограм.

91.° Чотирикутники $ABCD$ і $AMKD$ — паралелограми (рис. 35). Доведіть, що чотирикутник $BMKC$ — паралелограм.

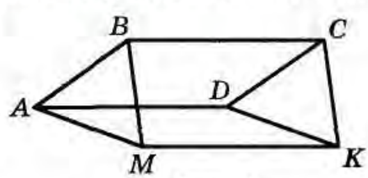


Рис. 35

92.° Відрізок AO — медіана трикутника ABD (рис. 36), відрізок BO — медіана трикутника ABC. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

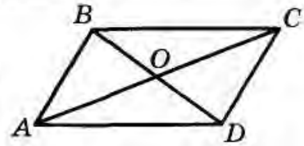


Рис. 36

93.° На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначили точки M і K так, що $AM = CK$. Доведіть, що чотирикутник $MBKD$ — паралелограм.

94.° Два кола мають спільний центр O (рис. 37). В одному з кіл проведено діаметр AB, у другому — діаметр CD. Доведіть, що чотирикутник $ACBD$ — паралелограм.

95.° Точки E і F — середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$ відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

96.° На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM і CK. Доведіть, що чотирикутник $MBKD$ — паралелограм.

97.° На сторонах паралелограма $ABCD$ (рис. 38) відклали рівні відрізки AM, BK, CE і DF. Доведіть, що чотирикутник $MKEF$ — паралелограм.

98.° У трикутнику ABC на продовженні медіани AM за точку M відклали відрізок MK, який дорівнює відрізку AM. Визначте вид чотирикутника $ABKC$.

99.° У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

100.° Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M, а бісектриса кута C — сторону AD у точці K. Доведіть, що чотирикутник $AMCK$ — паралелограм.

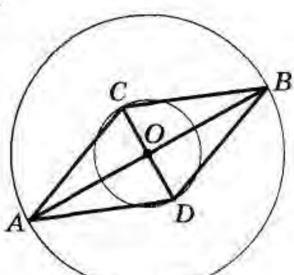


Рис. 37

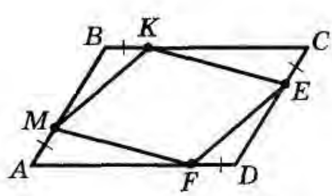


Рис. 38

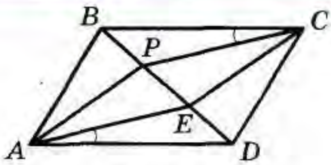


Рис. 39

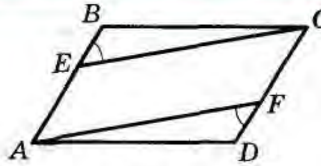


Рис. 40

101.* На рисунку 39 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $\angle BCP = \angle DAE$. Доведіть, що чотирикутник $APCE$ — паралелограм.

102.* На рисунку 40 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $\angle BEC = \angle DFA$. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

103.* З вершин B і D паралелограма $ABCD$ провели перпендикуляри BM і DK до діагоналі AC. Доведіть, що чотирикутник $BKDM$ — паралелограм.

104.* Бісектриси кутів A і C паралелограма $ABCD$ перетинають його діагональ BD у точках E і F відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

105.** Через середину O діагоналі NP паралелограма $MNKP$ проведено пряму, яка перетинає сторони MN і KP у точках A і B відповідно. Доведіть, що чотирикутник $ANBP$ — паралелограм.

106.** Через точку перетину діагоналей паралелограма $CDEF$ проведено дві прямі, одна з яких перетинає сторони CD і EF у точках A і B відповідно, а друга — сторони DE і CF у точках M і K відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AMBK$ — паралелограм.

107.** Точки M, N, K і P — середини сторін AB, BC, CD і AD паралелограма $ABCD$ відповідно. Доведіть, що чотирикутник, вершинами якого є точки перетину прямих AN, BK, CP і DM, — паралелограм.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

108. Прямі, на яких лежать бісектриси AK і BM трикутника ABC, перетинаються під кутом 74°. Знайдіть $\angle C$.

109. Кут, протилежний основі рівнобедреного трикутника, дорівнює $120°$, а висота, проведена до бічної сторони, — 8 см. Знайдіть основу трикутника.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

110. Учитель запропонував учневі вирізати з картонного листа розміром 8×8 клітинок вісім квадратів розміром 2×2 клітинки за умови не псувати клітинки, що залишилися. Потім виявилося, що потрібен ще один такий квадрат. Чи завжди можна це зробити із залишків листа?

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Необхідно і достатньо

З курсу геометрії 7-го класу ви дізналися, що більшість теорем складається з двох частин: умови (те, що дано) і висновку (те, що треба довести).

Якщо твердження, яке виражає умову, позначити буквою A, а твердження, яке виражає висновок, — буквою B, то формулювання теореми можна зобразити такою схемою:

якщо A, то B.

Наприклад, теорему 2.3 можна сформулювати так:

	A		B
якщо	чотирикутник є паралелограмом	**, то**	діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл

Тоді теорему 3.3 можна сформулювати так:

	B		A
якщо	діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл	**, то**	чотирикутник є паралелограмом

Часто у повсякденному житті у своїх висловлюваннях ми користуємося словами «необхідно», «достатньо». Наведемо кілька прикладів.

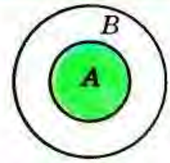


Рис. 41

- Для того щоб уміти розв'язувати задачі, *необхідно* знати теореми.
- Якщо ви на математичній олімпіаді розв'язали правильно всі запропоновані задачі, то цього *достатньо* для того, щоб завоювати перше місце.
- Для того щоб стрілець влучив у мішень B (рис. 41), йому *достатньо* влучити в мішень A. Для того щоб влучити в мішень A, *необхідно* влучити в мішень B.

Вживання слів «необхідно» і «достатньо» тісно пов'язане з теоремами.

Розглянемо очевидну теорему:

	$\boldsymbol{A}$		$\boldsymbol{B}$
якщо	натуральне число кратне 10	**, то**	це число кратне 5

Зрозуміло, що умова A «число кратне 10» є *достатньою* для висновку B. Разом з тим подільність числа націло на 5 (твердження B) *необхідна* для подільності числа націло на 10 (твердження A).

Наведемо ще один приклад.

У теоремі

	$\boldsymbol{A}$		$\boldsymbol{B}$
якщо	два кути є вертикальними	**, то**	ці кути рівні

твердження A є **достатньою умовою** для твердження B, тобто для того, щоб два кути були рівними, *достатньо*, щоб вони були вертикальними. У цій самій теоремі твердження B є **необхідною умовою** для твердження A, тобто для того, щоб два кути були вертикальними, *необхідно*, щоб вони були рівними. Зазначимо, що твердження B не є достатньою умовою для твердження A. Справді, якщо два кути рівні, то це зовсім не означає, що вони вертикальні.

Якщо справедлива не тільки теорема

якщо $\boldsymbol{A}$, то $\boldsymbol{B}$,

але й обернена теорема

якщо $\boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{A}$,

то A є **необхідною і достатньою** умовою для B, а B — необхідною і достатньою умовою для A.

Наприклад, теореми 3.3 і 2.3 є взаємно оберненими. Мовою «необхідно — достатньо» цей факт можна сформулювати так:

для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його діагоналі точкою перетину ділилися навпіл.

Підкреслимо, що коли в теоремі є слова «необхідно» і «достатньо», то вона об'єднує дві теореми: пряму і обернену (прямою теоремою може бути будь-яка з двох теорем, тоді друга буде оберненою). Отже, доведення такої теореми має складатися з двох частин: доведень прямої та оберненої теорем. Такі теореми в математиці називають **критеріями.**

Іноді замість «необхідно і достатньо» говорять «тоді й тільки тоді».

Наприклад, взаємно обернені теореми 2.1 і 3.1 об'єднує формулювання:

чотирикутник є паралелограмом тоді й тільки тоді, коли кожні дві його протилежні сторони рівні.

Спробуйте самостійно теорему 2.2 і ключову задачу з пункту 3 сформулювати у вигляді однієї теореми.

4. Прямокутник

Паралелограм — це чотирикутник, проте очевидно, що не кожний чотирикутник є паралелограмом. У цьому випадку говорять, що паралелограм — це окремий вид чотирикутника. Схема, зображена на рисунку 42, ілюструє цей факт.

Є також окремі види паралелограмів.

Рис. 42

Означення. Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.

На рисунку 43 зображено прямокутник $ABCD$.

Рис. 43

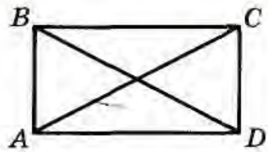


Рис. 44

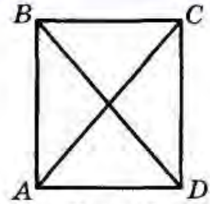


Рис. 45

З наведеного означення випливає, що прямокутник має всі властивості паралелограма: у прямокутнику протилежні сторони рівні, діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

Проте прямокутник має свою особливу властивість.

Теорема 4.1. ***Діагоналі прямокутника рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 44 зображено прямокутник $ABCD$. Доведемо, що його діагоналі AC і BD рівні.

У прямокутних трикутниках ABD і DCA катети AB і DC рівні, а катет AD — спільний. Тому $\triangle ABD = \triangle DCA$ за двома катетами. Звідси $BD = AC$. ▲

Означення прямокутника дає змогу серед паралелограмів розпізнавати прямокутники. Цій самій меті слугують такі дві теореми-ознаки.

Теорема 4.2. ***Якщо один з кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 4.3. ***Якщо в паралелограмі діагоналі рівні, то цей паралелограм — прямокутник.***

Доведення. ⊙ На рисунку 45 зображено паралелограм $ABCD$, діагоналі AC і BD якого рівні.

Розглянемо трикутники ABD і DCA. У них $AB = CD$, $BD = AC$, AD — спільна сторона. Отже, ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle BAD = \angle CDA$. Проте ці кути є односторонніми при паралельних прямих AB і DC та січній AD. Отже, $\angle BAD + \angle CDA = 180°$. Тоді $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. Тому за теоремою 4.2 паралелограм $ABCD$ — прямокутник. ▲

1. Яку фігуру називають прямокутником?
2. Яку особливу властивість мають діагоналі прямокутника?
3. Які властивості має прямокутник?
4. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є прямокутником?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

111.° Накресліть прямокутник. За допомогою лише лінійки знайдіть точку, яка рівновіддалена від його вершин.

ВПРАВИ

112.° Доведіть, що чотирикутник, усі кути якого прямі, є прямокутником.

113.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються у точці O. Доведіть, що трикутники AOB і AOD — рівнобедрені.

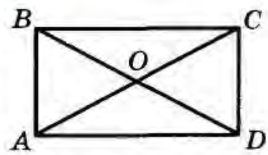


Рис. 46

114.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються у точці O, $\angle ABD = 64°$. Знайдіть $\angle COD$ і $\angle AOD$.

115.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються у точці O, $\angle ADB = 30°$, $BD = 10$ см. Знайдіть периметр трикутника AOB.

116.° Кут між діагоналями прямокутника дорівнює $60°$, а менша сторона прямокутника дорівнює 8 см. Знайдіть діагональ прямокутника.

117.• На діагоналі AC прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM і CK (точка M лежить між точками A і K). Доведіть, що чотирикутник $BKDM$ — паралелограм.

118.• На продовженні діагоналі BD прямокутника $ABCD$ за точку B взято точку E, а на продовженні за точку D — точку F так, що $BE = DF$. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.

119.* Точка M — середина сторони BC прямокутника $ABCD$, $MA \perp MD$, периметр прямокутника дорівнює 36 см. Знайдіть сторони прямокутника.

120.* Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 30 см, а бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці M так, що $CM - BM = 3$ см. Знайдіть сторони прямокутника.

121.* Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 55 см. Прямокутник $ABCD$ побудовано так, що дві його вершини A і D належать гіпотенузі, а дві інші — катетам. Знайдіть сторони прямокутника, якщо $AB : BC = 3 : 5$.

122.* У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = BC = 6$ см. Прямокутник $CMKN$ побудовано так, що точка M належить катету AC, точка N — катету BC, а точка K — гіпотенузі AB. Знайдіть периметр прямокутника $CMKN$.

123.* Доведіть, що коли діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з однією з його сторін, то цей паралелограм є прямокутником.

124.* Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

125.* Побудуйте прямокутник: 1) за двома сторонами; 2) за діагоналлю і кутом між діагоналлю і стороною.

126.* Побудуйте прямокутник: 1) за стороною і діагоналлю; 2) за діагоналлю і кутом між діагоналями.

127.** Серединний перпендикуляр діагоналі AC прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M так, що $BM : MC = 1 : 2$. Знайдіть кути, на які діагональ прямокутника ділить його кут.

128.** У прямокутнику $ABCD$ $\angle BCA : \angle DCA = 1 : 5$, $AC = 18$ см. Знайдіть відстань від точки C до діагоналі BD.

129.** Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма, перетинаючись, утворюють прямокутник.

130.** Побудуйте прямокутник за стороною і кутом між діагоналями, який протилежний даній стороні.

131.* Побудуйте прямокутник:

1) за діагоналлю і різницею двох сторін;

2) за периметром і діагоналлю;

3) за периметром і кутом між діагоналями.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

132. У трикутнику ABC $\angle C = 48°$, відрізки AK і BM — його висоти. Знайдіть кут між прямими AK і BM.

133. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $\angle A = \angle CBD$. За якої умови трикутники ABD і BCD ще мають рівні кути?

134. Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC. Через точку C проведено пряму, яка паралельна прямій AD і перетинає пряму AB у точці E. Визначте вид трикутника ACE.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

135. На площині позначено 1000 точок. Доведіть, що існує пряма, у кожній півплощині відносно якої лежать по 500 точок.

5. Ромб

Означення. **Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.**

На рисунку 47 зображено ромб $ABCD$.

З наведеного означення випливає, що ромб має всі властивості паралелограма.

Проте ромб має свої особливі властивості.

Теорема 5.1. ***Діагоналі ромба перпендикулярні і є бісектрисами його кутів.***

Рис. 47

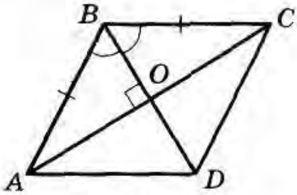


Рис. 48

Доведення. ⊙ На рисунку 48 зображено ромб $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведемо, що $BO \perp AC$ і $\angle ABO = \angle CBO$.

Оскільки за означенням усі сторони ромба рівні, то трикутник ABC — рівнобедрений ($AB = BC$). За властивістю діагоналей паралелограма $AO = OC$. Тоді BO є медіаною трикутника ABC і, крім того, бісектрисою і висотою цього трикутника. Отже, $\angle ABO = \angle CBO$ і $BO \perp AC$. ▲

Розпізнавати ромби серед паралелограмів дозволяє не лише означення ромба, а й такі дві теореми-ознаки.

Теорема 5.2. ***Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм — ромб.***

Теорема 5.3. ***Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то цей паралелограм — ромб.***

Доведіть ці теореми самостійно.

?

1. Яку фігуру називають ромбом?
2. Які особливі властивості мають діагоналі ромба?
3. Які властивості має ромб?
4. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є ромбом?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

136.° Накресліть ромб зі стороною 5 см і кутом 40°. Проведіть дві висоти з вершини його гострого кута і дві висоти з вершини тупого кута.

ВПРАВИ

137.° Доведіть, що коли дві сусідні сторони паралелограма рівні, то він є ромбом.

138.° Доведіть, що чотирикутник, усі сторони якого рівні, є ромбом.

139.$^{\circ}$ Діагональ AC ромба $ABCD$ (рис. 49) утворює зі стороною AD кут 42°. Знайдіть усі кути ромба.

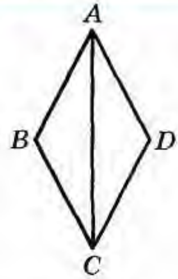


Рис. 49

140.$^{\circ}$ У ромбі $ABCD$ $\angle C = 140°$, а діагоналі перетинаються в точці O. Знайдіть кути трикутника AOB.

141.$^{\circ}$ Одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні. Знайдіть кути ромба.

142.$^{\circ}$ Знайдіть кути ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см, а висота — 3 см.

143.$^{\circ}$ Знайдіть периметр ромба $ABCD$, якщо $\angle A = 60°$, $BD = 9$ см.

144.$^{\circ}$ Кут D ромба $ABCD$ у 8 разів більший за кут CAD. Знайдіть $\angle BAD$.

145.$^{\circ}$ Кути, які сторона ромба утворює з його діагоналями, відносяться як 2 : 7. Знайдіть кути ромба.

146.$^{\circ}$ Точки M і K — середини сторін AB і BC ромба $ABCD$ відповідно. Доведіть, що $MD = KD$.

147.$^{\circ}$ Точки E і F — середини сторін BC і CD ромба $ABCD$ відповідно. Доведіть, що $\angle EAC = \angle FAC$.

148.$^{\circ}$ Доведіть, що висоти ромба рівні.

149.$^{\bullet}$ Висота ромба, проведена з вершини його тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Менша діагональ ромба дорівнює 4 см. Знайдіть кути та периметр ромба.

150.$^{\bullet}$ Доведіть, що діагональ ромба ділить навпіл кут між висотами ромба, проведеними з тієї самої його вершини, що й діагональ.

151.$^{\bullet}$ На сторонах AB і AD ромба $ABCD$ відкладено рівні відрізки AE і AF відповідно. Доведіть, що $\angle CEF = \angle CFE$.

152.$^{\bullet}$ Відрізок AM — бісектриса трикутника ABC. Через точку M проведено пряму, паралельну стороні AC, яка перетинає сторону AB у точці K, і пряму, паралельну стороні AB, яка перетинає сторону AC у точці D. Доведіть, що $AM \perp DK$.

153.$^{\bullet}$ Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинають його сторони BC і AD у точках F і E відповідно. Визначте вид чотирикутника $ABFE$.

154.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC проведено серединний перпендикуляр його бісектриси BD, який перетинає сторони AB

і BC у точках K і P відповідно. Визначте вид чотирикутника $BKDP$.

155.• Побудуйте ромб:

1) за стороною і кутом;

2) за двома діагоналями;

3) за висотою і кутом.

156.• Побудуйте ромб:

1) за стороною і діагоналлю;

2) за висотою і діагоналлю.

157.•• У прямокутнику $ABCD$ $AD = 9$ см, $\angle BDA = 30°$. На сторонах BC і AD позначено відповідно точки M і K так, що утворився ромб $AMCK$. Знайдіть сторону цього ромба.

158.•• Побудуйте ромб за діагоналлю і кутом, з вершини якого виходить ця діагональ.

159.•• Побудуйте ромб за діагоналлю і кутом ромба, протилежним цій діагоналі.

160.* Побудуйте ромб:

1) за сумою діагоналей і кутом між діагоналлю та стороною;

2) за гострим кутом і різницею діагоналей;

3) за гострим кутом і сумою сторони й висоти;

4) за стороною і сумою діагоналей;

5) за тупим кутом і сумою діагоналей;

6) за стороною і різницею діагоналей.

161.* Дано точки M, N і K. Побудуйте ромб $ABCD$ так, щоб точка M була серединою сторони AB, а точки N і K — основами висот, проведених з вершини B до сторони AD і з вершини D до сторони BC відповідно.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

162. На сторонах кута з вершиною в точці A відкладено рівні відрізки AB і AC. Через точки B і C проведено прямі, які перпендикулярні до сторін AB і AC відповідно і перетинаються в точці D. Доведіть, що промінь AD є бісектрисою кута BAC.

163. На продовженні сторони AC трикутника ABC за точку A позначили точку D таку, що $AD = AB$, а на продовженні цієї сторони за точку C — точку E таку, що $CE = BC$. Знайдіть кути і периметр трикутника ABC, якщо $DE = 18$ см, $\angle BDA = 15°$, $\angle BEC = 36°$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

164. На папері в клітинку вибрали довільно 100 клітинок. Доведіть, що серед них можна знайти не менше ніж 25 клітинок, які не мають спільних точок.

6. Квадрат

Означення. **Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.**

На рисунку 50 зображено квадрат $ABCD$.

З наведеного означення випливає, що квадрат — це ромб, у якого всі кути рівні. Отже, квадрат є окремим видом і прямокутника, і ромба. Звідси випливає, що діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні і є бісектрисами його кутів.

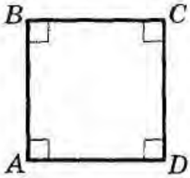


Рис. 50

Рис. 51

Те, що квадрат є одночасно і прямокутником, і ромбом, ілюструє схема, зображена на рисунку 51.

1. Яку фігуру називають квадратом?
2. Який ромб є квадратом?
3. Які властивості має квадрат?

ВПРАВИ

165.° Доведіть, що коли один з кутів ромба прямий, то цей ромб є квадратом.

166.° Доведіть, що коли дві сусідні сторони прямокутника рівні, то цей прямокутник є квадратом.

167.° Діагональ BD квадрата $ABCD$ дорівнює 5 см. Яка довжина діагоналі AC? Чому дорівнюють кути трикутника AOB, де O — точка перетину діагоналей квадрата?

168.° На стороні BC квадрата $ABCD$ (рис. 52) позначили точку K так, що $\angle AKB = 74°$. Знайдіть $\angle CAK$.

169.° На стороні BC квадрата $ABCD$ (рис. 52) позначили точку K так, що $AK = 2\,BK$. Знайдіть $\angle KAD$.

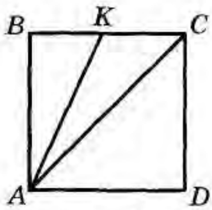


Рис. 52

170.° Чи є правильним твердження:

1) будь-який квадрат є паралелограмом;
2) будь-який ромб є квадратом;
3) будь-який прямокутник є квадратом;
4) будь-який квадрат є прямокутником;
5) будь-який квадрат є ромбом;
6) якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є прямокутником;
7) якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні, то він є ромбом;
8) існує ромб, який є прямокутником;
9) існує квадрат, який не є ромбом;
10) якщо діагоналі чотирикутника не перпендикулярні, то він не є ромбом;
11) якщо діагоналі паралелограма не рівні, то він не може бути прямокутником;
12) якщо діагональ прямокутника поділяє його кут навпіл, то цей прямокутник є квадратом?

171.° Через вершини квадрата проведено прямі, паралельні його діагоналям. Визначте вид чотирикутника, утвореного цими прямими.

172.* У прямокутному трикутнику через точку перетину бісектриси прямого кута і гіпотенузи проведено прямі, паралельні катетам. Доведіть, що чотирикутник, який утворився, є квадратом.

173.* Точки M, K, N, P є відповідно серединами сторін AB, BC, CD і AD квадрата $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $MKNP$ — квадрат.

174.* У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = BC = 14$ см. Дві сторони квадрата $CDEF$ лежать на катетах трикутника ABC, а вершина E належить гіпотенузі AB. Знайдіть периметр квадрата $CDEF$.

175.* У квадраті $ABCD$ позначено точку M так, що трикутник AMB — рівносторонній. Доведіть, що $\Delta\, CMD$ — рівнобедрений.

176.* Доведіть, що коли діагоналі паралелограма рівні та перпендикулярні, то цей паралелограм є квадратом.

177.* Чотирикутники $ABCD$, $DEFM$, $MNKL$, $LPOS$, $SQTV$ — квадрати (рис. 53). Знайдіть суму довжин тих сторін квадратів, які не лежать на прямій AV, якщо довжина відрізка AV дорівнює 16 см.

178.* Побудуйте квадрат за його стороною.

179.** Доведіть, що бісектриси кутів прямокутника, який не є квадратом, перетинаючись, утворюють квадрат.

180.** Вершини M і K рівностороннього трикутника AMK належать сторонам BC і CD квадрата $ABCD$. Доведіть, що $MK \parallel BD$.

181.** Дано точки M і K. Побудуйте квадрат $ABCD$ так, щоб точка M була серединою сторони AB, а точка K — сторони BC.

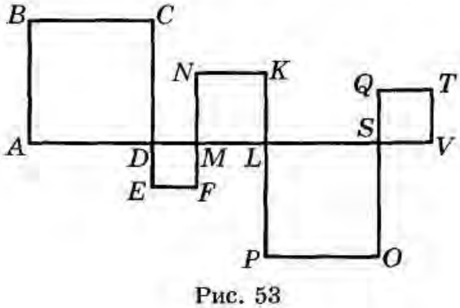


Рис. 53

182.* Через довільну точку, яка належить квадрату, проведено дві взаємно перпендикулярні прямі, кожна з яких перетинає дві протилежні сторони квадрата. Доведіть, що відрізки цих прямих, які належать квадрату, рівні.

183.* Побудуйте квадрат:

1) за сумою діагоналі та сторони;

2) за різницею діагоналі та сторони.

184.* У квадраті $ABCD$ позначено точку O так, що $\angle OAD = \angle ODA = 15°$. Доведіть, що ΔBOC — рівносторонній.

185.* На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ позначено точки M і E так, що кути BAM і MAE рівні. Доведіть, що $AE = BM + DE$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

186. На рисунку 54 $AB \parallel CD$, $AB = AE$, $CD = CE$. Доведіть, що $BE \perp DE$.

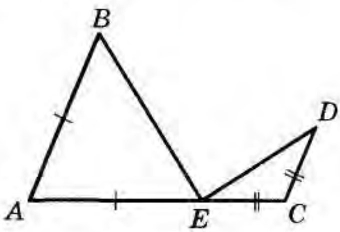


Рис. 54

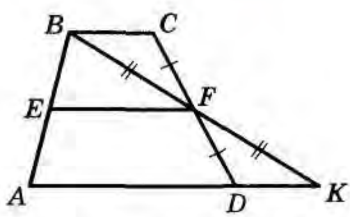


Рис. 55

187. На рисунку 55 $EF \parallel AD$, $BF = KF$, $CF = DF$. Доведіть, що $EF \parallel BC$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

188. Доведіть, що в опуклому дев'ятикутнику знайдуться дві діагоналі, кут між якими менше, ніж 7°.

7. Середня лінія трикутника

Означення. **Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.**

На рисунку 56 відрізки MN, NE, EM — середні лінії трикутника ABC.

Теорема 7.1. ***Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині.***

Доведення. Нехай MN — середня лінія трикутника ABC (рис. 57). Доведемо, що $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2} AC$.

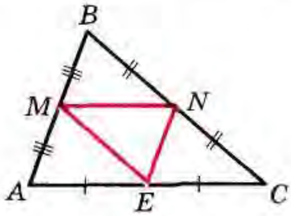


Рис. 56

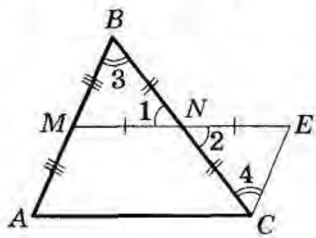


Рис. 57

На прямій MN позначимо точку E так, що $MN = NE$ (рис. 57). Сполучимо точки E і C. Оскільки точка N є серединою відрізка BC, то $BN = NC$. Крім того, кути 1 і 2 рівні як вертикальні. Отже, $\triangle MBN = \triangle ECN$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $MB = EC$. Отже, $EC = AM$. Крім того, $\angle 3 = \angle 4$. Ці кути є різносторонніми при прямих AB і EC та січній BC. Тоді $AB \parallel EC$.

Таким чином, у чотирикутнику $AMEC$ сторони AM і EC паралельні й рівні. Отже, за теоремою 3.2 чотирикутник $AMEC$ є паралелограмом. Звідси $ME \parallel AC$, тобто $MN \parallel AC$. Також $ME = AC$. Оскільки $MN = \frac{1}{2} ME$, то $MN = \frac{1}{2} AC$. ▲

Задача. *Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.*

Розв'язання. У чотирикутнику $ABCD$ точки M, N, K і P — середини сторін AB, BC, CD і AD відповідно (рис. 58).

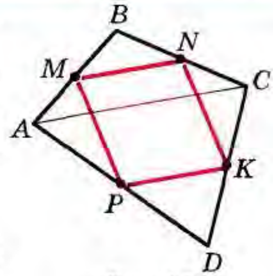


Рис. 58

Відрізок MN — середня лінія трикутника ABC. Тоді $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

Аналогічно відрізок PK — середня лінія трикутника ADC. Тоді $PK \parallel AC$, $PK = \frac{1}{2}AC$.

Оскільки $MN \parallel AC$ і $PK \parallel AC$, то $MN \parallel PK$. Також $MN = PK = \frac{1}{2}AC$.

Отже, у чотирикутнику $MNKP$ сторони MN і PK рівні і паралельні, тобто чотирикутник $MNKP$ — паралелограм.

?

1. Що називають середньою лінією трикутника?
2. Які властивості має середня лінія трикутника?
3. Скільки середніх ліній можна провести в трикутнику?

ВПРАВИ

189.° Чи є відрізок MK середньою лінією трикутника ABC (рис. 59)?

190.° Чи є відрізок EF середньою лінією трикутника MKP (рис. 60)?

191.° Відрізки DE і DF — середні лінії трикутника ABC (рис. 61). Чи є відрізок EF середньою лінією цього трикутника?

192.° Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 12 см. Знайдіть середні лінії цього трикутника.

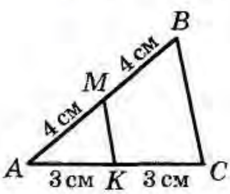


Рис. 59

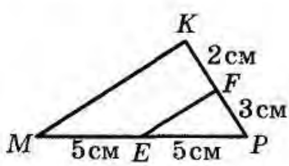


Рис. 60

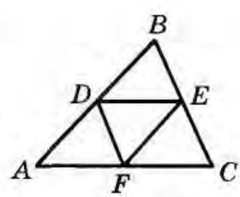


Рис. 61

193.° Точки M і K — середини сторін AB і AC трикутника ABC відповідно. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника MAK дорівнює 17 см.

194.° Доведіть, що периметр трикутника, сторони якого є середніми лініями трикутника ABC, дорівнює половині периметра трикутника ABC.

195.° Визначте вид трикутника, усі середні лінії якого рівні.

196.° Доведіть, що середні лінії трикутника розбивають його на 4 рівних трикутники.

197.° Точки E і F — відповідно середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть сторону AC, якщо вона на 7 см більша за відрізок EF.

198.° Доведіть, що середня лінія DE трикутника ABC (точки D і E належать сторонам AB і BC відповідно) та його медіана BM точкою перетину діляться навпіл.

199.° Доведіть, що висота AM трикутника ABC перпендикулярна до його середньої лінії, яка сполучає середини сторін AB і AC.

200.• Знайдіть кути трикутника, дві середні лінії якого рівні і перпендикулярні.

201.• Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна основі, дорівнює 6 см. Знайдіть сторони даного трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.

202.• Сума діагоналей чотирикутника дорівнює 28 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершини якого є серединами сторін даного чотирикутника.

203.• Визначте вид і знайдіть сторони чотирикутника, вершинами якого є середини сторін ромба з діагоналями 8 см і 14 см.

204.• Визначте вид і знайдіть сторони чотирикутника, вершинами якого є середини сторін прямокутника з діагоналлю 12 см.

205.• Доведіть, що вершини трикутника рівновіддалені від прямої, на якій лежить його середня лінія.

206.•• На сторонах AB і BC трикутника позначено відповідно точки M і K так, що $AM = 3\ BM$, $CK = 3\ BK$. Доведіть, що $MK \parallel AC$, і знайдіть MK, якщо $AC = 16$ см.

207.** Кути BAD і BCE — зовнішні кути трикутника ABC. З вершини B проведено перпендикуляри BM і BK до бісектрис кутів BAD і BCE відповідно. Знайдіть відрізок MK, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 18 см.

208.** Побудуйте трикутник за серединами трьох його сторін.

209.** Побудуйте паралелограм за серединами трьох його сторін.

210.* Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні. Через середини сторін AB і AD проведено прямі, перпендикулярні відповідно до сторін DC і BC. Доведіть, що точка перетину проведених прямих належить прямій AC.

211.* Сторони AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$ рівні. Через середини діагоналей AC і BD проведено пряму, яка перетинає сторони AB і CD у точках M і N відповідно. Доведіть, що $\angle BMN = \angle CNM$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

212. До кола з центром O через точку C проведено дотичні CA і CB (A і B — точки дотику). Відрізок AD — діаметр кола. Доведіть, що $BD \parallel CO$.

213. У трикутнику ABC $AB = BC$, $\angle B = 32°$, AK — бісектриса трикутника. Через точку K проведено пряму, яка паралельна AB і перетинає сторону AC у точці M. Знайдіть кут AKM.

214. Діагональ BD паралелограма $ABCD$ є його висотою і дорівнює стороні BC. Знайдіть сторону CD паралелограма, якщо точка B віддалена від прямої CD на 4 см.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

215. П'ять точок належать рівносторонньому трикутнику, сторона якого дорівнює 1 см. Доведіть, що з цих точок можна вибрати дві, відстань між якими не більша за 0,5 см.

8. Трапеція

Означення. **Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.**

Кожний з чотирикутників, зображених на рисунку 62, є трапецією.

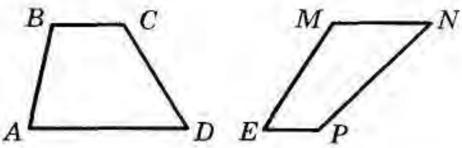


Рис. 62

Рис. 63

Паралельні сторони трапеції називають **основами**, а непаралельні — **бічними сторонами** (рис. 63).

У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) кути A і D називають **кутами при основі** AD, а кути B і C — кутами при основі BC (рис. 62).

Означення. **Висотою трапеції називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, яка містить другу основу.**

На рисунку 64 кожний з відрізків BM, EF, DK, PQ є висотою трапеції $ABCD$. Зрозуміло, що $BM = EF = DK = PQ$.

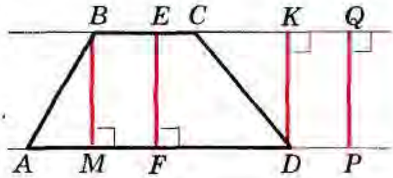


Рис. 64

На рисунку 65 зображено трапецію $ABCD$, у якої бічні сторони AB і CD рівні. Таку трапецію називають **рівнобічною** або **рівнобедреною**.

Якщо бічна сторона трапеції є її висотою, то таку трапецію називають **прямокутною** (рис. 66).

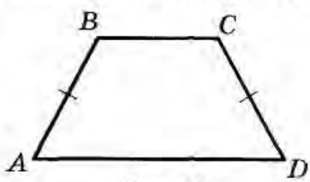


Рис. 65

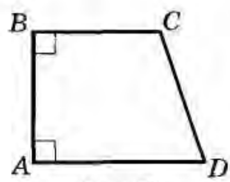


Рис. 66

Рис. 67

Трапеція — це окремий вид чотирикутника. Зв'язок між чотирикутниками та їх окремими видами ілюструє схема, зображена на рисунку 67.

Означення. **Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.**

На рисунку 68 відрізок MN — середня лінія трапеції $ABCD$.

Теорема 8.1. ***Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.***

Доведення. ⊖ Нехай MN — середня лінія трапеції $ABCD$ (рис. 69). Доведемо, що $MN \parallel AD$ і $MN = \frac{BC + AD}{2}$.

Проведемо пряму BN і точку її перетину з прямою AD позначимо E.

Оскільки N — середина відрізка CD, то $CN = ND$. Крім того, кути 1 і 2 рівні як вертикальні, а кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AE і січній CD.

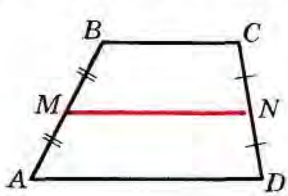


Рис. 68

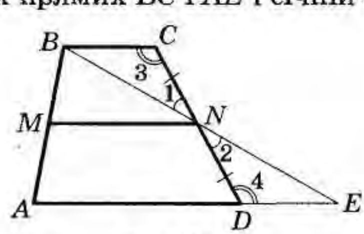


Рис. 69

Отже, $\triangle BCN = \triangle EDN$ за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $BC = DE$ і $BN = NE$. Тоді відрізок MN — середня лінія трикутника ABE. З цього випливає, що $MN \parallel AE$, тобто $MN \parallel AD$, і $MN = \frac{1}{2}AE$. Маємо:

$$MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). \blacktriangle$$

Задача. *Доведіть, що в рівнобічній трапеції:*
1) *кути при кожній основі рівні;*
2) *діагоналі рівні;*
3) *висота трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє основу трапеції на два відрізки, менший з яких дорівнює піврізниці основ, а більший — півсумі основ (середній лінії трапеції).*

Розв'язання. Розглянемо рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$).

1) Проведемо висоти BM і CK (рис. 70). Оскільки $AB = CD$ і $BM = CK$, то прямокутні трикутники AMB і DKC рівні за катетом і гіпотенузою. Тоді $\angle A = \angle D$.

Маємо: $\angle A = \angle D$, $\angle A + \angle ABC = 180°$, $\angle D + \angle DCB = 180°$. Отже, $\angle ABC = \angle DCB$.

2) Розглянемо $\triangle ACD$ і $\triangle DBA$ (рис. 71).

Маємо: $AB = CD$, AD — спільна сторона, $\angle BAD$ і $\angle CDA$ рівні як кути при основі рівнобічної трапеції. Отже, $\triangle ACD = \triangle DBA$ за двома сторонами і кутом між ними. Тоді $AC = BD$.

3) У чотирикутнику $BMKC$ (рис. 70) $BM \parallel CK$, $BC \parallel MK$, $\angle BMK$ — прямий. Отже, цей чотирикутник є прямокутником. Звідси $MK = BC$.

З рівності трикутників AMB і DKC випливає, що $AM = KD$. Тоді

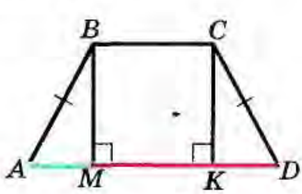


Рис. 70

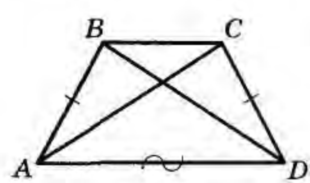


Рис. 71

$$AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2};$$

$$MD = AD - AM = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{2\,AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

?

1. Який чотирикутник називають трапецією?
2. Які сторони трапеції називають основами? бічними сторонами?
3. Що називають висотою трапеції?
4. Чому дорівнює сума кутів трапеції, прилеглих до її бічної сторони?
5. Які існують окремі види трапецій?
6. Яку трапецію називають рівнобічною?
7. Яку трапецію називають прямокутною?
8. Що називають середньою лінією трапеції?
9. Сформулюйте теорему про властивості середньої лінії трапеції.
10. Сформулюйте властивості рівнобічної трапеції.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

216.° Накресліть, використовуючи клітинки зошита, трапецію:

1) рівнобічну;
2) прямокутну;
3) яка не є ні прямокутною, ні рівнобічною;
4) у якої один з кутів при основі гострий, а другий — тупий.

217.° Перерисуйте в зошит рисунок 72, проведіть висоти трапеції, одним з кінців яких є відповідно точки B, M, K і D.

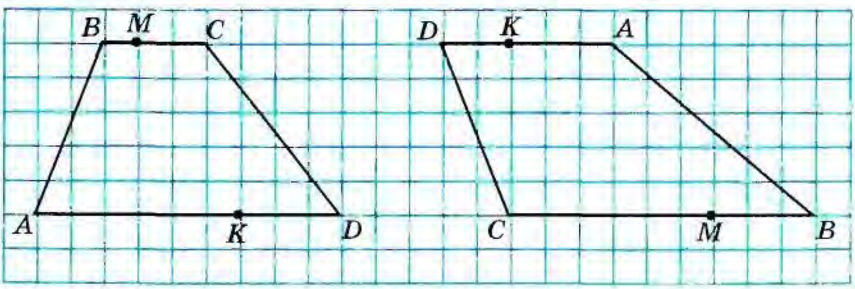


Рис. 72

ВПРАВИ

218.° Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 52 см, основи — 13 см і 21 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

219.° Периметр трапеції дорівнює 49 см, бічні сторони — 5,6 см і 7,8 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 7,4 см більша за другу.

220.° Знайдіть на рисунку 73 трапеції, укажіть їх основи і бічні сторони.

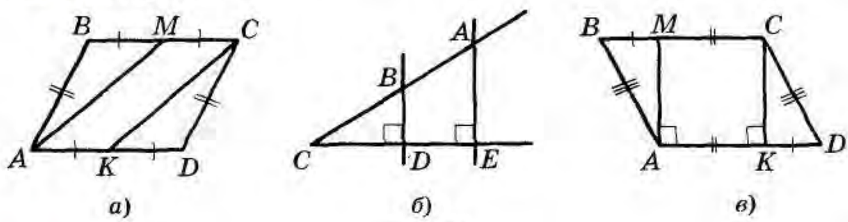


Рис. 73

221.° Чи є чотирикутник $ABCD$, зображений на рисунку 74, трапецією? У випадку позитивної відповіді вкажіть основи і бічні сторони трапеції.

222.° Знайдіть кути A і C трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, якщо $\angle B = 132°$, $\angle D = 24°$.

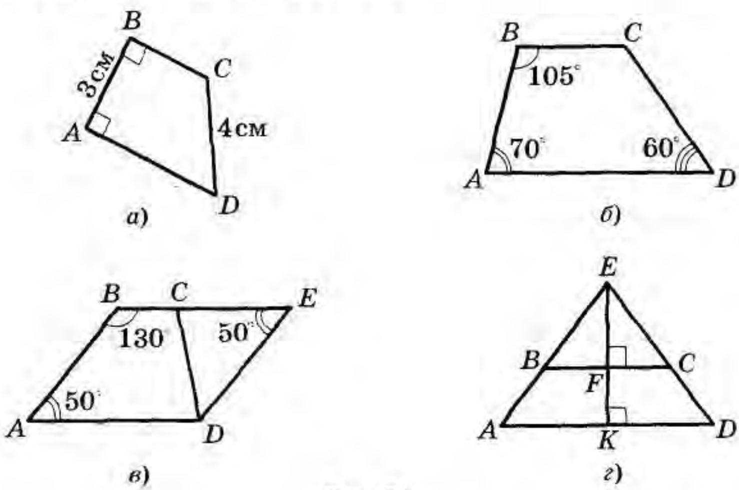


Рис. 74

223.° Знайдіть кути трапеції $ABCD$, прилеглі до бічної сторони AB, якщо кут A менший від кута B на 38°.

224.° Знайдіть кути трапеції $ABCD$, прилеглі до бічної сторони CD, якщо $\angle C : \angle D = 8 : 7$.

225.° Один з кутів рівнобічної трапеції дорівнює 46°. Знайдіть решту її кутів.

226.° Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо різниця її протилежних кутів дорівнює 20°.

227.° У рівнобічній трапеції кут між бічною стороною і висотою, проведеною з вершини тупого кута, дорівнює 23°. Знайдіть кути трапеції.

228.° Чи можуть у трапеції бути:

1) три прямих кути;

2) три гострих кути;

3) два протилежних кути тупими;

4) два протилежних кути прямими;

5) два протилежних кути рівними?

229.° Чи можуть:

1) основи трапеції бути рівними;

2) діагоналі трапеції точкою перетину ділитися навпіл?

230.° Доведіть, що коли кути при одній з основ трапеції рівні, то дана трапеція є рівнобічною.

231.° Доведіть, що сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює 180°. Чи є правильним обернене твердження: якщо сума протилежних кутів трапеції дорівнює 180°, то дана трапеція є рівнобічною?

232.° Середня лінія рівностороннього трикутника зі стороною 6 см розбиває його на трикутник і чотирикутник. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його периметр.

233.° Висота рівнобічної трапеції, проведена з кінця меншої основи, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть основи трапеції.

234.° Один з кутів рівнобічної трапеції дорівнює 60°, бічна сторона — 18 см, а сума основ — 50 см. Знайдіть основи трапеції.

235.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 10 см і 24 см, а один з кутів — 45°. Знайдіть меншу бічну сторону трапеції.

236.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а один з кутів — $60°$. Знайдіть більшу бічну сторону трапеції.

237.° У трапеції $ABCD$ $AB = CD$, $\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 50°$. Знайдіть кути ACB і ACD.

238.° У трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC = CD$, $\angle ABD = 80°$. Знайдіть кути трапеції.

239.° У трапеції $ABCD$ менша основа BC дорівнює 6 см. Через вершину B проведено пряму, яка паралельна стороні CD і перетинає сторону AD у точці M. Знайдіть периметр трапеції, якщо периметр трикутника ABM дорівнює 16 см.

240.° У трапеції $ABCD$ через вершину C проведено пряму, яка паралельна бічній стороні AB і перетинає більшу основу AD у точці E. Знайдіть кути трапеції, якщо $\angle D = 35°$, $\angle DCE = 65°$.

241.° Основи трапеції дорівнюють 9 см і 15 см. Чому дорівнює її середня лінія?

242.° Середня лінія трапеції дорівнює 8 см, а одна з основ — 5 см. Знайдіть другу основу трапеції.

243.° Одна з основ трапеції на 8 см більша за другу, а середня лінія дорівнює 17 см. Знайдіть основи трапеції.

244.° Основи трапеції відносяться як 3 : 4, а середня лінія дорівнює 14 см. Знайдіть основи трапеції.

245.° Кожну з бічних сторін трапеції $ABCD$ (рис. 75) поділено на чотири рівні частини: $AE = EF = FK = KB$, $DN = NM = MP = PC$. Знайдіть відрізки EN, FM і KP, якщо $AD = 19$ см, $BC = 11$ см.

246.° Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, поділяє більшу основу на відрізки завдовжки 7 см і 5 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть середню лінію трапеції.

247.° Середня лінія прямокутної трапеції дорівнює 9 см, а висота, проведена з вершини тупого кута, поділяє більшу основу на відрізки, один з яких у 2 рази більший за другий, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть основи трапеції.

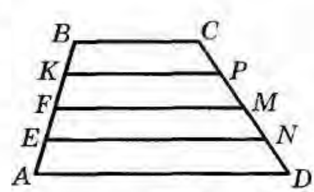


Рис. 75

248.[•] Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) перетинаються в точці O. Доведіть, що $AO = OD$ і $BO = OC$.

249.[•] Висота рівнобічної трапеції дорівнює h, а бічну сторону видно з точки перетину діагоналей під кутом[1] $60°$. Знайдіть діагональ трапеції.

250.[•] Основи рівнобічної трапеції відносяться як 2 : 5, а діагональ ділить тупий кут трапеції навпіл. Знайдіть сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 68 см.

251.[•] У трапеції $ABCD$ $AB = CD$, $AD = 24$ см, $\angle ADB = \angle CDB$, а периметр дорівнює 60 см. Знайдіть невідомі сторони трапеції.

252.[•] Сторони трапеції дорівнюють a, a, a і $2a$. Знайдіть кути трапеції.

253.[•] У трапеції $ABCD$ діагональ AC перпендикулярна до бічної сторони CD і є бісектрисою кута BAD, $\angle D = 60°$, периметр трапеції дорівнює 40 см. Знайдіть основи трапеції.

254.[•] Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а менша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть кути трапеції.

255.[•] За якої умови висота рівнобічної трапеції дорівнює піврізниці основ?

256.[•] Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, бічною стороною і кутом між ними.

257.[•] Побудуйте прямокутну трапецію за основами і меншою бічною стороною.

258.[•] Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, бічною стороною і діагоналлю.

259.[•] Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 6 см, більша основа — 10 см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо один з її кутів дорівнює $60°$.

260.[•] Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює 14 см і утворює з основою кут $60°$. Знайдіть середню лінію трапеції.

261.[•] Середня лінія трапеції $ABCD$ розбиває її на дві трапеції, середні лінії яких дорівнюють 15 см і 19 см. Знайдіть основи трапеції $ABCD$.

---

[1] Нехай дано відрізок AB і точку M поза прямою AB таку, що $\angle AMB = \alpha$. У такому випадку кажуть, що відрізок AB видно з точки M під кутом α.

262.** Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії трапеції.

263.** Доведіть, що коли висота рівнобічної трапеції дорівнює її середній лінії, то діагоналі трапеції перпендикулярні.

264.** Діагональ прямокутної трапеції розбиває її на два трикутники, один з яких є рівностороннім зі стороною a. Знайдіть середню лінію трапеції.

265.** Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трапеції.

266.** У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AC \perp BD$, $\angle CAD = 30°$, $BD = 8$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

267.** Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, належить прямій, яка містить її середню лінію.

268.** Побудуйте трапецію:

1) за основами й бічними сторонами;
2) за основою, висотою і діагоналями;
3) за різницею основ, бічними сторонами й діагоналлю.

269.** Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, висотою і бічною стороною.

270.** Побудуйте трапецію:

1) за основами й діагоналями;
2) за бічними сторонами, середньою лінією і висотою;
3) за основою, прилеглим до неї кутом і бічними сторонами;
4) за бічними сторонами, висотою і діагоналлю.

271.* Через вершину B паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка не має з паралелограмом інших спільних точок. Вершини A і C віддалені від цієї прямої на відстані a і b відповідно. Знайдіть відстань від точки D до цієї прямої.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

272. У колі з центром O проведено діаметри AB і CD. Доведіть, що $AC = BD$ і $AC \parallel BD$.

273. У колі з центром O проведено діаметр AB і хорду AC. Доведіть, що $\angle BOC = 2 \angle BAC$.

274. Пряма AB дотикається до кола з центром O в точці C, $AC = BC$. Доведіть, що $OA = OB$.

275. Хорда AB кола з центром O перпендикулярна до радіуса OC і ділить його навпіл. Знайдіть: 1) $\angle AOB$; 2) $\angle ACB$.

276. Скільки спільних точок мають два кола з радіусами 6 см і 8 см, якщо відстань між їх центрами дорівнює:

1) 15 см; 2) 14 см; 3) 10 см; 4) 2 см?

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 19, 20, 21, 22 на с. 199–200.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

277. Многокутник розбито діагоналями на трикутники, які пофарбовано у чорний та білий кольори так, що будь-які два трикутники, що мають спільну сторону, пофарбовано в різні кольори. Доведіть, що кількість чорних трикутників не більша за потроєну кількість білих трикутників.

9. Центральні і вписані кути

Означення. **Центральним кутом кола називають кут з вершиною в центрі кола.**

На рисунку 76 кут AOB — центральний. Сторони цього кута перетинають коло в точках A і B. Ці точки ділять коло на дві **дуги**, які виділено на рисунку 76 різним кольором. Точки A і B називають **кінцями** дуги, і вони належать кожній з виділених дуг. Кожну з цих дуг можна позначити так: $\cup AB$ (читають: «дуга AB»).

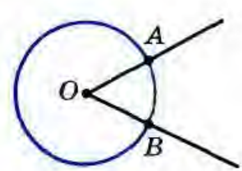


Рис. 76

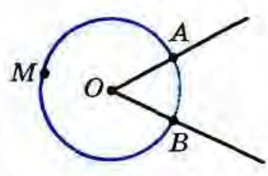


Рис. 77

Але за записом $\cup AB$ не можна розрізнити дуги на рисунку 76. Якщо на якійсь з двох дуг позначити точку (на рисунку 77 це точка M), то зрозуміло, що позначення $\cup AMB$ відноситься до «синьої» дуги. Якщо на одній з двох дуг AB відмічено точку, то домовимося, що позначення $\cup AB$ відноситься до дуги, якій ця точка не належить (на рис. 77 це «зелена» дуга).

Дуга AB належить центральному куту AOB (рис. 77). У цьому випадку кажуть, що центральний кут AOB **спирається на дугу AB.**

Кожна дуга кола, як і все коло, має градусну міру. Градусну міру всього кола вважають рівною 360°. Якщо центральний кут MON спирається на дугу MN (рис. 78), то градусну міру дуги MN вважають рівною градусній мірі кута MON і записують $\cup MN = \angle MON$ (читають: «градусна міра дуги MN дорівнює градусній мірі кута MON»). Градусну міру дуги MEN (рис. 78) вважають рівною $360° - \angle MON$.

На рисунку 79 зображено два перпендикулярних діаметри AB і CD. Тоді $\cup AMD = 90°$, $\cup ACD = 360° - 90° = 270°$, $\cup ACB = \cup ADB = 180°$. Кожну з дуг ACB і ADB називають **півколом.** На рисунку 79 півколами є також дуги CAD і CBD.

Про хорду, яка з'єднує кінці дуги, кажуть, що вона **стягує** дугу. На рисунку 80 хорда AB стягує кожну з дуг AB і AKB.

Очевидно, що будь-яка хорда стягує дві дуги, сума градусних мір яких дорівнює 360°.

Означення. **Вписаним кутом кола називають кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло.**

На рисунку 81 кут ABC — вписаний. Дуга AC належить цьому куту, а дуга ABC — не належить. У такому випадку кажуть, що вписаний кут ABC **спирається на дугу AC.** Та-

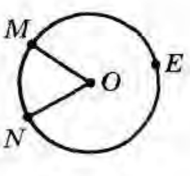


Рис. 78

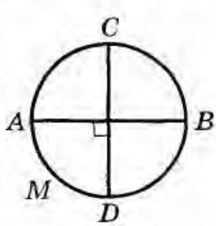


Рис. 79

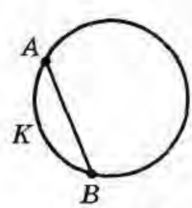


Рис. 80

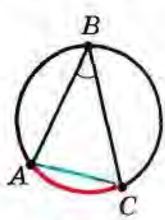


Рис. 81

кож можна сказати, що вписаний кут ABC **спирається на хорду** AC.

Т е о р е м а 9.1. ***Вписаний кут вимірюється половиною градусної міри дуги, на яку він спирається.***

Д о в е д е н н я. ⊖ На рисунку 81 кут ABC — вписаний. Доведемо, що $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Розглянемо три випадки розташування центра O кола відносно вписаного кута ABC:

1) центр O належить одній із сторін кута, наприклад, BC (рис. 82);

2) центр O належить куту, проте не належить жодній з його сторін (рис. 83);

3) центр O не належить куту (рис. 84).

На рисунку 82 проведемо радіус AO. Центральний кут AOC — зовнішній кут рівнобедреного трикутника ABO ($OA = OB$ як радіуси). Тоді $\angle AOC = \angle A + \angle B$. Проте $\angle A = \angle B$. Звідси $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \cup AC$.

На рисунку 83 проведемо діаметр BK. Згідно з доведеним $\angle ABK = \frac{1}{2} \cup AK$, $\angle KBC = \frac{1}{2} \cup KC$. Маємо:

$$\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = \frac{1}{2} \cup AK + \frac{1}{2} \cup KC = \frac{1}{2} \cup AKC.$$

Для третього випадку (рис. 84) проведіть доведення самостійно. ▲

Н а с л і д о к 1. ***Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні*** (рис. 85).

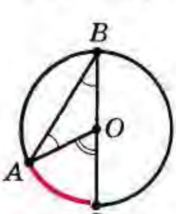


Рис. 82

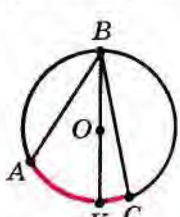


Рис. 83

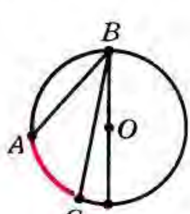


Рис. 84

Рис. 85

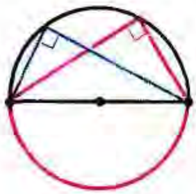


Рис. 86

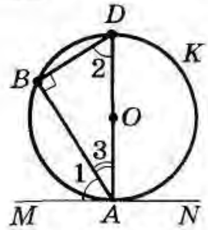


Рис. 87

Наслідок 2. ***Вписаний кут, який спирається на діаметр (півколо) — прямий*** (рис. 86).

Доведення цих наслідків проведіть самостійно.

Задача (властивість кута між дотичною і хордою). *Нехай AB — хорда кола з центром O* (рис. 87). *Через точку A проведено дотичну MN. Доведіть, що $\angle MAB = \frac{1}{2} \cup AB$ і $\angle NAB = \frac{1}{2} \cup AKB$.*

Розв'язання. Проведемо діаметр AD (рис. 87). Оскільки MN — дотична, то $\angle DAM = 90°$. Також $\angle B = 90°$ як вписаний, що спирається на діаметр AD. Тоді $\angle 2 + \angle 3 = 90°$. Але $\angle 1 + \angle 3 = 90°$. Звідси $\angle 1 = \angle 2$.

Тоді $\angle MAB = \angle BDA = \frac{1}{2} \cup AB$.

Маємо: $\angle NAB = 180° - \angle MAB = 180° - \frac{1}{2} \cup AB =$

$= 180° - \frac{1}{2}(360° - \cup AKB) = 180° - 180° + \frac{1}{2} \cup AKB = \frac{1}{2} \cup AKB.$

Приклад. Побудуйте дотичну до даного кола, яка проходить через дану точку, що лежить поза колом.

Розв'язання. На рисунку 88 зображено коло з центром в точці O і точку M, яка лежить поза цим колом.

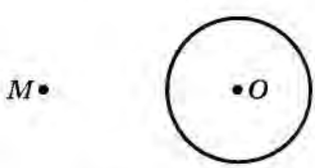


Рис. 88

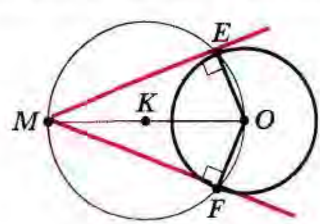


Рис. 89

Розділимо відрізок MO навпіл (рис. 89). Нехай точка K — його середина. Побудуємо коло з центром у точці K радіуса KO. Позначимо точки E і F перетину побудованого і даного кіл. Тоді кожна з прямих ME і MF є шуканою дотичною.

Дійсно, $\angle MEO = 90^\circ$ як вписаний, що спирається на діаметр MO. Відрізок OE — радіус даного кола. Тоді за ознакою дотичної пряма ME — шукана дотична.

?

1. Який кут називають центральним кутом кола?
2. Як називають частини кола, на які ділять його дві точки?
3. Яким символом позначають дугу кола?
4. У якому випадку позначення дуги двома буквами однозначно її визначає?
5. У якому випадку кажуть, що центральний кут спирається на дугу?
6. Чому вважають рівною градусну міру кола?
7. Як пов'язані градусні міри центрального кута кола і дуги, на яку цей кут спирається?
8. Скільки дуг стягує кожна хорда? Чому дорівнює сума їх градусних мір?
9. Який кут називають вписаним кутом кола?
10. У якому випадку кажуть, що вписаний кут спирається на дугу?
11. Як вимірюється вписаний кут?
12. Яку властивість мають вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу?
13. Який вид має кут, що спирається на діаметр?

ВПРАВИ

278.° Скільки градусів містить центральний кут кола, який спирається на дугу, що становить:

1) $\frac{1}{6}$ кола; 2) $\frac{1}{10}$ кола; 3) $\frac{1}{2}$ кола; 4) $\frac{2}{9}$ кола?

279.° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його поділяють дві точки, якщо градусна міра однієї з них на 80° більша за градусну міру другої.

Рис. 90

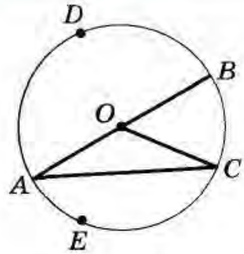


Рис. 91

280.° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його поділяють дві точки, якщо градусні міри цих дуг відносяться як 7 : 11.

281.° Знайдіть градусну міру дуги, яку описує кінець годинної стрілки: 1) за 2 год; 2) за 5 год; 3) за 8 год; 4) за 30 хв; 5) за 12 год.

282.° Які з кутів, зображених на рисунку 90, є вписаними? На яку дугу спирається кожний із вписаних кутів?

283.° На рисунку 91 зображено коло з центром O. Знайдіть:

1) $\angle BDC$, якщо $\angle BAC = 40°$; 3) $\cup CE$, якщо $\angle CDE = 80°$;

2) $\angle BEC$, якщо $\angle BOC = 70°$; 4) $\angle DBA$, якщо $\cup DBA = 300°$.

284.° Чи є помилки на рисунку 92?

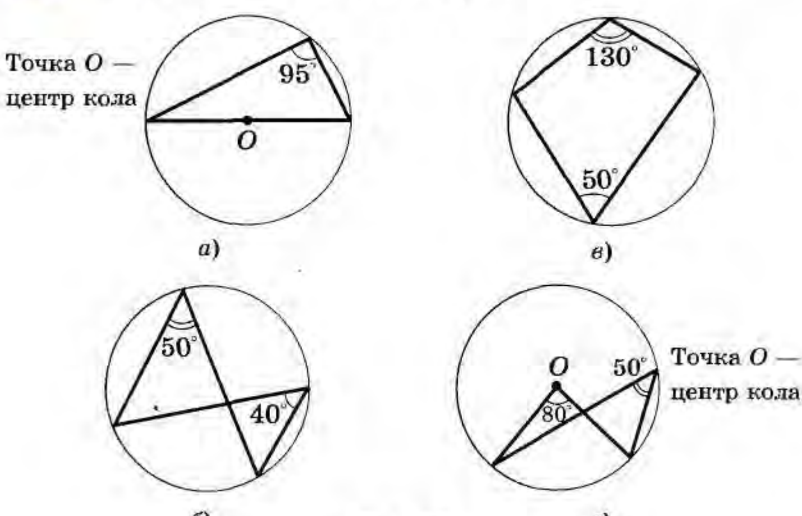


Рис. 92

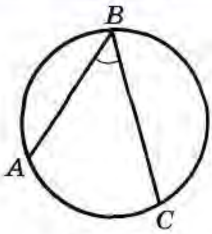


Рис. 93

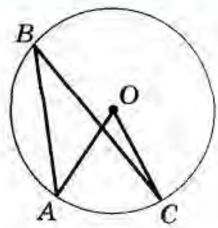


Рис. 94

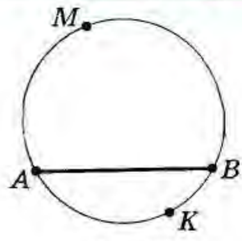


Рис. 95

285.° Знайдіть вписаний кут, якщо градусна міра дуги, на яку він спирається, дорівнює: 1) 84°; 2) 110°; 3) 230°; 4) 340°.

286.° На рисунку 93 $\smile AB = 74°$, $\angle ABC = 68°$. Знайдіть $\smile BC$.

287.° На рисунку 93 $\smile AB = 64°$, $\smile BC = 92°$. Знайдіть $\angle ABC$.

288.° Центральний кут AOC на 25° більший за вписаний кут ABC, що спирається на дугу AC (рис. 94). Знайдіть $\angle AOC$ і $\angle ABC$.

289.° Кінці хорди AB ділять коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як 3 : 7. Під якими кутами видно цю хорду з точок M і K (рис. 95)?

290.° На рисунку 96 хорди AB і CD рівні. Доведіть, що $\smile AMB = \smile CND$.

291.° Доведіть, що коли дві дуги кола рівні, то рівні і хорди, які їх стягують.

292.° Точки A, B і C ділять коло на 3 дуги так, що $\smile AB : \smile BC : \smile AC = 1 : 2 : 3$. Знайдіть кути трикутника ABC.

293.° Вершини рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) ділять описане навколо нього коло на 3 дуги, причому $\smile AB = 70°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

294.° Кінці діаметрів AC і BD кола послідовно сполучено так, що утворився чотирикутник $ABCD$.

1) Визначте вид чотирикутника $ABCD$.
2) Знайдіть $\smile AB$, $\smile BC$, $\smile CD$ і $\smile AD$, якщо $\angle ABD = 80°$.

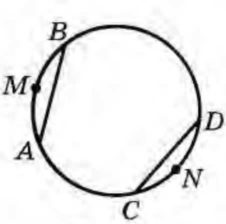


Рис. 96

295.° Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 32°. Знайдіть градусні міри дуг, на які вершини трикутника ділять коло, описане навколо нього, та радіус цього кола, якщо гіпотенуза даного трикутника дорівнює 12 см.

296.° Доведіть, що коли вписаний кут є прямим, то він спирається на діаметр.

297.° Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M (рис. 97), $\cup AC = 50°$, $\cup BD = 70°$.

1) Знайдіть $\angle AMC$.

2) Доведіть, що $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$.

298.° Хорди AB і CD кола не перетинаються, а прямі AB і CD перетинаються в точці M (рис. 98), $\cup AC = 100°$, $\cup BD = 30°$.

1) Знайдіть $\angle AMC$.

2) Доведіть, що $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup BD)$.

299.° Через точку A, яка лежить поза колом з центром O, проведено дві прямі, одна з яких дотикається кола в точці B, а друга проходить через його центр (рис. 99). Відомо, що $\cup BMC = 100°$. Знайдіть $\angle BAC$.

300.° Бісектриса кута B трикутника ABC перетинає коло, описане навколо цього трикутника, у точці D. Знайдіть кути трикутника ADC, якщо $\angle ABC = 80°$.

301.° На дузі AC кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC, позначено точку M так, що $\cup AM = 2 \cup CM$. Знайдіть кути трикутника AMC.

302.° Коло, побудоване на стороні AB трикутника ABC як на діаметрі, перетинає сторони AC і BC у точках M і K відповідно. Доведіть, що відрізки AK і BM — висоти трикутника ABC.

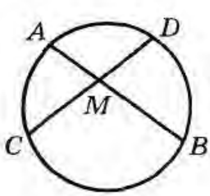


Рис. 97

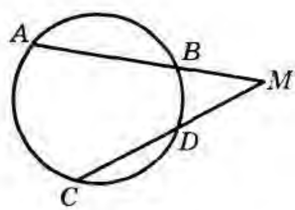


Рис. 98

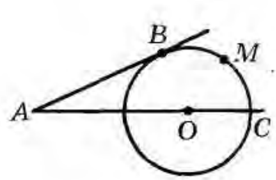


Рис. 99

303.* Коло, побудоване на стороні AC трикутника ABC як на діаметрі, перетинає сторону AB у точці K так, що $\angle ACK = \angle BCK$. Доведіть, що ΔABC — рівнобедрений.

304.* Доведіть, що градусні міри дуг кола, що містяться між двома паралельними хордами, рівні.

305.* Вершини квадрата $ABCD$ лежать на колі. На дузі AB позначено довільну точку M. Доведіть, що $\angle AMD = \angle CMD = \angle CMB$.

306.* Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює $56°$. На бічній стороні трикутника як на діаметрі побудовано півколо, яке інші сторони трикутника ділять на 3 дуги. Знайдіть градусні міри утворених дуг.

307.** Як, користуючись лише косинцем, знайти центр даного кола?

308.** Дано коло, у якому проведено діаметр AB, і точку C поза колом (рис. 100). Як, користуючись лише лінійкою, провести через точку C пряму, яка перпендикулярна до прямої AB?

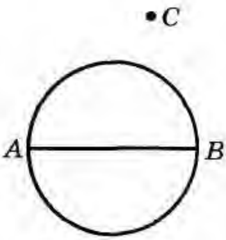


Рис. 100

309.** Через точку дотику двох кіл проведено дві січні. Точки їх перетину з колами з'єднано хордами. Доведіть, що ці хорди паралельні.

310.** До кола, описаного навколо трикутника ABC, проведено у точці B дотичну, яка перетинає пряму AC у точці D, BM — бісектриса трикутника ABC. Доведіть, що $BD = MD$.

311.* Дано відрізок AB і кут α. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $\angle AXB = \alpha$.

312.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним кутом і висотою, проведеною до даної сторони.

313.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним кутом і медіаною, проведеною до даної сторони.

314.* Побудуйте паралелограм за двома сторонами і кутом між діагоналями.

315.* Побудуйте паралелограм за кутом і двома діагоналями.

316.* Дано відрізок AB. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що трикутник AXB — прямокутний.

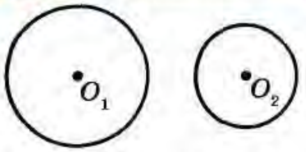


Рис. 101

317.* Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане навколо нього коло в точці D. Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. Доведіть, що $DO = DB = DC$.

318.* Бісектриси кутів A, B і C трикутника ABC перетинають описане навколо нього коло в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що $A_1B_1 \perp CC_1$.

319.* На рисунку 101 зображено два кола з центрами O_1 і O_2. Побудуйте пряму l, яка дотикається до цих кіл так, що точки дотику лежать в одній півплощині відносно прямої O_1O_2 (таку пряму l називають **зовнішньою спільною дотичною** двох даних кіл).

320.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і радіусом вписаного кола.

321.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і медіаною, проведеною до другої сторони.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

322. Периметр трикутника ABC дорівнює 30 см. Точка дотику вписаного кола зі стороною AB поділяє її у відношенні $3 : 2$, рахуючи від вершини A, а точка дотику зі стороною BC віддалена від вершини C на 5 см. Знайдіть сторони трикутника.

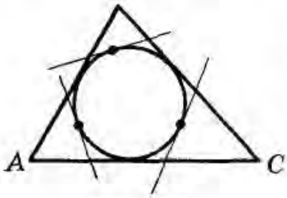


Рис. 102

323. До кола, вписаного в трикутник ABC, проведено 3 дотичні (рис. 102). Периметри трикутників, які ці дотичні відтинають від даного трикутника, дорівнюють P_1, P_2 і P_3. Знайдіть периметр трикутника ABC.

324. Установіть вид трикутника, у якого центр описаного кола належить медіані.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 23 на с. 201.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

325. Клітинки квадрата розміром 100×100 клітинок розфарбовано у шаховому порядку. Квадрат розрізали на квадрати, сторони яких містять непарну кількість клітинок, і в кожному такому квадраті позначили центральну клітинку. Доведіть, що білих і чорних клітинок позначено порівну.

10. Вписані і описані чотирикутники

Означення. **Чотирикутник називають вписаним, якщо існує коло, якому належать усі його вершини.**

На рисунку 103 зображено вписаний чотирикутник $ABCD$. У цьому випадку також кажуть, що коло **описане навколо** чотирикутника.

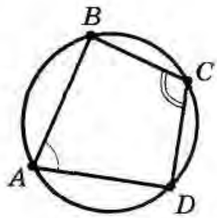


Рис. 103

Теорема 10.1. ***Якщо чотирикутник є вписаним, то сума його протилежних кутів дорівнює*** $180°$.

Доведення. ⊙ Кути A і C — протилежні кути вписаного чотирикутника $ABCD$ (рис. 103). Оскільки ці кути вписані, то $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$ і $\angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$. Але $\cup BCD + \cup DAB = 360°$. Звідси $\angle A + \angle C = 180°$. Аналогічно можна показати, що $\angle B + \angle D = 180°$. ▲

На відміну від трикутника, коло можна описати не навколо будь-якого чотирикутника. Розпізнавати вписані чотирикутники дозволяє така теорема.

Теорема 10.2 (обернена до теореми 10.1). ***Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює*** $180°$, ***то він є вписаним.***

Доведення. ⊛ Розглянемо чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A + \angle C = 180°$. Припустимо, що навколо цього чоти-

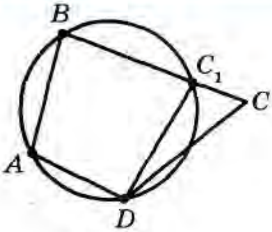


Рис. 104

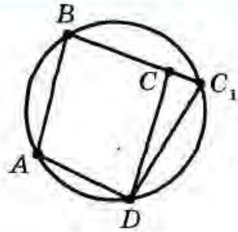


Рис. 105

рикутника не можна описати коло. Тоді опишемо коло навколо трикутника ABD. За припущенням точка C не належить цьому колу. Тому можливі два випадки:

1) точка C лежить поза описаним колом трикутника ABD (рис. 104);
2) точка C лежить всередині описаного кола трикутника ABD (рис. 105).

На рисунку 104 сторона BC перетинає коло в точці C_1. Чотирикутник ABC_1D — вписаний. Тоді за теоремою 10.1 $\angle A + \angle BC_1D = 180°$. Але за умовою $\angle A + \angle C = 180°$. Звідси $\angle BC_1D = \angle C$. Проте ця рівність суперечлива, оскільки за властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle BC_1D = \angle C + \angle CDC_1$.

Для другого випадку (рис. 105) проведіть доведення самостійно. ▲

Теорему 10.2 можна вважати ознакою належності чотирьох точок одному колу.

Якщо чотирикутник є вписаним, то існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин (центр описаного кола). Щоб знайти цю точку, достатньо знайти точку перетину серединних перпендикулярів двох сусідніх сторін чотирикутника.

Означення. **Чотирикутник називають *описаним*, якщо існує коло, яке дотикається до всіх його сторін.**

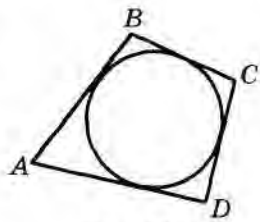


Рис. 106

На рисунку 106 зображено описаний чотирикутник $ABCD$. У цьому випадку також кажуть, що коло **вписане** в чотирикутник.

Теорема 10.3. ***Якщо чотирикутник є описаним, то суми його протилежних сторін рівні.***

Доведення. ⊖ На рисунку 107 у чотирикутник $ABCD$ вписано коло. Точки M, N, P, K є точками дотику кола зі сторонами чотирикутника.

Оскільки відрізки дотичних, проведених до кола з однієї точки, рівні, то $AK = AM = a$, $BM = BN = b$, $CN = CP = c$, $DP = = DK = d$. Звідси:

$$AB + CD = a + b + c + d,$$
$$BC + AD = b + c + a + d.$$

Отже, $AB + CD = BC + AD$. ▲

На відміну від трикутника, не в будь-який чотирикутник можна вписати коло. Розпізнавати описані чотирикутники дозволяє така теорема.

Теорема 10.4. ***Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то цей чотирикутник є описаним.***

Доведення. ⊛ Розглянемо опуклий чотирикутник $ABCD$, у якому $AB + CD = BC + AD$.

Нехай бісектриси кутів A і B перетинаються в точці O (рис. 108). Тоді точка O рівновіддалена від сторін AB, BC і AD. Отже, існує коло з центром у точці O, яке дотикається до трьох цих сторін.

Припустимо, що це коло не дотикається до сторони CD. Тоді можливі два випадки:

1) сторона CD не має спільних точок з побудованим колом;
2) сторона CD має дві спільні точки з побудованим колом.

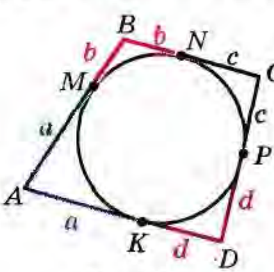


Рис. 107

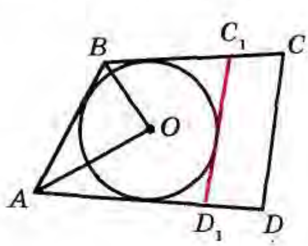


Рис. 108

Проведемо дотичну C_1D_1 паралельно стороні CD (рис. 108). Чотирикутник ABC_1D_1 — описаний. Тоді за теоремою 10.3

$$AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1. \quad (1)$$

Проте за умовою $AB + CD = BC + AD$. (2)

Віднімемо від рівності (2) рівність (1):

$$CD - C_1D_1 = BC - BC_1 + AD - AD_1.$$

Звідси $CD - C_1D_1 = C_1C + D_1D$; $CD = C_1C + D_1D + C_1D_1$. Ця рівність суперечить твердженню, доведеному у ключовій задачі пункту 1.

Другий випадок розгляньте самостійно. ▲

Якщо чотирикутник є описаним, то існує точка, рівновіддалена від усіх його сторін (центр вписаного кола). Щоб знайти цю точку, достатньо знайти точку перетину бісектрис двох сусідніх кутів чотирикутника.

Задача (ознака належності чотирьох точок одному колу). *Точки A, M, N, B такі, що $\angle AMB = \angle ANB$, причому точки M і N лежать в одній півплощині відносно прямої AB. Доведіть, що точки A, M, N, B лежать на одному колі.*

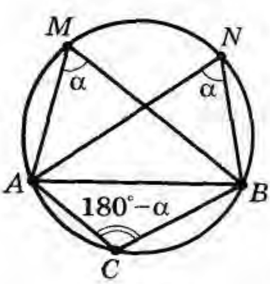


Рис. 109

Розв'язання. Нехай $\angle AMB = \angle ANB = \alpha$. Навколо трикутника AMB опишемо коло (рис. 109). Нехай C — довільна точка кола, яка не належить дузі $\overset{\frown}{AMB}$. Тоді чотирикутник $ACBM$ — вписаний. Звідси $\angle C = 180° - \alpha$. Маємо: $\angle C + \angle N = 180°$, тобто чотирикутник $ACBN$ — також вписаний. Оскільки навколо трикутника ABC можна описати тільки одне коло, то цьому колу належать як точка M, так і точка N.

?

1. Який чотирикутник називають вписаним?
2. У якому випадку кажуть, що коло описане навколо чотирикутника?
3. Яку властивість мають кути вписаного чотирикутника?
4. За якої умови чотирикутник є вписаним?

5. Який чотирикутник називають описаним?

6. У якому випадку кажуть, що коло вписане в чотирикутник?

7. Яку властивість мають сторони описаного чотирикутника?

8. За якої умови чотирикутник є описаним?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

326.° Накресліть прямокутник зі сторонами 2 см і 3 см. Опишіть навколо нього коло.

327.° Накресліть довільну рівнобічну трапецію. Опишіть навколо неї коло.

328.° Накресліть рівнобічну трапецію з більшою основою 6 см, бічною стороною 4 см і кутом 60°. Впишіть у неї коло.

329.° Накресліть довільний квадрат. Впишіть у нього коло і опишіть навколо нього коло.

ВПРАВИ

330.° Чи можна описати коло навколо чотирикутника *ABCD*, якщо його кути *A*, *B*, *C* і *D* відповідно дорівнюють:

1) 90°, 90°, 80°, 100°;

2) 90°, 80°, 90°, 100°;

3) 50°, 70°, 130°, 110°?

331.° Чи можна описати коло навколо чотирикутника *ABCD*, якщо його кути *A*, *B*, *C* і *D* відповідно пропорційні числам:

1) 3, 8, 11, 6;

2) 4, 5, 4, 2 ?

332.° Доведіть, що можна описати коло навколо:

1) будь-якого прямокутника;

2) будь-якої рівнобічної трапеції.

333.° Що є центром кола, описаного навколо прямокутника?

334.° Чи можна описати коло навколо паралелограма, який не є прямокутником?

335.° У прямокутнику $ABCD$ $AB = 12$ см, $\angle CAD = 30°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного прямокутника.

336.° Чи можна вписати коло в чотирикутник $ABCD$, якщо його сторони AB, BC, CD, AD відповідно пропорційні числам:

1) 7, 8, 12, 11; 2) 7, 12, 8, 11 ?

337.° Сума двох протилежних сторін описаного чотирикутника дорівнює 18 см. Знайдіть периметр даного чотирикутника.

338.° Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 7 см. Чому дорівнює периметр даної трапеції, якщо в неї можна вписати коло?

339.° У чотирикутнику $CDEF$, у який можна вписати коло, $CD = 6$ см, $DE = 8$ см, $EF = 12$ см. Знайдіть сторону CF.

340.° Доведіть, що в будь-який ромб можна вписати коло. Яка точка є центром кола, вписаного в ромб?

341.° Чи можна вписати коло в паралелограм, який не є ромбом?

342.° Під яким кутом видно бічну сторону трапеції з центра вписаного кола?

343.° Один з кутів ромба дорівнює 60°, а більша діагональ — 24 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний ромб.

344.• Доведіть, що коли в прямокутник можна вписати коло, то цей прямокутник є квадратом.

345.• Доведіть, що коли навколо ромба можна описати коло, то цей ромб є квадратом.

346.• Сторона AD чотирикутника $ABCD$ є діаметром кола, описаного навколо нього, $\angle ABC = 108°$, $\angle BCD = 132°$. Знайдіть кути BAD, ADC, CAD, BDA.

347.• Знайдіть кути чотирикутника $MNKP$, вписаного в коло, якщо $\angle MKP = 58°$, $\angle MPN = 34°$, $\angle KMP = 16°$.

348.• Рівнобічну трапецію вписано в коло, центр якого належить одній з основ. Кут між діагоналями трапеції, протилежний її бічній стороні, дорівнює 56°. Знайдіть кути трапеції.

349.• Висоти BM і CK гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що точки A, K, H і M лежать на одному колі.

350.* Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр даної трапеції, якщо радіус вписаного кола дорівнює 20 см.

351.* Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо периметр трапеції дорівнює 54 см.

352.** Центр кола, описаного навколо трапеції, належить більшій основі, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайдіть кути трапеції.

353.** Діагональ трапеції, вписаної в коло, дорівнює d. Бічну сторону видно з центра описаного кола під кутом $120°$. Знайдіть середню лінію трапеції.

354.** Бічні сторони і менша основа рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см, а один з її кутів дорівнює $60°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.

355.** З довільної точки M катета AC прямокутного трикутника ABC опущено перпендикуляр MK на гіпотенузу AB. Доведіть, що $\angle MKC = \angle MBC$.

356.** З довільної точки O, яка належить гострому куту A, але не належить його сторонам, опущено перпендикуляри OB і OC на його сторони. Доведіть, що $\angle OAB = \angle OCB$.

357.* Бісектриси BK і CM трикутника ABC перетинаються в точці O, $\angle A = 60°$. Знайдіть $\angle CMK$.

358.* Бісектриси MA і KB трикутника MNK перетинаються в точці O, точки A, N, B і O лежать на одному колі. Знайдіть $\angle N$.

359.* Поза прямокутним трикутником ABC на його гіпотенузі AB побудовано квадрат $ABFD$. Доведіть, що $\angle ACO = \angle OCB$, де O — точка перетину діагоналей квадрата.

360.* Вершини A і B трикутника ABC з прямим кутом C ковзають по сторонах прямого кута з вершиною P (рис. 110). Доведіть, що точка C при цьому переміщується по відрізку.

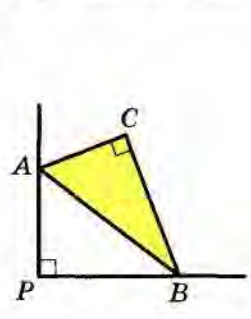


Рис. 110

361.* З довільної точки M, яка належить куту з вершиною A, проведено перпендикуляри MP і MQ до сторін кута. З точки A проведено перпендикуляр AK до відрізка PQ. Доведіть, що $\angle PAK = \angle MAQ$.

362.* У гострокутному трикутнику ABC CC_1 і AA_1 — висоти. Доведіть, що серединний перпендикуляр відрізка C_1A_1 проходить через середину сторони AC.

363.* На бічних сторонах трапеції, у яку можна вписати коло, як на діаметрах побудовано два кола. Доведіть, що ці кола дотикаються.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

364. Через середину діагоналі AC паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD. Ця пряма перетинає прямі AB і CD у точках M і K відповідно. Визначте вид чотирикутника $AMCK$.

365. У трикутнику ABC AD — бісектриса. Через точку D проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону AB у точці E. Через точку E проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає сторону AC у точці F. Доведіть, що $AE = CF$.

366. Висота BM ромба $ABCD$, опущена з вершини тупого кута на сторону AD, перетинає діагональ AC у точці K, $\angle BKC = 64°$. Знайдіть $\angle ABC$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

367. Чи можна квадрат розрізати на тисячокутник і 199 п'ятикутників?

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 1

1. Яким з наведених способів можна позначити чотирикутник, зображений на рисунку 111?

А) $MPQN$; В) $NPMQ$;

Б) $QMNP$; Г) $QNPM$.

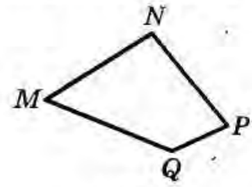


Рис. 111

2. Які кути може мати чотирикутник?

А) чотири тупих кути;

Б) чотири гострих кути;

В) два тупих і два прямих кути;

Г) два прямих кути, один гострий кут і один тупий кут.

3. У чотирикутнику кожна сторона дорівнює одній і тій самій його діагоналі. Знайдіть кути чотирикутника.

А) 60°, 60°, 120°, 120°; В) 90°, 90°, 90°, 90°;

Б) 60°, 120°, 90°, 90°; Г) 150°, 30°, 150°, 30°.

4. Бісектриса кута паралелограма ділить навпіл його сторону. Чому дорівнюють сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 30 см?

А) 5 см, 10 см; В) 7 см, 8 см;

Б) 6 см, 4 см; Г) 3 см, 12 см.

5. Чотирикутник є паралелограмом, якщо:

А) у нього є дві пари рівних сторін;

Б) у нього є дві пари рівних кутів;

В) кожна діагональ ділить його на два рівних трикутники;

Г) у нього три сторони рівні.

6. Яке з даних тверджень неправильне?

А) чотирикутник, який одночасно є і ромбом, і прямокутником, є квадратом;

Б) паралелограм, у якого діагоналі рівні і перпендикулярні, є квадратом;

В) паралелограм, у якого всі кути прямі і діагоналі рівні, є квадратом;

Г) ромб, у якого діагоналі рівні, є квадратом.

7. У трикутнику ABC точки M і N належать відповідно сторонам AB і BC. Відрізок MN є середньою лінією, якщо:

А) $MN \parallel AC$; В) $MN = \frac{1}{2}AC$, $\angle BNM = \angle BAC$;

Б) $MN = \frac{1}{2}AC$; Г) $MN = \frac{1}{2}AC$, $\angle BNM = \angle BCA$.

8. Яку з наведених властивостей не може мати трапеція?

А) протилежні кути рівні;

Б) діагоналі рівні й перпендикулярні;

В) один з кутів при більшій основі більше за один з кутів при меншій основі;

Г) середня лінія трапеції дорівнює її висоті.

9. Вписані кути одного кола рівні, якщо вони:

А) спираються на одну хорду; В) спираються на одну дугу;

Б) мають спільну вершину; Г) мають спільну сторону.

10. Навколо чотирикутника $CDEF$ описано коло, $\angle CDF = 80°$, $\angle DEC = 30°$. Знайдіть кут DCF.

А) $50°$; Б) $110°$; В) $70°$; Г) $90°$.

У ЦЬОМУ ПАРАГРАФІ

- було введено такі поняття:
  - чотирикутник,
  - паралелограм,
  - прямокутник,
  - ромб,
  - квадрат,
  - трапеція,
  - середня лінія трикутника,
  - середня лінія трапеції,
  - дуга кола,
  - градусна міра дуги кола,
  - центральний і вписаний кути кола,
  - вписаний чотирикутник,
  - описаний чотирикутник;
- ви вивчили:
  - теорему про суму кутів опуклого чотирикутника,
  - властивості й ознаки паралелограма та його окремих видів,
  - властивості середніх ліній трикутника і трапеції,
  - властивості вписаних і центральних кутів кола,
  - властивості й ознаки вписаних і описаних чотирикутників;
- ви ознайомилися з класифікацією окремих видів чотирикутника.

§2 ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

Вивчивши матеріал цього параграфа, ви дізнаєтеся про властивості відрізків, які паралельні прямі відтинають на сторонах кута.

Ви навчитеся серед трикутників знаходити ті, які мають однакову форму, але різні розміри.

Ви познайомитеся з властивістю хорд, які перетинаються, і властивістю дотичної і січної, проведених до кола з однієї точки.

Ви навчитеся застосовувати властивості подібних трикутників.

11. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

Теорема 11.1 (теорема Фалеса). ***Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій його стороні.***

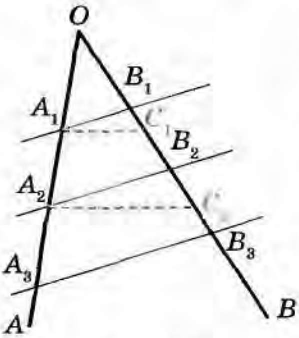


Рис. 112

Доведення. ⊖ Нехай маємо кут AOB (рис. 112). Відомо, що $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Доведемо, що $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.

Припустимо, що $OB_1 \neq B_1B_2$. Нехай серединою відрізка OB_2 є деяка точка C_1. Тоді відрізок A_1C_1 — середня лінія трикутника A_2OB_2. Звідси $A_1C_1 \parallel A_2B_2$. Отже, через точку A_1 проходять дві прямі, паралельні прямій A_2B_2, що неможливо. З отриманої суперечності випливає, що $OB_1 = B_1B_2$.

Припустимо, що $B_1B_2 \neq B_2B_3$. Нехай серединою відрізка B_1B_3 є деяка точка C_2. Тоді A_2C_2 — середня лінія трапеції $A_3A_1B_1B_3$. Звідси $A_2C_2 \parallel A_3B_3$. Тоді через точку A_2 проходять дві прямі, паралельні прямій A_3B_3, що неможливо. З отриманої суперечності випливає, що $B_1B_2 = B_2B_3$. ▲

Означення. **Відношенням двох відрізків називають відношення їх довжин, виражених в одних і тих самих одиницях виміру.**

Фалéс Мілетський
(бл. 625 — бл. 547 р. до н. е.)

Давньогрецький філософ, учений, купець і державний діяч. Походив з Мілету — порту в Малій Азії на узбережжі Егейського моря.

Якщо, наприклад, $AB = 8$ см, $CD = 6$ см, то відношення відрізка AB до відрізка CD дорівнює $\frac{8}{6}$. Записують: $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{6}$, тобто $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$.

Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, то кажуть, що відрізки AB і CD **пропорційні** відповідно відрізкам A_1B_1 і C_1D_1.

Аналогічно можна говорити про пропорційність більшої кількості відрізків. Наприклад, якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}$, то кажуть, що відрізки AB, CD, MN пропорційні відповідно відрізкам A_1B_1, C_1D_1, M_1N_1.

Теорема 11.2 (теорема про пропорційні відрізки). ***Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, що утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, що утворилися на другій стороні кута.***

Доведення. ⊖ Нехай сторони кута MON перетнуто паралельними прямими AA_1 і BB_1 (рис. 113). Доведемо, що:

1) $\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$; 2) $\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$; 3) $\frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Покажемо, як доводити першу з наведених рівностей (інші дві доводяться аналогічно).

Нехай для відрізків OA і AB існує такий відрізок завдовжки l, який укладається ціле число разів у кожному з них. Маємо: $OA = ml$, $AB = nl$, де m і n — деякі натуральні числа.

Тоді відрізки OA і AB можна поділити відповідно на m і n рівних відрізків, кожний з яких дорівнює l (рис. 114).

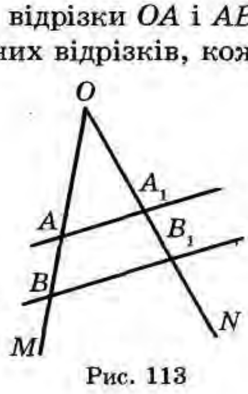


Рис. 113

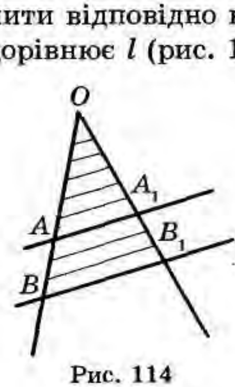


Рис. 114

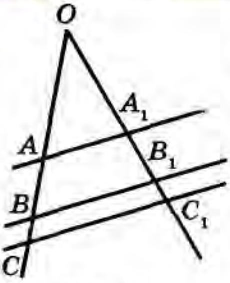


Рис. 115

Через кінці отриманих відрізків проведемо прямі, паралельні прямій BB_1 (рис. 114). За теоремою Фалеса ці прямі ділять відрізки OA_1 і A_1B_1 відповідно на m і n рівних відрізків. Нехай кожний з цих відрізків дорівнює l_1. Звідси $OA_1 = ml_1$, $A_1B_1 = nl_1$.

Маємо: $\frac{OA}{AB} = \frac{ml}{nl} = \frac{m}{n}$, $\frac{OA_1}{A_1B_1} = \frac{ml_1}{nl_1} = \frac{m}{n}$.

Звідси $\frac{OA}{AB} = \frac{OA_1}{A_1B_1}$. Тоді $\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Зауважимо, що наведене доведення цієї теореми не є повним. Справді, не для будь-яких двох відрізків існує відрізок, який вміщається в кожному з них ціле число разів. Зокрема, для відрізків OA і AB такий відрізок може й не існувати. Доведення для цього випадку ви можете розглянути на занятті математичного гуртка.

Якщо рисунок 113 доповнити прямою CC_1, паралельною прямій BB_1 (рис. 115), то, міркуючи аналогічно, отримаємо, наприклад, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. ▲

Теорема 11.2 залишається справедливою, якщо замість сторін кута взяти дві будь-які прямі.

Теорема 11.3. ***Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини трикутника.***

Доведення. На рисунку 116 медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M. Доведемо, що $\frac{BM}{MB_1} = \frac{2}{1}$.

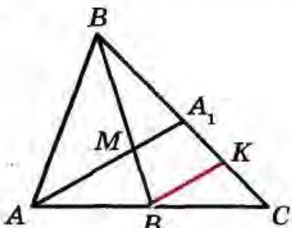


Рис. 116

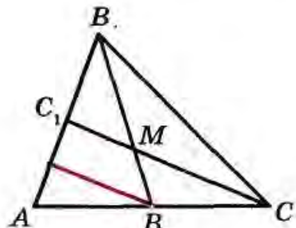


Рис. 117

Проведемо $B_1K \parallel AA_1$. Оскільки $AB_1 = B_1C$, то за теоремою Фалеса $A_1K = KC$, тобто $A_1C = 2A_1K$. Проте $BA_1 = A_1C$.

Тоді $BA_1 : A_1K = 2 : 1$. За теоремою про пропорційні відрізки $BM : MB_1 = BA_1 : A_1K = 2 : 1$.

Таким чином, медіана AA_1, перетинаючи медіану BB_1, ділить її у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини B. Аналогічно можна довести (зробіть це самостійно), що медіана CC_1 також ділить медіану BB_1 у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини B (рис. 117). А це означає, що всі три медіани трикутника ABC проходять через одну точку.

Ми показали, що ця точка ділить медіану BB_1 у відношенні $2 : 1$. Те, що ця точка ділить у відношенні $2 : 1$ також медіани AA_1 і CC_1, доводиться аналогічно. ▲

На рисунку 118 зображено трикутник ABC. Точка D належить стороні AC. Кажуть, що сторони AB і BC **прилягають** відповідно до відрізків AD і DC.

Теорема 11.4 (властивість бісектриси трикутника). ***Бісектриса трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.***

Доведення. ⊖ На рисунку 119 BD — бісектриса трикутника ABC. Доведемо, що $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$.

Через точку C проведемо пряму CE, паралельну прямій BD. Нехай проведена пряма перетинає пряму AB у точці E (рис. 119). Маємо: кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BD і CE та січній BC; кути 3 і 4 рівні як відповідні при паралельних прямих BD і CE та січній AE. Проте $\angle 4 = \angle 1$, оскільки BD — бісектриса. Звідси $\angle 2 = \angle 3$

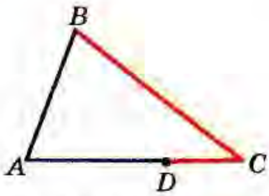


Рис. 118

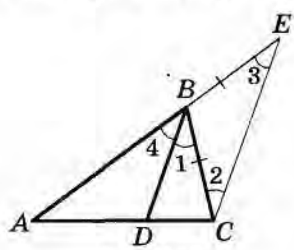


Рис. 119

і трикутник CBE — рівнобедрений з рівними сторонами BC і BE. За теоремою про пропорційні відрізки маємо: $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BE}$. Проте $BE=BC$, тоді $\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC}$. ▲

Приклад. Поділіть даний відрізок на три рівних відрізки.

Розв'язання. Через точку A даного відрізка AB проведемо промінь AC, який не належить прямій AB (рис. 120). Позначимо на промені AC довільну точку A_1. Потім позначимо точки A_2 і A_3 так, щоб $AA_1=A_1A_2=A_2A_3$ (рис. 120). Проведемо відрізок A_3B. Через точки A_1 і A_2 проведемо прямі, паралельні прямій A_3B. Вони перетинатимуть відрізок AB у точках B_1 і B_2 відповідно. За теоремою Фалеса $AB_1=B_1B_2=B_2B$.

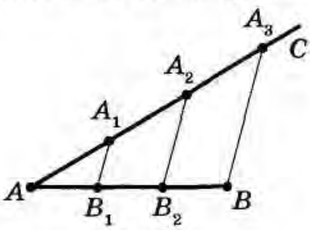


Рис. 120

1. Сформулюйте теорему Фалеса.
2. Що називають відношенням двох відрізків?
3. У якому випадку кажуть, що відрізки AB і CD пропорційні відрізкам A_1B_1 і C_1D_1?
4. Сформулюйте теорему про пропорційні відрізки.
5. Сформулюйте теорему про перетин медіан трикутника.
6. Сформулюйте властивість бісектриси трикутника.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

368.° Накресліть довільний відрізок і поділіть його на п'ять рівних частин.

369.° Накресліть довільний відрізок і поділіть його на сім рівних частин.

370.° Накресліть довільний відрізок AB і знайдіть на ньому точку C таку, що $AC : CB = 2 : 7$.

371.° Накресліть довільний відрізок CD і знайдіть на ньому точку E таку, що $CE : ED = 1 : 5$.

ВПРАВИ

372.° На рисунку 121 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_1 = 3$ см. Знайдіть відрізки B_1B_2, OB_3, B_1B_4.

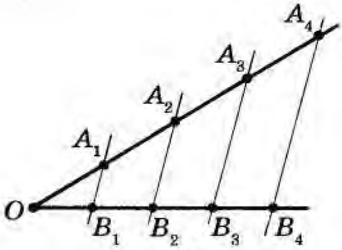


Рис. 121

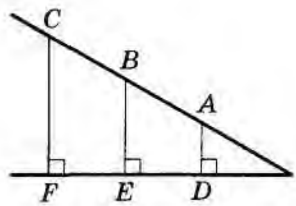


Рис. 122

373.° На рисунку 122 $AB = BC$, $EF = 5$ см. Знайдіть ED.

374.° Знайдіть відношення відрізків AB і CD, якщо їх довжини відповідно дорівнюють 12 см і 18 см. Чи зміниться це відношення, якщо довжини даних відрізків виразити у дециметрах? у міліметрах?

375.° Чи пропорційні відрізки AB і CD відповідно відрізкам EF і MK, якщо:

1) $AB = 16$ см, $CD = 6$ см, $EF = 24$ см, $MK = 9$ см;

2) $AB = 8$ см, $CD = 20$ см, $EF = 10$ см, $MK = 35$ см?

376.° Серед відрізків AB, CD, EF, MK, PS виберіть дві пари пропорційних відрізків, якщо $AB = 3$ см, $CD = 16$ см, $EF = 18$ см, $MK = 36$ см, $PS = 6$ см.

377.° На рисунку 123 $BD \parallel CE$, $AB = 16$ см, $BC = 6$ см, $AD = 8$ см. Знайдіть DE.

378.° На рисунку 124 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 9$ см, $A_2A_3 = 15$ см, $B_1B_2 = 6$ см. Знайдіть B_2B_3.

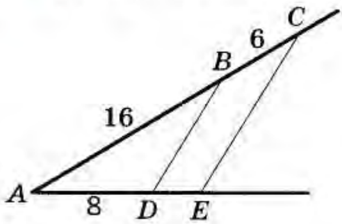


Рис. 123

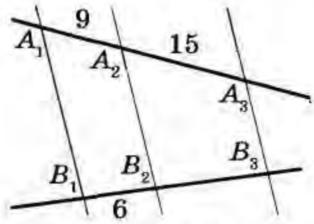


Рис. 124

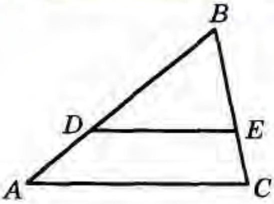


Рис. 125

379.° На рисунку 125 $DE \parallel AC$, $BE = 10$ см, відрізок BD у 2 рази більший за відрізок AD. Знайдіть BC.

380.° Пряма, яка паралельна стороні BC трикутника ABC, перетинає його сторону AB у точці M, а сторону AC — у точці K, $AM = 9$ см, $BM = 6$ см, $KC = 8$ см. Знайдіть AK.

381.° Доведіть, що середня лінія трикутника ABC, паралельна стороні AC, ділить навпіл будь-який відрізок, одним з кінців якого є точка B, а другим — довільна точка відрізка AC.

382.° Відстань від точки перетину діагоналей прямокутника до його більшої сторони дорівнює 7 см. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

383.° Висота рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. На якій відстані від сторін трикутника знаходиться точка перетину його бісектрис?

384.° Медіана CD трикутника ABC дорівнює 9 см. Знайдіть довжини відрізків CO і OD, де O — точка перетину медіан трикутника ABC.

385.° Відрізок BD є бісектрисою трикутника ABC, $AB = 40$ см, $AD = 30$ см, $CD = 12$ см. Знайдіть BC.

386.° Відрізок AM — бісектриса трикутника ABC, $AB = 48$ см, $AC = 32$ см, $BM = 18$ см. Знайдіть BC.

387.• Кінці відрізка, який не перетинає дану пряму, віддалені від цієї прямої на 8 см і 14 см. Знайдіть відстань від середини цього відрізка до даної прямої.

388.• Відстань від середини хорди BC до діаметра AC дорівнює 3 см, $\angle BAC = 30°$. Знайдіть хорду AB.

389.• Відрізок BM — висота ромба $ABCD$, яка проведена до сторони AD, $\angle A = 45°$, $AM = 8$ см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей ромба до сторони AD.

390.• У трикутнику ABC $AB = BC$, $AC = 8$ см, AD — медіана, BE — висота, $BE = 12$ см. З точки D опущено перпендикуляр DF на сторону AC. Знайдіть DF і $\angle ADF$.

391.• Сторона AC трикутника ABC дорівнює 24 см, сторону AB поділено на чотири рівні відрізки і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні AC. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трикутнику.

392.* Основи трапеції дорівнюють 16 см і 28 см. Одну з бічних сторін поділено на три рівні відрізки і через точки поділу проведено прямі, паралельні основам. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трапеції.

393.* Сторону DE трикутника DEF поділено на три рівні відрізки і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні DF. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трикутнику DEF, якщо $DF = 15$ см.

394.* Доведіть, що середня лінія трапеції поділяє її діагоналі навпіл.

395.* Середня лінія MK трапеції $ABCD$ перетинає діагональ AC у точці E, $ME = 4$ см, $EK = 6$ см. Знайдіть основи трапеції.

396.* Діагоналі трапеції перетинають її середню лінію MK у точках E і F. Доведіть, що $ME = KF$.

397.* Основи трапеції дорівнюють 12 см і 22 см. Знайдіть відрізки, на які діагоналі трапеції поділяють її середню лінію.

398.* На рисунку 126 $AE \parallel BF \parallel CM \parallel DK$, $AB = 25$ см, $BC = 20$ см, $CD = 35$ см, $EK = 48$ см. Знайдіть відрізки EF, FM і MK.

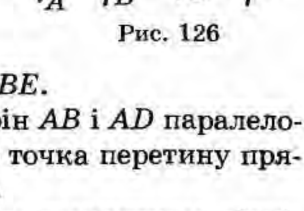


Рис. 126

399.* Через точку D, позначену на стороні AC трикутника ABC, проведено пряму, яка паралельна стороні AB і перетинає сторону BC у точці E, $AD : DC = 5 : 7$, $BC = 36$ см. Знайдіть BE.

400.* Точки M і K — середини сторін AB і AD паралелограма $ABCD$ відповідно. Доведіть, що точка перетину прямих BK і DM належить діагоналі AC.

401.* Доведіть, що коли дві медіани трикутника рівні, то цей трикутник — рівнобедрений.

402.* У трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено медіану AM і висоту BH. Знайдіть BH, якщо $AM = 45$ см, $\angle CAM = 30°$.

403.* Дано відрізок AB і точку O, яка не належить прямій AB. Побудуйте трикутник, для якого відрізок AB є стороною, а точка O — точкою перетину медіан.

404.$^{\bullet}$ Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $AB = 28$ см, $BC = 20$ см, $AC = 36$ см. Знайдіть AD і CD.

405.$^{\bullet}$ У трикутник ABC вписано ромб $CDEF$ так, що кут C у них спільний, а вершини D, E і F ромба належать відповідно сторонам AC, AB і BC трикутника. Знайдіть сторони AC і BC, якщо $AE = 30$ см, $BE = 12$ см, а периметр трикутника дорівнює 105 см.

406.$^{\bullet}$ Сторони трикутника дорівнюють 39 см, 65 см і 80 см. Коло, центр якого належить більшій стороні трикутника, дотикається до двох інших сторін. На які частини центр цього кола поділяє сторону трикутника?

407.$^{\bullet}$ Точка D — середина основи AC рівнобедреного трикутника ABC. На стороні AB позначено точку M так, що $AM : MB = 2 : 7$. У якому відношенні пряма BD поділяє відрізок CM?

408.$^{\bullet}$ У рівнобедреному трикутнику DEF проведено висоту EC до його основи і позначено на бічній стороні EF точку A. Відрізки EC і DA перетинаються у точці O, при цьому $AO : OD = 3 : 8$. Знайдіть відношення $EA : AF$.

409.$^{\bullet}$ У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 42 см, а основа відноситься до бічної сторони як $6 : 11$. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний трикутник.

410.$^{\bullet}$ Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, а центр вписаного кола поділяє медіану, проведену до основи, у відношенні $12 : 5$. Знайдіть основу трикутника.

411.$^{\bullet\bullet}$ На стороні BC трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MC = 3 : 10$. У якому відношенні відрізок AM поділяє медіану BK трикутника ABC?

412.$^{\bullet\bullet}$ На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MB = 4 : 3$. У якому відношенні медіана BK:

1) поділяє відрізок CM;

2) поділяється відрізком CM?

413.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам і дорівнює їх піврізниці.

414.$^{\bullet\bullet}$ Дано відрізки a, b, c. Побудуйте відрізок x такий, що $a : x = b : c$.

415.$^{\bullet\bullet}$ Через точку O, яка належить даному куту, проведіть відрізок, кінці якого належать сторонам даного кута і який поділяється точкою O:

1) навпіл;

2) у відношенні 2 : 3.

416.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте трикутник:

1) за стороною і кутами, які утворює ця сторона з медіанами, проведеними до двох інших сторін;

2) за двома медіанами і кутом між ними;

3) за висотою і медіаною, проведеними до однієї сторони, та кутом між цією стороною і медіаною, проведеною до іншої сторони;

4) за трьома медіанами.

417.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте трикутник:

1) за стороною і медіанами, проведеними до двох інших сторін;

2) за висотою, проведеною до однієї із сторін, і медіанами, проведеними до двох інших сторін.

418.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах кута A позначено точки B_1, B_2, C_1, C_2 так, що $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$ (рис. 127). Доведіть, що $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

419.* Бісектриса зовнішнього кута при вершині B трикутника ABC перетинає промінь AC у точці D. Доведіть, що $AB : BC = AD : CD$.

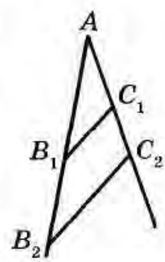


Рис. 127

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

420. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює a. На дузі AC кола з центром B, радіус якого дорівнює a, позначено точку E таку, що $\angle BEC = 75°$. Знайдіть AE.

421. Діагональ трапеції перпендикулярна до її основ, тупий кут, прилеглий до більшої основи, дорівнює 120°, бічна сторона, прилегла до цього кута, — 12 см, а більша основа — 16 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

422. Рівносторонній трикутник покрито п'ятьма меншими рівними між собою рівносторонніми трикутниками. Доведіть, що для покриття достатньо і чотирьох таких трикутників.

12. Подібні трикутники

На рисунку 128 ви бачите зменшене зображення обкладинки підручника з геометрії. Взагалі, у повсякденному житті часто зустрічаються об'єкти, які мають однакову форму, але різні розміри (рис. 129).

Рис. 128

Рис. 129

Геометричні фігури, які мають однакову форму, називають **подібними**. Наприклад, подібними є будь-які два квадрати, два кола, два рівносторонніх трикутники (рис. 130).

На рисунку 131 зображено трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких рівні кути, тобто $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

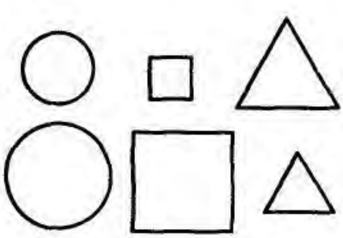


Рис. 130

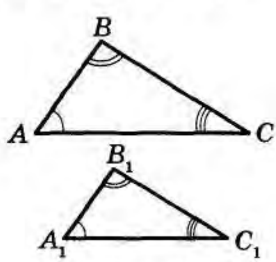


Рис. 131

Сторони AB і A_1B_1 лежать проти рівних кутів C і C_1. Такі сторони називають **відповідними**. Відповідними також є сторони BC і B_1C_1, CA і C_1A_1.

Означення. **Два трикутники називають подібними, якщо у них рівні кути і відповідні сторони пропорційні.**

Наприклад, на рисунку 132 зображено трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = 2$.

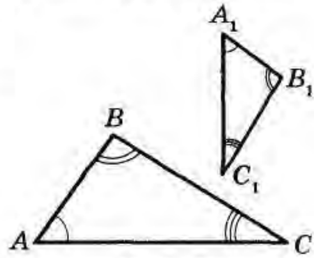


Рис. 132

За означенням ці трикутники подібні. Пишуть: $\Delta\ ABC \backsim \Delta\ A_1B_1C_1$ (читають: «трикутник ABC подібний трикутнику $A_1B_1C_1$»).

Число 2, яке дорівнює відношенню відповідних сторін, називають **коефіцієнтом подібності**. Кажуть, що трикутник ABC подібний трикутнику $A_1B_1C_1$ з коефіцієнтом подібності, який дорівнює 2. Пишуть: $\Delta\ ABC \overset{2}{\backsim} \Delta\ A_1B_1C_1$.

Оскільки $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{1}{2}$, то можна також сказати, що трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC з коефіцієнтом подібності, який дорівнює $\frac{1}{2}$. Пишуть: $\Delta\ A_1B_1C_1 \overset{\frac{1}{2}}{\backsim} \Delta\ ABC$.

З означення рівних трикутників випливає, що будь-які два рівних трикутники подібні з коефіцієнтом подібності, який дорівнює 1.

Якщо $\Delta\ ABC \backsim \Delta\ A_1B_1C_1$ і $\Delta\ A_1B_1C_1 \backsim \Delta\ A_2B_2C_2$, то $\Delta\ ABC \backsim \Delta\ A_2B_2C_2$. Доведіть цю властивість самостійно.

Лема[1] про подібні трикутники. ***Пряма, яка паралельна стороні трикутника і перетинає дві інших його сторони, відтинає від даного трикутника йому подібний.***

---

[1] *Лемою* називають допоміжну теорему, яку використовують для доведення цілого ряду теорем.

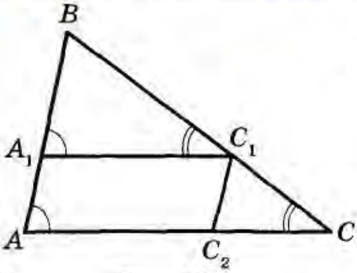


Рис. 133

Доведення. ⊖ На рисунку 133 $A_1C_1 \parallel AC$. Доведемо, що $\triangle A_1BC_1 \backsim \triangle ABC$.

$\angle A$ і $\angle A_1$ та $\angle C$ і $\angle C_1$ рівні як відповідні при паралельних прямих A_1C_1 і AC та січних AB і CB відповідно. Отже, кути трикутників, що розглядаються, рівні.

Покажемо, що сторони BA і BC пропорційні відповідно сторонам BA_1 і BC_1.

За теоремою 11.2 $\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Звідси $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$.

Проведемо $C_1C_2 \parallel AB$. На основі теореми 11.2 отримуємо, що $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{AC_2}$. Очевидно, що $AA_1C_1C_2$ — паралелограм. Тоді $AC_2 = A_1C_1$. Звідси $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Таким чином, було доведено, що $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Отже, у трикутниках A_1BC_1 і ABC кути рівні і відповідні сторони пропорційні. Тому за означенням ці трикутники подібні. ▲

Задача. *Доведіть, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.*

Розв'язання. Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC з коефіцієнтом подібності k.

Тоді $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, звідки $A_1B_1 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = k \cdot BC$, $A_1C_1 = k \cdot AC$.

Позначимо P_1 — периметр трикутника $A_1B_1C_1$, P — периметр трикутника ABC. Маємо:

$$P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k \cdot AB + k \cdot BC + k \cdot AC = k \cdot (AB + BC + AC) = kP,$$

тобто $\frac{P_1}{P} = k$.

1. Які два трикутники називають подібними?
2. Як знайти коефіцієнт подібності двох подібних трикутників?
3. Сформулюйте лему про подібні трикутники.

ВПРАВИ

423.° На рисунку 134 зображено подібні трикутники ABC і DEF, рівні кути яких позначено однаковою кількістю дуг. Які сторони цих трикутників пропорційні? Запишіть відповідні рівності.

424.° Чи подібні трикутники ABC і MNK, якщо $\angle A = 40°$, $\angle B = 82°$, $\angle M = 40°$, $\angle K = 58°$, $AB = 2,4$ см, $BC = 2,1$ см, $AC = 3,9$ см, $MN = 3,2$ см, $NK = 2,8$ см, $MK = 5,2$ см?

0,3

425.° Відомо, що $\triangle DEF \backsim \triangle MCP$, причому сторонам DE і DF відповідають сторони MC і MP. $MC = 12$ см, $MP = 8$ см, $EF = 4,5$ см. Знайдіть невідомі сторони даних трикутників.

426.° Відомо, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, причому $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 9$ см. Знайдіть B_1C_1 і A_1C_1.

427.° Знайдіть кути трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$, причому сторонам AB і BC відповідають сторони A_1B_1 і B_1C_1, $\angle A = 25°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 85°$.

428.° Сторони MK і DE та KT і EF — відповідні сторони подібних трикутників MKT і DEF, $MK = 18$ см, $KT = 16$ см, $MT = 28$ см, $MK : DE = 4 : 5$. Знайдіть сторони трикутника DEF.

429.° На рисунку 135 $AB \parallel CD$. Знайдіть на цьому рисунку подібні трикутники. Запишіть пропорції, які починаються з відношення: 1) $\frac{AB}{AE}$; 2) $\frac{CD}{AB}$; 3) $\frac{AE}{CE}$.

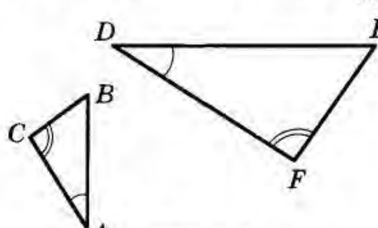


Рис. 134

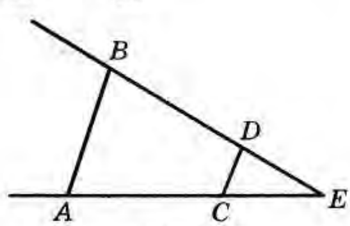


Рис. 135

430.° Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторону AB у точці D, а сторону BC — у точці E.

1) Знайдіть BD, якщо $AB = 16$ см, $AC = 20$ см, $DE = 15$ см.

2) Знайдіть AD, якщо $AB = 28$ см, $BC = 63$ см, $BE = 27$ см.

431.° У трикутнику ABC $AB = 6$ см. Через точку M сторони AB проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає сторону AC у точці K. Знайдіть невідомі сторони трикутника ABC, якщо $AM = 4$ см, $MK = 8$ см, $AK = 9$ см.

432.° Знайдіть висоту дерева, якщо довжина його тіні дорівнює 8,4 м, а тінь від вертикального стовпа заввишки 2 м у той самий час дорівнює 2,4 м (рис. 136).

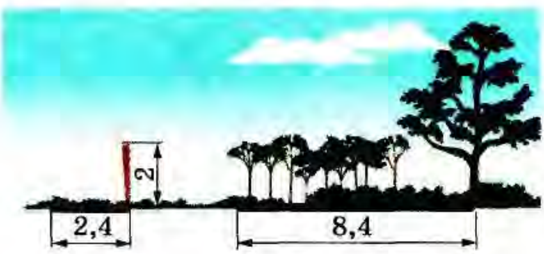


Рис. 136

433.° Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E. Знайдіть CE, якщо $DE = 40$ см, $BC : AD = 4 : 5$.

434.° Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M. Знайдіть меншу основу трапеції, якщо більша основа AD дорівнює 42 см, $AB = 9$ см, $BM = 54$ см.

435.° Доведіть, користуючись означенням подібних трикутників, що будь-які два рівносторонніх трикутники подібні.

436.° Точки M і K — середини сторін CD і AD квадрата $ABCD$ відповідно. Користуючись означенням подібних трикутників, доведіть, що $\triangle MDK \sim \triangle BCD$.

437.° Сторони трикутника відносяться як 5 : 4 : 7. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якому: 1) периметр дорівнює 64 см; 2) менша сторона дорівнює 24 см.

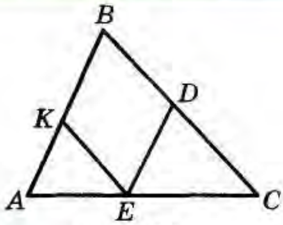


Рис. 137

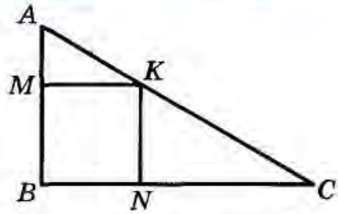


Рис. 138

438.$^{\bullet}$ Сторони даного трикутника дорівнюють 15 см, 25 см і 35 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якому: 1) периметр дорівнює 45 см; 2) різниця найбільшої і найменшої сторін дорівнює 16 см.

439.$^{\bullet}$ На рисунку 137 зображено трикутник ABC і вписаний у нього ромб $BDEK$. Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = 10$ см, $BC = 15$ см.

440.$^{\bullet}$ На рисунку 138 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle B = 90°$) і вписаний у нього квадрат $BMKN$. Знайдіть CN, якщо $BM = 6$ см, $AB = 10$ см.

441.$^{\bullet}$ Два кола з центрами O_1 і O_2 і радіусами 8 см і 12 см відповідно мають зовнішній дотик у точці A. Їх спільна зовнішня дотична перетинає пряму O_1O_2 у точці B. Знайдіть відстані від точки B до центрів даних кіл.

442.$^{\bullet\bullet}$ Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Через середину висоти трикутника, опущеної на його основу, проведено пряму, паралельну бічній стороні. Знайдіть периметр трикутника, який ця пряма відтинає від даного.

443.$^{\bullet\bullet}$ У рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 12 см, а бічна сторона — 18 см, вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику цього кола з бічними сторонами трикутника.

444.* У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $\angle ABC = 120°$, BD — бісектриса. Знайдіть BD.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

445. Сторона BC паралелограма $ABCD$ у 2 рази більша за сторону AB. Бісектриси кутів A і B паралелограма пере-

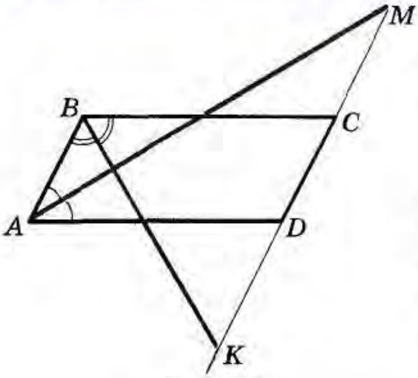


Рис. 139

тинають пряму CD у точках M і K відповідно (рис. 139). Знайдіть сторони паралелограма, якщо $MK = 18$ см.

446. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O, кут AOD на $60°$ більший за кут AOB, $AC = 24$ см. Знайдіть периметр трикутника COD.

447. Коло, центр якого належить стороні AB трикутника ABC, проходить через точку B, дотикається до сторони AC у точці C і перетинає сторону AB у точці D, причому $AD : BD = 1 : 2$. Знайдіть кути: 1) трикутника ABC; 2) трикутника BCD.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

448. На площині позначено 25 точок так, що серед будь-яких трьох з них знайдеться дві точки, відстань між якими менша від одиниці. Доведіть, що існує коло одиничного радіуса, яке містить не менше ніж 13 даних точок.

13. Перша ознака подібності трикутників

Якщо для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ виконуються умови $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, то за означенням ці трикутники подібні.

Чи можна за меншою кількістю умов визначати подібність трикутників? На це питання відповідають ознаки подібності трикутників.

Теорема 13.1 (перша ознака подібності трикутників: за двома кутами). ***Якщо два кути од-***

ного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

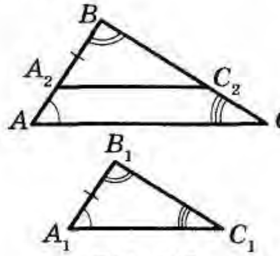


Рис. 140

Доведення. ⊖ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Якщо $AB = A_1B_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за другою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $AB > A_1B_1$. Відкладемо на стороні BA відрізок BA_2, який дорівнює стороні B_1A_1. Через точку A_2 проведемо пряму A_2C_2, паралельну стороні AC (рис. 140).

Кути A і BA_2C_2 є відповідними при паралельних прямих A_2C_2 і AC та січній AA_2. Звідси $\angle A = \angle BA_2C_2$. Отже, $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$ за другою ознакою рівності трикутників. Тоді за лемою про подібні трикутники $\triangle A_2BC_2 \backsim \triangle ABC$. Отже, $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$. ▲

Приклад. Середня лінія трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 24 см, а її діагоналі перетинаються в точці O, $AO : OC = 5 : 3$. Знайдіть основи трапеції.

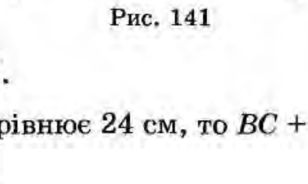


Рис. 141

Розв'язання. Розглянемо трикутники AOD і COB (рис. 141). Кути AOD і BOC рівні як вертикальні, кути CAD і ACB рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC. Отже, $\triangle AOD \backsim \triangle COB$ за двома кутами.

$$\text{Тоді } \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{OC} = \frac{5}{3}.$$

Оскільки середня лінія трапеції дорівнює 24 см, то $BC + AD = 48$ см.

Нехай $BC = 3x$ см, тоді $AD = 5x$ см.

Маємо: $3x + 5x = 48$; $x = 6$.

Отже, $BC = 18$ см, $AD = 30$ см.

Відповідь: 18 см, 30 см.

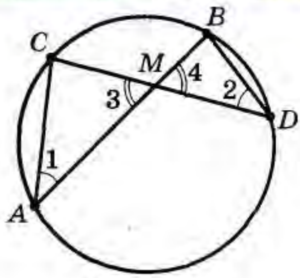


Рис. 142

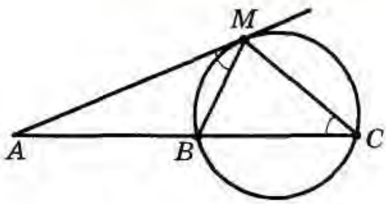


Рис. 143

Задача 1 (**властивість хорд, які перетинаються**). *Доведіть, що коли хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, то* $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ (рис. 142).

Розв'язання. Розглянемо трикутники ACM і DBM. Маємо: $\angle 3$ і $\angle 4$ рівні як вертикальні, $\angle 1$ і $\angle 2$ рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу. Отже, $\Delta ACM \backsim \Delta DBM$ за першою ознакою подібності трикутників. Тоді $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$. Звідси $AM \cdot MB = DM \cdot MC$.

Задача 2 (**властивість дотичної та січної**). *Доведіть, що коли з точки A до кола проведено дотичну AM (M — точка дотику) і пряму (січну), яка перетинає коло в точках B і C* (рис. 143), *то* $AM^2 = AC \cdot AB$.

Розв'язання. Розглянемо трикутники AMB і ACM. У них кут A — спільний. За властивістю кута між дотичною і хордою (див. ключову задачу до пункту 9) маємо $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MB$. Кут MCB — вписаний, тому $\angle MCB = \frac{1}{2} \cup MB$. Звідси $\angle AMB = \angle MCB$. Отже, $\Delta AMB \backsim \Delta ACM$ за першою ознакою подібності трикутників. Тоді $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$. Звідси $AM^2 = AC \cdot AB$.

?

1. Сформулюйте першу ознаку подібності трикутників.
2. Сформулюйте властивість хорд, які перетинаються.
3. Сформулюйте властивість дотичної та січної, проведених до кола з однієї точки.

ВПРАВИ

449.° На рисунку 144 $\angle BAC = \angle BED$. Чи подібні трикутники ABC і EDB? У випадку позитивної відповіді вкажіть пари відповідних сторін.

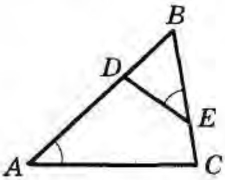


Рис. 144

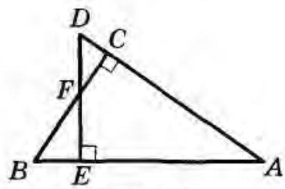


Рис. 145

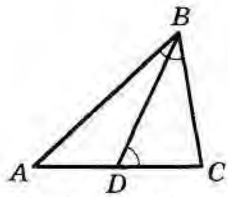


Рис. 146

450.° На рисунку 145 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Укажіть усі пари подібних трикутників, які є на цьому рисунку.

451.° На рисунку 146 $\angle ABC = \angle BDC$. Які трикутники на цьому рисунку подібні? Запишіть рівність відношень їх відповідних сторін.

452.° Укажіть пари подібних трикутників, зображених на рисунку 147, знайдіть довжину відрізка x (розміри дано в сантиметрах).

453.° У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Знайдіть невідомі сторони даних трикутників.

454.° На стороні CD паралелограма $ABCD$ (рис. 148) позначено точку E, прямі BE і AD перетинаються в точці F, $CE = 8$ см, $DE = 4$ см, $BE = 10$ см, $AD = 9$ см. Знайдіть EF і FD.

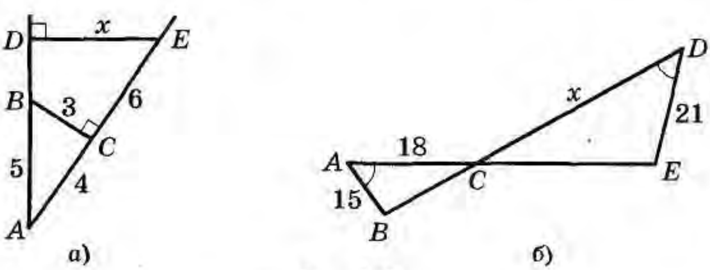


Рис. 147

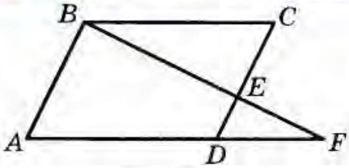


Рис. 148

455.° У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AD = 20$ см, $BC = 15$ см, O — точка перетину діагоналей, $AO = 16$ см. Знайдіть OC.

456.° Діагоналі трапеції $ABCD$ з основами BC і AD перетинаються в точці O, $BO : OD = 3 : 7$, $BC = 18$ см. Знайдіть AD.

457.° Чи подібні два прямокутних трикутники, якщо один з них має кут 38°, а другий — 52°?

458.° Доведіть, що два рівнобедрених трикутники подібні, якщо кути при їх вершинах рівні.

459.° Чи подібні рівнобедрені трикутники, якщо в них є: 1) по рівному гострому куту; 2) по прямому куту; 3) по рівному тупому куту?

460.° Кут між бічною стороною і основою одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту між бічною стороною і основою другого рівнобедреного трикутника. Бічна сторона і основа першого трикутника дорівнюють 18 см і 10 см відповідно, а основа другого — 8 см. Знайдіть бічну сторону другого трикутника.

461.° З вершини прямого кута трикутника проведено висоту до гіпотенузи. Скільки подібних трикутників утворилося при цьому?

462.° Сторони паралелограма дорівнюють 20 см і 14 см, висота, проведена до більшої сторони, — 7 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до меншої сторони.

463.• У трапеції $ABCD$ з основами BC і AD діагоналі перетинаються в точці O, $BO = 4$ см, $OD = 20$ см, $AC = 36$ см. Знайдіть AO і OC.

464.• У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AD = 18$ см, $BC = 14$ см, $AC = 24$ см. Знайдіть відрізки, на які діагональ AC ділиться точкою перетину діагоналей.

465.• Доведіть, що в подібних трикутниках бісектриси, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.

466.• Доведіть, що в подібних трикутниках висоти, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.

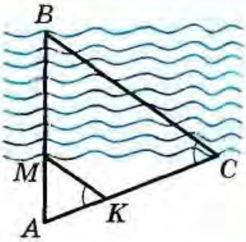


Рис. 149

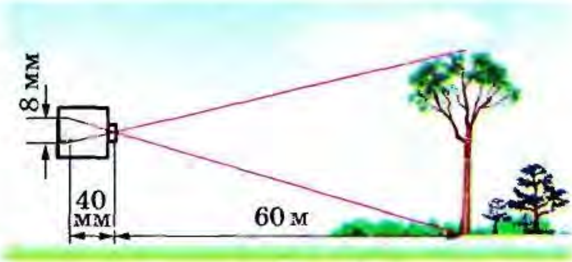


Рис. 150

467.˙ Основи BC і AD трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 28 см і 63 см, $\angle ABC = \angle ACD$. Знайдіть AC.

468.˙ На стороні AC трикутника ABC позначено точку D таку, що $\angle ABD = \angle C$, $AB = 20$ см, $BC = 28$ см, $AC = 40$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутника ABD.

469.˙ Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 20 см, а більший катет — 16 см. Знайдіть відрізки, на які серединний перпендикуляр гіпотенузи ділить більший катет.

470.˙ Поясніть за допомогою рисунка 149, як можна знайти ширину BM річки, використовуючи подібність трикутників.

471.˙ Зображення дерева, віддаленого на 60 м від об'єктива фотоапарата, має на плівці висоту 8 мм (рис. 150). Відстань від об'єктива до зображення дорівнює 40 мм. Яка висота дерева?

472.˙ Знайдіть висоту вежі (рис. 151), якщо відстань від спостерігача до жердини дорівнює 1,5 м, відстань до вежі — 39 м, висота жердини — 3 м, а зріст спостерігача — 1,8 м.

Рис. 151

473.° Чи може пряма перетинати дві сторони рівнобедреного трикутника, відтинати від нього трикутник, йому подібний, і не бути паралельною третій стороні?

474.° Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, $AM = 6$ см, $BM = 14$ см, $CM = 12$ см. Знайдіть DM.

475.° Хорди MK і NP кола перетинаються в точці F, $MF = 9$ см, $KF = 12$ см, а відрізок NF у 3 рази довший за відрізок PF. Знайдіть довжину хорди NP.

476.° Точка K поділяє хорду AC кола навпіл, а хорду DE — на відрізки завдовжки 2 см і 32 см. Знайдіть довжину хорди AC.

477.•• Точка E поділяє хорду CD кола на відрізки завдовжки 15 см і 16 см. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від точки E до центра кола дорівнює 4 см.

478.•• Хорда MK ділиться точкою P на два відрізки завдовжки 8 см і 12 см. Знайдіть відстань від точки P до центра кола, якщо його радіус дорівнює 11 см.

479.•• Через точку A проведено до кола дотичну AM (M — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках K і P (точка K лежить між точками A і P). Знайдіть KP, якщо $AM = 12$ см, $AP = 18$ см.

480.•• Через точку A, яка лежить поза колом, проведено дві прямі, одна з яких дотикається до кола в точці B, а друга перетинає коло в точках C і D (точка C лежить між точками A і D), $AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$. Знайдіть AD.

481.•• Через точку A, яка лежить поза колом, проведено дві прямі, одна з яких перетинає коло в точках B і C (точка B лежить між точками A і C), а друга — у точках D і E (точка D лежить між точками A і E).

1) Доведіть, що $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

2) Знайдіть AE, якщо $AB = 18$ см, $BC = 12$ см і $AD : DE = 5 : 7$.

482.•• У колі, радіус якого дорівнює 8 см, проведено хорду AB. На прямій AB поза відрізком AB позначено точку C таку, що $AC : BC = 1 : 4$. Знайдіть відстань від точки C до центра кола, якщо $AB = 9$ см.

483.•• У трикутник ABC вписано квадрат так, що дві його сусідні вершини належать стороні AC, а дві інші — сторонам AB і BC відповідно. Знайдіть сторону квадрата, якщо $AC = a$, а висота, проведена до сторони AC, дорівнює h.

484.•• У трикутнику ABC $BC = 72$ см, AD — висота, $AD = 24$ см. У даний трикутник вписано прямокутник $MNKP$ так, що вершини M і P належать стороні BC, а вершини N і K — сторонам AB і AC відповідно. Знайдіть сторони прямокутника, якщо $MP : MN = 9 : 5$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

485. Знайдіть кути паралелограма, якщо кут між його висотами, проведеними з однієї вершини, дорівнює:

1) $20°$; 2) $130°$.

486. Два кола з центрами O_1 і O_2, радіуси яких рівні, перетинаються в точках A і B. Відрізок O_1O_2 перетинає дані кола в точках C і D. Доведіть, що чотирикутник $ACBD$ — ромб.

487. Один з кутів прямокутної трапеції дорівнює $135°$, середня лінія — 21 см, а основи відносяться як $5 : 2$. Знайдіть меншу бічну сторону трапеції.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

488. Як два рівних опуклих чотирикутники розрізати на частини, з яких можна скласти паралелограм?

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Теорема Менелая

Точки, які належать одній прямій, називають **колінеарними**. Дві точки колінеарні завжди.

Тут ви дізнаєтеся про одну знамениту теорему, присвячену критерію колінеарності трьох точок. Ця теорема носить ім'я давньогрецького математика і астронома Менелая Александрійського (I–II ст. н. е.).

Теорема Менелая. ***На сторонах АВ і ВС трикутника АВС взято відповідно точки C_1 і A_1, а на продовженні сторони АС — точку B_1. Для того щоб точки A_1, B_1, C_1 лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність***

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (*)$$

Доведення. Спочатку доведемо необхідну умову колінеарності: якщо точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій, то виконується рівність (*).

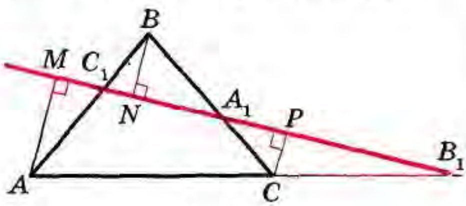


Рис. 152

З вершин трикутника ABC опустимо перпендикуляри AM, BN і CP на пряму C_1B_1 (рис. 152). Оскільки $\angle MC_1A=\angle NC_1B$, то $\Delta\ AMC_1 \backsim \Delta\ BNC_1$ за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AM}{BN}$. З подібності трикутників BNA_1 і CPA_1 отримуємо, що $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BN}{CP}$. З подібності трикутників B_1CP і B_1AM випливає рівність $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CP}{AM}$. З трьох отриманих пропорцій випливає, що $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AM}{BN}\cdot\frac{BN}{CP}\cdot\frac{CP}{AM}=1$.

Тепер доведемо достатню умову колінеарності: якщо виконується рівність (*), то точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Нехай пряма C_1B_1 перетинає сторону BC трикутника ABC у деякій точці A_2 (рис. 153). З доведеного вище можна записати: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$. Зіставляючи цю рівність з рівністю (*), доходимо висновку, що $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BA_2}{A_2C}$, тобто точки A_2 і A_1 поділяють відрізок BC в одному й тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються. Звідси пряма C_1B_1 перетинає сторону BC у точці A_1. ▲

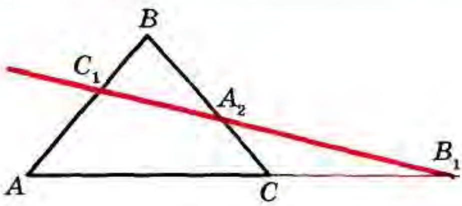


Рис. 153

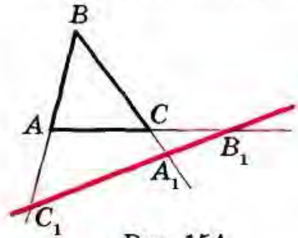


Рис. 154

Зауважимо, що теорема залишається справедливою і тоді, коли точки A_1, B_1, C_1 лежать не на сторонах трикутника ABC, а на їх продовженнях (рис. 154).

ВПРАВИ

1. Спільні зовнішні дотичні до трьох кіл перетинаються в точках A, B і C (рис. 155). Доведіть, що ці точки колінеарні. *Указівка*. Застосуйте теорему Менелая до трикутника $O_1O_2O_3$ та точок A, B, C, які лежать на продовженнях його сторін.

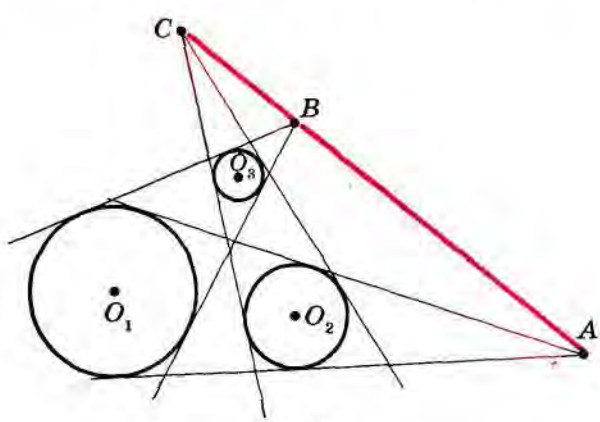


Рис. 155

2. Коло з центром O_1 дотикається до двох кіл з центрами O_2 і O_3 у точках A і B відповідно (рис. 156). Доведіть, що прямій AB належить точка C перетину спільних зовнішніх дотичних до кіл з центрами O_2 і O_3.

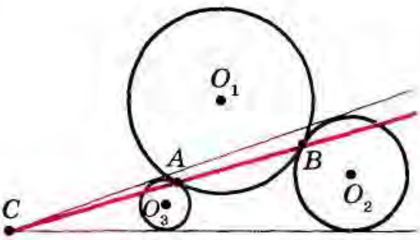


Рис. 156

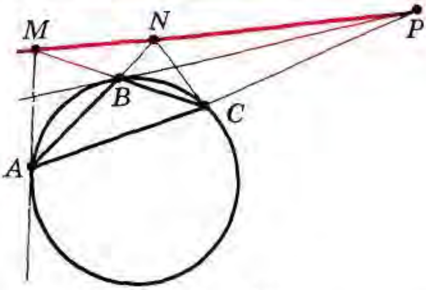


Рис. 157

3. У точках A, B, C до кола проведено дотичні (рис. 157). Доведіть, що точки M, N і P колінеарні. ***Указівка.*** Застосовуючи теорему Менелая до трикутника ABC, скористайтеся ключовою задачею 2 пункту 13.

4. Пряма перетинає сторони AB, BC і продовження сторони AC трикутника ABC відповідно в точках D, E, F. Доведіть, що середини відрізків DC, AE, BF лежать на одній прямій (*пряма Гаусса*[1]). ***Указівка.*** Застосуйте теорему Менелая до трикутника, вершини якого є серединами сторін трикутника ABC.

Теорема Птолемея

Теорема Птолемея[2]. ***Добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.***

Доведення. На діагоналі AC вписаного чотирикутника $ABCD$ (рис. 158) візьмемо точку K таку, що $\angle 1 = \angle 2$.

$\triangle ABK \sim \triangle DBC$ за першою ознакою подібності трикутників (кути 3 і 4 рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу). Звідси $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC}$, тобто

$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \qquad (1)$$

[1] Карл Фрідріх Гаусс (1777–1855) — видатний німецький математик, астроном, фізик, геодезист.

[2] Клавдій Птолемей (бл. 90 – бл. 160) — давньогрецький математик і астроном.

Зрозуміло, що $\angle ABD = \angle KBC$. Також кути 5 і 6 рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу. Тому $\triangle KBC \sim \triangle ABD$. Звідси $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}$, тобто

$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \qquad (2)$$

Додавши рівності (1) і (2), отримаємо:

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = \\ = BD \cdot AK + BD \cdot KC,$$ тобто

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD\,(AK + KC) = BD \cdot AC. \ \blacktriangle$$

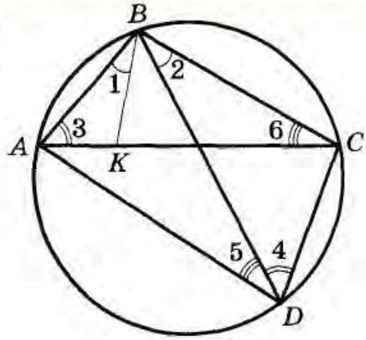


Рис. 158

ВПРАВИ

1. Нехай M — довільна точка описаного кола рівностороннього трикутника ABC. Доведіть, що один з відрізків MA, MB, MC дорівнює сумі двох інших.

2. На колі взято точки A, B, C, D такі, що $\cup AB = \cup BC = \cup CD$. Доведіть, що $AC^2 = AB\,(BC + AD)$.

3. На рисунку 159 зображено вписаний семикутник $ABCDEFG$, у якого всі сторони рівні. Доведіть, що $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

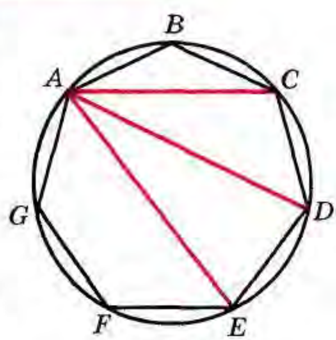


Рис. 159

14. Друга і третя ознаки подібності трикутників

Теорема **14.1** (друга ознака подібності трикутників). ***Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.***

Доведення. ⊖ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ і $\angle B = \angle B_1$.

Якщо $k = 1$, то $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, а отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників, тобто ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $k > 1$, тобто $AB > A_1B_1$ і $BC > B_1C_1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідно точки A_2 і C_2 так, що $BA_2 = A_1B_1$ і $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 160). Тоді $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$.

Покажемо, що $A_2C_2 \parallel AC$. Нехай це не так. Тоді на стороні BC позначимо точку M таку, що $A_2M \parallel AC$. Маємо: $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BM}$. Але $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$, тоді $\frac{BC}{BC_2} = \frac{BC}{BM}$, тобто $BC_2 = BM$. Отже, буквами M і C_2 позначено одну й ту саму точку. Тоді $A_2C_2 \parallel AC$.

За лемою про подібні трикутники $\triangle ABC \sim \triangle A_2BC_2$. Проте очевидно, що $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ▲

Теорема 14.2 (третя ознака подібності трикутників). ***Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.***

Доведення. ⊖ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$.

Якщо $k = 1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників, тобто ці трикутники подібні.

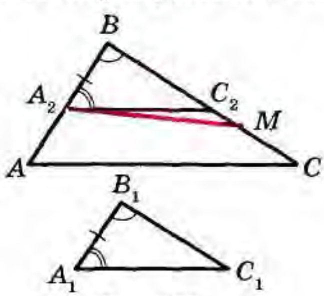


Рис. 160

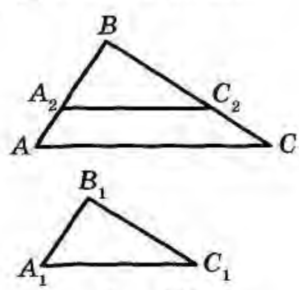


Рис. 161

Нехай, наприклад, $k > 1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідно точки A_2 і C_2 так, що $BA_2 = A_1B_1$, $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 161). Тоді $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k$. Звідси отримуємо, що $A_2C_2 \parallel AC$ (ми встановили цей факт під час доведення другої ознаки подібності). Отже, за лемою про подібні трикутники $\triangle ABC \backsim \triangle A_2BC_2$, причому коефіцієнт подібності дорівнює k. Тоді $\frac{CA}{C_2A_2} = k$, але за умовою $\frac{CA}{C_1A_1} = k$. Звідси $A_1C_1 = A_2C_2$. Отже, $\triangle A_2BC_2 = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників. З урахуванням того, що $\triangle A_2BC_2 \backsim \triangle ABC$, отримуємо: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. ▲

Приклад. Доведіть, що відрізок, який сполучає основи двох висот гострокутного трикутника, відтинає трикутник, подібний даному.

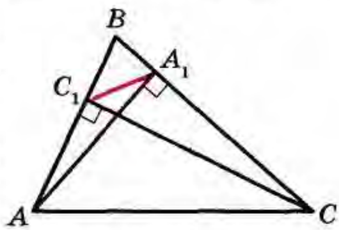


Рис. 162

Розв'язання. На рисунку 162 AA_1 і CC_1 — висоти трикутника ABC. Доведемо, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1BC_1$.

У прямокутних трикутниках ABA_1 і CBC_1 гострий кут B — спільний. Отже, $\triangle ABA_1 \backsim \triangle CBC_1$ за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AB}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Тоді $\frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$. Оскільки кут B — спільний для трикутників ABC і A_1BC_1, то $\triangle ABC \backsim \triangle A_1BC_1$ за другою ознакою подібності трикутників.

?

1. Сформулюйте другу ознаку подібності трикутників.
2. Сформулюйте третю ознаку подібності трикутників.

ВПРАВИ

489.° На одній стороні кута A відкладено відрізки AB і AD, а на другій — відрізки AC і AE. Чи подібні трикутники ABC і ADE, якщо $AB = 4$ см, $AD = 20$ см, $AC = 10$ см, $AE = 8$ см?

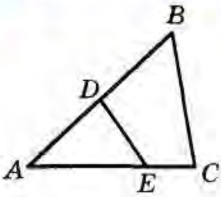


Рис. 163

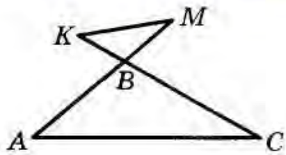


Рис. 164

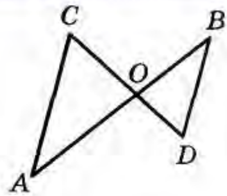


Рис. 165

490.° На сторонах AB і AC трикутника ABC (рис. 163) позначили відповідно точки D і E так, що $AD = \frac{4}{7}AC$, $AE = \frac{4}{7}AB$. Знайдіть DE, якщо $BC = 21$ см.

491.° У трикутнику ABC $AB = 21$ см, $AC = 42$ см, $BC = 28$ см (рис. 164). На продовженнях відрізків AB і BC за точку B відкладено відповідно відрізки BM і BK, $BM = 8$ см, $BK = 6$ см. Знайдіть KM.

492.° Відрізки AB і CD перетинаються в точці O (рис. 165), $AO = 24$ см, $BO = 16$ см, $CO = 15$ см, $OD = 10$ см, $\angle ACO = 72°$. Знайдіть $\angle BDO$.

493.° На сторонах AC і BC трикутника ABC позначили відповідно точки M і K так, що $CM = 15$ см, $CK = 12$ см. Знайдіть MK, якщо $AC = 20$ см, $BC = 25$ см, $AB = 30$ см.

494.° Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:

1) $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 14$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 15$ см, $A_1C_1 = 21$ см;
2) $AB = 1{,}3$ см, $BC = 2{,}5$ см, $AC = 3{,}2$ см, $A_1B_1 = 26$ см, $B_1C_1 = 50$ см, $A_1C_1 = 60$ см?

495.° Чи подібні два трикутники, якщо сторони одного відносяться як $3 : 8 : 9$, а сторони другого дорівнюють 24 см, 9 см, 27 см?

496.• У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, кожна із сторін AB і AC становить 0,6 сторін A_1B_1 і A_1C_1 відповідно. Знайдіть сторони BC і B_1C_1, якщо їх сума дорівнює 48 см.

497.• У трикутниках DEF і MKN $\angle E = \angle K$, а кожна із сторін DE і EF у 2,5 раза більша за сторони MK і KN відповідно. Знайдіть сторони DF і MN, якщо їх різниця дорівнює 30 см.

498.* На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено відповідно точки D і E так, що $AD : DB = AE : EC = 3 : 5$. Знайдіть DE, якщо $BC = 16$ см.

499.* З дерев'яних паличок виготовили три різносторонні подібні трикутники. У кожному з них більшу сторону пофарбували у блакитний колір, а меншу — у жовтий. З блакитних і жовтих паличок окремо склали два трикутники. Чи будуть ці трикутники подібні?

500.** У трикутнику ABC $AC = a$, $AB = BC = b$, AM і CK — бісектриси трикутника. Знайдіть MK.

501.** У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см. На стороні AC позначено точку D так, що $CD = 9$ см. Знайдіть BD.

502.* З точки A проведено два промені AM і AN. На промені AM взято точки H і B, а на промені AN — точки C і D так, що $AH \cdot AB = AC \cdot AD$. Доведіть, що точки H, B, C і D лежать на одному колі.

503.* На медіані BM трикутника ABC позначено точку K так, що $\angle MKC = \angle BCM$. Доведіть, що $\angle AKM = \angle BAM$.

504.* Відрізки AB і CD перетинаються в точці M. Відомо, що $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Доведіть, що точки A, B, C і D лежать на одному колі.

505.* На спільній хорді двох кіл, що перетинаються, взято точку M і через неї проведено хорди AB і CD (рис. 166). Доведіть, що $\angle DAB = \angle BCD$.

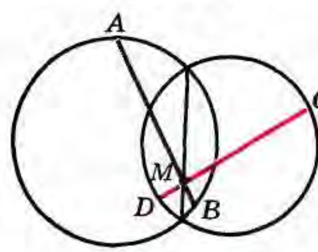


Рис. 166

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

506. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 46 см, $\angle BAD = \angle ADB$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо периметр трикутника BCD дорівнює 32 см.

507. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ позначено точку E так, що $DE = AD$. Через точку E проведено пряму, яка перпендикулярна до прямої BD і перетинає сторону AB у точці F. Доведіть, що $AF = FE = BE$.

508. У трапеції $ABCD$ $\angle B = 90°$, $\angle C = 150°$, $BC = 5$ см. Знайдіть сторону CD, якщо висота трапеції, проведена з вершини C, розбиває дану трапецію на трикутник і квадрат.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

509. На колі позначили 999 точок синім олівцем і одну точку жовтим олівцем. Яких многокутників з вершинами у позначених точках більше: тих, які містять жовту точку, чи тих, які її не містять?

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Пряма Ейлера

Точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника — це центр кола, описаного навколо трикутника. Позначимо цю точку буквою O.

Точка перетину бісектрис трикутника — це центр вписаного кола. Позначимо цю точку буквою J.

Ви також знаєте, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці. Цю точку називають **ортоцентром** трикутника. Позначимо її буквою H.

Точку перетину медіан трикутника називають **центроїдом** трикутника. Позначимо цю точку буквою M.

Точки O, J, H, M називають **чудовими** точками трикутника. Використання такого емоційного епітета цілком обґрунтовано. Адже цим точкам притаманний цілий ряд красивих властивостей. Хіба не чудово вже те, що вони є у будь-якому трикутнику?

Розглянемо одну з багатьох теорем про чудові точки трикутника.

Теорема. ***У будь-якому трикутнику центр описаного кола, центроїд і ортоцентр лежать на одній прямій.***

Цю пряму називають прямою Ейлера.

Доведення. Для рівнобедреного трикутника факт, що доводиться, є очевидним.

Леонард Ейлер
(1707—1783)

Видатний математик, фізик, механік, астроном

Якщо даний трикутник ABC прямокутний ($\angle C = 90°$), то його ортоцентр — це точка C, центр описаного кола — середина гіпотенузи AB. Тоді зрозуміло, що всі три точки, про які йдеться в теоремі, належать медіані, проведеній до гіпотенузи.

Доведемо теорему для гострокутного різностороннього трикутника.

Лема. ***Якщо H — ортоцентр трикутника ABC, а OM_1 — відстань від центра O описаного кола до сторони BC, то $AH = 2OM_1$*** **(рис. 167).**

Доведення. Виконаємо додаткову побудову, вже знайому вам з розв'язання ключової задачі пункту 2: через кожну вершину трикутника ABC проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 167). У зазначеній ключовій задачі було показано, що ортоцентр H трикутника ABC є центром описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$. Для цього кола кут B_1HC_1 є центральним, а кут $B_1A_1C_1$ — вписаним. Оскільки вони спираються на одну й ту саму дугу, то $\angle B_1HC_1 = 2\angle B_1A_1C_1$. Кути BAC і $B_1A_1C_1$ рівні як протилежні кути паралелограма ABA_1C, тому $\angle B_1HC_1 = \angle BOC$. Тоді рівнобедрені трикутники B_1HC_1 і COB подібні з коефіцієнтом подібності, який дорівнює 2 ($B_1C_1 = 2\,BC$). Оскільки AH

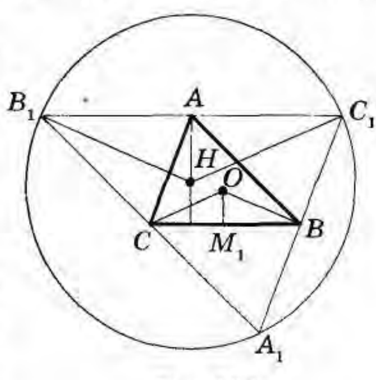


Рис. 167

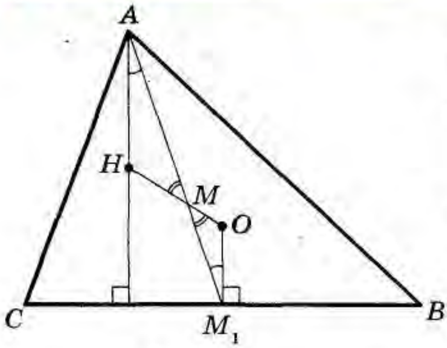


Рис. 168

і OM_1 — відповідні висоти подібних трикутників, то $AH = 2OM_1$.

Доведемо тепер основну теорему.

Оскільки M_1 — середина сторони BC, то AM_1 — медіана трикутника ABC (рис. 168). Нехай M — точка перетину відрізків AM_1 і HO. Оскільки $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$. Крім того, $\angle AMH$ і $\angle M_1MO$ рівні як вертикальні. Отже, $\Delta HAM \backsim \Delta OM_1M$ за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2$. Отже, точка M поділяє медіану AM_1 у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини A. Звідси M — центроїд трикутника ABC.

Звернемо увагу на те, що ми не лише встановили факт належності точок O, M, H одній прямій, а й довели рівність

$$HM = 2MO,$$

яка є ще однією властивістю чудових точок трикутника.

Доведення для випадку тупокутного трикутника аналогічне. ▲

ВПРАВИ

1. Дано дві точки, які лежать в одній півплощині відносно даної прямої. Побудуйте трикутник, одна із сторін якого лежить на даній прямій, а центр описаного кола і ортоцентр є двома даними точками.

2. Відновіть трикутник ABC за трьома даними точками: вершиною A, ортоцентром H і точкою перетину серединних перпендикулярів O.

3. Бісектриса кута A гострокутного трикутника ABC перпендикулярна до прямої Ейлера цього трикутника. Доведіть, що $\angle A = 60°$. *Указівка.* Доведіть, що $HA = OA$.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 2

1. На рисунку 169 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = \frac{1}{2} A_1A_3$. Звідси випливає, що:

А) $A_1A_2 = B_1B_2$; В) $A_1A_3 = B_1B_3$;
Б) $B_1B_3 = 2B_2B_3$; Г) $A_1A_2 = B_2B_3$.

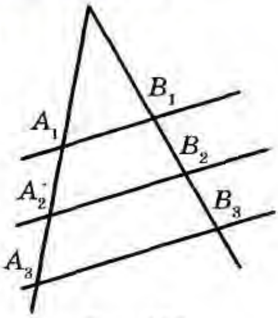


Рис. 169

2. Якщо медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M, то яка з даних рівностей обов'язково є правильною?

А) $AM : MB_1 = BM : MA_1$;

Б) $MA_1 = \frac{1}{3} MB$; В) $MA_1 = \frac{1}{2} AM$;

Г) $MB_1 = \frac{1}{2} BB_1$.

3. На рисунку 170 $A_1C_1 \parallel AC$. Тоді:

А) $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BA_1}{A_1A}$; В) $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;

Б) $\frac{BA_1}{AB} = \frac{CB}{BC_1}$; Г) $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BA_1}{AB}$.

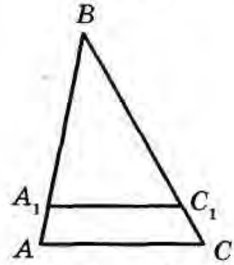


Рис. 170

4. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 4$ см, $AC = 9$ см. У якому відношенні центр вписаного кола поділяє бісектрису BB_1, рахуючи від вершини B?

А) 2 : 3; Б) 2 : 1; В) 4 : 3; Г) 3 : 4.

5. Через точку M сторони BC паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка паралельна стороні CD. Ця пряма перетинає відрізки BD і AD у точках K і F відповідно. Відомо, що $BM : FD = 2 : 1$. Знайдіть відношення $KD : BK$.

А) 2 : 1; Б) 1 : 2; В) 1 : 3; Г) 4 : 1.

6. У трикутнику ABC $AB = 14$ см, $BC = 21$ см. На стороні AB на відстані 4 см від вершини A позначено точку D, через яку проведено пряму, паралельну стороні AC. Знайдіть відрізки, на які ця пряма поділяє сторону BC.

А) 12 см, 9 см; В) 15 см, 6 см;
Б) 18 см, 3 см; Г) 14 см, 7 см.

7. Відрізок MN проходить через точку перетину діагоналей нерівнобедреної трапеції $ABCD$ і паралельний її основам

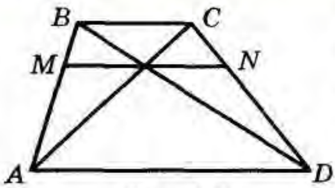


Рис. 171

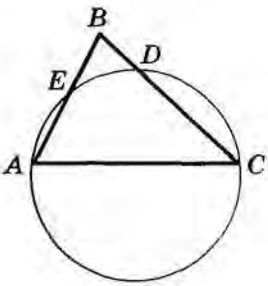


Рис. 172

(рис. 171). Скільки пар подібних трикутників зображено на рисунку?
А) 4; Б) 6; В) 3; Г) 5.

8. Через вершини A і C нерівнобедреного трикутника ABC проведено коло, яке перетинає сторони BA і BC у точках E і D відповідно (рис. 172). Яка з даних пропорцій є правильною?

А) $\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BC}$; В) $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC}$;

Б) $\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$; Г) $\frac{BD}{DE} = \frac{BC}{AC}$.

9. Хорда AB перетинає хорду CD в її середині і поділяється цією точкою на відрізки, які дорівнюють 4 см і 25 см. Знайдіть довжину хорди CD.
А) 10 см; Б) 5 см; В) 100 см; Г) 20 см.

10. У трикутнику ABC $AB = 10$ см, $BC = 4$ см, $CA = 8$ см. На стороні AC обрано точку D таку, що $AD = 6$ см. Знайдіть BD.
А) 5 см; Б) 4 см; В) 6 см; Г) 7 см.

У ЦЬОМУ ПАРАГРАФІ:

- було введено такі поняття:
  - відношення двох відрізків,
  - пропорційні відрізки,
  - подібні трикутники,
  - коефіцієнт подібності;
- ви вивчили:
  - теорему Фалеса,
  - теорему про пропорційні відрізки,
  - властивість медіан трикутника,
  - властивість бісектриси трикутника,
  - ознаки подібності трикутників,
  - властивість хорд кола, які перетинаються,
  - властивість дотичної і січної, проведених до кола з однієї точки.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

§3

У цьому параграфі ви ознайомитеся зі знаменитою теоремою Піфагора і навчитеся за двома сторонами прямокутного трикутника знаходити третю його сторону.

Ви дізнаєтеся, як за гострим кутом і однією зі сторін прямокутного трикутника знаходити дві інші його сторони.

15. Метричні співвідношення у прямокутному трикутнику

На рисунку 173 відрізок CD — висота трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$).

Відрізки AD і DB (рис. 173) називають **проекціями** на гіпотенузу катетів AC і CB відповідно.

Теорема 15.1. ***Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проекцій катетів на гіпотенузу. Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи і проекції цього катета на гіпотенузу.***

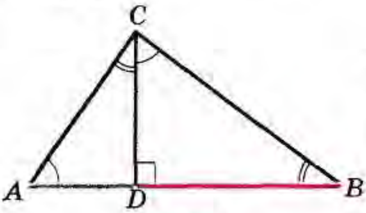


Рис. 173

Доведення. ⊖ На рисунку 173 відрізок CD — висота прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$). Доведемо, що:

$$CD^2 = AD \cdot DB;$$
$$AC^2 = AB \cdot AD;$$
$$BC^2 = AB \cdot DB.$$

Лема. ***Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, поділяє трикутник на два подібних прямокутних трикутники, кожен з яких подібний даному трикутнику*** (доведіть самостійно).

Оскільки $\Delta\, CBD \backsim \Delta\, ACD$, то $\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{AD}{CD}$.

Звідси $CD^2 = AD \cdot DB$.

Оскільки $\Delta\, ABC \backsim \Delta\, ACD$, то $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$.

Звідси $AC^2 = AD \cdot AB$.

Оскільки $\Delta\, ABC \backsim \Delta\, CBD$, то $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{DB}{BC}$.

Звідси $BC^2 = DB \cdot AB$. ▲

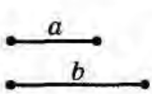


Рис. 174

Приклад. Дано два відрізки, довжини яких дорівнюють a і b (рис. 174). Побудуйте третій відрізок, довжина якого дорівнює $\sqrt{ab}$.

Розв'язання. На прямій позначимо точки A, B і C так, щоб $AB = a$, $BC = b$. Побудуємо коло з діаметром AC. Через точку B проведемо пряму, перпендикулярну до прямої AC (рис. 175). Нехай D — одна з точок перетину прямої і кола. Доведемо, що відрізок DB — шуканий. Дійсно, $\angle ADC = 90°$ як вписаний, що спирається на діаметр AC. Тоді за теоремою 15.1 $DB^2 = AB \cdot BC$, тобто $DB = \sqrt{ab}$.

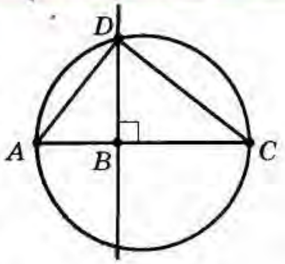


Рис. 175

1. Як пов'язані висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, і проекції катетів на гіпотенузу?
2. Як пов'язані катет, гіпотенуза і проекція цього катета на гіпотенузу?

ВПРАВИ

510.° Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 2 см і 18 см.

511.° Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а його проекція на гіпотенузу — 4 см. Знайдіть гіпотенузу.

512.° Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, поділяє її на відрізки завдовжки 5 см і 20 см. Знайдіть катети трикутника.

513.° Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 48 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу — 36 см. Знайдіть сторони даного трикутника.

514.• Знайдіть катети прямокутного трикутника, висота якого поділяє гіпотенузу на відрізки, один з яких на 3 см менший від цієї висоти, а другий — на 4 см більший за висоту.

515.• Знайдіть менший катет прямокутного трикутника і його висоту, проведену до гіпотенузи, якщо більший катет менший від гіпотенузи на 10 см і більший за свою проекцію на гіпотенузу на 8 см.

516.* Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, дорівнює 2 см і поділяє її на відрізки, які відносяться як 1 : 4. Знайдіть діагоналі ромба.

517.* Перпендикуляр, опущений з точки кола на його діаметр, поділяє його на два відрізки, один з яких дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 10 см.

518.* Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 25 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

519.** Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, належить її більшій основі. Знайдіть радіус цього кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см, а проекція діагоналі на більшу основу — 16 см.

520.** Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 12 см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює 10 см.

521.** Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, якщо її діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а різниця квадратів основ дорівнює 25 см.

522.** Коло, вписане в прямокутну трапецію, поділяє точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр трапеції.

523.** Коло, вписане в рівнобічну трапецію, поділяє точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки 3 см і 27 см. Знайдіть висоту трапеції.

524.** Побудуйте відрізок x, якщо $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$, де a і b — довжини даних відрізків.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

525. Периметр паралелограма більший за одну із сторін на 35 см і більший за другу сторону на 28 см. Знайдіть сторони паралелограма.

526. На сторонах AB, BC, CD і AD квадрата $ABCD$ позначили відповідно точки M, N, K і E так, що чотирикутник $MNKE$ є прямокутником, сторони якого паралельні діагоналям квадрата. Знайдіть периметр прямокутника $MNKE$, якщо діагональ квадрата $ABCD$ дорівнює 7 см.

527. У коло вписано трапецію, діагональ якої поділяє кут при більшій основі навпіл. Знайдіть дуги, на які поділяють коло вершини трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 74°.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

528. З однієї вершини вписаного многокутника проведено всі діагоналі, які розбивають його на трикутники. Доведіть, що серед цих трикутників гострокутним є не більше ніж один.

16. Теорема Піфагора

Теорема 16.1 (теорема Піфагора). ***У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.***

Доведення. ⊙ На рисунку 176 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$). Доведемо, що $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

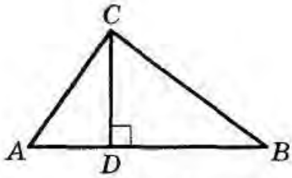


Рис. 176

Проведемо висоту CD. Застосувавши теорему 15.1, отримуємо:

$$AC^2 = AD \cdot AB;$$
$$BC^2 = DB \cdot AB.$$

Звідси $AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + DB \cdot AB$. Далі, $AC^2 + BC^2 = AB\,(AD + DB) = AB^2$. ▲

Якщо в прямокутному трикутнику довжини катетів дорівнюють a і b, а довжина гіпотенузи дорівнює c, то теорема Піфагора може бути записана так:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Теорема Піфагора дає змогу за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2};$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

З рівності $c^2 = a^2 + b^2$ також випливає, що $c^2 > a^2$ і $c^2 > b^2$, звідси $c > a$ і $c > b$, тобто ***гіпотенуза більша за будь-який з катетів***[1].

?

1. Сформулюйте теорему Піфагора.
2. Як можна записати теорему Піфагора, якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють *a* і *b*, а гіпотенуза дорівнює *c*?
3. Яка із сторін прямокутного трикутника є найбільшою?

ВПРАВИ

529.° Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: 1) 3 см і 4 см; 2) 6 см і 9 см.

530.° Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет відповідно дорівнюють: 1) 15 см і 12 см; 2) 7 см і $\sqrt{13}$ см.

531.° Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. Знайдіть невідому сторону трикутника, якщо: 1) $a = 5$ см, $b = 12$ см; 2) $a = 1$ см, $c = 2$ см; 3) $b = 3$ см, $c = \sqrt{90}$ см.

532.° Сторони прямокутника дорівнюють 9 см і 40 см. Чому дорівнює його діагональ?

533.° Одна із сторін прямокутника дорівнює 7 см, а діагональ — 25 см. Знайдіть другу сторону прямокутника.

534.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 29 см, а висота, проведена до основи, — 21 см. Чому дорівнює основа трикутника?

535.° Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 35 см, а його основа — 24 см. Чому дорівнює бічна сторона трикутника?

---

[1] Іншим способом цей факт було встановлено в курсі геометрії 7 класу.

536.° У колі, радіус якого дорівнює 10 см, проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть відстань від центра кола до даної хорди.

537.° Знайдіть периметр ромба, діагоналі якого дорівнюють 24 см і 32 см.

538.° Сторона ромба дорівнює 26 см, а одна з діагоналей — 48 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

539.° Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 см, а другий катет на 7 см менший від гіпотенузи. Знайдіть периметр трикутника.

540.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 26 см, а катети відносяться як 5 : 12. Знайдіть катети цього трикутника.

541.• Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, — 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

542.• У трикутнику ABC $BC = 20$ см, висота BD поділяє сторону AC на відрізки $AD = 5$ см і $CD = 16$ см. Знайдіть AB.

543.• У трикутнику ABC $AB = 17$ см, $BC = 9$ см, $\angle C$ — тупий, висота AD дорівнює 8 см. Знайдіть AC.

544.• Знайдіть висоту рівностороннього трикутника зі стороною a.

545.• Знайдіть діагональ квадрата зі стороною a.

546.• Знайдіть сторону рівностороннього трикутника, висота якого дорівнює h.

547.• Знайдіть катети прямокутного рівнобедреного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c.

548.• Знайдіть довжину невідомого відрізка x на рисунку 177 (розміри дано в сантиметрах).

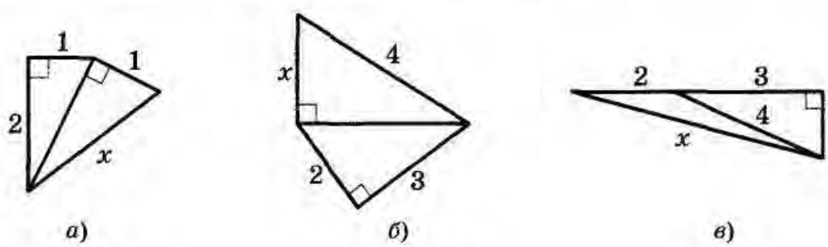
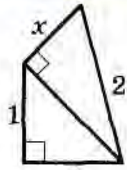


Рис. 177



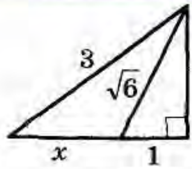


Рис. 178

549.° Знайдіть довжину невідомого відрізка x на рисунку 178 (розміри дано в сантиметрах).

550.° У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см і поділяє її на дві частини, одна з яких, прилегла до вершини рівнобедреного трикутника, дорівнює 6 см. Знайдіть основу трикутника.

551.° Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 4 см і 16 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника.

552.° Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

553.° Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 8 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

554.° Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо висота, проведена до основи, дорівнює 8 см.

555.° Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 90 см, а висота, проведена до основи, — 15 см. Знайдіть сторони трикутника.

556.° Сторони тупокутного трикутника дорівнюють 29 см, 25 см і 6 см. Знайдіть довжину висоти трикутника, проведеної до меншої сторони.

557.° Сторони трикутника дорівнюють 36 см, 29 см і 25 см. Знайдіть довжину висоти трикутника, проведеної до більшої сторони.

558.° З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 5 : 6, а проекції цих похилих на пряму дорівнюють 7 см і 18 см. Знайдіть відстань від даної точки до цієї прямої.

559.• З точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 15 см і 27 см. Сума довжин проекцій цих похилих на пряму дорівнює 24 см. Знайдіть проекцію кожної з похилих.

560.• Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, поділяє один із його катетів на відрізки 2 см і 6 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть сторони трикутника.

561.• Знайдіть сторони паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см і одна з них перпендикулярна до сторони.

562.• Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 30 см і 40 см.

563.• Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо бісектриса гострого кута поділяє протилежний катет на відрізки завдовжки 24 см і 51 см.

564.• (*Старовинна арабська задача.*) На обох берегах річки ростуть одна напроти другої дві пальми. Висота однієї з них дорівнює 30 ліктів, другої — 20 ліктів, а відстань між основами пальм — 50 ліктів. На верхівку кожної пальми сидить птах. Раптом обидва птахи побачили рибу, яка з'явилася на поверхні води між пальмами. Вони злетіли з пальм одночасно і, рухаючись з однаковою швидкістю, схопили одночасно рибу. На якій відстані від основи вищої пальми з'явилася риба?

565.•• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 20 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Знайдіть цю діагональ.

566.•• Основи прямокутної трапеції дорівнюють 18 см і 12 см, а діагональ є бісектрисою її гострого кута. Знайдіть цю діагональ.

567.•• У колі по різні боки від його центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 16 см і 32 см, відстань між хордами — 16 см. Знайдіть радіус кола.

568.•• У колі по один бік від його центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 48 см і 24 см, відстань між хордами — 12 см. Знайдіть радіус кола.

569.•• Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, дорівнює 12 см, а відстань від вершини рівнобедреного трикутника до центра кола — 20 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

570.•• Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, поділяє її більшу основу на відрізки 20 см і 25 см, рахуючи від вершини прямого кута. Обчисліть периметр трапеції.

571.•• Точка дотику кола, вписаного у прямокутну трапецію, поділяє її меншу основу на відрізки 6 см і 3 см, рахуючи від вершини прямого кута. Обчисліть периметр трапеції.

572.•• Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини меншого гострого кута.

573.•• Медіани AM і CK трикутника ABC перпендикулярні. Знайдіть сторони трикутника, якщо $AM = 9$ см і $CK = 12$ см.

574.•• У трикутнику ABC медіани BM і CK перпендикулярні і перетинаються в точці O. Знайдіть довжину відрізка AO, якщо $BM = 36$ см і $CK = 15$ см.

575.•• (*Задача Бхаскари*[1].)

Над озером тихим, з півфута заввишки
Виситься лотоса квітка.
І вітер поривчастий
Відніс її вбік. Нема
більше квітки над водою.
Знайшов рибалка її
У двох футах від місця, де росла.
Отже, пропоную питання:
Як озера вода тут глибока?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

576. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $BC = 5$ см, $AC = 12$ см. Знайдіть відношення:

[1] Бхáскара (1114–1185) — індійський математик і астроном.

1) катета, прилеглого до кута A, і гіпотенузи;
2) катета, протилежного куту A, і гіпотенузи;
3) катета, прилеглого до кута B, і гіпотенузи;
4) катета, прилеглого до кута B, і катета, протилежного цьому куту.

577. На одній стороні кута A позначили точки B, C і D так, що $AB = BC = 5$ см, $CD = 10$ см (рис. 179). З точок B, C і D опущено перпендикуляри BE, CF і DM на другу сторону кута A, $AE = 4$ см. Знайдіть відношення катета, прилеглого до кута A, і гіпотенузи:

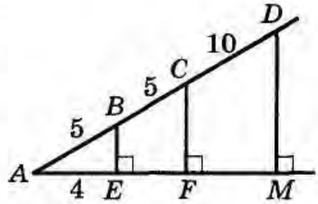


Рис. 179

1) у трикутнику AEB;
2) у трикутнику AFC;
3) у трикутнику AMD.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

578. У квадраті зі стороною 1 м довільно позначили 51 точку. Доведіть, що якісь три з цих точок можна накрити квадратом зі стороною 20 см.

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Піфагор

Ви вивчили знамениту теорему, яка носить ім'я видатного давньогрецького вченого Піфагора.

Дослідження стародавніх текстів свідчать, що твердження цієї теореми було відоме задовго до Піфагора. Чому ж її приписують Піфагорові? Швидше за все, тому, що саме Піфагор розумів необхідність доведення цього твердження і знайшов його.

Про життя Піфагора мало що відомо достовірно. Він народився у VI ст. до н. е.

на грецькому острові Самос. За легендами, він багато подорожував, побував у Єгипті та Вавилоні, де набував мудрощів і знань.

Після того як він оселився у грецькій колонії Кротон (на півдні Італії), навколо нього сформувалося численне коло відданих учнів і однодумців. Так виник піфагорійський союз (кротонське братство). Вплив цього союзу був таким сильним, що навіть через сторіччя після смерті Піфагора багато великих математиків стародавнього світу називали себе піфагорійцями.

17. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника

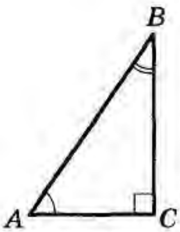


Рис. 180

На рисунку 180 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Нагадаємо, що катет BC називають **протилежним** куту A, а катет AC — **прилеглим** до цього кута.

Означення. Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Синус кута A позначають так: $\sin A$ (читають: «синус A»). Для гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC маємо:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}; \ \sin B = \frac{AC}{AB}.$$

Для прямокутного трикутника, зображеного на рисунку 181, записують: $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\sin \beta = \frac{b}{c}$.

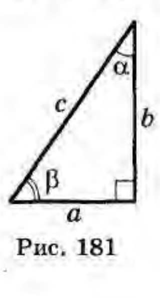


Рис. 181

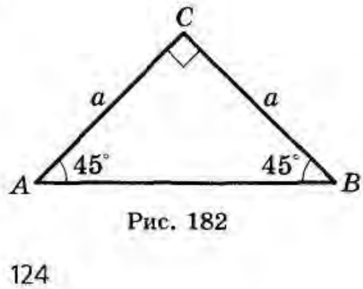


Рис. 182

Розглянемо прямокутний рівнобедрений трикутник ABC ($\angle C = 90°$), у якому $AC = BC = a$ (рис. 182).

Маємо: $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Тоді за означенням $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Бачимо, що синус гострого кута прямокутного рівнобедреного трикутника не залежить від розмірів трикутника (адже значення a можна вибрати довільно). Оскільки $\angle A = 45°$, то пишуть $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, не пов'язуючи цей запис із жодним конкретним прямокутним рівнобедреним трикутником.

Узагалі, ***якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні.***

Дійсно, ці прямокутні трикутники є подібними за першою ознакою. Тому відношення катета до гіпотенузи одного трикутника дорівнює відношенню відповідного катета до гіпотенузи другого трикутника.

Наприклад, запис $\sin 17°$ можна віднести до всіх кутів, градусні міри яких дорівнюють $17°$. Значення цього синуса можна обчислити один раз для якогось обраного прямокутного трикутника з гострим кутом $17°$. Діючи у такий спосіб, можна скласти таблицю значень синусів різних кутів (див. с. 204).

Отже, ***синус кута залежить тільки від величини цього кута.***

Означення. **Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.**

Косинус кута A позначають так: $\cos A$ (читають: «косинус A»).

Означення. **Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.**

Тангенс кута A позначають так: $\operatorname{tg} A$ (читають: «тангенс A»).

Для гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC (рис. 180) маємо:

$$\cos A = \frac{AC}{AB};\ \cos B = \frac{BC}{AB};$$
$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC};\ \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}.$$

Для прямокутного трикутника, зображеного на рисунку 181, записують: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$.

Як було встановлено, синус кута залежить тільки від величини кута. Міркуючи аналогічно, можна дійти такого висновку:

косинус і тангенс кута залежать тільки від величини цього кута.

Узагалі, кожному гострому куту α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса) цього кута. Тому залежність значень синусів (косинусів, тангенсів) гострих кутів від величин цих кутів є функціональною. Функцію, яка відповідає цій залежності, називають **тригонометричною.**

Існують таблиці наближених значень тригонометричних функцій різних кутів (див. с. 204). Також ці значення можна знаходити за допомогою мікрокалькулятора.

Знову звернемося до рисунку 181.

Запишемо: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$. Отже,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Якщо обидві частини рівності $a^2 + b^2 = c^2$ поділити на c^2, то отримаємо $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, тобто

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Прийнято записувати $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$; $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$. Звідси

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Зазначимо, що $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \cos\alpha = \frac{b}{c}$ (рис. 181). Оскільки $\beta = 90^\circ - \alpha$, то:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha\\ \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha\end{aligned}}$$

Ми вже знаємо, що $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Знайдемо тепер $\cos 45^\circ$ і $\operatorname{tg} 45^\circ$. Маємо:

$$\cos 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1.$$

Знайдемо синус, косинус і тангенс кутів 30° і 60°.

Розглянемо прямокутний трикутник ABC, у якому $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$ (рис. 183). Нехай $BC = a$. Тоді за властивістю катета, який лежить проти кута 30°, отримуємо, що $AB = 2a$. Маємо: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$

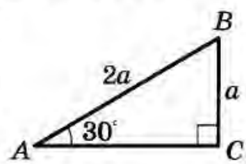


Рис. 183

Звідси:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}; \qquad \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Оскільки $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, то отримуємо:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Значення синуса, косинуса і тангенса для кутів 30°, 45° і 60° корисно запам'ятати. Таблиця цих значень наведена на форзаці.

?

1. Що називають синусом гострого кута прямокутного трикутника?
2. Що називають косинусом гострого кута прямокутного трикутника?
3. Що називають тангенсом гострого кута прямокутного трикутника?
4. Від чого залежать синус, косинус і тангенс кута?
5. Як пов'язані між собою tg α, sin α і cos α?
6. Як пов'язані між собою синус і косинус одного й того самого кута?
7. Чому дорівнює sin $(90° - \alpha)$?
8. Чому дорівнює cos $(90° - \alpha)$?
9. Чому дорівнює sin 45°? cos 45°? tg 45°?
10. Чому дорівнює sin 30°? cos 30°? tg 30°?
11. Чому дорівнює sin 60°? cos 60°? tg 60°?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

579.• Побудуйте кут:

1) тангенс якого дорівнює $\frac{4}{5}$;

2) синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

580.• Побудуйте кут, косинус якого дорівнює $\frac{1}{4}$.

ВПРАВИ

581.° Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 8 см і 10 см. Знайдіть:

1) синус кута, який лежить проти меншого катета;
2) косинус кута, який прилягає до більшого катета;
3) тангенс кута, протилежного меншому катету.

582.° Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 2 см. Знайдіть:

1) тангенс кута, прилеглого до більшого катета;
2) синус кута, протилежного меншому катету;
3) косинус кута, прилеглого до більшого катета.

583.° Знайдіть значення виразу:

1) $\cos^2 45° + \mathrm{tg}^2\, 60°$;
2) $2\cos^2 60° - \sin^2 30° + \sin 60°\, \mathrm{tg}\, 30°$.

584.° Знайдіть значення виразу:

1) $\cos^2 30° - \sin^2 45°$;

2) $3\ \mathrm{tg}^2\ 30° + 4\ \mathrm{tg}\ 45° + \cos 30°\ \mathrm{tg}\ 60°$.

585.° У трикутнику $ABC\ \angle C = 90°$, $BC = 77$ см, $AB = 125$ см. Знайдіть гострі кути трикутника, скориставшись таблицею значень тригонометричних функцій, розміщеною на с. 204.

586.° У трикутнику $ABC\ \angle C = 90°$, $BC = 41$ см, $AC = 20$ см. Знайдіть гострі кути трикутника, скориставшись таблицею значень тригонометричних функцій, розміщеною на с. 204.

587.• Знайдіть $\sin \alpha$ і $\mathrm{tg}\ \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

588.• Знайдіть $\cos \beta$ і $\mathrm{tg}\ \beta$, якщо $\sin \beta = \frac{4}{5}$.

589.• Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона — 13 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута між бічною стороною трикутника і висотою, проведеною до його основи.

590.• Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи, — 8 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута при основі трикутника.

591.• Знайдіть кути ромба, діагоналі якого дорівнюють 4 см і $4\sqrt{3}$ см.

592.• Знайдіть кути між діагоналлю прямокутника і його сторонами, довжини яких $\sqrt{3}$ см і 3 см.

593.• У рівнобічній трапеції $ABCD$ $AB = CD = 9$ см, $BC = 10$ см, $AD = 14$ см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута A трапеції.

594.• У прямокутній трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$, $\angle A = 90°$, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см. Знайдіть кути трапеції.

595.• Чи може синус кута дорівнювати:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$?

596.• Доведіть, що тангенси гострих кутів прямокутного трикутника є взаємно оберненими числами.

597.• Доведіть тотожність $1 + \mathrm{tg}^2\ \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

598.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin^2 18° + \sin^2 72°$;

2) $\cos^3 36° - \sin^3 54°$.

599.•• Катети прямокутного трикутника дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута між медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи.

600.•• У трикутнику ABC $AB = BC$, BD і AM — висоти трикутника, $BD : AM = 3 : 1$. Знайдіть $\cos C$.

601.•• У трикутнику ABC $AB = BC$, BD і CK — висоти трикутника, $\cos A = \frac{3}{7}$. Знайдіть відношення $CK : BD$.

602.* Доведіть, що кути ABC і DEF, зображені на рисунку 184, рівні.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

603. Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці M, $AB = 6$ см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точки A, B і M.

604. Хорди AB і BC кола взаємно перпендикулярні, а відстань між їх серединами дорівнює 12 см. Знайдіть радіус кола.

605. У трикутнику ABC BK — висота, AM — бісектриса, $BK = 26$ см, $AB : AC = 6 : 7$. З точки M опущено перпендикуляр MD на сторону AC. Знайдіть MD.

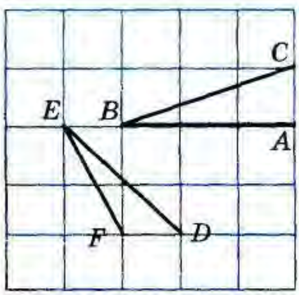


Рис. 184

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

606. Дано два круги, які не мають спільних точок. Чи існує точка, що не належить жодному з кругів, така, що будь-яка пряма, яка проходить через цю точку, перетинає хоча б один з цих кругів?

18. Розв'язування прямокутних трикутників

На рисунку 185 зображено прямокутний трикутник з гострими кутами α і β, катети якого дорівнюють a і b, а гіпотенуза — c.

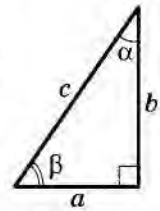


Рис. 185

Маємо: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\sin\beta = \frac{b}{c}$. Звідси $a = c \sin\alpha$, $b = c \sin\beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на синус кута, протилежного цьому катету.***

Маємо: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$. Звідси $b = c \cos\alpha$, $a = c \cos\beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на косинус кута, прилеглого до цього катета.***

Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Звідси $a = b \operatorname{tg}\alpha$, $b = a \operatorname{tg}\beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на тангенс кута, протилежного першому катету.***

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, то $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення другого катета на тангенс кута, прилеглого до першого катета.***

З рівностей $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ і $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ отримуємо $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ і $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

Отже, ***гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на синус протилежного йому кута,***

гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на косинус прилеглого до нього кута.

Розв'язати прямокутний трикутник означає знайти невідомі його сторони і кути за відомими сторонами і кутами.

Наведені вище правила дають змогу розв'язувати прямокутний трикутник за однією стороною і одним гострим кутом.

Приклад 1. Розв'яжіть прямокутний трикутник (рис. 185) за катетом і гострим кутом: $a = 14$ см, $\alpha = 38°$.

Розв'язання. Маємо:

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - 38° = 52°;$$

$$b = a \operatorname{tg} \beta = 14 \operatorname{tg} 52° \approx 14 \cdot 1,280 = 17,92 \approx 17,9 \text{ (см)};$$

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{14}{\sin 38°} \approx \frac{14}{0,616} \approx 22,7 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $c \approx 22,7$ см, $b \approx 17,9$ см, $\beta = 52°$.

Зауважимо, що значення тригонометричних функцій знайдено за таблицею, розміщеною на с. 204 підручника. Їх також можна було знайти за допомогою мікрокалькулятора.

Зазначимо, що цю задачу можна було розв'язати й інакше: наприклад, знайти гіпотенузу, використовуючи теорему Піфагора.

Приклад 2. Розв'яжіть прямокутний трикутник (рис. 185) за катетом і гіпотенузою: $a = 26$ см, $c = 34$ см.

Розв'язання. Маємо:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{26}{34} = 0,7647... \approx 0,765.$$

Число 0,765 відсутнє в таблиці значень синуса, найближчим до нього в таблиці є число 0,766. Тоді отримуємо $\alpha \approx 50°$. Звідси $\beta \approx 40°$.

$b = c \sin \beta \approx 34 \sin 40° \approx 34 \cdot 0,643 = 21,862 \approx 21,9$ (см).

Відповідь: $b \approx 21,9$ см, $\alpha \approx 50°$, $\beta \approx 40°$.

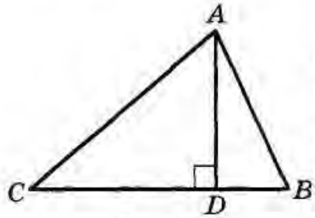


Рис. 186

Приклад 3. Висота AD трикутника ABC (рис. 186) поділяє його сторону BC на відрізки BD і CD такі, що $BD = 2\sqrt{3}$ см, $CD = 8$ см. Знайдіть сторони AB і AC, якщо $\angle B = 60°$.

Розв'язання. З $\triangle ADB$ ($\angle ADB = 90°$):

$$AD = BD \operatorname{tg} B = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 60° = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \text{ (см)};$$

$$AB = \frac{BD}{\cos B} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60°} = 2\sqrt{3} : \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

З $\triangle ADC$ ($\angle ADC = 90^\circ$):

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $4\sqrt{3}$ см, 10 см.

Приклад 4. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, кут при основі дорівнює α. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

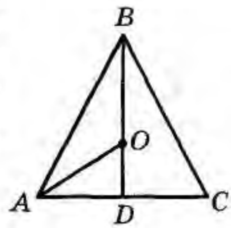


Рис. 187

Розв'язання. У трикутнику ABC (рис. 187) $AB = BC = b$, $\angle BAC = \alpha$, BD — висота.

З $\triangle ADB$ ($\angle ADB = 90^\circ$):

$$AD = AB \cos \angle BAD = b \cos \alpha.$$

Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC. Вона належить висоті BD і бісектрисі AO кута BAC. Оскільки $OD \perp AC$, то вписане коло дотикається сторони AC у точці D. Отже, OD — шуканий радіус. Маємо: $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$.

З $\triangle ADO$ ($\angle ADO = 90^\circ$):

$$OD = AD \operatorname{tg} \angle OAD = b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Відповідь: $b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

?

1. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомі гіпотенуза і кут, протилежний цьому катету?
2. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомі гіпотенуза і кут, прилеглий до цього катета?
3. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомі другий катет і кут, протилежний шуканому катету?
4. Як можна знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомі катет і протилежний цьому катету кут?
5. Як можна знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомі катет і прилеглий до цього катета кут?

ВПРАВИ

607.° У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:

1) BC, якщо $AB = 12$ см, $\sin A = \frac{3}{4}$;

2) AC, якщо $AB = 21$ см, $\cos A = 0,4$;

3) AC, якщо $BC = 4$ см, $\operatorname{tg} A = 1,6$;

4) AB, якщо $BC = 14$ см, $\cos B = \frac{7}{9}$;

5) AB, якщо $AC = 3,2$ см, $\sin B = 0,16$;

6) BC, якщо $AC = 2,3$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}$.

608.° У трикутнику DEF $\angle E = 90°$. Знайдіть:

1) DE, якщо $DF = 18$ см, $\cos D = \frac{2}{9}$;

2) DF, якщо $EF = 3,5$ см, $\cos F = 0,7$;

3) EF, якщо $DE = 2,4$ см, $\operatorname{tg} D = \frac{11}{12}$.

609.° У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 17 см, а синус одного з гострих кутів дорівнює $\frac{8}{17}$. Знайдіть катети трикутника.

610.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а косинус одного з гострих кутів дорівнює 0,8. Знайдіть катети трикутника.

611.° Катет прямокутного трикутника дорівнює 48 см, а тангенс протилежного кута дорівнює $3\frac{3}{7}$. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.

612.° У прямокутному трикутнику один з катетів дорівнює 12 см, а тангенс прилеглого кута — 0,75. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.

613.° Розв'яжіть прямокутний трикутник[1]:

1) за гіпотенузою і гострим кутом: $c = 28$ см, $\alpha = 48°$;

2) за катетом і гострим кутом: $a = 56$ см, $\beta = 74°$;

3) за катетом і гіпотенузою: $a = 5$ см, $c = 9$ см;

4) за двома катетами: $a = 3$ см, $b = 7$ см.

614.° Розв'яжіть прямокутний трикутник за відомими елементами:

1) $a = 34$ см, $\alpha = 55°$;

2) $c = 16$ см, $\beta = 18°$;

3) $b = 12$ см, $c = 13$ см;

4) $a = 4$ см, $b = 14$ см.

---

[1] У задачах 613, 614 прийнято позначення: c — гіпотенуза прямокутного трикутника, a і b — катети, α і β — кути, протилежні катетам a і b відповідно.

615.° За рисунком 188 знайдіть висоту ялинки.

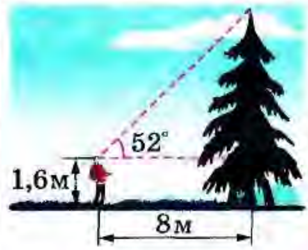


Рис. 188

616.° Якої довжини має бути пожежна драбина, щоб по ній можна було піднятися на дах будинку заввишки 9 м, якщо ставити її під кутом 70° до поверхні землі?

617.° Проїхавши від старту по прямолінійній ділянці шосе 300 м, велосипедист опинився на 11 м вище, ніж точка старту. Знайдіть кут підйому шосе на цій ділянці.

618.° Під яким кутом падає на землю сонячний промінь, якщо вертикальна жердина завдовжки 1,5 м відкидає тінь завдовжки 0,7 м?

619.• Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120°, а висота, проведена до основи, — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторони трикутника.

620.• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а кут при основі — 45°. Знайдіть висоту і бічну сторону трапеції.

621.• Діагональ паралелограма перпендикулярна до його сторони і дорівнює a. Знайдіть сторони паралелограма, якщо один з його кутів дорівнює 30°.

622.• Сторона ромба дорівнює a, а один з його кутів — 60°. Знайдіть діагоналі ромба.

623.• Траншея у перерізі має форму рівнобічної трапеції (рис. 189). Знайдіть кут, який утворюють стінки траншеї з її дном.

624.• Ширина насипу шосейної дороги в нижній його частині дорівнює 80 м (рис. 190), висота насипу — 5 м,

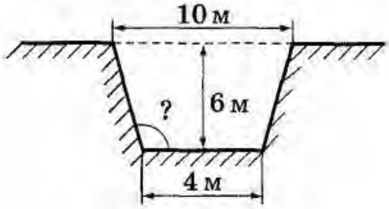


Рис. 189

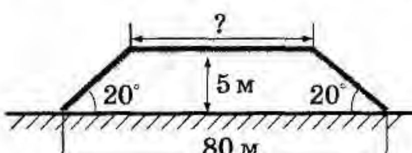


Рис. 190

а відкоси нахилені до горизонту під кутом 20°. Знайдіть ширину насипу у верхній його частині.

625.• Висота BD трикутника ABC поділяє сторону AC на відрізки AD і CD так, що $AD = 12$ см, $CD = 4$ см. Знайдіть довжину сторони BC, якщо $\angle A = 30°$.

626.• Висота AF поділяє сторону BC трикутника ABC на відрізки BF і CF. Знайдіть довжину сторони AC, якщо $CF = \sqrt{13}$ см, $\angle B = 60°$, а сторона AB дорівнює 18 см.

627.• З точки D, що лежить поза прямою n, проведено до цієї прямої похилі DK і DB, які утворюють з нею кути 45° і 60° відповідно. Знайдіть довжину проекції похилої DK на пряму n, якщо $DB = 10\sqrt{3}$ см.

628.• З точки M, що лежить поза прямою l, проведено до цієї прямої похилі MN і MK, які утворюють з нею кути 30° і 45° відповідно. Знайдіть довжину похилої MK, якщо довжина проекції похилої MN на пряму l дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

629.• Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює β, висота, проведена до бічної сторони, дорівнює h. Знайдіть основу трикутника.

630.• Висота, проведена з вершини прямого кута трикутника, дорівнює h, гострий кут дорівнює α. Знайдіть сторони трикутника.

631.• Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює a, кут між другим катетом і висотою, проведеною з вершини прямого кута, дорівнює φ. Знайдіть невідомі сторони трикутника та проведену висоту.

632.• Більша діагональ ромба дорівнює d, а гострий кут — α. Знайдіть сторону та меншу діагональ ромба.

633.• Гострий кут ромба дорівнює α, радіус вписаного кола дорівнює r. Знайдіть сторону та діагоналі ромба.

634.•• Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони і утворює з основою трапеції кут 30°. Знайдіть висоту трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює R.

635.•• Одна із сторін трикутника дорівнює a, прилеглі до неї кути дорівнюють 45° і 60°. Знайдіть висоту трикутника, проведену до даної сторони.

636.•• Основи трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а кути при більшій основі — 30° і 60°. Знайдіть висоту і діагоналі трапеції.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

637. Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Бісектриса тупого кута поділяє його сторону у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини гострого кута. Чи може менша сторона паралелограма дорівнювати 7 см?

638. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло, $\angle BAC = 52^\circ$, $\angle DBC = 34^\circ$, $\angle ADB = 17^\circ$. Знайдіть кути чотирикутника.

639. Відомо, що O — точка перетину діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Знайдіть довжини відрізків BO і OD, якщо $AO : OC = 7 : 6$ і $BD = 39$ см.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

640. Розріжте ромб на чотири чотирикутники, кожний з яких є вписаним і описаним.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» №3

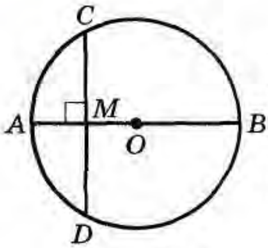


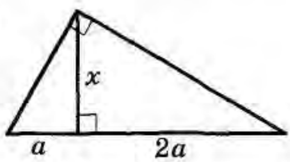
Рис. 191

1. Діаметр AB кола з центром O перпендикулярний до хорди CD (рис. 191). Яка з наведених рівностей є неправильною?

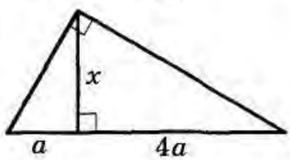
А) $AC^2 = AM \cdot AB$; В) $AD^2 = MB \cdot AB$;
Б) $CM^2 = AM \cdot MB$; Г) $DM^2 = AM \cdot MB$.

2. На якому з рисунків відрізок x дорівнює $2a$?

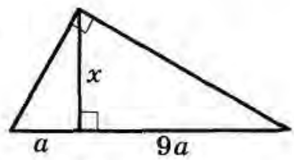
А)



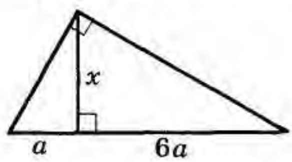
Б)



В)



Г)



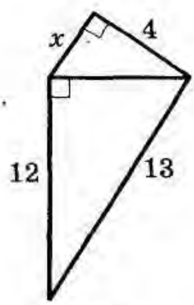


Рис. 192

3. З теореми Піфагора випливає, що гіпотенуза:

А) дорівнює сумі катетів;
Б) дорівнює сумі квадратів катетів;
В) більша за катет;
Г) дорівнює квадрату суми катетів.

4. Довжина відрізка x (рис. 192) дорівнює:

А) 4; Б) 3; В) 5; Г) $3\sqrt{2}$.

5. Бісектриса рівностороннього трикутника зі стороною a дорівнює:

А) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; Б) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; В) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; Г) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

6. Радіус описаного кола квадрата зі стороною a дорівнює:

А) $\frac{a}{2}$; Б) $a\sqrt{2}$; В) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; Г) $2a$.

7. Висота рівнобедреного прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює a. Тоді його катет дорівнює:

А) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; Б) $a\sqrt{2}$; В) $2a$; Г) $\frac{a}{2}$.

8. Нехай α і β — гострі кути прямокутного нерівнобедреного трикутника. Яка з наведених рівностей є правильною?

А) $\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \cos\alpha$; В) $\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta = \sin\beta$;

Б) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\beta$; Г) $\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta = \sin\beta$.

9. Нехай α — гострий кут прямокутного трикутника. Яка з даних рівностей не може виконуватися?

А) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; В) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$; Г) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

10. Довжина відрізка x (рис. 193) дорівнює:

А) $\frac{\sqrt{2}}{2}a\sin\alpha$; В) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$;

Б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$; Г) $a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

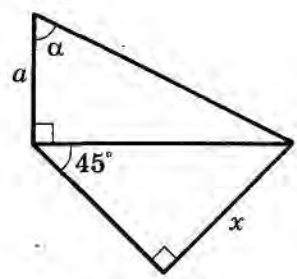


Рис. 193

У ЦЬОМУ ПАРАГРАФІ

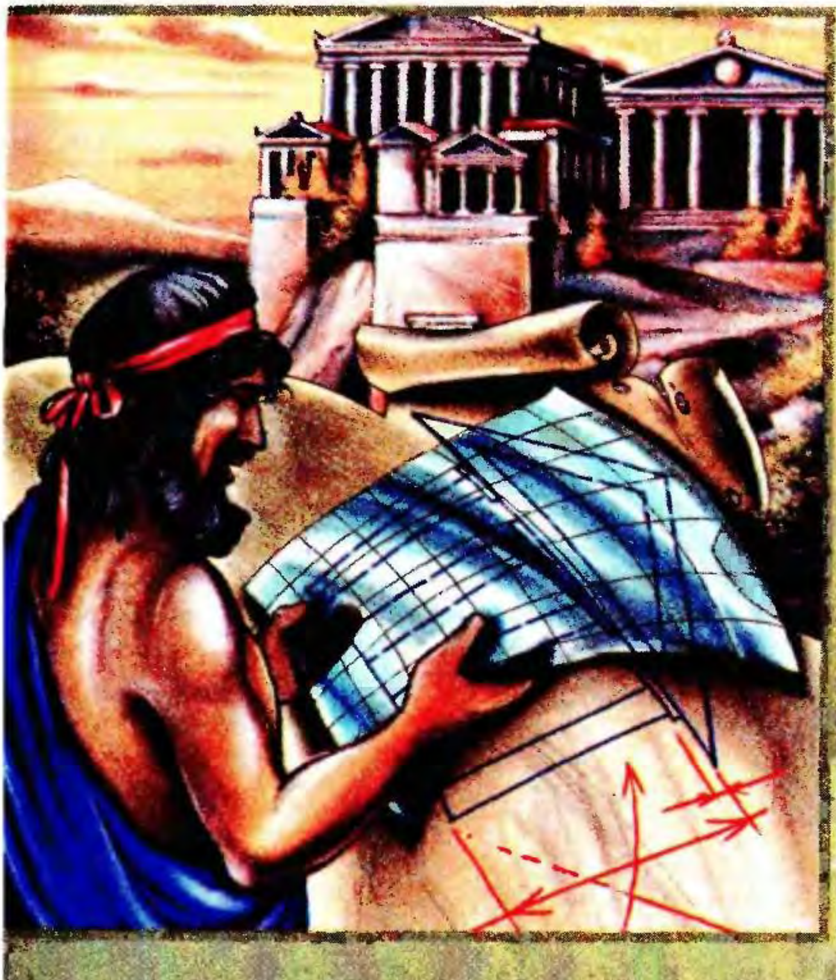
- було введено такі поняття:
  - синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника;
- ви вивчили:
  - метричні співвідношення у прямокутному трикутнику,
  - теорему Піфагора,
  - правила знаходження сторони прямокутного трикутника за відомою стороною і гострим кутом,
  - формули, які зв'язують синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника;
- ви дізналися, що означає розв'язати прямокутний трикутник.

МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩА МНОГОКУТНИКА §4

Вивчивши матеріал цього параграфа, ви дізнаєтеся про формулу, за допомогою якої можна знайти суму кутів опуклого многокутника.

Ви розширите свої уявлення про таку знайому величину, як площа.

Ви навчитеся знаходити площі паралелограма, трикутника, трапеції, описаного чотирикутника.



19. Многокутники

Розглянемо фігуру, яка складається з точок A_1, A_2, A_3, ..., A_n і відрізків A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 таких, що жодні два сусідніх відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідніх відрізки не мають спільних точок (рис. 194).

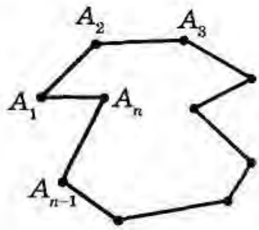


Рис. 194

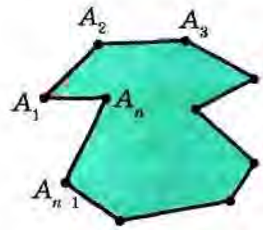


Рис. 195

Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на рисунку 195 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, що її обмежують, називають **многокутником**. Точки A_1, A_2, A_3, ..., A_n називають **вершинами** многокутника, а вказані вище відрізки — **сторонами** многокутника.

Сторони, що є сусідніми відрізками, називають **сусідніми сторонами** многокутника. Вершини, які належать одній стороні, називають **сусідніми вершинами** многокутника.

Дві сусідні сторони многокутника задають **кут многокутника**. Наприклад, α, β, γ, δ — кути многокутника (рис. 196), а кут φ не є кутом многокутника.

Многокутник називають за кількістю його кутів: трикутник, чотирикутник, п'ятикутник тощо.

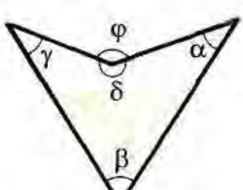


Рис. 196

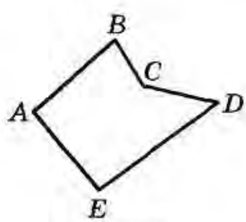


Рис. 197

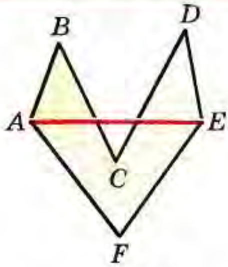


Рис. 198

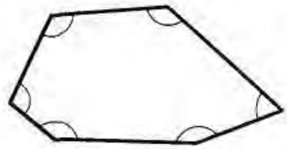


Рис. 199

Многокутник позначають за його вершинами. Наприклад, на рисунку **197** зображено п'ятикутник *ABCDE*. У позначенні многокутника букви, які стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам. Так, п'ятикутник, зображений на рисунку **197**, можна також позначити, наприклад, так: *CDEAB*, *EABCD* тощо.

Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін.

Відрізок, який сполучає несусідні вершини многокутника, називають **діагоналлю**. Наприклад, на рисунку **198** відрізок *AE* — діагональ.

На рисунку **199** зображено многокутник, усі кути якого менші від розгорнутого. Такий многокутник називають **опуклим**. Зауважимо, що многокутники, зображені на рисунках **196, 197, 198**, не є опуклими.

Опуклий многокутник має такі властивості:

1) опуклий многокутник розташований в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону (рис. 200);

2) опуклий многокутник містить будь-яку свою діагональ (рис. 201).

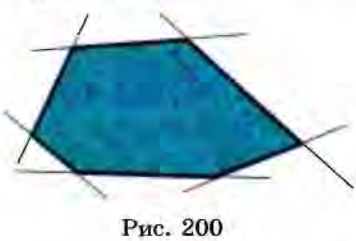


Рис. 200

Рис. 201

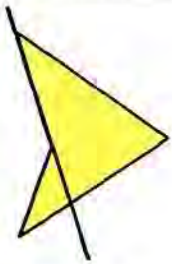


Рис. 202

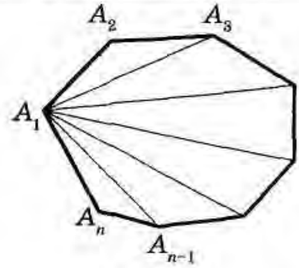


Рис. 203

Оскільки жодний неопуклий многокутник таких властивостей не має (рис. 198; 202), то кожну з них можна розглядати як ознаку опуклості многокутника.

Теорема 19.1. ***Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює*** **$180° \cdot (n - 2)$.**

Доведення. ⊖ На рисунку 203 зображено опуклий n-кутник $A_1A_2A_3...A_n$. Проведемо всі його діагоналі, які проходять через вершину A_1. Ці діагоналі розбивають даний многокутник на $n - 2$ трикутники. Сума всіх кутів цих трикутників дорівнює сумі кутів n-кутника. Оскільки сума кутів кожного трикутника дорівнює 180°, то шукана сума дорівнює $180° (n - 2)$. ▲

Зазначимо, що наведена теорема є справедливою і для неопуклого многокутника.

Означення. **Многокутник називають вписаним, якщо існує коло, якому належать усі його вершини.**

На рисунку 204 зображено вписаний многокутник. У цьому разі також говорять, що коло **описано** навколо многокутника.

Центр O описаного кола многокутника рівновіддалений від усіх його вершин. Отже, точка O належить серединним перпендикулярам усіх сторін вписаного многокутника.

Зрозуміло, що навколо многокутника можна описати коло, якщо існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин. Отже, якщо серединні перпендикуляри всіх сторін

Рис. 204

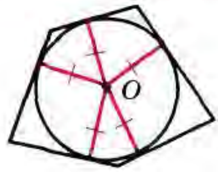


Рис. 205

многокутника перетинаються в одній точці, то такий многокутник є вписаним.

О з н а ч е н н я. Многокутник називають о п и с а н и м, якщо існує коло, яке дотикається до всіх його сторін.

На рисунку 205 зображено описаний многокутник. У цьому разі також говорять, що коло **вписано** в многокутник.

Центр O вписаного кола многокутника рівновіддалений від усіх його сторін. Отже, точка O належить бісектрисам усіх кутів описаного многокутника.

Зрозуміло, що в многокутник можна вписати коло, якщо існує точка, рівновіддалена від усіх його сторін. Отже, якщо бісектриси всіх кутів многокутника перетинаються в одній точці, то такий многокутник є описаним.

?

1. Поясніть, яку фігуру називають многокутником.
2. Що називають діагоналлю многокутника?
3. Що називають периметром многокутника?
4. Який многокутник називають опуклим?
5. Як розташований опуклий многокутник відносно будь-якої прямої, що містить його сторону?
6. Чому дорівнює сума кутів опуклого n-кутника?
7. Який многокутник називають описаним?
8. Який многокутник називають вписаним?
9. Яка точка є центром кола, описаного навколо многокутника?
10. Яка точка є центром кола, вписаного в многокутник?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

641.° Накресліть і позначте довільний опуклий семикутник, назвіть усі його вершини і сторони, проведіть з однієї вершини всі діагоналі, назвіть їх. На скільки трикутників діагоналі розбили семикутник?

642.° Накресліть шестикутник, кожний кут якого дорівнює 120°, а кожна сторона — 4 см. Опишіть навколо цього шестикутника коло і впишіть у нього коло.

643.° Накресліть п'ятикутник, кожний кут якого дорівнює 108°, а кожна сторона — 3 см. Опишіть навколо цього п'ятикутника коло і впишіть у нього коло.

644.° Накресліть коло довільного радіуса, поділіть його на 8 рівних дуг. Використовуючи точки поділу, побудуйте восьмикутник, вписаний у коло.

645.° Накресліть коло довільного радіуса, поділіть його на 12 рівних дуг. Використовуючи точки поділу, побудуйте дванадцятикутник, вписаний у коло.

ВПРАВИ

646.° Знайдіть сторони п'ятикутника $ABCDE$, якщо BC на 1 см більша за AB, CD на 2 см більша за AB, DE на 3 см більша за AB, AE на 4 см більша за AB, а периметр п'ятикутника дорівнює 100 см.

647.° Знайдіть суму кутів опуклого: 1) п'ятикутника; 2) восьмикутника; 3) двадцятичотирикутника.

648.° Знайдіть суму кутів опуклого: 1) дев'ятикутника; 2) шістнадцятикутника.

649.° Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює:

1) 1800°; 2) 720°; 3) 1600°?

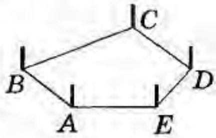


Рис. 206

650.° Чи існує многокутник, кожний кут якого дорівнює: 1) 150°; 2) 100°?

651.• Під час знімання плану земельної ділянки, яка має форму п'ятикутника (рис. 206), отримали такі кути: $\angle A = 116°$,

$\angle B = 98°$, $\angle C = 124°$, $\angle D = 102°$, $\angle E = 130°$. Чи правильно було виконано вимірювання?

652.• Знайдіть кути опуклого шестикутника, якщо вони відносяться як 3 : 3 : 4 : 4 : 5 : 5.

653.• Знайдіть кути опуклого семикутника, якщо вони відносяться як 6 : 7 : 8 : 9 : 9 : 10 : 11.

654.• Скільки діагоналей можна провести: 1) у дев'ятикутнику; 2) у двадцятикутнику; 3) у n-кутнику?

655.• В опуклому многокутнику 54 діагоналі. Знайдіть кількість його сторін і суму кутів.

656.• Доведіть, що коли всі сторони многокутника, вписаного в коло, рівні, то й усі його кути теж рівні.

657.• Доведіть, що коли всі кути многокутника, описаного навколо кола, рівні, то й усі його сторони теж рівні.

658.•• Усі сторони опуклого п'ятикутника рівні, а кути при одній із сторін — прямі. Знайдіть решту кутів п'ятикутника.

659.•• Три кути опуклого многокутника дорівнюють по 100°, а решта — по 120°. Визначте вид многокутника.

660.•• Доведіть, що коли кути опуклого шестикутника рівні, то його сторони утворюють три пари паралельних сторін.

661.•• Доведіть, що коли кути опуклого п'ятикутника рівні, то він не має паралельних сторін.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

662. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута і поділяє середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 7 см і 11 см. Знайдіть периметр трапеції.

663. Медіана і висота прямокутного трикутника, проведені до гіпотенузи, дорівнюють відповідно 13 см і 12 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

664. Бісектриса кута A трикутника ABC ($\angle C = 90°$) поділяє катет BC на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точки A, C і точку перетину даної бісектриси з катетом BC.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

665. На колі, радіус якого дорівнює 1, позначили 1000 точок. Доведіть, що знайдеться точка, яка належить даному колу, сума відстаней від якої до позначених точок більша за 1000.

20. Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

З такою величиною як площа ви часто зустрічаєтесь у повсякденному житті: площа квартири, дачної ділянки, поля тощо.

Досвід підказує вам, що рівні земельні ділянки мають рівні площі; що площа квартири дорівнює сумі площ усіх її приміщень (кімнат, кухні, коридору і т. д.).

Ви знаєте, що площі земельних ділянок вимірюють у сотках (арах) і гектарах; площі регіонів і держав — у квадратних кілометрах; площу квартири — у квадратних метрах. На цих практичних знаннях про площу будується означення площі многокутника.

Означення. **Площею многокутника називають додатну величину, яка має такі властивості:**

1) рівні многокутники мають рівні площі;

2) якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;

3) за одиницю виміру площі приймають площу одиничного квадрата, тобто квадрата зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини.

Виміряти площу многокутника — це означає порівняти його площу з площею одиничного квадрата. У результаті отримують **числове значення площі** даного многокутника. Це число показує, у скільки разів площа даного многокутника відрізняється від площі одиничного квадрата.

Наприклад, якщо клітинку вашого зошита прийняти за одиничний квадрат, то площа многокутника, зображеного на рисунку 207, дорівнюватиме 11 квадратним одиницям (коротко записують: 11 од^2).

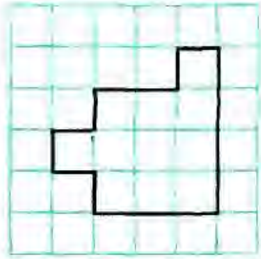


Рис. 207

Зазвичай для знаходження площі використовують формули, тобто обчислюють площу многокутника за певними його елементами (сторонами, діагоналями, висотами тощо). Деякі з них ви вже знаєте. Наприклад, формулу $S = ab$, де S — *площа прямокутника*, a і b — *довжини його сусідніх сторін*, ви застосовували неодноразово. Доведемо цю формулу.

Лема. ***Площа квадрата зі стороною*** $\frac{1}{n}$ ***од*** (n ***— натуральне число) дорівнює*** $\frac{1}{n^2}$ ***од***^{2}.

Доведення. ⊖ Розглянемо одиничний квадрат і поділимо його на n^2 рівних квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$ (рис. 208).

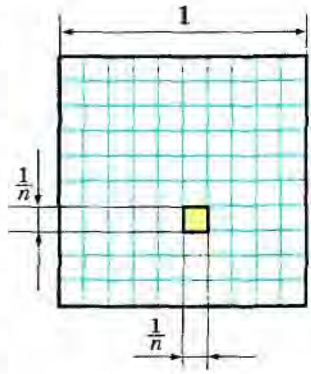


Рис. 208

З означення площі многокутника (властивість 1) випливає, що всі ці квадрати мають рівні площі. За властивістю 2 сума площ цих квадратів дорівнює площі одиничного квадрата, тобто дорівнює 1 од^2. Тому площа кожного маленького квадрата дорівнює $\frac{1}{n^2}$ од^2. ▲

Теорема 20.1. ***Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін.***

Доведення. ⊖ На рисунку 209 зображено прямокутник $ABCD$, довжини сусідніх сторін якого дорівнюють a і b: $AB = a$, $BC = b$.

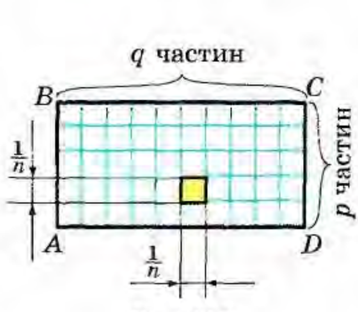


Рис. 209

Доведемо, що площа S прямокутника обчислюється за формулою $S = ab$.

Нехай a і b — раціональні числа (випадок, коли хоча б одне з них ірраціональне число, ви можете розглянути на занятті математичного гуртка). Тоді ці числа можна подати у вигляді звичайних дробів, які зведено до однакових знаменників. Маємо:

$$a = \frac{p}{n},\ b = \frac{q}{n},\ \text{де } p,\ q,\ n \text{ — натуральні числа.}$$

Поділимо сторону AB на p рівних частин, а сторону BC — на q рівних частин. Через точки поділу проведемо прямі, паралельні сторонам прямокутника. Тоді прямокутник буде поділено на pq рівних квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$.

Згідно з лемою площа кожного квадрата дорівнює $\frac{1}{n^2}$. З означення площі (властивість 2) випливає, що площа прямокутника дорівнює сумі площ усіх квадратів, тобто

$$S = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}_{pq\ \text{разів}} = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.\ \blacktriangle$$

Означення. **Многокутники, які мають рівні площі, називають *рівновеликими*.**

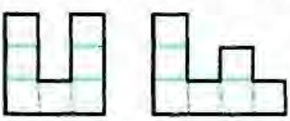


Рис. 210

З означення площі (властивість 1) випливає, що всі рівні фігури рівновеликі. Проте не всі фігури, які мають рівні площі, є рівними. Наприклад, на рисунку 210 зображено два многокутники, кожний з яких складається із 7 одиничних квадратів. Ці многокутники рівновеликі, але не рівні.

1. Що називають площею многокутника?

2. Що означає виміряти площу многокутника?

3. Що показує числове значення площі?

4. Чому дорівнює площа квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$ од, де n — натуральне число?

5. Чому дорівнює площа прямокутника?

6. Які многокутники називають рівновеликими?

7. Чи можна стверджувати, що коли дві фігури рівні, то вони рівновеликі?

8. Чи можна стверджувати, що коли дві фігури рівновеликі, то вони рівні?

ВПРАВИ

666.° Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 5 см більша за другу, а площа прямокутника дорівнює 36 см^2.

667.° Площа прямокутника дорівнює 270 см^2, а його сторони відносяться як 5 : 6. Чому дорівнюють сторони прямокутника?

668.° Які з прямокутників, зображених на рисунку 211, рівновеликі?

669.° Квадрат зі стороною 12 см і прямокутник, одна із сторін якого дорівнює 8 см, рівновеликі. Знайдіть периметр даного прямокутника.

670.° Знайдіть периметр квадрата, який рівновеликий прямокутнику зі сторонами 2 см і 32 см.

671.° Чи вистачить 5 т гороху, щоб засіяти ним поле, яке має форму прямокутника зі сторонами 500 м і 400 м, якщо на 1 га треба висіяти 260 кг гороху?

672.° Довжина стіни дорівнює 6 м, а висота — 3 м. Чи вистачить 5 ящиків кахлю, щоб обкласти цю стіну, якщо

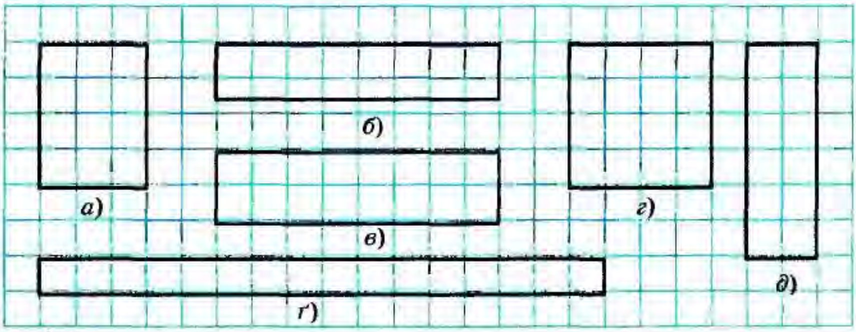


Рис. 211

одна плитка має форму квадрата зі стороною 15 см, а в один ящик уміщуються 160 плиток?

673.° Витрати емалевої фарби на одношарове покриття становлять 180 г на 1 $м^2$. Чи вистачить 3 кг емалі, щоб пофарбувати стіну завдовжки 6 м і висотою 3 м?

674.° Тиск деякого газу становить 0,0015 $Н/м^2$. З якою силою тисне цей газ на площадку прямокутної форми розміром 35 см × 24 см?

675.° Опір розриву деякого виду сталі дорівнює 60 $Н/мм^2$. При якому навантаженні розірветься стержень, переріз якого є прямокутником зі сторонами 20 мм і 10 мм?

676.• Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з однією зі сторін кут α. Знайдіть площу прямокутника.

677.• Сторона прямокутника дорівнює 15 см і утворює з діагоналлю кут 30°. Знайдіть площу прямокутника.

678.• Знайдіть відношення площ двох квадратів, сторони яких відносяться як: 1) 3 : 4; 2) $2 : \sqrt{5}$.

679.• Як відносяться сторони двох квадратів, якщо їх площі відносяться як: 1) 25 : 36; 2) 3 : 49?

680.• Одна зі сторін прямокутника дорівнює 28 см. Як зміниться — збільшиться чи зменшиться — площа прямокутника і на скільки, якщо другу його сторону зменшити на 5 см?

681.• Як зміниться площа прямокутника, якщо:

1) дві його протилежні сторони збільшити у 3 рази;
2) усі його сторони збільшити у 3 рази;
3) дві його протилежні сторони збільшити у 6 разів, а дві інші — зменшити у 3 рази?

682.• Як зміниться площа прямокутника, якщо:

1) дві його протилежні сторони зменшити у 4 рази, а дві інші — у 2 рази;
2) дві його протилежні сторони збільшити у 4 рази, а дві інші — зменшити у 4 рази?

683.• На продовженні сторони AD за точку D паралелограма $ABCD$ позначено точку M так, що $AD = MD$. Доведіть, що паралелограм $ABCD$ і трикутник ABM рівновеликі.

684.• Площа квадрата $ABCD$ дорівнює 10 $см^2$ (рис. 212). Чому дорівнює площа прямокутника $BMKD$?

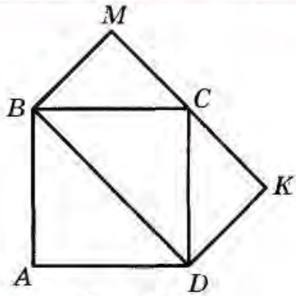


Рис. 212

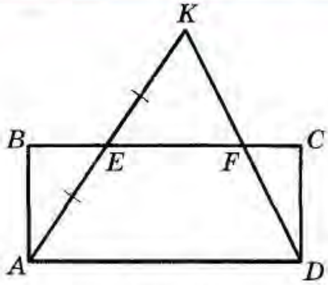


Рис. 213

685.° Доведіть, що коли точка E — середина відрізка AK (рис. 213), то трикутник AKD і прямокутник $ABCD$ рівновеликі.

686.° У скільки разів площа квадрата, описаного навколо кола, більша за площу квадрата, вписаного в коло?

687.° Площа прямокутного листа паперу, довжини сторін якого виражаються цілим числом сантиметрів, дорівнює 12 см^2. Скільки квадратів площею 4 см^2 можна вирізати з цього листа?

688.° Площа прямокутного листа паперу, довжини сторін якого виражаються цілим числом сантиметрів, дорівнює 18 см^2. Скільки квадратів зі стороною 3 см можна вирізати з цього листа?

689.° Бісектриса кута прямокутника поділяє його діагональ у відношенні 2 : 7. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 108 см.

690.° Бісектриса кута прямокутника поділяє його діагональ у відношенні 1 : 4. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 36 см^2.

691.* Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох даних квадратів.

692.* Сторони прямокутника дорівнюють a і b. Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює площі даного прямокутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

693. Серединний перпендикуляр діагоналі BD паралелограма $ABCD$ перетинає сторони AB і CD. Продовження сторін AD і BC він перетинає у точках M і K відповідно. Визначте вид чотирикутника $MBKD$.

694. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M. Знайдіть AM, якщо $AB = 6$ см і $BC : AD = 3 : 4$.

695. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей ромба до його сторони, якщо гострий кут ромба дорівнює $30°$, а сторона — 8 см.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

696. Є чотири палички. Відомо, що з них можна скласти чотирикутник, діагоналі якого перпендикулярні. Доведіть, що з них можна скласти чотирикутник з двома прямими кутами.

21. Площа паралелограма

Теорема 21.1. ***Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, яка відповідає цій стороні.***

Доведення. ⊖ На рисунку 214 зображено паралелограм $ABCD$, площа якого дорівнює S. Проведемо дві його висоти BM і CN. Доведемо, що $S = BM \cdot BC$.

Очевидно, що $MBCN$ — прямокутник. Покажемо, що він рівновеликий даному паралелограму.

Площа паралелограма дорівнює сумі площ трикутника ABM і трапеції $MBCD$. Площа прямокутника дорівнює сумі площ зазначеної трапеції і трикутника DCN. Проте $\triangle ABM = \triangle DCN$ за гіпотенузою і гострим кутом (відрізки AB і CD рівні як протилежні сторони паралелограма, кути 1 і 2 рівні як відповідні при паралельних прямих AB і DC та січній AD). Отже, ці трикутники рівновеликі. Звідси ви-

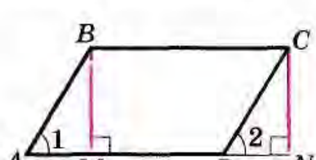


Рис. 214

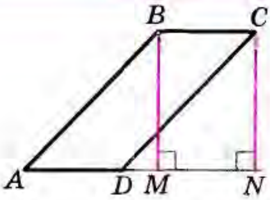


Рис. 215

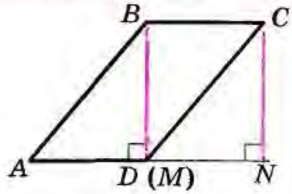


Рис. 216

пливає, що паралелограм $ABCD$ і прямокутник $MBCN$ рівновеликі.

За теоремою 20.1 площа прямокутника дорівнює добутку $BM \cdot BC$. Тоді $S = BM \cdot BC$, де S — площа паралелограма $ABCD$.

Доведення буде повним, якщо розглянути випадки, коли основа M висоти BM не буде належати стороні AD (рис. 215) або збігатиметься з вершиною D (рис. 216). І в цьому разі паралелограм $ABCD$ рівновеликий з прямокутником $MBCN$. Доведіть цей факт самостійно. ▲

- Чому дорівнює площа паралелограма?

ВПРАВИ

697.° Знайдіть площу паралелограма, сторона якого дорівнює 14 см, а висота, яка їй відповідає, — 6 см.

698.° Обчисліть площу паралелограма, зображеного на рисунку 217 (розміри дано в сантиметрах).

699.° Які з паралелограмів, зображених на рисунку 218, рівновеликі?

Рис. 217

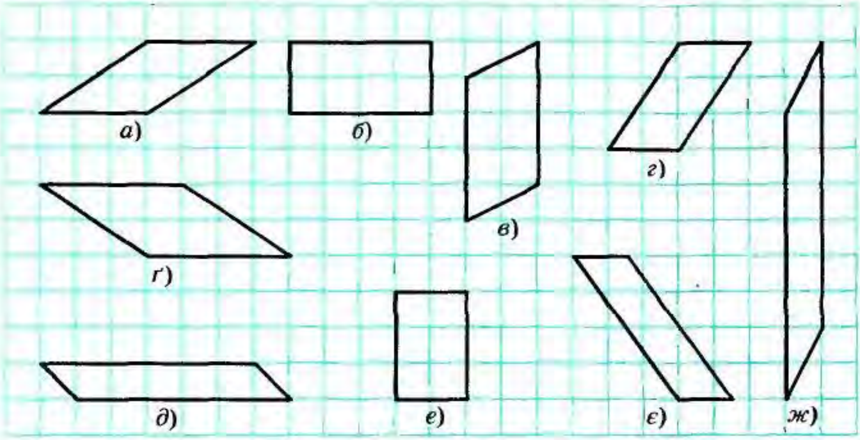


Рис. 218

700.° Площа паралелограма $ABCD$ (рис. 219) дорівнює S. Чому дорівнює площа зафарбованої фігури?

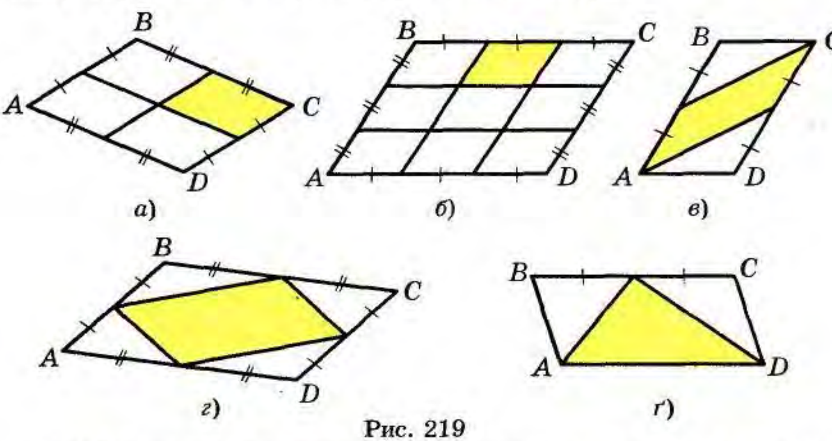


Рис. 219

701.° Площа паралелограма дорівнює 17 см², а одна з його сторін — 3,4 см. Знайдіть висоту паралелограма, яка відповідає цій стороні.

702.° Площа паралелограма дорівнює 40 см², а висоти — 5 см і 4 см. Знайдіть сторони цього паралелограма.

703.° Заповніть таблицю, де a — сторона паралелограма, h — висота, яка відповідає цій стороні, S — площа паралелограма:

a	6,2 см	16 дм	
h	7 см		0,9 м
S		64 дм^2	5,4 м^2

704.˙ Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 15 см, а одна з висот дорівнює:

1) 6 см; 2) 12 см.

Знайдіть другу висоту паралелограма. Скільки розв'язків у кожному випадку має задача?

705.˙ Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 15 см і 25 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до меншої сторони.

706.˙ Знайдіть площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 26 см і 24 см і одна з них перпендикулярна до сторони паралелограма.

707.˙ Діагональ паралелограма дорівнює 18 см, перпендикулярна до однієї із сторін і утворює кут 30° з другою стороною. Знайдіть площу паралелограма.

708.˙ Сторони паралелограма дорівнюють a і b, його гострий кут дорівнює α. Знайдіть площу паралелограма.

709.˙ Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 60°. Знайдіть площу паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 8 см і 12 см.

710.˙ Сторони паралелограма дорівнюють 14 см і 20 см, а кут між його висотами, проведеними з вершини тупого кута, — 45°. Знайдіть площу паралелограма.

711.˙ Знайдіть площу ромба, якщо його висота дорівнює 6 см, а більша діагональ — 10 см.

712.˙ Менша діагональ ромба дорівнює a, а один з кутів — 60°. Знайдіть площу ромба.

713.˙ Доведіть, що висоти паралелограма обернено пропорційні сторонам, яким вони відповідають.

714.˙ Сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см, а сума двох його нерівних висот дорівнює 14 см. Знайдіть площу паралелограма.

715.˙ Різниця двох сторін паралелограма дорівнює 12 см, а висоти, які їм відповідають, дорівнюють 15 см і 10 см. Знайдіть площу паралелограма.

716.** Доведіть, що з усіх паралелограмів зі сторонами a і b найбільшу площу має прямокутник.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

717. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 7$ см, $BC = 24$ см, AM — бісектриса. Знайдіть синус, косинус і тангенс кожного з кутів BAC і AMC.

718. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC медіани AM і CK перетинаються в точці O. Доведіть, що трикутник AOC — рівнобедрений, і знайдіть його бічні сторони, якщо $AM = 21$ см.

719. На медіані AM трикутника ABC позначено точку D так, що $AD : DM = 1 : 3$. Через точку D проведено пряму, паралельну стороні AC. У якому відношенні ця пряма ділить сторону BC, рахуючи від вершини C?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

720. Розмістіть на площині 8 точок так, щоб на серединному перпендикулярі будь-якого відрізка з кінцями у цих точках лежало рівно дві з цих точок.

22. Площа трикутника

Теорема 22.1. ***Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на проведену до неї висоту.***

Доведення. ⊙ На рисунку 220 зображено трикутник ABC, площа якого дорівнює S. Проведемо його висоту BM.

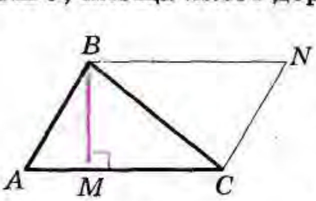


Рис. 220

Доведемо, що $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$.

Через вершини B і C трикутника проведемо прямі, паралельні сторонам AC і AB відповідно (рис. 220). Нехай ці прямі перетинаються в точці N. Очевидно, що чотирикутник

$ABNC$ — паралелограм. Трикутники ABC і NCB рівні (доведіть це самостійно). Отже, рівні їх площі. Тоді площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма $ABNC$. Висота BM трикутника ABC є також висотою паралелограма $ABNC$. Звідси $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$. ▲

Якщо скористатися позначеннями для висот і сторін трикутника ABC (див. форзац), то згідно з доведеною теоремою маємо:

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c, \text{ де } S \text{ — площа трикутника.}$$

Наслідок. ***Площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів.***

Доведіть цю теорему самостійно.

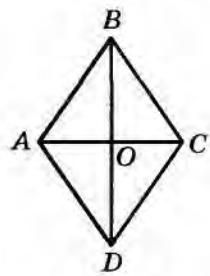


Рис. 221

Задача. *Доведіть, що площа ромба дорівнює півдобутку діагоналей.*

Розв'язання. На рисунку 221 зображено ромб $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Тоді відрізок BO — висота трикутника ABC.

Оскільки $\triangle ABC = \triangle ADC$, то

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BO = AC \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

?

1. Як знайти площу трикутника, якщо відомо його сторону і висоту, проведену до неї?
2. Як знайти площу прямокутного трикутника, якщо відомо його катети?

ВПРАВИ

721.° Сторона трикутника дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї, — 2,5 см. Знайдіть площу трикутника.

722.° Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 10 см і 18 см.

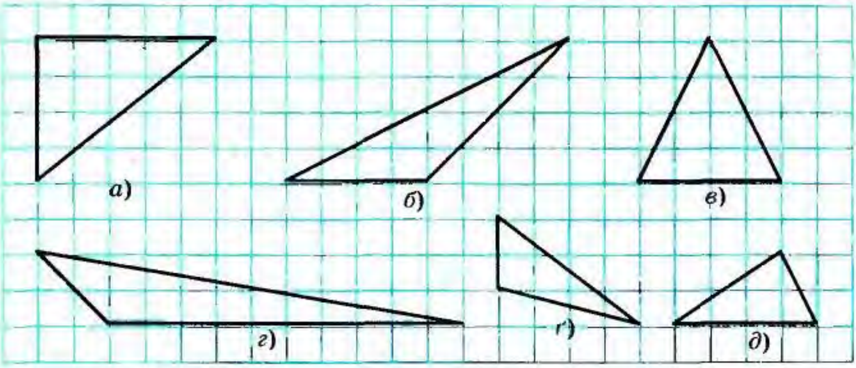


Рис. 222

723.° Які з трикутників, зображених на рисунку 222, рівновеликі?

724.° Обчисліть площі трикутників, зображених на рисунку 223, якщо довжина сторони клітинки дорівнює одиниці довжини.

725.° Площа трикутника дорівнює 48 см². Знайдіть сторону трикутника, якщо висота, проведена до цієї сторони, дорівнює 8 см.

726.° Відомо, що дві сторони трикутника дорівнюють 24 см і 9 см, а висота, проведена до більшої з відомих сторін, — 6 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до меншої з відомих сторін.

727.° Заповніть таблицю, де a — сторона трикутника, h — висота, проведена до неї, S — площа трикутника:

a	2,4 см	9 дм	
h	4 см		5 м
S		81 дм²	65 м²

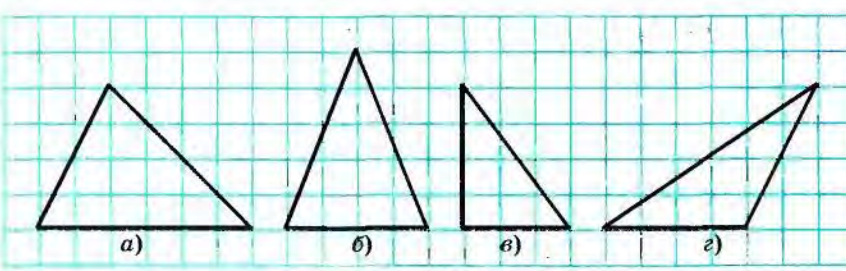


Рис. 223

728.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 24 см, а бічна сторона — 13 см.

729.° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 61 см, а висота, проведена до основи, — 60 см. Знайдіть площу трикутника.

730.° Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 18,5 см. Обчисліть площу трикутника.

731.• Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, поділяє її на відрізки завдовжки 3 см і 27 см.

732.• Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 8 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу — 6 см. Знайдіть площу трикутника.

733.• Висота BD трикутника ABC поділяє його сторону AC на відрізки AD і CD. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $BC = \sqrt{37}$ см, $\angle A = 30°$, $CD = 5$ см.

734.• Висота AM трикутника ABC поділяє його сторону BC на відрізки BM і MC. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 26$ см, $\angle B = 45°$.

735.• Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює b, а кут при основі дорівнює α.

736.• Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює h, а кут при вершині дорівнює β. Знайдіть площу трикутника.

737.• Знайдіть площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює a.

738.• Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c.

739.• Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо його катети дорівнюють 10 см і 24 см.

740.• Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, поділяє його гіпотенузу на відрізки 8 см і 12 см. Знайдіть площу трикутника.

741.• Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 54 см, а висота, проведена до основи, — 9 см.

742.* Основа рівнобедреного трикутника відноситься до його висоти, опущеної на основу, як 8 : 3, бічна сторона трикутника дорівнює 40 см. Знайдіть площу трикутника.

743.* Доведіть, що площа опуклого чотирикутника, діагоналі якого перпендикулярні, дорівнює їх півдобутку.

744.* Площа ромба дорівнює 120 см^2, а його діагоналі відносяться як 5 : 12. Знайдіть периметр ромба.

745.* Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 25 см, а сума діагоналей — 62 см.

746.* Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 39 см, а різниця діагоналей — 42 см.

747.* Дано пряму l і паралельний їй відрізок AB. Доведіть, що всі трикутники AXB, де X — довільна точка прямої l, рівновеликі.

748.* Доведіть, що коли висота одного трикутника дорівнює висоті другого трикутника, то їх площі відносяться як сторони трикутників, до яких відповідно проведені ці висоти.

749.* Доведіть, що медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.

750.* На стороні AC трикутника ABC позначено точку M так, що $\frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}$. Доведіть, що $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{m}{n}$.

751.* У трикутнику провели всі три медіани. Доведіть, що вони розбили трикутник на 6 рівновеликих трикутників.

752.* Через вершину B трикутника ABC проведіть дві прямі так, щоб вони розбили даний трикутник на 3 рівновеликих трикутники.

753.* Через вершину паралелограма проведіть прямі так, щоб вони розбили даний паралелограм на: 1) 4 рівновеликих многокутники; 2) 5 рівновеликих многокутників.

754.* Через вершину ромба проведіть дві прямі так, щоб вони розбили даний ромб на 3 рівновеликих многокутники.

755.* Побудуйте трикутник, рівновеликий даному паралелограму.

756.* Доведіть, що більшій стороні трикутника відповідає менша висота.

757.** На стороні AC трикутника ABC позначено точку M так, що $\frac{AM}{MC}=\frac{m}{n}$. Нехай X — довільна внутрішня точка відрізка BM. Доведіть, що $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}}=\frac{m}{n}$.

758.** Точка дотику вписаного кола поділяє гіпотенузу прямокутного трикутника на відрізки, один з яких на 14 см більший за другий. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 4 см.

759.** У прямокутному трикутнику ABC до гіпотенузи AB проведено висоту CM. Площа трикутника ACM дорівнює 6 см^2, а площа трикутника BCM — 54 см^2. Знайдіть сторони трикутника ABC.

760.** Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса його гострого кута поділяє протилежний катет на відрізки завдовжки 21 см і 35 см.

761.** Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута поділяє гіпотенузу на відрізки завдовжки 2 см і 6 см.

762.** Центр кола, вписаного у рівнобедрений трикутник, поділяє його висоту, проведену до основи, на відрізки, довжини яких дорівнюють 34 см і 16 см. Знайдіть площу даного трикутника.

763.** У рівнобедрений трикутник вписано коло. Точка дотику поділяє бічну сторону трикутника у відношенні 9 : 8, рахуючи від вершини рівнобедреного трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.

764.* На продовженнях сторін AB, BC, AC рівностороннього трикутника ABC за точки B, C і A відповідно позначено точки D, E і F так, що $BD = CE = AF = 2AB$. Знайдіть площу трикутника DEF, якщо площа трикутника ABC дорівнює 1 см^2.

765.* У трикутнику ABC позначено точку M так, що площі трикутників AMB, BMC і AMC рівні. Доведіть, що M — точка перетину медіан трикутника ABC.

766.* На стороні AC трикутника ABC позначено точку D. Проведіть через цю точку пряму так, щоб вона розбила даний трикутник на два рівновеликих многокутники.

767.* Доведіть, що сума відстаней від довільної точки рівностороннього трикутника до його сторін є сталою для даного трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

768. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle AMB = 117°$.

769. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основи AD і BC відповідно дорівнюють 18 см і 12 см. Бічна сторона утворює з основою кут 30°. Знайдіть діагональ трапеції.

770. Центр кола, вписаного у рівнобічну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 12 см і 16 см. Знайдіть периметр трапеції.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

771. На площині дано n точок ($n > 3$), жодні три з яких не лежать на одній прямій. Доведіть, що існує трикутник з вершинами в даних точках, який не містить жодної з решти $n - 3$ точок.

23. Площа трапеції

Теорема 23.1. ***Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.***

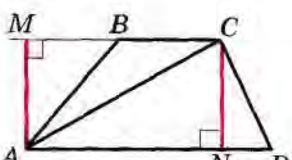


Рис. 224

Доведення. ⊝ На рисунку 224 зображено трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$), площа якої дорівнює S. Діагональ AC розбиває її на два трикутники: ABC і ACD. Висоти AM і CN цих трикутників є і висотами трапеції. Тому $AM = CN$.

Маємо:

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2} BC \cdot AM + \frac{1}{2} AD \cdot CN =$$

$$= \frac{1}{2} BC \cdot CN + \frac{1}{2} AD \cdot CN = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN. \ \blacktriangle$$

Якщо позначити довжини основ трапеції та її висоти відповідно буквами a, b і h, то площа S трапеції обчислюється за формулою

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Наслідок. ***Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.***

1. Сформулюйте теорему про площу трапеції.

2. За якою формулою обчислюється площа трапеції?

ВПРАВИ

772.° Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 12 см, а висота — 6 см.

773.° Знайдіть площу трапеції, середня лінія якої дорівнює 18 см, а висота — 9 см.

774.° Площа трапеції дорівнює 96 см², а її висота — 3 см. Знайдіть основи трапеції, якщо вони відносяться як 3 : 5.

775.° Площа трапеції дорівнює 45 см², одна з основ — 8 см, а висота — 6 см. Знайдіть другу основу трапеції.

776.° Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 14 см і 16 см, а діагональ — 17 см.

777.° Чому дорівнює площа прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 9 см і 16 см, а більша бічна сторона — $\sqrt{65}$ см?

778.° Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 14 см і 32 см, а бічна сторона — 15 см.

779.° На рисунку 225 зображено поперечний розріз траншеї, який має форму трапеції.

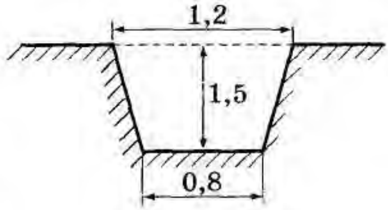


Рис. 225

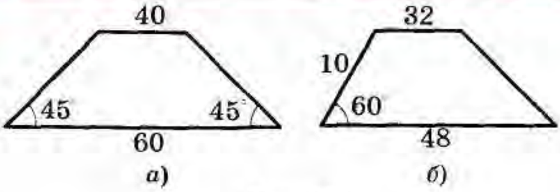


Рис. 226

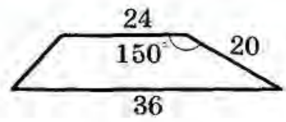


Рис. 227

Обчисліть площу цього поперечного перерізу (розміри дано в метрах).

780.° Знайдіть площу трапеції, зображеної на рисунку 226 (розміри дано в сантиметрах).

781.° Знайдіть площу трапеції, зображеної на рисунку 227 (розміри дано в сантиметрах).

782.• У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і поділяє середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 6 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції.

783.• Основи прямокутної трапеції дорівнюють 9 см і 17 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Обчисліть площу трапеції.

784.• Точка перетину бісектрис гострих кутів при основі трапеції належить другій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 17 см і 25 см, а висота — 15 см.

785.• Точка перетину бісектрис тупих кутів при основі трапеції належить другій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 10 см і 17 см, а висота — 8 см.

786.• Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює $20\sqrt{3}$ см і утворює з основою кут $60°$. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

787.• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 32 см і 50 см. Чому дорівнює площа даної трапеції, якщо в неї можна вписати коло?

788.• Менша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 8 см, а гострий кут — $45°$. Знайдіть площу цієї трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

789.• Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 28 см, а гострий кут — $30°$. Знайдіть площу цієї трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

790. Доведіть, що пряма, яка проходить через середину середньої лінії трапеції та перетинає її основи, розбиває дану трапецію на два рівновеликих многокутники.

791. Побудуйте рівновеликий даній трапеції:

1) паралелограм, відмінний від прямокутника;

2) прямокутник.

792. Побудуйте трикутник, рівновеликий даній трапеції.

793. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 24 см і 40 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

794. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 15 см. Знайдіть площу трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо неї, дорівнює 12,5 см.

795. Діагоналі трапеції перпендикулярні, одна з них дорівнює 48 см, а середня лінія трапеції — 25 см. Знайдіть площу трапеції.

796. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює a.

797. У рівнобічну трапецію вписано коло. Одна з її бічних сторін точкою дотику поділяється на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.

798. У прямокутну трапецію вписано коло з радіусом 12 см. Більша з бічних сторін точкою дотику поділяється на два відрізки, більший з яких дорівнює 16 см. Знайдіть площу трапеції.

799. Діагональ рівнобічної трапеції поділяє висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

800. Більша діагональ прямокутної трапеції поділяє висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 9 см. Більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

801. У трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$, M — середина AB. Знайдіть площу трикутника CMD, якщо площа даної трапеції дорівнює S.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

802. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 50 см, а трикутника ABD — 40 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо $AD = BD$.

803. Коло, побудоване на діагоналі AC ромба $ABCD$ як на діаметрі, проходить через середину сторони AB. Знайдіть кути ромба.

804. На сторонах AB, BC і AC трикутника ABC позначили відповідно точки M, K і D так, що $MK \parallel AC$, $DK \parallel AB$, $BK : KC = 3 : 2$. Знайдіть периметр чотирикутника $AMKD$, якщо $AC = 15$ см, $AB = 25$ см.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

805. Чи можна квадрат зі стороною 1,5 см покрити трьома квадратами зі стороною 1 см?

КОЛИ ЗРОБЛЕНО УРОКИ

Рівноскладені й рівновеликі многокутники

Якщо деякий многокутник можна розрізати на частини і скласти з них інший многокутник, то такі многокутники називають **рівноскладеними**.

Наприклад, якщо прямокутник розрізати вздовж його діагоналі (рис. 228), то отримаємо два рівних прямокутних трикутники, з яких можна скласти рівнобедрений трикутник (рис. 229). Фігури на рисунках 228 і 229 — рівноскладені.

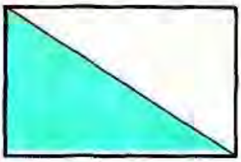


Рис. 228

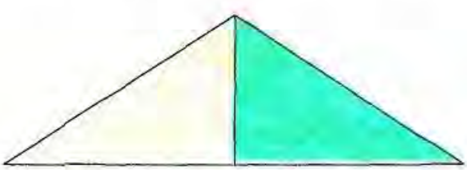


Рис. 229

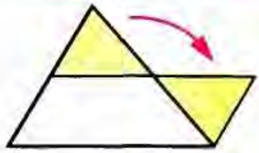


Рис. 230

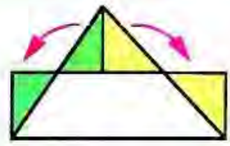


Рис. 231

Очевидно, що рівноскладені многокутники є рівновеликими. Цей факт застосовується при доведенні теорем і розв'язанні цілого ряду задач. Наприклад, доводячи теорему 21.1, ми фактично розрізали паралелограм на трикутник ABM і трапецію $MBCD$, з яких склали прямокутник $MBCN$ (рис.214).

Якщо трикутник розрізати вздовж середньої лінії, то з отриманих трикутника і трапеції можна скласти паралелограм (рис. 230).

Легко встановити (зробіть це самостійно), що таке розрізання трикутника приводить до ще одного доведення теореми про площу трикутника (теорема 22.1). Цій самій меті слугує розрізання трикутника на частини, з яких можна скласти прямокутник (рис. 231).

Евклід у своїй знаменитій книзі «Начала» формулює теорему Піфагора так:

«Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах».

Якщо показати, що квадрат, побудований на гіпотенузі, розрізається на частини, з яких можна скласти два квадрати зі сторонами, які дорівнюють катетам, то тим самим буде доведено теорему Піфагора.

На рисунку 232 показано один з можливих способів такого розрізання.

Квадрати, побудовані на катетах, розрізано на частини, площі яких дорівнюють S_1, S_2, S_3, S_4. З цих частин складено квадрат, побудований на гіпотенузі.

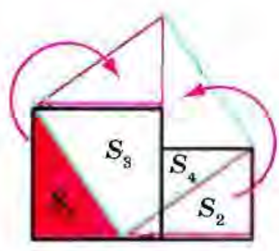


Рис. 232

З означення площі многокутника випливає, що рівноскладені многокутники є рівновеликими. Проте зовсім неочевидною, а отже, і неочікуваною є така теорема.

Теорема. ***Будь-які два рівновеликих многокутники є рівноскладеними.***

Уперше цей факт довів у 1832 році угорський математик Фаркаш Бойяї. Дещо пізніше німецький математик П. Гервін знайшов інше доведення. Тому цю теорему називають теоремою Бойяї–Гервіна.

ВПРАВИ

1. Доведіть, що трапеція є рівноскладеною з паралелограмом, основа якого дорівнює середній лінії трапеції, а висота — висоті трапеції.

2. Доведіть, що площа трапеції дорівнює добутку бічної сторони і перпендикуляра, опущеного на пряму, яка містить цю сторону, із середини другої бічної сторони.

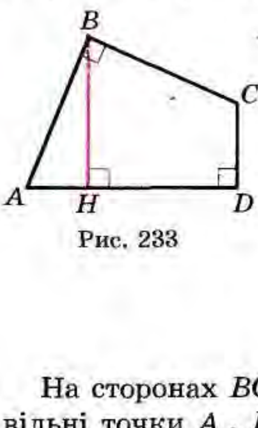


Рис. 233

3. У чотирикутнику $ABCD$ кути ABC і ADC прямі, а сторони AB і BC рівні (рис. 233). Відомо, що $BH \perp AD$ і $BH = 1$. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

Теорема Чеви

На сторонах BC, CA і AB трикутника ABC візьмемо довільні точки A_1, B_1, C_1 (рис. 234). Кожен з відрізків AA_1, BB_1, CC_1 називають **чевіаною** трикутника ABC. Така назва пов'язана з ім'ям італійського інженера і математика Джованні Чеви (1648–1734), який відкрив дивовижну теорему, котрій присвячено цей пункт.

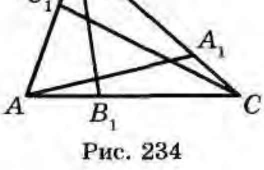


Рис. 234

Якщо точки A_1, B_1 і C_1 взято так, що чевіани є бісектрисами або медіанами, або висотами гострокутного трикутника, то ці чевіани перетинаються в одній точці.

Якщо три чевіани перетинаються в одній точці, то їх називають **конкурентними.**

Теорема Чеви дає загальний критерій конкурентності трьох чевіан.

Теорема. ***Для того щоб чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC перетиналися в одній точці, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність***

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (*)$$

Доведення. Доведемо спочатку необхідну умову конкурентності: якщо чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці, то виконується рівність (*).

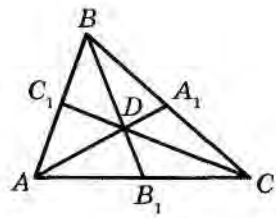


Рис. 235

Скориставшись результатом ключової задачі 757, можна записати (рис. 235):

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}},\quad \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{BDC}}{S_{ABD}}.$$

Перемноживши записані рівності, отримаємо рівність (*).

Доведемо тепер достатню умову конкурентності: якщо виконується рівність (*), то чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці.

Нехай чевіани AA_1 і BB_1 перетинаються в точці D, а чевіана, яка проходить через вершину C і точку D, перетинає сторону AB у деякій точці C_2. З доведеного вище можна записати:

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Зіставляючи цю рівність з рівністю (*), доходимо висновку, що $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC_2}{C_2B}$, тобто точки C_1 і C_2 поділяють відрізок AB в одному й тому самому відношенні. Отже, пряма CD справді перетинає сторону AB у точці C_1. ▲

ВПРАВИ

1. Доведіть, що:

1) медіани трикутника конкурентні;

2) бісектриси трикутника конкурентні;

3) висоти гострокутного трикутника конкурентні.

2. Нехай A_1, B_1, C_1 — точки дотику вписаного кола відповідно зі сторонами BC, AC, AB трикутника ABC. Доведіть, що чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні.

3. Прямі AP, BP і CP перетинають сторони трикутника ABC у точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що прямі, які проходять через середини сторін BC, CA і AB паралельно прямим AP, BP і CP відповідно, конкурентні. *Указівка.* Застосуйте теорему Чеви до трикутника, вершини якого є серединами сторін трикутника ABC.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 4

1. Скільки сторін в опуклому n-кутнику, якщо сума його кутів дорівнює $1260°$?

А) 7; Б) 9; В) 11; Г) 13.

2. В опуклому n-кутнику 14 діагоналей. Знайдіть суму його кутів.

А) $1000°$; Б) $800°$; В) $900°$; Г) $720°$.

3. Як зміниться площа прямокутника, якщо кожну з його сторін зменшити у 10 разів?

А) зменшиться в 100 разів; В) зменшиться у 10 разів;
Б) зменшиться у 20 разів; Г) зменшиться у 1000 разів.

4. Площа паралелограма дорівнює 80 см^2, а одна з його сторін — 16 см. Якою може бути друга сторона паралелограма?

А) 2 см; Б) 3 см; В) 4 см; Г) 6 см.

5. На стороні BC паралелограма $ABCD$ взято точку M так, що $BM : MC = 1 : 3$. Знайдіть площу трикутника ABM, якщо площа паралелограма дорівнює S.

А) $\frac{S}{8}$; Б) $\frac{S}{4}$; В) $\frac{S}{16}$; Г) $\frac{S}{2}$.

6. Фігура, зображена на рисунку 236, складається з чотирьох маленьких квадратів, площа кожного з яких дорівнює 4 см^2, і з великого квадрата. Чому дорівнює площа великого квадрата?

А) 16 см^2; Б) 20 см^2; В) 32 см^2; Г) 40 см^2.

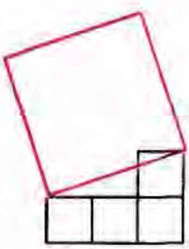


Рис. 236

7. У коло радіуса 1 см вписано квадрат і рівносторонній трикутник. Знайдіть відношення площі даного трикутника до площі квадрата.

А) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; В) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

Б) $3\sqrt{3}$; Г) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

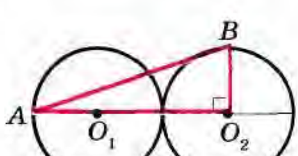


Рис. 237

8. Точки O_1 і O_2 — центри рівних кіл, які дотикаються (рис. 237), $BO_2 \perp O_1O_2$, $AB = 10$ см. Знайдіть площу трикутника ABO_2.

А) 10 см^2; Б) 15 см^2; В) 18 см^2; Г) 20 см^2.

9. Дано дві точки A і B. Геометричним місцем точок X таких, що площі трикутників AXB дорівнюють даному числу S, є:

А) коло з діаметром AB;

Б) серединний перпендикуляр відрізка AB;

В) пряма, паралельна AB;

Г) дві прямі, паралельні AB.

10. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні та поділяють її середню лінію на три рівні частини. Знайдіть площу трапеції, якщо її більша основа дорівнює 12 см.

А) 50 см²; Б) 64 см²; В) 81 см²; Г) 144 см².

У ЦЬОМУ ПАРАГРАФІ

- було введено такі поняття:
  - многокутник і його елементи,
  - опуклий многокутник,
  - вписаний і описаний многокутники,
  - площа многокутника,
  - рівновеликі многокутники:
- ви вивчили теореми про:
  - суму кутів опуклого n-кутника,
  - площу прямокутника,
  - площу паралелограма,
  - площу трикутника,
  - площу трапеції.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 8 КЛАСУ

1. Чотирикутники

806. Знайдіть периметр паралелограма, якщо бісектриса одного з його кутів поділяє сторону паралелограма на відрізки завдовжки 9 см і 14 см.

807. Бісектриса кута BAD паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M так, що $BM : MC = 5 : 4$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо периметр трикутника BOC на 8 см більший за периметр трикутника COD, де O — точка перетину діагоналей паралелограма.

808. У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $2\angle ADB = \angle A + \angle BDC$. Знайдіть $\angle ADB$.

809. У паралелограмі $ABCD$ $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Кола, вписані в трикутники ABD і CBD, дотикаються діагоналі BD у точках M і K відповідно. Знайдіть MK.

810. Скільки різних паралелограмів можна скласти з двох рівних трикутників, якщо вони: 1) різносторонні; 2) рівнобедрені; 3) рівносторонні?

811. Чи є правильним твердження:

1) якщо діагоналі чотирикутника рівні, то даний чотирикутник — паралелограм;
2) якщо дві сторони чотирикутника паралельні і точка перетину діагоналей рівновіддалена від цих сторін, то даний чотирикутник — паралелограм;
3) якщо дві сторони чотирикутника паралельні, а дві інші — рівні, то даний чотирикутник — паралелограм;
4) якщо бісектриси двох протилежних кутів чотирикутника перпендикулярні до бісектриси його третього кута, то даний чотирикутник — паралелограм;
5) якщо діагональ чотирикутника розбиває його на два рівних трикутники, то даний чотирикутник — паралелограм;
6) якщо кожна діагональ чотирикутника розбиває його на два рівних трикутники, то даний чотирикутник — паралелограм;

7) якщо кожні дві протилежні вершини чотирикутника рівновіддалені від діагоналі, яка сполучає дві інші вершини, то даний чотирикутник — паралелограм?

812. Чи є правильним твердження:

1) якщо дві сторони чотирикутника паралельні, а одна з діагоналей розбиває чотирикутник на два рівних трикутники, то даний чотирикутник — паралелограм;
2) якщо дві сторони чотирикутника паралельні, а точка перетину діагоналей ділить одну з них навпіл, то даний чотирикутник — паралелограм;
3) якщо дві протилежні сторони чотирикутника рівні і діагоналі його рівні, то даний чотирикутник — паралелограм?

813. Периметр ромба дорівнює 8 см, а його висота — 1 см. Знайдіть кути ромба.

814. Кут при вершині B ромба $ABCD$ дорівнює $40°$, точки M і K — основи перпендикулярів, опущених з вершини A на сторони BC і CD відповідно. Знайдіть кути трикутника AMK.

815. Перпендикуляр, опущений з вершини B прямокутника $ABCD$ на діагональ AC, поділяє кут ABC на дві частини у відношенні $1 : 3$. Знайдіть кут між проведеним перпендикуляром і діагоналлю BD.

816. Серединний перпендикуляр діагоналі прямокутника утворює з його більшою стороною кут $60°$. Відрізок цієї прямої, який міститься всередині прямокутника, дорівнює 12 см. Знайдіть більшу сторону прямокутника.

817. На діагоналі AC ромба $ABCD$ позначено точки M і K так, що $AM = CK$. Доведіть, що $\angle ABM = \angle CBK$.

818. Периметр ромба на 42 см більший за сторону ромба. Знайдіть цей периметр.

819. Чи є правильним твердження:

1) якщо діагоналі чотирикутника рівні, то цей чотирикутник є прямокутником;
2) якщо діагоналі чотирикутника рівні і перпендикулярні, то цей чотирикутник є квадратом;

3) якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник є квадратом;
4) якщо діагоналі чотирикутника рівні, перпендикулярні і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник є квадратом;
5) якщо три сторони чотирикутника рівні, а діагональ є бісектрисою одного з його кутів, то цей чотирикутник є ромбом?

У випадку позитивної відповіді обґрунтуйте її, у випадку негативної — накресліть чотирикутник, який є контрприкладом.

820. На сторонах AB, BC і AC трикутника ABC позначено точки D, F і E відповідно так, що $BD = BF = DE = EF$. Доведіть, що точка F належить бісектрисі кута BDE.

821. Відстань від середини хорди AC кола до діаметра AB дорівнює 4 см. Знайдіть хорду BC, якщо $\angle BAC = 30°$.

822. Побудуйте паралелограм за його вершиною і серединами сторін, яким ця вершина не належить.

823. Бічна сторона AB і менша основа BC трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 16 см і 15 см. Який з відрізків перетинає бісектриса кута BAD — основу BC чи бічну сторону CD?

824. Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює більшій основі та утворює з нею кут $40°$. Знайдіть кути трапеції.

825. Кут між двома січними, які проходять через точку поза колом, дорівнює $35°$. Градусна міра більшої дуги кола, яка міститься між сторонами цього кута, дорівнює $100°$. Знайдіть градусну міру меншої дуги, яка міститься між сторонами даного кута.

826. Доведіть, що коли вершина кута лежить поза колом, а кут спирається на діаметр кола, то цей кут гострий.

827. Доведіть, що коли вершина кута лежить всередині кола, а кут спирається на діаметр кола, то цей кут тупий.

828. Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, перпендикулярні, $\angle ACB = 10°$, $\angle BDC = 70°$. Знайдіть кути даного чотирикутника.

2. Подібність трикутників

829. Паралельні прямі перетинають одну із сторін кута з вершиною M у точках A і C, а другу — відповідно в точках B і D. Знайдіть MA і MC, якщо $MB : BD = 2 : 3$ і $MA + MC = 14$ см.

830. Знайдіть відношення основ трапеції, якщо її діагоналі поділяють середню лінію трапеції на 3 рівні частини.

831. На медіані BD трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MD = 3 : 2$. Пряма AM перетинає сторону BC у точці E. У якому відношенні точка E поділяє сторону BC, рахуючи від вершини B?

832. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає діагональ BD і сторону BC у точках E і F відповідно, $BE : ED = 2 : 7$. Знайдіть відношення $BF : FC$.

833. Медіани AD і BM трикутника ABC перетинаються в точці O. Через точку O проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть BD, DK і KC, якщо $BC = 18$ см.

834. Бісектриса BD трикутника ABC поділяє сторону AC на відрізки AD і DC, довжини яких відносяться як $3 : 5$. Знайдіть сторони AB і BC, якщо їх сума дорівнює 56 см.

835. Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, становить $\frac{2}{9}$ висоти, проведеної до основи трикутника. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.

836. Сторони трикутника дорівнюють 2,5 см, 4,5 см і 6 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо його більша сторона дорівнює 24 см.

837. У трикутник ABC вписано ромб $ADEF$ так, що кут A у них спільний, а вершина E належить стороні BC. Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = a$, $AC = b$.

838. Периметр паралелограма дорівнює 72 см, а його висоти відносяться як $5 : 7$. Знайдіть сторони, які їм відповідають.

839. Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Проведіть пряму, рівновіддалену від цих точок. Скільки розв'язків має задача?

840. Пряма MB перетинає коло в точках A і B (точка A лежить між точками M і B), а пряма MD — у точках C і D

(точка C лежить між точками M і D), причому $AB = MC$, $MA = 20$ см, $CD = 11$ см. Знайдіть AB.

841. Пряма AB дотикається до кола в точці B, а пряма AC перетинає коло в точках C і D (точка D лежить між точками A і C). Знайдіть CD, якщо $AB = 6$ см, $AC = 9$ см.

842. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, $CM = 4$ см, $DM = 6$ см, AM на 2 см більша за BM. Знайдіть AB.

843. На одній стороні кута з вершиною в точці A позначили точки B і C, а на другій — точки D і E, причому $AB = 10$ см, $AC = 18$ см, $AD : AE = 5 : 9$. Знайдіть CE, якщо $BD = 20$ см.

3. Розв'язування прямокутних трикутників

844. Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 10 см, а відстань між серединою гіпотенузи і основою висоти трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

845. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а висота, проведена до основи, на 6 см менша від основи. Знайдіть основу трикутника.

846. З точки K, що лежить поза прямою a, проведено до цієї прямої похилі KA і KB, які утворюють з нею кути $45°$ і $30°$ відповідно. Знайдіть довжину проекції похилої KB на пряму a, якщо $KA = 8\sqrt{6}$ см.

847. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, поділяє її на відрізки завдовжки 4 см і 25 см. Знайдіть діагоналі ромба.

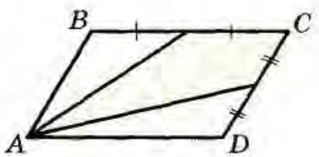
848. Коло, центр якого належить гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається до більшого катета і проходить через вершину протилежного гострого кута. Знайдіть радіус кола, якщо катети дорівнюють 5 см і 12 см.

849. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від вершини меншого гострого кута трикутника до центра вписаного кола.

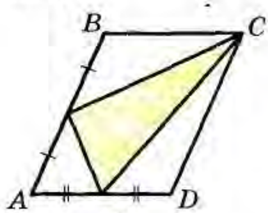
850. Перпендикуляр, опущений з точки кола на його діаметр, поділяє діаметр на два відрізки, один з яких на 27 см більший за другий. Знайдіть діаметр кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 18 см.

4. Многокутники. Площа многокутника

851. Площа паралелограма $ABCD$ дорівнює S. Знайдіть площу заштрихованої фігури (рис. 238).



а)



б)

Рис. 238

852. Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, якщо $BD \perp AD$, $BD = 16$ см, $\angle A = 45°$.

853. Чому дорівнює площа квадрата, діагональ якого дорівнює d?

854. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює R.

855. Катет прямокутного трикутника дорівнює b, а протилежний йому кут дорівнює β. Знайдіть площу трикутника.

856. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α, а гіпотенуза дорівнює c. Знайдіть площу трикутника.

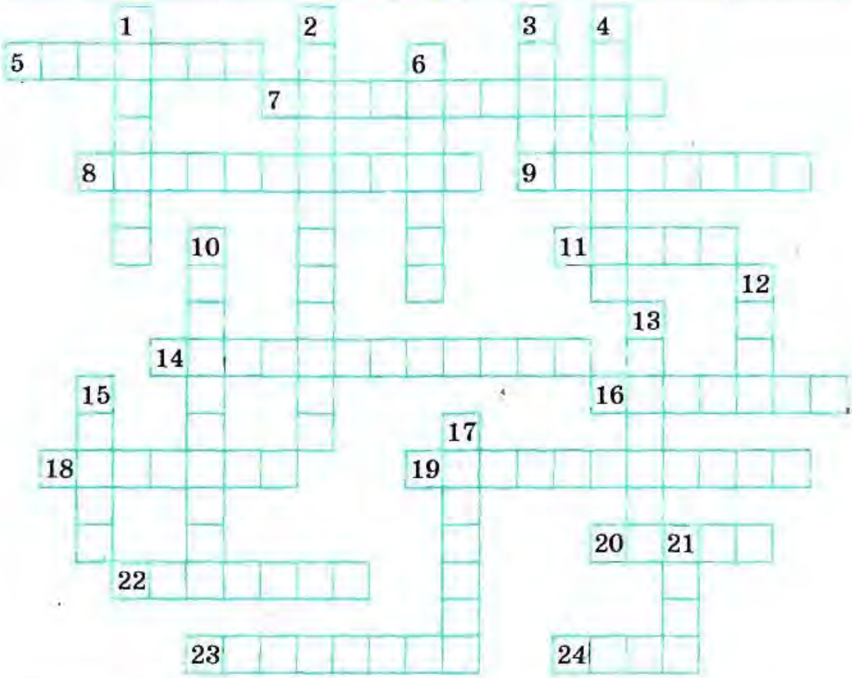
857. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 15 см, а висота — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 150°.

858. Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами її гострих кутів і точкою перетину поділяються у відношенні 5 : 13. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 90 см.

859. Площа рівнобічної трапеції дорівнює $36\sqrt{2}$ см^2, а гострий кут — 45°. Знайдіть висоту трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

860. Розгадайте кросворд:

По горизонталі: **5.** Давньогрецький учений. **7.** Один з видів паралелограма. **8.** Кут, вершиною якого є центр кола. **9.** Чотирикутник, у якого тільки одна пара паралельних сторін. **11.** Відношення катета, протилежного гострому куту прямокутного трикутника, до гіпотенузи. **14.** Геометрична фігура. **16.** Трикутники, кути яких рівні, а сторони пропор-



ційні. **18.** Відношення катета, прилеглого до гострого кута прямокутного трикутника, до гіпотенузи. **19.** Многокутники, які мають рівні площі. **20.** Давньогрецький математик. **22.** Прямокутник, у якого всі сторони рівні. **23.** Сума сторін многокутника. **24.** Одна з частин кола, на які поділяють його дві точки.

По вертикалі: **1.** Відношення катета, протилежного гострому куту прямокутного трикутника, до прилеглого катета. **2.** Вид чотирикутника. **3.** Сторона прямокутного трикутника. **4.** Кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло. **6.** Пряма, яка проходить через точку кола і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку. **10.** Сторона прямокутного трикутника, квадрат якої дорівнює сумі квадратів двох інших сторін. **12.** Паралелограм, у якого всі сторони рівні. **13.** Твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення. **15.** Величина. **17.** Хорда кола, яка проходить через його центр. **21.** Допоміжна теорема.

14. 18 см, 12 см, 6 см, 27 см. **15.** 10 см, 8 см, 16 см, 30 см. **20.** 1) 72°, 130°, 78°, 80°; 2) 22°, 230°, 28°, 80°. **22.** 10 см. **26.** *Указівка*. Побудуйте трикутник за двома сусідніми сторонами чотирикутника і відомим кутом між ними. Третя сторона цього трикутника є діагоналлю шуканого чотирикутника. **29.** *Указівка*. Побудуйте трикутник ABC за двома сторонами AB і BC та кутом B між ними. У трикутнику ACD відомі сторона AC, прилеглий кут CAD ($\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC$) і сума сторін AD і CD. Побудова трикутника за стороною, прилеглим кутом і сумою двох інших його сторін розглядалася в курсі геометрії 7 класу. **34.** 32°. **47.** Прямокутний. **53.** 9 см, 14 см. **57.** 6 см. **58.** 32 см. **59.** 45°, 135°. **60.** 6 см, 12 см. **64.** 80 см. **65.** 9 см, 24 см. **66.** 20 см, 24 см. **67.** 6 см. **68.** 48°, 132°. **71.** 40 см. **72.** 5 см, 9 см. **74.** 25 см. **77.** 3. **78.** 2 : 1. **79.** 72°, 108°. **82.** *Указівка*. Шукана точка є точкою перетину висот трикутника ABC. **84.** *Указівка*. Доведіть, що $\triangle MAD = \triangle DKC = \triangle MBK$. **85.** *Указівка*. Побудуйте паралелограм, одна вершина якого збігається з вершиною даного кута, дві інші вершини лежать на сторонах кута, а точка перетину діагоналей паралелограма збігається з даною точкою. **86.** 24 см або 14 см. **108.** 32°. **109.** 16 см. **119.** 6 см, 12 см. **120.** 4 см, 11 см. **121.** 15 см, 25 см. **122.** 12 см. **124.** *Указівка*. Нехай CM — медіана прямокутного трикутника ABC, проведена до гіпотенузи AB (рис. 239). На продовженні відрізка CM за точку M відкладіть відрізок MD, який дорівнює CM. Визначте вид чотирикутника $ACBD$ і скористайтеся властивостями чотирикутників такого виду. **127.** 30°, 60°. *Указівка*. Покажіть, що в прямокутному трикутнику ABM гіпотенуза AM

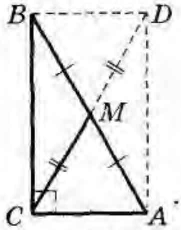


Рис. 239

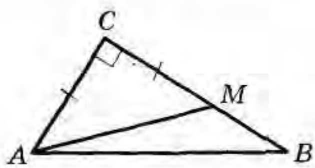


Рис. 240

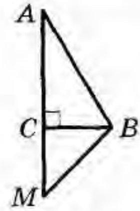


Рис. 241

у 2 рази більша за катет BM. **128.** 4,5 см. **131. 1)** *Вказівка.* Задача зводиться до побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою та різницею катетів. На рисунку 240 зображено прямокутний трикутник ACB, у якому відомі гіпотенуза AB і різниця катетів. На катеті BC позначено точку M так, що $CM = AC$, $BM = BC - AC$. Звідси $\angle AMB = 135^\circ$. Отже, можна побудувати трикутник AMB за сторонами AB і MB і кутом AMB. **132.** 48°. **133.** Якщо $\angle ABC = 90^\circ$. **134.** $\triangle ACE$ — рівнобедрений. **157.** 6 см. **160. 1)** *Вказівка.* Задача зводиться до побудови прямокутного трикутника за сумою катетів і гострим кутом. На рисунку 241 зображено прямокутний трикутник ABC, у якому відомо кут A і суму катетів AC і CB. Тоді $AM = AC + CB$, $\angle CMB = 45^\circ$. Трикутник AMB можна побудувати за стороною AM і двома прилеглими кутами. **161.** *Вказівка.* Середина O відрізка NK є точкою перетину діагоналей ромба. Тоді пряма MO паралельна сторонам BC і AD. Зазначимо, що довжина відрізка MO дорівнює половині сторони ромба. **163.** 30°, 72°, 78°; 18 см. **174.** 28 см. **177.** 48 см. **180.** *Вказівка.* Доведіть, що $AC \perp MK$. **181.** *Вказівка.* Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою MK. **182.** *Вказівка.* Побудуйте два прямокутних трикутники, у кожному з яких один катет дорівнює стороні квадрата, а гіпотенузи є даними відрізками. Доведіть рівність цих трикутників. **184.** *Вказівка.* Побудуйте рівносторонній трикутник BO_1C так, щоб точка O_1 належала квадрату. Покажіть, що $\angle O_1AD = \angle O_1DA = 15^\circ$. Звідси випливає, що точки O і O_1 збігаються. **185.** *Вказівка.* На продовженні відрізка CD за точку D позначте точку M_1 так, щоб $DM_1 = BM$. Доведіть, що $\angle EAM_1 = \angle EM_1A$. **202.** 28 см. **206.** $MK = 4$ см. *Вказівка.* Проведіть середню лінію трикутника ABC. **207.** 9 см. *Вказівка.* Розгляньте трикутник, для якого відрізок MK є середньою лінією. **210.** *Вказівка.* Нехай точки M, K і F — середини відрізків AB, AD і AC відповідно. Визначте, яким прямим належать висоти трикутника MKF. **211.** *Вказівка.* Нехай E, F і K — середини відрізків AC, BC і BD відповідно. Доведіть, що трикутник EFK рівнобедрений. **213.** 37°. **214.** 8 см. **234.** 16 см, 34 см. **236.** 16 см. **237.** 50°, 60°. **239.** 28 см. **247.** 7,2 см, 10,8 см. **249.** $2h$. **250.** 8 см, 20 см, 20 см, 20 см. **251.** 12 см, 12 см, 12 см. **252.** 60°, 120°. **253.** 8 см, 16 см. **254.** 60°, 120°. **255.** Якщо гострий кут трапеції дорівнює 45°. **260.** 7 см. **261.** 13 см, 21 см. **264.** $\frac{3a}{4}$. **265.** 72°, 108°. **266.** 8 см. *Указівка.* Проведіть через вершину C пряму, паралельну прямій BD. Нехай E — точка перетину проведеної прямої з прямою AD. Розгляньте трикутник ACE. **267.** *Указівка.* Точка перетину бісектрис є вершиною прямокутного трикутника, гіпотенузою якого є бічна сторона трапеції. Розгляньте медіану цього трикутника, проведену до гіпотенузи, і доведіть, що вона паралельна основам трапеції. **268.** 1) *Указівка.* Через одну з вершин меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні трапеції. Задача звелася до побудови трикутника за трьома сторонами. 2) *Указівка.* Через одну з вершин меншої основи проведіть пряму, паралельну діагоналі трапеції. Задача звелася до побудови трикутника за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони. **269.** *Указівка.* З'ясуйте, скільки різних трапецій можна побудувати за цією умовою. **271.** $a + b$. *Указівка.* Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма. Проведіть перпендикуляри AM, OK і CE до прямої, яка проходить через точку B, і покажіть, що $OK = \frac{a+b}{2}$. **275.** 1) 120°; 2) 120°. **297.** 60°. *Указівка.* Проведіть хорду BC і скористайтеся тим, що $\angle AMC$ — зовнішній кут трикутника BMC. **298.** 35°. *Указівка.* Проведіть хорду BC і скористайтеся тим, що $\angle ABC$ — зовнішній кут трикутника BMC. **299.** 10°. **300.** 40°, 40°, 100°. **301.** 120°, 20°, 40°. **306.** 56°, 56°, 68°. **308.** *Указівка.* Побудуйте висоти трикутника ABC, проведені з вершин A і B. **309.** *Указівка.* Через точки дотику кіл проведіть їх спільну дотичну. Скориставшись ключовою задачею п. 9, доведіть, що розглядувані хорди паралельні спільній дотичній. **310.** *Указівка.* $\angle MBD = \angle MBC + \angle CBD = \angle MBA + \angle BAC = \angle BMD$. **311.** Шукане ГМТ — дві дуги, зображені на рисунку 242, за винятком точок A і B. *Указівка.* Проведемо два променя AC і BC так, що $\angle BAC = \angle ABC = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Нехай ці промені перетинаються в точ-

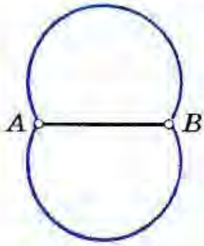


Рис. 242

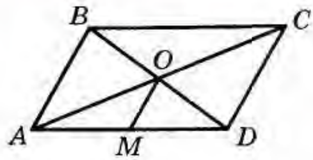


Рис. 243

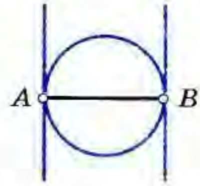


Рис. 244

ці C. Очевидно, що $\angle ACB = \alpha$. Опишемо коло навколо трикутника ABC. Виконавши аналогічну побудову в іншій півплощині відносно прямої AB, отримаємо трикутник ABC_1, навколо якого теж опишемо коло. Дуги ACB і AC_1B, за винятком точок A і B, є шуканим ГМТ. **313.** *Указівка.* Скористайтеся результатами задачі **311**. **314.** *Указівка.* Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, M — середина сторони AD (рис. 243). Тоді $OM = \frac{1}{2}AB$. Трикутник AOD можна побудувати (див. задачу **313**). **316.** Шукане ГМТ складається з двох півкіл і чотирьох променів (рис. 244), точки A і B йому не належать. **317.** *Указівка.* $\angle DCB = \angle DAB = \angle 1$ (рис. 245). Тоді $\angle OCD = \angle 1 + \angle 2$. $\angle COD = \angle 1 + \angle ACO$. Проте $\angle ACO = \angle 2$. Отже, $\angle OCD = \angle COD$. **318.** *Указівка.* Нехай відрізки AA_1 і CC_1 перетинаються в точці M. Обчисліть кут C_1MB_1, скориставшись результатами задачі **297**. **319.** *Указівка.* Побудуйте коло з центром у точці O_1 і радіусом, який дорівнює різниці радіусів даних кіл. Проведіть з точки O_2 дотичну до побудованого кола. **320.** *Указівка.* Нехай O — центр вписаного кола трикутника ABC, у якому відомі кут B і сторона AC. Доведіть, що $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$. У трикутнику AOC відомі сторона AC, кут AOC і висота, проведена з вершини O (радіус вписаного кола). Далі див. задачу **312**. **321.** *Указівка.* На рисунку 246 зображено трикутник ABC,

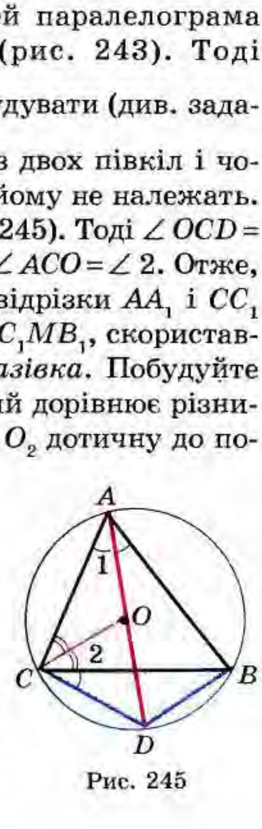


Рис. 245

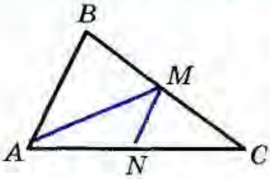


Рис. 246

у якому відомі сторона AC, кут B і медіана, проведена до сторони BC. Проведемо середню лінію MN трикутника ABC. Маємо $\angle NMC = \angle B$. Будуємо ГМТ точок X таких, що $\angle NXC = \angle B$. **322.** 9 см, 10 см, 11 см. **323.** $P_1 + P_2 + P_3$. **324.** Прямокутний або рівнобедрений. **342.** 90°. **343.** 6 см. **347.** 88°, 74°, 92°, 106°. **348.** 62°, 118°. **350.** 196 см. **351.** 6 см. **352.** 60°, 120°. **353.** $\frac{d}{2}$. *Указівка.* Доведіть, що кут між діагоналлю і більшою основою трапеції дорівнює 60°. Далі скористайтеся ключовою задачею пункту 8. **354.** 6 см. *Указівка.* Доведіть, що центр описаного кола є серединою більшої основи. **355.** *Указівка.* Опишіть коло навколо чотирикутника $CMKB$. **357.** 30°. *Указівка.* Доведіть, що навколо чотирикутника $AMOK$ можна описати коло, і скористайтеся тим, що бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. **358.** 60°. *Указівка.* Позначивши $\angle N = \alpha$, виразіть через α кут AOB. **359.** *Указівка.* Доведіть, що навколо чотирикутника $ACBO$ можна описати коло. **360.** *Указівка.* Доведіть, що кут CPB не змінює свою величину. **361.** *Указівка.* Скористайтеся тим, що в прямокутних трикутниках APK і AMQ гострі кути APQ і AMQ рівні. **362.** *Указівка.* Точки A, C, A_1 і C_1 лежать на колі з діаметром AC. Скористайтеся тим, що серединний перпендикуляр хорди проходить через центр кола. **363.** *Указівка.* Доведіть, що середня лінія даної трапеції дорівнює сумі радіусів побудованих кіл. **366.** 128°. **386.** 30 см. **388.** 12 см. **389.** 4 см. **390.** 6 см, 45°. **392.** 20 см, 24 см. **393.** 5 см, 10 см. **395.** 8 см, 12 см. **397.** 6 см, 5 см, 6 см. **398.** 15 см, 12 см, 21 см. **399.** 15 см. **402.** 45 см. **404.** 21 см, 15 см. **405.** 45 см, 18 см. **406.** 30 см, 50 см. **407.** 7 : 9. **408.** 3 : 5. **409.** 9 см. **410.** 50 см. **411.** 3 : 5. *Указівка.* Проведіть через точку K пряму, паралельну прямій AM. **412.** 1) 3 : 7. *Указівка.* Через точку M проведіть пряму, паралельну прямій BK. 2) 2 : 3. *Указівка.* Проведіть через точку K пряму, паралельну прямій CM. **413.** *Указівка.* Скористайтеся тим, що середня лінія трапеції поділяє діагональ навпіл. **415.** 2) *Указівка.*

Нехай ABC — даний кут. Проведіть $OK \parallel BC$ (K належить стороні AB). На промені KA позначте таку точку M, що $MK : KB = 2 : 3$. **416.** 3) *Указівка.* Побудуйте прямокутний трикутник BDK, у якого катет BD дорівнює даній висоті, а гіпотенуза BK — даній медіані. За заданим кутом і кутом BKD знайдіть кут між двома медіанами трикутника. 4) *Указівка.* Нехай ABC — шуканий трикутник, медіани AA_1, BB_1 і CC_1 якого перетинаються в точці M. На промені MB_1 позначте точку F так, що $MB_1 = B_1F$. Трикутник MCF можна побудувати за трьома сторонами. **417.** 2) *Указівка.* Нехай ABC — шуканий трикутник, медіани AA_1 і CC_1 якого перетинаються в точці M. Трикутник AMC можна побудувати за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони. **419.** *Указівка.* Проведіть через точку C пряму, паралельну прямій BD. Нехай проведена пряма перетинає сторону AB у точці E. Доведіть, що $BC = BE$, і скористайтеся теоремою про пропорційні відрізки. **420.** a. **421.** 11 см. **439.** 6 см. **440.** 9 см. **441.** 40 см, 60 см. **442.** 36 см. **443.** 8 см. **444.** 4,8 см. *Указівка.* Через вершину A проведіть пряму, паралельну BD. **445.** 6 см, 12 см. **446.** 36 см. **447.** 1) 30°, 30°, 120°; 2) 30°, 60°, 90°. **463.** 6 см, 30 см. **464.** 10,5 см, 13,5 см. **467.** 42 см. **468.** 10 см, 14 см. **469.** 12,5 см, 3,5 см. **471.** 12 м. **472.** 33 м. **475.** 24 см. **476.** 16 см. **477.** 16 см. **478.** 5 см. *Указівка.* Проведіть через точку P діаметр кола і скористайтеся ключовою задачею 1 пункту 13. **479.** 10 см. **480.** 27 см. **481.** 2) 36 см. **482.** 10 см. **483.** $\frac{ah}{a+h}$. **484.** 27 см, 15 см. **485.** 1) 20°, 160°; 2) 50°, 130°. **487.** 18 см. **496.** 18 см, 30 см. **497.** 50 см, 20 см. **498.** 6 см. **500.** $\frac{ab}{a+b}$. *Указівка.* Доведіть, що $\triangle KBM \backsim \triangle ABC$ з коефіцієнтом подібності $\frac{b}{a+b}$. **501.** 6 см. *Указівка.* Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle BDC$. **502.** *Указівка.* Доведіть, що $\triangle AHC \backsim \triangle ABD$ за другою ознакою подібності трикутників. Звідси $\angle ACH = \angle ABD$. **503.** *Указівка.* Доведіть, що з подібності трикутників BMC і CMK випливає подібність трикутників ABM і KAM. **505.** *Указівка.* Нехай кола перетинаються в точках E і F.

Для двох пар хорд AB і EF, CD і EF застосуйте ключову задачу 1 пункту 13. **506.** 9 см, 14 см. **508.** 10 см. **514.** 15 см, 20 см. **515.** 30 см, 24 см. **516.** $2\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см. **517.** 14,5 см. **518.** 62 см. **519.** 12,5 см. **520.** 12,8 см. **521.** 2,5 см. **522.** 196 см. *Указівка.* Доведіть, що кінці бічної сторони трапеції і центр вписаного кола є вершинами прямокутного трикутника. **523.** 18 см. **525.** 7 см, 14 см. **526.** 14 см. **527.** 74°, 74°, 74°, 138°. **542.** 13 см. **543.** 10 см. **544.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **545.** $a\sqrt{2}$. **546.** $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **547.** $\frac{c}{\sqrt{2}}$. **548.** *а)* $\sqrt{6}$ см; *б)* $\sqrt{3}$ см; *в)* $4\sqrt{2}$ см. **549.** *а)* $\sqrt{2}$ см; *б)* 1 см. **550.** $4\sqrt{5}$ см. **551.** $4\sqrt{10}$ см. **552.** $4\sqrt{13}$ см. **553.** $4\sqrt{5}$ см. **554.** 10 см, 10 см, 12 см. **555.** 40 см, 25 см, 25 см. **556.** 20 см. **557.** 20 см. **558.** 24 см. **559.** 1,5 см, 22,5 см. **560.** 8 см, 6 см, 10 см. **561.** 6 см, $2\sqrt{73}$ см. **562.** 168 см. **563.** 200 см. **564.** 20 ліктів. **565.** $8\sqrt{10}$ см. *Указівка.* Доведіть, що бічна сторона трапеції дорівнює її більшій основі. **566.** $12\sqrt{3}$ см. **567.** $2\sqrt{65}$ см. **568.** $12\sqrt{5}$ см. **569.** 128 см. *Указівка.* Скористайтеся властивістю бісектриси кута трикутника і знайдіть відношення бічної сторони до половини основи. **570.** 162 см. **571.** 54 см. **572.** $8\sqrt{10}$ см. **573.** 10 см, $4\sqrt{13}$ см, $2\sqrt{73}$ см. **574.** 26 см. **575.** $3\frac{3}{4}$ фута. **594.** 45°, 135°. **598.** 1) 1; 2) 0. **599.** 0,28; 0,96; $\frac{7}{24}$. **600.** $\frac{1}{6}$. *Указівка.* З подібності трикутників AMC і BDC випливає, що $\frac{AC}{BC}=\frac{AM}{BD}=\frac{1}{3}$. **601.** $\frac{6}{7}$. *Указівка.* Скористайтеся тим, що $\frac{KC}{AC}=\frac{BD}{AB}$. **602.** *Указівка.* З точки F опустіть перпендикуляр на відрізок ED. Знайдіть тангенси кутів E і B. **603.** 3 см. **604.** 12 см. **605.** 14 см. **617.** 2°. **618.** 65°. **621.** $2a$, $a\sqrt{3}$. **622.** a, $a\sqrt{3}$. **625.** 8 см. **626.** 16 см. **627.** 15 см. **628.** $4\sqrt{2}$ см. **629.** $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **630.** $\frac{h}{\sin\alpha}$, $\frac{h}{\cos\alpha}$, $\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}$. **631.** $a\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $\frac{a}{\cos\varphi}$,

$a\sin\varphi$. **632.** $\frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, $d\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. **633.** $\frac{2r}{\sin\alpha}$, $\frac{2r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{2r}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

634. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **635.** $\frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{2}$. **636.** $2\sqrt{3}$ см, $\sqrt{93}$ см, $\sqrt{181}$ см. **638.** $\angle A = 86°$, $\angle B = 111°$, $\angle C = 94°$, $\angle D = 69°$. **639.** 18 см, 21 см. **654.** 3) $\frac{n(n-3)}{2}$. **655.** 12 сторін, 1800°. **658.** 150°, 60°, 150°. **659.** П'ятикутник. **660.** *Указівка.* Нехай $ABCDEF$ — шестикутник, кожний кут якого дорівнює 120°. Якщо провести січну MN (рис. 247), то сума кутів п'ятикутника $ABMNF$ дорівнюватиме 540°. Тоді сума кутів BMN і FNM дорівнює 180°. **662.** 80 см. **663.** $\left(26+10\sqrt{13}\right)$ см. **664.** $3\sqrt{5}$ см.

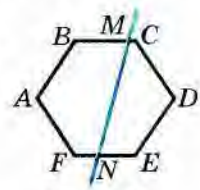


Рис. 247

674. 0,000126 Н. **675.** 12 000 Н. **676.** $d^2\sin\alpha\cos\alpha$. **677.** $75\sqrt{3}$ см². **686.** У 2 рази. **687.** Жодного, або два, або три. **688.** Жодного або два. **689.** 504 см². **690.** 30 см. **691.** *Указівка.* Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють сторонам даних квадратів. **692.** *Указівка.* Сторона шуканого квадрата $x = \sqrt{ab}$. **694.** 24 см. **695.** 2 см. **704.** 1) Два розв'язки: 4 см і 9 см; 2) один розв'язок: 8 см. **705.** 300 см². **706.** 120 см². **707.** $108\sqrt{3}$ см². **708.** $ab\sin\alpha$. **709.** $64\sqrt{3}$ см². **710.** $140\sqrt{2}$ см². **711.** 37,5 см². **712.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **714.** 72 см². **715.** 360 см². **719.** 1 : 7. **732.** $\frac{200}{3}$ см². **733.** $11\sqrt{3}$ см². **734.** 170 см². **735.** $b^2\sin\alpha\cos\alpha$. **736.** $h^2\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$. **737.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **738.** $\frac{c^2}{4}$. **739.** $\frac{120}{13}$ см. **740.** 96 см². **741.** 108 см². **742.** 768 см². **744.** 52 см. **745.** 336 см². **746.** 1080 см². **757.** *Указівка.* Урахуйте, що трикутники ABX і AXM мають спільну висоту. Цю саму властивість мають і трикутники CBX і CXM. **758.** 120 см². **759.** 20 см, $6\sqrt{10}$ см, $2\sqrt{10}$ см. **760.** 1176 см². **761.** 9,6 см². **762.** $\frac{4000}{3}$ см². *Указівка.* Скориставшись властивістю бісектриси трикутника, знайдіть відношення бічної сторони і половини основи трикутника. **763.** $\frac{4000}{3}$ см^2. **764.** 19 см^2. *Указівка.* Скористайтеся результатами задач 750 і 757. **765.** *Указівка.* Проведіть прямі AM, BM і CM та скористайтеся результатами задачі 757. **766.** *Указівка.* Проведіть медіану AM. Нехай N — така точка на стороні BC, що $AN \parallel DM$. Доведіть, що пряма DN — шукана. **768.** 78°, 78°, 24°. **769.** $2\sqrt{57}$ см. **770.** 80 см. **782.** $108\sqrt{3}$ см^2. **783.** 195 см^2. **784.** 840 см^2. **785.** 132 см^2. **786.** $600\sqrt{3}$ см^2. **787.** 1640 см^2. **788.** $(32 + 32\sqrt{2})$ см^2. **789.** 294 см^2. **793.** 512 см^2. **794.** 192 см^2. **795.** 336 см^2. *Указівка.* У даній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) через вершину C проведіть пряму CF, паралельну BD (F належить AD), і розгляньте $\triangle ACF$. **796.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. *Указівка.* Доведіть, що кут при більшій основі трапеції дорівнює 60°. **797.** 156 см^2. *Указівка.* Нехай O — центр кола, вписаного в трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Доведіть, що трикутник AOB є прямокутним, і знайдіть його висоту, проведену з вершини O. **798.** 588 см^2. **799.** 2187 см^2. *Указівка.* Доведіть, що діагональ даної трапеції є бісектрисою кута при основі. Далі скористайтеся властивістю бісектриси трикутника. **800.** 936 см^2. **801.** $\frac{S}{2}$. *Указівка.* Проведіть середню лінію MN трапеції. Доведіть, що висоти трикутників MCN і MND, проведені з вершин C і D, дорівнюють половині висоти трапеції. **802.** 15 см, 10 см. **803.** 60°, 120°. **804.** 38 см. **806.** 64 см або 74 см. **807.** 10 см, 18 см. **808.** 60°. **809.** $a - b$. **811.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) ні; 6) так; 7) так. *Указівка.* Доведіть, що точкою перетину діагоналі діляться навпіл. **812.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **813.** 30°, 150°. **814.** 40°, 70°, 70°. **815.** 45°. **816.** 18 см. **818.** 56 см. **821.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **823.** CD. **824.** 70°, 110°. **825.** 30°. **828.** 80°, 100°, 150°, 30°. **829.** 4 см, 10 см. **830.** 1 : 2. **831.** 3 : 4. **832.** 2 : 5. **833.** 9 см, 3 см, 6 см. **834.** 21 см, 35 см. **835.** 28 см, 28 см, 16 см. **837.** $\frac{ab}{a+b}$. **838.** 21 см, 15 см. **840.** 25 см. **841.** 5 см. **842.** 10 см. **843.** 36 см. **844.** $(12\sqrt{5} + 20)$ см. **845.** 18 см.

846. 24 см. **847.** $4\sqrt{29}$ см, $10\sqrt{29}$ см. **848.** $\frac{65}{18}$ см. **849.** $2\sqrt{10}$ см. **850.** 45 см. **851.** *а)* $\frac{S}{2}$; *б)* $\frac{3S}{8}$. **852.** 256 см^2. **853.** $\frac{1}{2}d^2$. **854.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **855.** $\frac{b^2}{2\operatorname{tg}\beta}$. **856.** $\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha$. **857.** $72\sqrt{3}$ см^2. **858.** 24300 см^2. **859.** 6 см.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ У ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ»

Завдання № 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б	Г	А	А	В	В	Г	А	В	В

Завдання № 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б	В	В	В	Б	В	Г	Б	Г	А

Завдання № 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В	Б	В	Б	Г	В	Б	В	Г	Б

Завдання № 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б	В	А	Г	А	Г	Г	Б	Г	В

ВІДОМОСТІ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

Найпростіші геометричні фігури та їх властивості

1. Точки і прямі

Основна властивість прямої. Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.

Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

2. Відрізок і його довжина

Точки A і B прямої a (рис. 248) обмежують частину прямої, яку разом з точками A і B називають відрізком, а точки A і B — кінцями цього відрізка.

Рис. 248

Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити.

Кожний відрізок має певну довжину.

Рівні відрізки мають рівні довжини і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.

Основна властивість довжини відрізка. Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB, то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB, тобто $AB = AC + CB$.

Якщо точка C не належить відрізку AB, то $AB < AC + CB$.

Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB.

Якщо три точки A, B і C такі, що виконується рівність $AB = AC + CB$, то точка C є внутрішньою точкою відрізка AB.

3. Промінь. Кут

Точка O прямої AB (рис. 249) розбиває пряму на дві частини, кожну з яких разом з точкою O називають променем або півпрямою. Точку O називають початком променя.

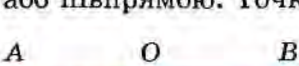


Рис. 249

Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.

Два промені OA і OB, що мають спільний початок (рис. 250), розбивають площину на дві частини, кожну з яких разом з променями OA і OB називають кутом. Промені OA і OB називають сторонами кута, а точку O — вершиною кута.

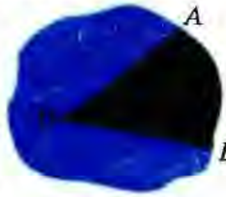


Рис. 250

Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.

Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити.

Бісектрисою кута називають промінь з початком у його вершині, який ділить цей кут на два рівних кути.

4. Вимірювання кутів

Кожний кут має певну величину (градусну міру).

Кут, градусна міра якого дорівнює 90°, називають прямим. Кут, градусна міра якого менша від 90°, називають гострим. Кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°, називають тупим.

Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.

Основна властивість величини кута. Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB (рис. 251), то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

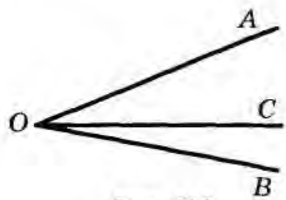


Рис. 251

5. Суміжні і вертикальні кути

Два кути називають суміжними, якщо у них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

Вертикальні кути рівні.

6. Перпендикулярні прямі. Серединний перпендикуляр

Дві прямі називають перпендикулярними, якщо при перетині вони утворюють прямі кути.

Якщо прямі a і b — перпендикулярні, то пишуть $a \perp b$ або $b \perp a$.

Неперпендикулярні прямі при перетині утворюють пару рівних гострих кутів і пару рівних тупих кутів. Величину гострого кута називають кутом між неперпендикулярними прямими.

Якщо прямі перпендикулярні, то вважають, що кут між ними дорівнює 90°.

Два відрізки називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

На рисунку 252 зображено пряму a і перпендикулярний до неї відрізок AB, кінець B якого належить прямій a. У такому випадку говорять, що з точки A на пряму a опущено перпендикуляр AB. Точку B називають основою перпендикуляра AB.

Довжину перпендикуляра AB називають відстанню від точки A до прямої a. Якщо точка A належить прямій a, то вважають, що відстань від точки A до прямої a дорівнює нулю.

Опустимо з точки A на пряму a перпендикуляр AB (рис. 253). Нехай X — довільна точка прямої a, відмінна від точки B. Відрізок AX називають похилою, проведеною з точки A до прямої a.

Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної.

Пряму, яка перпендикулярна до відрізка і проходить через його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка.

Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.

Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.

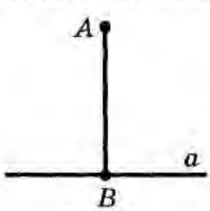


Рис. 252

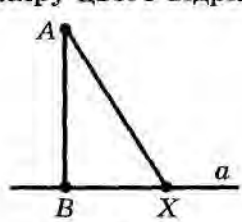


Рис. 253

Трикутники

7. Трикутник і його елементи. Рівні трикутники

Три точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, сполучено відрізками (рис. 254). Утворена фігура обмежує частину площини, яку разом з відрізками AB, BC і CA називають трикутником. Точки A, B, C називають вершинами, а відрізки AB, BC, CA — сторонами трикутника.

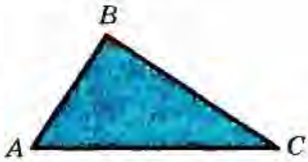


Рис. 254

Трикутник називають і позначають за його вершинами.

У трикутнику ABC, наприклад, кут B називають кутом, протилежним стороні AC, а кути A і C — кутами, прилеглими до сторони AC.

Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін.

Трикутник називають прямокутним, якщо один з його кутів прямий; тупокутним, якщо один з його кутів тупий. Якщо всі кути гострі, то трикутник називають гострокутним.

Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають гіпотенузою, а сторони, прилеглі до прямого кута, — катетами.

Нерівність трикутника. Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити.

Ті пари сторін і кутів, які суміщаються при накладанні трикутників, називають відповідними сторонами і відповідними кутами.

Основна властивість рівності трикутників. Для даного трикутника ABC існує рівний йому трикутник $A_1B_1C_1$ такий, що сторона A_1B_1 належить даному променю A_1B_1, а вершина C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої A_1B_1.

У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.

У трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони.

У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

8. Висота, медіана, бісектриса трикутника

Перпендикуляр, проведений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.

Відрізок, який сполучає вершину трикутника з серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.

Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.

9. Ознаки рівності трикутників

Перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами і кутом між ними. Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Друга ознака рівності трикутників: за стороною і двома прилеглими до неї кутами. Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами. Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

10. Рівнобедрений трикутник і його властивості. Рівносторонній трикутник

Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають рівнобедреним.

Рівні сторони трикутника називають бічними сторонами, а третю сторону — основою рівнобедреного трикутника.

Вершиною рівнобедреного трикутника називають спільну точку його бічних сторін.

У рівнобедреному трикутнику:

1) кути при основі рівні;

2) бісектриса кута при вершині є медіаною і висотою.

Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім.

У рівносторонньому трикутнику: 1) всі кути рівні; 2) бісектриса, висота і медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.

11. Ознаки рівнобедреного трикутника

Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.

Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.

Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.

Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

12. Паралельні прямі

Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.

Якщо прямі a і b паралельні, то пишуть $a \parallel b$ (читають: «прямі a і b паралельні» або «пряма a паралельна прямій b»).

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельних прямих). Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.

Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

13. Ознаки паралельності двох прямих

Якщо дві прямі a і b перетнути третьою прямою c, то утвориться вісім кутів (рис. 255). Пряму c називають січною прямих a і b.

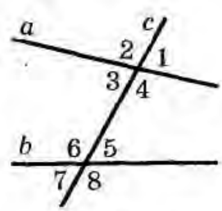


Рис. 255

Кути 3 і 6, 4 і 5 називають односторонніми.

Кути 3 і 5, 4 і 6 називають різносторонніми.

Кути 6 і 2, 5 і 1, 3 і 7, 4 і 8 називають відповідними.

Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.

Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

14. Властивості паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то:

- кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні;
- кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні;
- сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180°.

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої.

15. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.

Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Зовнішній кут трикутника більший за кожний з кутів трикутника, не суміжних з ним.

16. Ознаки рівності прямокутних трикутників

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом. Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й катету другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами. Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом. Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом. Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом. Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

17. Властивості прямокутного трикутника

У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.

Катет, який лежить проти кута, що дорівнює 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

Коло і круг

18. Геометричні місця точок

Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.

Серединний перпендикуляр відрізка є ГМТ, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

Бісектриса кута є ГМТ, які належать куту і рівновіддалені від його сторін.

19. Коло і круг та їх елементи

Колом називають геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки. Задану точку називають центром кола.

Будь-який відрізок, який сполучає точку кола з її центром, називають радіусом кола.

Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають хордою кола. Хорду, яка проходить через центр кола, називають діаметром. Діаметр кола вдвічі більший за його радіус.

Кругом називають геометричне місце точок, відстань від яких до заданої точки не більша за дане додатне число. Задану точку називають центром круга, а дане число — радіусом круга. Якщо X — довільна точка круга з центром O радіуса R, то $OX \leqslant R$.

Коло, яке обмежує круг, йому належить.

Хорда і діаметр круга — це хорда і діаметр кола, яке обмежує круг.

20. Властивості кола

Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.

Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.

21. Взаємне розміщення прямої і кола. Дотична до кола

Пряма і коло можуть не мати спільних точок, мати дві спільні точки і мати одну спільну точку.

Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

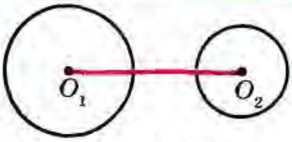
Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Якщо з даної точки до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

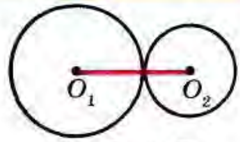
22. Взаємне розміщення двох кіл

Два кола можуть не мати спільних точок, мати одну спільну точку і мати дві спільні точки.



$d > R_1 + R_2$

Рис. 256



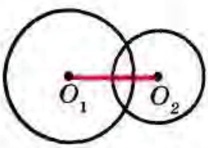
$d = R_1 + R_2$

Рис. 257

Нехай R_1 і R_2 — радіуси даних кіл, d — відстань між їх центрами.

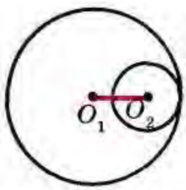
Якщо $d > R_1 + R_2$, то кола не мають спільних точок (рис. 256).

Якщо $d = R_1 + R_2$, то кола мають одну спільну точку (рис. 257).



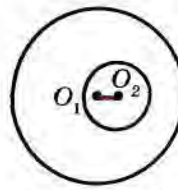
$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$

Рис. 258



$d = R_1 - R_2$

Рис. 259



$d < R_1 - R_2$

Рис. 260

Якщо $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$, то кола мають дві спільні точки (рис. 258).

Якщо $d = R_1 - R_2$, то кола мають одну спільну точку (рис. 259).

Якщо $d < R_1 - R_2$, то кола не мають спільних точок (рис. 260).

23. Описане і вписане кола трикутника

Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника.

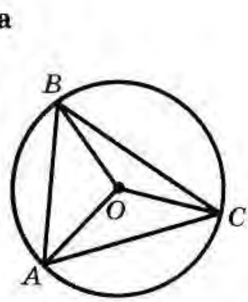


Рис. 261

На рисунку 261 зображено коло, описане навколо трикутника. У цьому випадку також говорять, що трикутник вписаний у коло.

Центр описаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його вершин.

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Центр кола, описаного навколо трикутника,— це точка перетину серединних перпендикулярів його сторін.

Серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

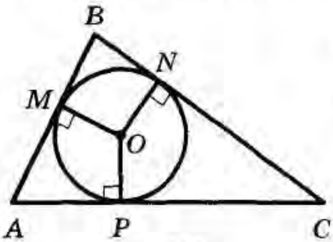


Рис. 262

На рисунку 262 зображено коло, вписане в трикутник. У цьому випадку також говорять, що трикутник описаний навколо кола.

Центр вписаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його сторін.

У будь-який трикутник можна вписати коло. Центр кола, вписаного в трикутник,— це точка перетину його бісектрис.

Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, визначається за формулою $r = \frac{a+b-c}{2}$, де r — радіус вписаного кола, a і b — катети, c — гіпотенуза.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ДОДАТОК

Таблиця значень тригонометричних функцій

Величина кута (у градусах)	Синус	Косинус	Тангенс	Величина кута (у градусах)	Синус	Косинус	Тангенс
0	0,000	1,000	0,000	46	0,719	0,695	1,036
1	0,017	1,000	0,017	47	0,731	0,682	1,072
2	0,035	0,999	0,035	48	0,743	0,669	1,111
3	0,052	0,999	0,052	49	0,755	0,656	1,150
4	0,070	0,998	0,070	50	0,766	0,643	1,192
5	0,087	0,996	0,087	51	0,777	0,629	1,235
6	0,105	0,995	0,105	52	0,788	0,616	1,280
7	0,122	0,993	0,123	53	0,799	0,602	1,327
8	0,139	0,990	0,141	54	0,809	0,588	1,376
9	0,156	0,988	0,158	55	0,819	0,574	1,428
10	0,174	0,985	0,176	56	0,829	0,559	1,483
11	0,191	0,982	0,194	57	0,839	0,545	1,540
12	0,208	0,978	0,213	58	0,848	0,530	1,600
13	0,225	0,974	0,231	59	0,857	0,515	1,664
14	0,242	0,970	0,249	60	0,866	0,500	1,732
15	0,259	0,966	0,268	61	0,875	0,485	1,804
16	0,276	0,961	0,287	62	0,883	0,469	1,881
17	0,292	0,956	0,306	63	0,891	0,454	1,963
18	0,309	0,951	0,335	64	0,899	0,438	2,050
19	0,326	0,946	0,344	65	0,906	0,423	2,145
20	0,342	0,940	0,364	66	0,914	0,407	2,246
21	0,358	0,934	0,384	67	0,921	0,391	2,356
22	0,375	0,927	0,404	68	0,927	0,375	2,475
23	0,391	0,921	0,424	69	0,934	0,358	2,605
24	0,407	0,914	0,445	70	0,940	0,342	2,747
25	0,423	0,906	0,466	71	0,946	0,326	2,904
26	0,438	0,899	0,488	72	0,951	0,309	3,078
27	0,454	0,891	0,510	73	0,956	0,292	3,271
28	0,469	0,883	0,532	74	0,961	0,276	3,487
29	0,485	0,875	0,554	75	0,966	0,259	3,732
30	0,500	0,866	0,577	76	0,970	0,242	4,011
31	0,515	0,857	0,601	77	0,974	0,225	4,331
32	0,530	0,848	0,625	78	0,978	0,208	4,705
33	0,545	0,839	0,649	79	0,982	0,191	5,145
34	0,559	0,829	0,675	80	0,985	0,174	5,671
35	0,574	0,819	0,700	81	0,988	0,156	6,314
36	0,588	0,809	0,727	82	0,990	0,139	7,115
37	0,602	0,799	0,754	83	0,993	0,122	8,144
38	0,616	0,788	0,781	84	0,995	0,105	9,514
39	0,629	0,777	0,810	85	0,996	0,087	11,430
40	0,643	0,766	0,839	86	0,998	0,070	14,301
41	0,656	0,755	0,869	87	0,999	0,052	19,081
42	0,669	0,743	0,900	88	0,999	0,035	28,636
43	0,682	0,731	0,933	89	1,000	0,017	57,290
44	0,695	0,719	0,966	90	1,000	0,000	
45	0,707	0,707	1,000				

ЗМІСТ

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

*Підручник для 8 класу
загальноосвітніх навчальних закладів*

Для середнього шкільного віку

Редактор Г. Ф. Висоцька
Художній редактор С. Е. Кулініч
Комп`ютерна верстка О. О. Удалов
Коректор Т. Є. Цента

Свідотство ДК №644 від 25.11.2001 р.
Підписано до друку *06.10.2009* р. Формат *60x90/16*
Гарнітура «Шкільна». Друк офсетний. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 13. Наклад 5000 прим. Зам. №411

Видавництво ТОВ ТО *«Гімназія»*
61052, м. Харків, вул. Восьмого Березня, 31, 8(057)758-83-93

Віддруковано з готових позитивів
у друкарні ПП «Модем»
Україна, м. Харків, 8(057)758-15-80

Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.

М52 Геометрія: Підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів.— Х.: Гімназія, 2009.— 208 с.

ISBN 978-966-474-008-8.

УДК 373:513

ББК 22.151.0я721