А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

9

АЛГЕБРА

Підручник для класів з поглибленим вивченням математики

Гімназія

УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(Лист від 19.06.2009 р. № 1/11-4350)

Відповідальний за випуск
Головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України
Н. С. Прокопенко

ISBN 978-966-474-059-0

Від авторів

ЛЮБІ ДЕВ'ЯТИКЛАСНИКИ!

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях навчатися в математичному класі. У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за поглибленою програмою. Ми сподіваємося, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на шість параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, синім кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^* задачі для математичних гуртків і факультативів;

 задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

n (m) задача, яка пропонується в різних пунктах для розв'язування різними способами (номер m вказує місцезнаходження цієї задачі в іншому пункті);

▲ закінчення доведення теореми;

 рубрика «Коли зроблено уроки».

§ 1. ПОВТОРЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ АЛГЕБРИ 8 КЛАСУ

1. Задачі на повторення курсу алгебри 8 класу

1.1. Які множини є рівними:

1) $A = \{x \mid x = 5n - 1, n \in \mathbb{Z}\}$;
2) $B = \{x \mid x = 10n + 9, n \in \mathbb{Z}\}$;
3) $C = \{x \mid x = 5n + 4, n \in \mathbb{Z}\}$;
4) $D = \{x \mid x = 10n - 1, n \in \mathbb{Z}\}$?

1.2. Яка множина є перетином множин A і B, якщо A — множина прямокутників, B — множина описаних чотирикутників?

1.3. Яка множина є перетином множин A і B, якщо A — множина ромбів, B — множина вписаних чотирикутників?

1.4. Яка множина є об'єднанням множин A і B, якщо $A = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$?

1.5. Яка множина є об'єднанням множин A і B, якщо $A = \{x \mid x = 6n, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 6n - 3, n \in \mathbb{Z}\}$?

1.6. Замість знака * запишіть знак $\cup$ або $\cap$ так, щоб утворилася правильна рівність:

1) $A * \varnothing = A$;
2) $A * \varnothing = \varnothing$.

1.7. Відомо, що $A \subset B$. Замість знака * запишіть знак $\cup$ або $\cap$ так, щоб утворилася правильна рівність:

1) $A * B = B$;
2) $A * B = A$.

1.8. Використовуючи діаграми Ейлера, проілюструйте такі властивості операцій над множинами:

1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.9. Використовуючи діаграми Ейлера, проілюструйте такі властивості операцій над множинами:

1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.10. У класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 — гурток з фізики, а 10 учнів не відвідують ці гуртки. Скільки фізиків захоплюються математикою?

1.11. Квадрату, площа якого дорівнює 6 см^2, належать три многокутники, площа кожного з яких дорівнює 3 см^2. Доведіть, що серед цих многокутників знайдуться два, площа спільної частини яких не менша ніж 1 см^2.

1.12. Яких п'ятицифрових чисел більше: тих, у яких цифри записано у порядку зростання, чи тих, у яких цифри записано у порядку спадання?

1.13. Знайдіть область визначення виразу:

1) $\dfrac{1}{2x^2 - x - 1}$; 2) $\dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x-1}}$; 3) $\dfrac{x+1}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x+1}}$.

1.14. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{9x^2 - 6x + 1}{3x - 1}$; 2) $y = \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2}$; 3) $y = \dfrac{x - 1}{|x - 1| + 1 - x}$.

1.15. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 4x + 3}$; 3) $\dfrac{a^4 + 9a^2 + 25}{a^2 + a + 5}$;

2) $\dfrac{9x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3x^2 - 2x - 1}$; 4) $\dfrac{x^{71} + x^{70} + \ldots + x + 1}{x^{23} + x^{22} + \ldots + x + 1}$.

1.16. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких є цілим числом значення виразу:

1) $\dfrac{2n + 11}{n + 3}$; 2) $\dfrac{n^3 - 3n^2 + 2n - 3}{n^2 + 2}$.

1.17. Спростіть вираз:

$$\frac{1}{x(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+12)} + \frac{1}{(x+12)(x+16)}.$$

1.18. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{2x}{1 - 3y} + \dfrac{2x}{3y + 1}\right) : \dfrac{4x^2 + 14x}{9y^2 + 1 - 6y}$;

2) $\dfrac{x^3 - y^3}{2y}\left(\dfrac{2y}{4 - 2y - 2x + xy} + \dfrac{2xy + 4y}{(x - y)(x^2 - 4)}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right):\frac{(a+b)^2}{ab}$;

4) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$.

1.19. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{x^2}{x-y}-y\right)\cdot\left(x+\frac{y^2}{x+y}\right)^{-1}$;

2) $\left(\frac{a}{8}+\frac{1}{6a}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{a+2}{12a}\right)^{-1}\cdot(3a+2)^{-1}$;

3) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)^{-1}\left(\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{x}{x-y}\right)^{-2}$;

4) $\left(\frac{x+9}{x+7}\right)^{-1}+\left(\frac{x+7}{x^2+81-18x}+\frac{x+5}{x^2-81}\right)\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^{-2}$.

1.20. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases}\frac{3x-1}{4}+\frac{x+1}{3}\geqslant\frac{4x+1}{4},\\ \frac{5x-2}{2}+\frac{x-8}{3}\leqslant x;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{2x}{3}-1<1+4x,\\ 3x-6>-2(1-x),\\ 3(2x-1)>1-2x.\end{cases}$

1.21. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $ax+2>x$;

2) $ax+a^2\geqslant 2x+4$.

1.22. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+1)^2(x-2)\geqslant 0$;

2) $(x+1)(x-2)^2>0$;

3) $|x^2-4|(x-1)\geqslant 0$;

4) $|x^2-9|(x+2)<0$.

1.23. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $|x^2-4x+3|(x-a)\geqslant 0$;

2) $|x^2+3x+2|(x-a)<0$.

1.24. Розв'яжіть рівняння:

1) $||x-1|-1|=2$;

2) $|2x-1|=x+2$;

3) $|3x-2|=|2x-3|$;

4) $|x-4|+|x+1|=5$;

5) $|x+2|-|x-1|=3$;

6) $\frac{|x+1|-|x-1|}{x}=1$.

1.25. Розв'яжіть нерівність:

1) $|3x-4|<2$;

2) $|x-2|<-2x$;

3) $|4x+5|>x+8$;

4) $|x|-|x-3|\leqslant 2x$.

1.26. Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x+2}$;

2) $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2}{x^2 - 1}$;

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 2, \\ \frac{1}{2}x + 3, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

1.27. Побудуйте графік рівняння:

1) $\dfrac{y - x^2}{x^2 - x} = 0$; 2) $\dfrac{y + x^2}{y + x} = 0$; 3) $\dfrac{y^2 - x^4}{x^2 - 1} = 0$.

1.28. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$;

2) $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 2} = 0$;

3) $(x^2 + 3x - 4)\left(\sqrt{x} - 2\right) = 0$.

1.29. Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння:

1) $\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{y - 2} = 0$;

2) $\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{y^2 - y - 2} = 0$;

3) $\sqrt{x + y} + \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = 0$.

1.30. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $(a - 1)\sqrt{x - 3} = 0$;

2) $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - a} = 0$;

3) $(x^2 + 4x - 5)\left(\sqrt{x} - a\right) = 0$.

1.31. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$;

2) $\sqrt{43 + 6\sqrt{50}} - \sqrt{43 - 6\sqrt{50}}$;

3) $\sqrt{6 - \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}}$;

4) $\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$.

1.32. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a - 2 + 2\sqrt{a - 3}}$;

2) $\sqrt{2x - 2\sqrt{x^2 - 4}}$, якщо $x > 2$;

3) $\sqrt{2a - 4 + 2\sqrt{a^2 - 4a + 3}} - \sqrt{a - 1}$;

4) $\dfrac{\sqrt{x + 3 + 2\sqrt{x + 2}} - 1}{\sqrt{x + 2}}$.

1.33. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)(a - b)} + \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \dfrac{\sqrt{ab}}{a - b}$;

2) $a : \left(\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right) + b : \left(\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)$;

3) $\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$;

4) $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}$.

1.34. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - x - 5 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; 3) $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$.

1.35. Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 більші за відповідні корені рівняння $x^2 + 4x - 7 = 0$.

1.36. При яких значеннях параметра a сума коренів рівняння $x^2 - (a^2 + 2a)x - a = 0$ дорівнює 3?

1.37. При яких значеннях параметра a добуток коренів рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ дорівнює 2?

1.38. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{9-6x+x^2}=\frac{3}{2x^2+6x}$;

2) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}$;

3) $\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2$.

1.39. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 1)(x - 7)(x - 4)(x + 2) = 40$;

2) $(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5$;

3) $(x + 6)(x + 3)(x - 1)(x - 2) = 12x^2$;

4) $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$;

5) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$;

6) $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$;

7) $(x + 5)^4 + (x + 3)^4 = 2$;

8) $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=7$.

1.40. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні n значення виразу $n(n + 1)(2n + 1)$ кратне 6.

1.41. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ є натуральним числом.

1.42. Чи існують такі натуральні числа n і k, що значення виразу $5^n + 1$ кратне значенню виразу $5^k - 1$?

1.43. Натуральне число $n > 1$ не ділиться націло ні на 2, ні на 3. Доведіть, що число $n^2 - 1$ кратне 24.

1.44. Доведіть, що не існує такого натурального числа p, для якого числа $p + 5$ і $p + 10$ є простими.

1.45. Знайдіть усі пари натуральних чисел $(m; n)$ таких, що $m! + 12 = n^2$.

1.46. Знайдіть усі двоцифрові натуральні числа, будь-який натуральний степінь яких закінчується двома цифрами, що утворюють це двоцифрове число.

1.47. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях n дріб $\frac{2n^2 + 5n + 3}{3n^2 + 10n + 8}$ є нескоротним.

1.48. Квадратний тричлен $x^2 + ax + b$ має цілі корені, більші за 2. Доведіть, що число $a + b + 1$ — складене.

1.49. Остання цифра десяткового запису числа $n^2 + 8n$ дорівнює 4. Яка передостання цифра в записі цього числа?

§ 2. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

2. Основні методи доведення нерівностей

Очевидно, що нерівності $a^2 \geqslant 0$, $-a^2 - 1 < 0$, $|a| + |b| \geqslant 0$, $(a - b)^4 \geqslant 0$ виконуються *при всіх значеннях змінних*, які до них входять.

Нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$ також виконується при будь-яких значеннях змінних x і y, хоча цей факт не настільки очевидний. У його справедливості слід переконатися.

У таких випадках говорять, що потрібно **довести нерівність** $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$.

Маємо:

$$x^2 - 8xy + 17y^2 = x^2 - 8xy + 16y^2 + y^2 = (x - 4y)^2 + y^2.$$

Вираз $(x - 4y)^2 + y^2$ набуває тільки невід'ємних значень. Отже, при будь-яких значеннях змінних x і y є правильною нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$.

Для доведення нерівностей використовують різні прийоми. Наприклад, нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$ ми довели, виділивши квадрат двочлена. Розглянемо ще кілька прийомів доведення нерівностей.

Метод різниці

Цей прийом полягає в тому, що розглядають різницю лівої та правої частин нерівності і доводять, що ця різниця набуває значень постійного знака при будь-яких значеннях змінних.

ПРИКЛАД 1 Доведіть нерівність: $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 \geqslant 6ab$.

Розв'язання. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 - 6ab = a^2b^2 - 4ab + 4 + a^2 - 2ab + b^2 =$$
$$= (ab - 2)^2 + (a - b)^2.$$

При будь-яких значеннях a і b ця різниця набуває тільки невід'ємних значень, отже, нерівність, що доводиться, є правильною.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що коли $a > b > c$, то

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} - (a + 2b + c) = \left(\frac{a^2}{a-b} - (a+b)\right) + \left(\frac{b^2}{b-c} - (b+c)\right) = \frac{b^2}{a-b} + \frac{c^2}{b-c}.$$

Оскільки з умови $a > b > c$ випливає, що $a - b > 0$, $b - c > 0$ і $b^2 + c^2 \neq 0$, то $\frac{b^2}{a-b} + \frac{c^2}{b-c} > 0$.

Метод спрощення нерівності

У ряді випадків спрощення виразів, які утворюють нерівність, робить цю нерівність очевидною.

ПРИКЛАД 3 Доведіть нерівність:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Нерівність, що доводиться, набуває вигляду $1 - \frac{1}{n+1} < 1$ і стає очевидною.

Метод, у якому застосовуються міркування «від супротивного»

ПРИКЛАД 4 Доведіть нерівність:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{b + \sqrt{a}} \geqslant \sqrt{a + \sqrt{a}} \cdot \sqrt{b + \sqrt{b}}.$$

Розв'язання. Нехай нерівність, що доводиться, є неправильною, тобто існують такі значення a і b, при яких є правильною нерівність $\sqrt{a + \sqrt{b}} \cdot \sqrt{b + \sqrt{a}} < \sqrt{a + \sqrt{a}} \cdot \sqrt{b + \sqrt{b}}$. Звідси:

$$\left(a + \sqrt{b}\right)\left(b + \sqrt{a}\right) < \left(a + \sqrt{a}\right)\left(b + \sqrt{b}\right);$$

$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} < a\sqrt{b} + b\sqrt{a};$$

$$(a - b)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) < 0.$$

Остання нерівність є неправильною, оскільки при $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$ різниці $a - b$ і $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ мають однакові знаки або дорівнюють нулю. Отримана суперечність означає, що задана нерівність є правильною.

Метод застосування очевидної нерівності

Цей прийом полягає в такому: задану нерівність отримують у результаті перетворення очевидної нерівності чи додавання або множення кількох очевидних нерівностей.

ПРИКЛАД 5 Доведіть нерівність:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

Розв'язання. Очевидно, що при будь-яких значеннях a, b і c виконується така нерівність:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0.$$

Звідси $a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geqslant 0$;

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

Розв'язання. Для невід'ємних значень a, b і c виконуються такі три очевидні нерівності:

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0,$$

$$\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)^2 \geqslant 0,$$

$$\left(\sqrt{c} - \sqrt{a}\right)^2 \geqslant 0.$$

Звідси

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab},$$

$$b + c \geqslant 2\sqrt{bc},$$

$$c + a \geqslant 2\sqrt{ca}.$$

Оскільки обидві частини кожної з цих нерівностей набувають невід'ємних значень, то можна застосувати теорему про почленне множення нерівностей. Маємо:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2}.$$

Оскільки $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2b^2c^2} = abc$.

Отримуємо, що $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$.

ПРИКЛАД 7 Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, виконується нерівність:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Оскільки з двох звичайних дробів з однаковими чисельниками більшим є той, у якого знаменник менший, то можна записати n очевидних нерівностей:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n};$$

$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n};$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Застосовуючи теорему про почленне додавання нерівностей, отримаємо:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ доданків}}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Метод застосування раніше доведеної нерівності

Нерідко раніше доведена нерівність може бути використана для доведення іншої, більш складної нерівності.

Застосування нерівності $a^2+b^2\geqslant 2ab$

ПРИКЛАД 8 Доведіть, що коли $a>0$, $b>0$ і $c>0$, то

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}\leqslant\frac{a+b}{2ab}=\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a};$$

$$\frac{b+c}{b^2+c^2}\leqslant\frac{b+c}{2bc}=\frac{1}{2c}+\frac{1}{2b};$$

$$\frac{c+a}{c^2+a^2}\leqslant\frac{c+a}{2ca}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}.$$

Звідси

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\leqslant\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Застосування нерівності $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$

ПРИКЛАД 9 Доведіть нерівність $a^4+b^4+c^4\geqslant abc\,(a+b+c)$.

Розв'язання. Маємо:

$$a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2\geqslant a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=$$
$$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geqslant(ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)=$$
$$=ab^2c+bc^2a+ca^2b=abc\,(a+b+c).$$

2.1.° Доведіть, що при будь-якому значенні змінної є правильною нерівність:

1) $(y+5)(y-2)\geqslant 3y-10$;
3) $a\,(a-2)\geqslant -1$;
2) $8m^2-6m+1\leqslant(3m-1)^2$;
4) $(b+7)^2>14b+40$.

2.2.° Доведіть нерівність:

1) $(2a-5)^2\leqslant 6a^2-20a+25$;
2) $a^2+4\geqslant 4a$.

2.3.° Доведіть нерівність:

1) $2a^2-8a+16>0$;
2) $4b^2+4b+3>0$;
3) $a^2+ab+b^2\geqslant 0$;
4) $9x^2-6xy+5y^2\geqslant 0$;
5) $(3a+2)(2a-4)-(2a-5)^2>3\,(4a-12)$;

6) $a(a-3) > 5(a-4)$;
7) $(a-b)(a+5b) \leqslant (2a+b)(a+4b)+ab$.

2.4.° Доведіть нерівність:
1) $28a - 32 \leqslant 7a^2 - 4$;
2) $16x^2 - 8xy + 2y^2 \geqslant 0$;
3) $3(b-1) < b(b+1)$;
4) $(4p-1)(p+1)-(p-3)(p+3) > 3(p^2+p)$.

2.5.° Доведіть, що:
1) коли $a \geqslant 6$, то $a^3 - 6a^2 + a - 6 \geqslant 0$;
2) коли $a \geqslant b$, то $ab(b-a) \leqslant a^3 - b^3$.

2.6.° Доведіть, що коли $x \geqslant 4$, то $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 \geqslant 0$.

2.7.° Доведіть, що при всіх значеннях змінної є правильною нерівність $\dfrac{a^2}{a^4+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2.8.° Доведіть, що коли $a < b$, то $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

2.9.° Доведіть, що коли $a < b < c$, то $a < \dfrac{a+b+c}{3} < c$.

2.10.° Доведіть, що при всіх значеннях змінних є правильною нерівність:
1) $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 \geqslant 0$;
2) $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 28 > 0$;
3) $2m^2 - 6mn + 9n^2 - 6m + 9 \geqslant 0$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geqslant 4(a+b+c)$;
5) $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geqslant 4ab$;
6) $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b+c)$.

2.11.° Доведіть, що при всіх значеннях змінних є правильною нерівність:
1) $a^2 + b^2 - 16a + 14b + 114 > 0$;
2) $x^2 + y^2 + 10 \geqslant 6x - 2y$;
3) $c^2 + 5d^2 + 4cd - 4d + 4 \geqslant 0$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(a+b+c) - 3$.

2.12.° Доведіть, що коли $a \in [0; 1]$, то $a \geqslant a^2$.

2.13.° Доведіть, що коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + b^2a$.

2.14.° Доведіть нерівність $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + b^3a$.

2.15.° Доведіть, що:
1) коли $0 < a < b$, $k > 0$, то $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+k}{b+k}$;
2) коли $a \geqslant b > 0$, $k > 0$, то $\dfrac{a}{b} \geqslant \dfrac{a+k}{b+k}$.

2.16.* Доведіть, що при будь-яких значеннях x, y і z хоча б один з виразів $x^2 + 2xy + z^2$, $y^2 + 2yz + x^2$, $z^3 + 2zx + y^2$ набуває невід'ємних значень.

2.17.* Доведіть, що:
1) коли $x \leqslant 1$ і $y \leqslant 1$, то $xy + 1 \geqslant x + y$;
2) коли $x \geqslant 1$ і $y \geqslant 1$, то $xy + 1 \geqslant x + y$.

2.18.* Доведіть, що:
1) $\frac{a^2}{b} \geqslant 2a - b$, де $b > 0$; 2) $\frac{a^3}{b^2} \geqslant 3a - 2b$, де $a > 0$, $b > 0$.

2.19.* Доведіть, що коли $x > 0$ і $y > 0$, то $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \geqslant \frac{x + y}{2}$.

2.20.* Доведіть нерівність $a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant a^n b + b^n a$, де n — непарне натуральне число.

2.21.* Для $a > 0$, $b > 0$ доведіть нерівність $a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant$ $\geqslant a^n b + b^n a$, де n — парне натуральне число.

2.22.* Доведіть, що при $b > 0$ виконується нерівність $\frac{a^3}{a^2 + b^2} \geqslant a - \frac{b}{2}$.

2.23.* Доведіть, що при $a > 0$ і $b > 0$ виконується нерівність $\frac{a}{b + 2a} + \frac{b}{a + 2b} \leqslant \frac{2}{3}$.

2.24.* Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$, то $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqslant \frac{(a + b)^2}{x + y}$.

2.25.* Відомо, що $x \in [0; 1]$ і $y \in [0; 1]$. Доведіть, що

$$\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} \leqslant \frac{2}{1 + xy}.$$

2.26.* Доведіть нерівність $a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 \geqslant 0$.

2.27.* Доведіть нерівність $x^8 + x^6 - 2x^3 + x^2 + 1 > 0$.

2.28.* Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ і $d \geqslant 0$, то $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

2.29.* Доведіть, що при $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність:
1) $2\sqrt{n} - 2\sqrt{n - 1} > \frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $2\sqrt{n + 1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2.30.* Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \geqslant \frac{3}{a + b + c}.$$

2.31.* Доведіть, що коли $x \in [0; 1]$ і $y \in [0; 1]$, то

$$\frac{x}{1 + y} + \frac{y}{1 + x} \leqslant 1.$$

2.32.° Доведіть, що коли $a > 0$ і $b > 0$, то $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{a+b}{1+a+b}$.

2.33.° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1.$$

2.34.° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2.$$

2.35.° Доведіть нерівність $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd$.

2.36.° Доведіть нерівність $(a^4b^4 + 36)(4a^4 + 9b^4) \geqslant 144a^4b^4$.

2.37.° Доведіть, що коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $a(1 + b^2) + b(1 + a^2) \geqslant 4ab$.

2.38.° Доведіть нерівність $x^4 + 4y^4 + 5 \geqslant 8xy$.

2.39.° Доведіть, що коли $y \geqslant 0$, то $x^4 + 4y^3 + y + 2x^2 + 1 \geqslant 8xy$.

2.40.° Доведіть, що коли $b \geqslant 0$, то $a^4 + b^3 + b + 1 \geqslant 4ab$.

2.41.° Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + 1 \geqslant ab + b + a$.

2.42.° Доведіть нерівність $4a^2 + b^2 + 1 \geqslant 2ab + 2a + b$.

2.43.° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

2.44.° Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то

$$a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

2.45.° Доведіть нерівність $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \geqslant \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$.

2.46.° Доведіть нерівність $\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

2.47.° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a + b + c.$$

2.48.°° Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Доведіть, що

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leqslant 3.$$

2.49.°° Відомо, що $xy \geqslant 2$. Доведіть, що $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 \geqslant 8$.

2.50.°° Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + ab \geqslant 3(a + b - 1)$.

2.51.°° Доведіть, що при будь-яких значеннях a, b і c хоча б одна з нерівностей $a - b^2 \leqslant \frac{1}{4}$, $b - c^2 \leqslant \frac{1}{4}$, $c - a^2 \leqslant \frac{1}{4}$ є правильною.

2.52.°° Доведіть, що при будь-яких додатних значеннях a, b і c хоча б одна з нерівностей $a(1 - b) \leqslant \frac{1}{4}$, $b(1 - c) \leqslant \frac{1}{4}$, $c(1 - a) \leqslant \frac{1}{4}$ є правильною.

2.53.** Доведіть, що коли $x > 0$ і $y > 0$, то $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}$.

2.54.** Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то

$$\frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2xz} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \geqslant 1.$$

2.55.** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, то

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{c^2 + a^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

2.56.** Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $ab + bc + ac \geqslant a + b + c$. Доведіть, що $a + b + c \geqslant 3$.

2.57.** Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $ab \geqslant a + b$. Доведіть, що $a + b \geqslant 4$.

2.58.** Доведіть, що коли $x \in [0; 1]$ і $y \in [0; 1]$, то

$$(x + y + 1)^2 \geqslant 4(x^2 + y^2).$$

2.59.** Доведіть нерівність $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2$, де $n \in \mathbb{N}$.

2.60.* Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ і $xyz = 1$, то

$$\frac{xy^2}{x^3 + 2} + \frac{yz^2}{y^3 + 2} + \frac{zx^2}{z^3 + 2} \geqslant 1.$$

2.61.* Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant (a + b + c + d)\,e$.

2.62.* Доведіть нерівність $(n!)^2 \geqslant n^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

2.63.* Доведіть нерівність $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} < 1$, де $n \in \mathbb{N}$.

2.64.* Доведіть нерівність $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! < (n + 1)!$, де $n \in \mathbb{N}$.

2.65.* Доведіть нерівність $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} < 1$, де $n \in \mathbb{N}$.

2.66.* Доведіть нерівність $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, де $n \in \mathbb{N}$.

2.67.* Доведіть нерівність $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

2.68.* Доведіть нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n}} > \frac{\sqrt{2n+1} - 1}{2}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

2.69.* Доведіть нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n}} < \frac{\sqrt{2n}}{2}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

3. Нерівності між середніми величинами. Нерівність Коші—Буняковського

Значення виразів $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ називають відповідно середнім квадратичним, середнім арифметичним, середнім геометричним, середнім гармонічним чисел a і b.

Ці величини називають «середніми», оскільки при $0 < a \leqslant b$ виконуються нерівності:

$$a \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant b,\ \ a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b,\ \ a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b,\ \ a \leqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant b.$$

Зв'язок між «середніми» виражають такі три теореми.

Теорема 3.1. ***При будь-яких значеннях a і b виконується нерівність***

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}. \qquad (*)$$

Доведення. Маємо:

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab;$$

$$2a^2 + 2b^2 \geqslant 2ab + a^2 + b^2;$$

$$2a^2 + 2b^2 \geqslant (a + b)^2;$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4};$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}};$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{|a+b|}{2}.$$

Оскільки $|a + b| \geqslant a + b$, то $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$. ▲

Зауважимо, що в нерівності (*) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a \geqslant 0$. Доведіть цей факт самостійно.

Теорема 3.2 (нерівність Коші для двох чисел). ***При будь-яких невід'ємних значеннях a і b виконується нерівність***

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \qquad (**)$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

При будь-яких невід'ємних значеннях a і b ця різниця набуває невід'ємних значень. Отже, нерівність, що доводиться, є правильною. ▲

Зауважимо, що в нерівності (**) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a \geqslant 0$. Доведіть цей факт самостійно.

Наслідок. ***Якщо $a > 0$, то $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$, причому $a+\frac{1}{a}=2$ тоді й тільки тоді, коли $a = 1$.***

Доведення. До додатних чисел a і $\frac{1}{a}$ застосуємо нерівність Коші:

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\geqslant\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=1.\text{ Звідси } a+\frac{1}{a}\geqslant 2.$$

Рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a=\frac{1}{a}$. З урахуванням того, що $a > 0$, отримуємо $a = 1$. ▲

При розв'язуванні цілої низки задач у попередньому пункті, а також при доведенні теореми 3.1 ми використовували нерівність $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Цю нерівність також можна розглядати як наслідок з нерівності Коші. Справді, оскільки $a^2 \geqslant 0$ і $b^2 \geqslant 0$, то можна записати

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\sqrt{a^2b^2}.\text{ Звідси } a^2+b^2\geqslant 2\sqrt{a^2b^2}=2|ab|\geqslant 2ab.$$

Теорема 3.3. ***Якщо $ab > 0$, то***

$$\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \qquad (***)$$

Доведення. Якщо $a < 0$ і $b < 0$, то $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}<0$ і $\sqrt{ab}>0$. У цьому разі нерівність, що доводиться, стає очевидною.

Нехай $a > 0$ і $b > 0$. Застосуємо нерівність Коші до додатних чисел $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Оскільки обидві частини цієї нерівності при $a > 0$ і $b > 0$ набувають додатних значень, то справедливою є така нерівність:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab}. \ \blacktriangle$$

Зауважимо, що в нерівності (***) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a > 0$. Доведіть цей факт самостійно.

Теореми 3.1–3.3 дозволяють дійти висновку, що **при $a > 0$ і $b > 0$ є справедливим такий ланцюжок нерівностей:**

$$\boxed{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}$$

Проілюструємо застосування теорем 3.1–3.3 на прикладах.

ПРИКЛАД 1 Доведіть нерівність

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2} \geqslant \sqrt{2}.$$

Розв'язання. Скориставшись нерівністю (*), можна записати:

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{x^2+(1-y)^2}{2}} \geqslant \sqrt{2}\cdot\frac{x+1-y}{2};$$

$$\sqrt{(1-x)^2+y^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{(1-x)^2+y^2}{2}} \geqslant \sqrt{2}\cdot\frac{1-x+y}{2}.$$

Звідси

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2} \geqslant \sqrt{2}\left(\frac{x+1-y}{2}+\frac{1-x+y}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що коли $a > 0$ і $b > 0$, то

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4.$$

Розв'язання. Застосовуючи нерівність Коші, можна записати:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$\frac{b+\frac{1}{a}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Звідси $a+\frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}$, $b+\frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}$. Тоді

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}} = 4.$$

ПРИКЛАД 3 Знайдіть найбільше значення виразу ab, якщо відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $2a + b = 3$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{3}{2} = \frac{2a+b}{2} \geqslant \sqrt{2ab}$. Звідси $\sqrt{2ab} \leqslant \frac{3}{2}$; $ab \leqslant \frac{9}{8}$.

Остання нерівність ще не дозволяє зробити висновок, що найбільше значення виразу ab дорівнює $\frac{9}{8}$. Необхідно також показати, що існують такі значення a і b, при яких $ab = \frac{9}{8}$.

У записаній нерівності Коші для чисел $2a$ і b рівність досягається лише тоді, коли $2a = b$. Тепер потрібні значення a і b можна знайти, розв'язавши систему

$$\begin{cases} 2a = b, \\ 2a + b = 3. \end{cases}$$

Звідси $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{2}$.

Отже, найбільше значення виразу ab дорівнює $\frac{9}{8}$.

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Розв'язання. Маємо: $\frac{a^4}{bc} + bc \geqslant 2\sqrt{\frac{a^4}{bc} \cdot bc} = 2a^2$. Звідси

$$\frac{a^4}{bc} \geqslant 2a^2 - bc.$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо, що

$$\frac{b^4}{ca} \geqslant 2b^2 - ca;$$

$$\frac{c^4}{ab} \geqslant 2c^2 - ab.$$

Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо:

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geqslant 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - ab - bc - ca =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Тут ми скористалися тим, що $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ (див. приклад 5 п. 2).

ПРИКЛАД 5 Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Розв'язання. Введемо позначення: $b + c = 2x$, $c + a = 2y$, $a + b = 2z$.

Звідси $a + b + c = x + y + z$, $a = y + z - x$, $b = x + z - y$, $c = x + y - z$.

Маємо: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{z} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) - \frac{3}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{3}{2} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що коли $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$ і $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}$, то $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \geqslant 3$.

Розв'язання. Запишемо нерівність (***) у такому вигляді: $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$.

Маємо: $\sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)\cdot 1} \geqslant \frac{2(x-1)\cdot 1}{x-1+1} = \frac{2x-2}{x} = 2 - \frac{2}{x}$.

Міркуючи аналогічно, отримуємо, що

$$\sqrt{y-1} \geqslant 2 - \frac{2}{y},$$

$$\sqrt{z-1} \geqslant 2 - \frac{2}{z}.$$

Тоді $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \geqslant 6 - \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}\right) = 6 - 2\cdot\frac{3}{2} = 3$.

Теорема 3.4 (нерівність Коші—Буняковського). ***При будь-яких значеннях $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ виконується нерівність***

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

Лема. ***Якщо квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$, де $a > 0$, при всіх значеннях x набуває невід'ємних значень, то його дискримінант D недодатний.***

Доведення. Припустимо, що для даного квадратного тричлена $D > 0$. Тоді квадратний тричлен має два різні корені x_1 і x_2 і можна записати $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

За умовою $a(x - x_1)(x - x_2) \geqslant 0$ при будь-якому значенні змінної x, а отже, і при $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Огюстен Луї Коші
(1789–1857)
Видатний французький математик, автор понад 800 наукових праць.

Віктор Якович Буняковський
(1804–1889)
Видатний математик XIX ст. Народився на Вінниччині. Протягом багатьох років був віце-президентом Петербурзької академії наук.

Маємо: $a\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_2\right)\geqslant 0.$ Звідси

$$a\,(x_2 - x_1)\,(x_1 - x_2) \geqslant 0. \qquad (1)$$

Оскільки $a > 0$ і $(x_2 - x_1)(x_1 - x_2) < 0$, то нерівність (1) є неправильною. Отже, припущення про те, що $D > 0$, також неправильне. ▲

Доведення теореми. Якщо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то нерівність, що доводиться, є очевидною.

Розглянемо випадок, коли хоча б одне з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не дорівнює 0.

При будь-якому значенні змінної x виконується нерівність

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2 \geqslant 0.$$

Цю нерівність можна перетворити до такого вигляду:

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)x^2-2\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)x+b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\geqslant 0.$$

Ліва частина останньої нерівності — це квадратний тричлен з додатним старшим коефіцієнтом. Цей квадратний тричлен набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінної x. Отже, за лемою його дискримінант D недодатний.

Маємо:

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 - 4\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Оскільки $D \leqslant 0$, то

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right). \blacktriangle$$

Якщо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то рівність у нерівності Коші—Буняковського досягається при будь-яких значеннях $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Розглянемо випадок, коли хоча б одне з чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не дорівнює 0.

Покажемо, що в нерівності Коші—Буняковського рівність досягається тоді й тільки тоді, коли існує таке число k, що виконуються рівності

$$b_1 = ka_1,\ b_2 = ka_2,\ \ldots,\ b_n = ka_n. \qquad (2)$$

Легко показати (зробіть це самостійно), що коли виконується умова (2), то нерівність Коші—Буняковського перетворюється на рівність.

Доведемо обернене твердження. Нехай

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Це означає, що квадратне рівняння

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 0$$

має єдиний корінь. Нехай цей корінь дорівнює k. Тоді число k є коренем рівняння

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2 = 0.$$

Отже, виконуються рівності

$$a_1k = b_1,\ a_2k = b_2,\ \ldots,\ a_nk = b_n.$$

ПРИКЛАД 7 Доведіть нерівність

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

Розв'язання. Застосовуючи нерівність Коші—Буняковського, запишемо:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\underbrace{(1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2)}_{n \text{ доданків}} = n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

З доведеної нерівності можна отримати таку нерівність:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Вирази, записані в лівій і правій частинах цієї нерівності, називають відповідно **середнім квадратичним** і **середнім арифметичним** чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ця нерівність є узагальненням нерівності (*).

ПРИКЛАД 8 Для додатних чисел a, b і c доведіть нерівність:

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant (a+b+c)^2.$$

Розв'язання. До наборів чисел $\left(a\sqrt{a};\, b\sqrt{b};\, c\sqrt{c}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{a}};\, \frac{1}{\sqrt{b}};\, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ застосуємо нерівність Коші—Буняковського:

$$\left(\left(a\sqrt{a}\right)^2+\left(b\sqrt{b}\right)^2+\left(c\sqrt{c}\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\right)^2.$$

Звідси $(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant (a+b+c)^2$.

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}=2|x-1|$.

Розв'язання. Перепишемо ліву частину рівняння так:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-3x+1}.$$

До наборів $\left(\sqrt{3};\, 1\right)$ і $\left(\sqrt{x};\, \sqrt{x^2-3x+1}\right)$ застосуємо нерівність Коші—Буняковського:

$$\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2 \leqslant \left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2\right).$$

Звідси $\left(\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2 \leqslant 4(x^2-2x+1)$;

$$\left|\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}\right| \leqslant 2|x-1|;$$

$$\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1} \leqslant 2|x-1|.$$

У цій нерівності рівність досягається тоді й тільки тоді, коли існує таке число k, що

$\begin{cases}\sqrt{3}=k\sqrt{x},\\ 1=k\sqrt{x^2-3x+1}.\end{cases}$ Звідси $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{1}$.

Отримане рівняння рівносильне заданому.

Маємо: $\begin{cases}\frac{x}{3}=x^2-3x+1,\\ x\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}3x^2-10x+3=0,\\ x\geqslant 0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=\frac{1}{3}.\end{array}\right.$

Відповідь: 3; $\frac{1}{3}$.

3.1.° Доведіть, що коли $m>0$, $x>0$, $y>0$, то $mx+\frac{y}{4m}\geqslant\sqrt{xy}$.

3.2.° Відомо, що $xy=1$, $x>0$, $a>0$, $b>0$. Доведіть нерівність $ax+by\geqslant 2\sqrt{ab}$.

3.3.° Для додатних чисел a і b доведіть нерівність $\frac{a}{16b}+\frac{25b}{a}\geqslant\frac{5}{2}$.

3.4.° Для додатних чисел x і y доведіть нерівність $\frac{3x}{y}+\frac{y}{27x}\geqslant\frac{2}{3}$.

3.5.° Доведіть нерівність $(x+y)(xy+16)\geqslant 16xy$, де $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

3.6.° Доведіть, що коли $a>0$ і $b>0$, то $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$.

3.7.° Доведіть, що коли $a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$, то $(a^3+b)(b^3+a)\geqslant 4a^2b^2$.

3.8.° Доведіть, що коли $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$\left(a^2+\frac{1}{bc}\right)\left(b^2+\frac{1}{ca}\right)\left(c^2+\frac{1}{ab}\right)\geqslant 8.$$

3.9.° Доведіть, що коли $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, то $(x+1)(y+1)(xy+1)\geqslant 8xy$.

3.10.° Доведіть нерівність $\frac{a^2+4}{2}\geqslant\sqrt{a^2+3}$.

3.11.° Доведіть нерівність $\frac{x^2+6}{4}\geqslant\sqrt{x^2+2}$.

3.12.° При $a>0$ доведіть нерівність $2\left(a+\frac{1}{a}\right)+a^2\geqslant 4a$.

3.13.° Доведіть нерівність $x^2+\frac{1}{x^2+1}\geqslant 1$.

3.14.° Доведіть нерівність $a^2+b^2+\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+1}>1$.

3.15.° Відомо, що $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$. Доведіть, що $|ac+bd|\leqslant 1$.

3.16.° Відомо, що $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$. Доведіть, що $|ac-bd|\leqslant 1$.

3.17.° Доведіть нерівність $\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+b^2}\geqslant|1+ab|$.

3.18.° Дано: $a^2+b^2+c^2=1$, $x^2+y^2+z^2=1$. Доведіть, що $-1\leqslant ax+by+cz\leqslant 1$.

3.19.° Дано: $a^2+b^2+c^2=1$, $x^2+y^2+z^2=3$. Доведіть, що $-\sqrt{3}\leqslant ax+by+cz\leqslant\sqrt{3}$.

3.20.° Доведіть, що коли добуток двох додатних чисел є сталим, то їх сума буде найменшою тоді, коли ці числа рівні.

3.21.° Доведіть, що коли сума двох додатних чисел є сталою, то їх добуток буде найбільшим тоді, коли ці числа рівні.

3.22.° Відомо, що $x>0$ і $xy=12$. Знайдіть найменше значення виразу $x+3y$.

3.23.° Знайдіть найменше значення виразу $5a+2b$, якщо $a>0$ і $ab=10$.

3.24.° Знайдіть найбільше значення виразу xy, якщо $x > 0$, $y > 0$ і $x + 3y = 6$.

3.25.° Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $3a + 4b = 24$. Знайдіть найбільше значення виразу ab.

3.26.° Знайдіть найменше значення виразу $x^2 + \frac{16}{x^2}$.

3.27.° Відомо, що $x > 0$. Знайдіть найменше значення виразу

$$\frac{x^2 + 10x + 16}{x}.$$

3.28.° Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{x}{9x^2 + 1}$, якщо $x > 0$.

3.29.° Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{x}{4x^2 + 3x + 1}$.

3.30.° Доведіть нерівність $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geqslant 2$.

3.31.° Доведіть нерівність $\frac{\sqrt{a^2 + 5}}{a^2 + 6} < \frac{1}{2}$.

3.32.° Доведіть нерівність $\frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2$.

3.33.° Відомо, що $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$, $a_1a_2...a_n = 1$. Доведіть нерівність

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

3.34.° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} + \frac{a + b}{c} \geqslant 6.$$

3.35.° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 4.$$

3.36.° Для додатних чисел a і b доведіть нерівність

$$\frac{a^2 + 1}{b} + \frac{b^2 + 1}{a} \geqslant 4.$$

3.37.° Для додатних чисел a і b доведіть нерівність

$$\frac{(a + 1)^2}{b} + \frac{(b + 1)^2}{a} \geqslant 8.$$

3.38.° Відомо, що $a \in [0; 1]$, $b \in [0; 1]$, $a + b \geqslant \frac{1}{2}$. Доведіть нерівність $\sqrt{(1 - a)(1 - b)} \leqslant \frac{3}{4}$.

3.39.° Відомо, що $|a| \leqslant 1$ і $|b| \leqslant 1$. Доведіть нерівність $ab + \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)} \leqslant 1$.

3.40.° Відомо, що $a + b = 1$. Доведіть, що $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}$.

3.41.° Відомо, що $a + b = 2$. Доведіть, що $a^4 + b^4 \geqslant 2$.

3.42.° Доведіть, що коли $a^4 + b^4 = 2$, то $|a + b| \leqslant 2$.

3.43.° Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $a + b + c = 1$. Доведіть нерівність $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{1}{2}$.

3.44.° Доведіть, що $\left|a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right| \leqslant 1$.

3.45.° Доведіть, що коли $x + y + z = 1$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

3.46.° Відомо, що $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$. Доведіть, що
$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant n.$$

3.47.° Доведіть, що коли $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то $|a + b + c| \leqslant \sqrt{3}$.

3.48.° Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $3x + 4y$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

3.49.° Знайдіть найменше значення виразу $a^2 + b^2$, якщо $5a - 12b = 13$.

3.50.° Доведіть нерівність $(1 + a + a^2 + a^3)^2 \leqslant 4(1 + a^2 + a^4 + a^6)$.

3.51.° Доведіть нерівність $(a^4 + b^4 + c^4)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geqslant (a + b + c)^2$.

3.52.° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то
$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

3.53.° Для додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ доведіть, що
$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

3.54.°° Доведіть нерівність
$$(a + c)(b + d) \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{c^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + d^2}.$$

3.55.°° Доведіть, що коли $a + b + c = 3$, то
$$\sqrt{3a + 1} + \sqrt{3b + 1} + \sqrt{3c + 1} \leqslant 6.$$

3.56.°° Доведіть нерівність $\sqrt{2a + 5} + \sqrt{a - 3} + \sqrt{25 - 3a} < 9$.

3.57.°° Розв'яжіть рівняння $2\sqrt{x - 1} + 5x = \sqrt{(x^2 + 4)(x + 24)}$.

3.58.°° Доведіть, що коли $x^2 + y^2 + z^2 = 44$, то $|3x - y + z| \leqslant 22$.

3.59.°° Відомо, що $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Доведіть нерівність
$$|2x + y - z| \leqslant 4\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3.60.•• Доведіть, що коли $a > 1$ і $b > 1$, то $\frac{a}{\sqrt{b-1}} + \frac{b}{\sqrt{a-1}} > 4$.

3.61.•• Доведіть, що коли $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то

$$(a+b)\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

3.62.•• Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $a + b = 1$. Доведіть, що

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

3.63.•• Доведіть, що коли $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то

$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} \geq 2\sqrt{a+b}.$$

3.64.* Доведіть нерівність

$$\sqrt{(a+b-1)^2+2c^2} + \sqrt{(b+c-1)^2+2a^2} + \sqrt{(c+a-1)^2+2b^2} \geq \sqrt{3}.$$

3.65.* На сторонах AB, BC, CD і DA квадрата $ABCD$ відповідно позначили точки M, N, P і Q. Доведіть, що периметр чотирикутника $MNPQ$ не менший від суми діагоналей квадрата.

3.66.* Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $a + b + c = 1$, то

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8(1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

3.67.* Відомо, що $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2}(x+y+z).$$

3.68.* Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

3.69.* Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

4. Ефективні прийоми доведення нерівностей

Матеріал двох попередніх пунктів переконує нас у тому, що найбільш ефективним методом доведення нерівностей є застосування раніше доведеної нерівності.

Якщо за допомогою деякої нерівності можна довести цілу низку інших більш складних нерівностей, то таку нерівність називатимемо **ключовою**. Так, нерівності $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$, нерівності між середніми величинами, нерівність Коші—Буняковського, безумовно, можна віднести до ключових нерівностей.

У цьому пункті ви ознайомитесь ще з кількома ключовими нерівностями.

У задачі 2.18 ви довели нерівність

$$\boxed{\frac{a^2}{b} \geq 2a - b, \text{ де } b > 0} \qquad (*)$$

Зауважимо, що в нерівності (*) рівність досягається лише при $a = b$. Покажемо, що цю просту нерівність можна віднести до ключових.

ПРИКЛАД 1 (приклад 2 п. 2) Доведіть, що коли $a > b > c$, то $\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c$.

Розв'язання. З умови випливає, що $a - b > 0$ і $b - c > 0$. Тоді

$$\frac{a^2}{a-b} \geq 2a - (a - b) = a + b,$$

$$\frac{b^2}{b-c} \geq 2b - (b - c) = b + c.$$

Зауважимо, що рівності $a = a - b$ і $b = b - c$ виконуються одночасно лише за умови $b = c = 0$. Тому в записаних нерівностях рівність одночасно досягатися не може.

Звідси $\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + b + b + c = a + 2b + c$.

ПРИКЛАД 2 (приклад 4 п. 3) Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то $\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geq a^2 + b^2 + c^2$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a^4}{bc} = \frac{(a^2)^2}{bc} \geq 2a^2 - bc,$$

$$\frac{b^4}{ac} = \frac{(b^2)^2}{ac} \geq 2b^2 - ac,$$

$$\frac{c^4}{ab} = \frac{(c^2)^2}{ab} \geq 2c^2 - ab.$$

Звідси $\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - ab - bc - ca =$

$= (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq a^2 + b^2 + c^2.$

ПРИКЛАД 3 (3.67[1])

Відомо, що $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2}(x + y + z).$$

[1] У задачі 3.67 цю нерівність було запропоновано довести за допомогою нерівності Коші — Буняковського або нерівності Коші.

Розв'язання. Якщо нерівність (*) застосувати таким чином:

$$\frac{x^2}{y+z} \geqslant 2x - y - z,$$

$$\frac{y^2}{z+x} \geqslant 2y - z - x,$$

$$\frac{z^2}{x+y} \geqslant 2z - x - y,$$

то отримаємо

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant 2x - y - z + 2y - z - x + 2z - x - y = 0.$$

Але для такого результату не потрібне застосування будь-яких ключових задач.

Проте це не означає, що нерівність (*) незастосовна для даного прикладу.

Маємо: $\dfrac{x^2}{y+z} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{(2x)^2}{y+z} \geqslant \dfrac{1}{4}(4x - y - z)$.

Аналогічно показуємо, що

$$\frac{y^2}{z+x} \geqslant \frac{1}{4}(4y - z - x),$$

$$\frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{4}(4z - x - y).$$

Тепер за допомогою теореми про почленне додавання нерівностей отримуємо потрібний результат.

Нерівність (*) можна узагальнити. Насправді є справедливою така нерівність:

$$(n-k)\frac{a^n}{b^k} \geqslant na^{n-k} - kb^{n-k}, \text{ де } n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},\ n > k,\ a > 0,\ b > 0.$$

Окремий випадок цієї нерівності, коли $n = k + 1$, а саме нерівність

$$\boxed{\frac{a^{k+1}}{b^k} \geqslant (k+1)a - kb, \text{ де } k \in \mathbb{N},\ a > 0 \text{ і } b > 0} \qquad (**)$$

ви зможете довести в п. 24 (задача 24.17).

Зазначимо, що в задачі 2.18 ви довели цю нерівність для $n = 2$:

$$\boxed{\frac{a^3}{b^2} \geqslant 3a - 2b, \text{ де } a > 0 \text{ і } b > 0}$$

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^4}{a^3} \geqslant -a + 2b + 2c.$$

Розв'язання. Застосувавши нерівність (**), запишемо:

$$\frac{a^2}{b} \geqslant 2a - b,$$

$$\frac{b^3}{c^2} \geqslant 3b - 2c,$$

$$\frac{c^4}{a^3} \geqslant 4c - 3a.$$

Залишилося застосувати теорему про почленне додавання нерівностей.

У задачі 2.24 ви довели таку нерівність:

$$\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y}, \text{ де } x > 0,\ y > 0}$$

Застосовуючи цю нерівність, нескладно довести нерівність:

$$\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \text{ де } x > 0,\ y > 0,\ z > 0} \qquad (***)$$

Маємо: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Нерівність (***) є ключем до розв'язання цілої низки непростих задач. Розглянемо приклади її застосування.

Насамперед покажемо, як, використовуючи нерівність (***), можна довести вже відому вам (див. задачу 3.67 і приклад 3 цього пункту) нерівність.

ПРИКЛАД 5 Відомо, що $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Розв'язання

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{y+z+z+x+x+y} = \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}(x+y+z).$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} \geqslant 1.$$

Розв'язання

$$\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} = \frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} + \frac{a^2}{2ca+a^2} \geqslant$$

$$> \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1.$$

ПРИКЛАД 7 Для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geqslant \frac{9}{x+y+z}.$$

Розв'язання. $\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} = 2\left(\frac{1^2}{x+y} + \frac{1^2}{y+z} + \frac{1^2}{z+x}\right) \geqslant$

$$\geqslant 2 \cdot \frac{(1+1+1)^2}{x+y+y+z+z+x} = \frac{9}{x+y+z}.$$

Після того як за допомогою задачі 2.24 ми довели нерівність (***), природно висунути припущення, що має місце така нерівність:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n},$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — додатні числа.

Ви навчитеся доводити такі нерівності в п. 24 (див. задачу 24.12).

Якщо в останній нерівності покласти $x_1 = a_1 b_1$, $x_2 = a_2 b_2$, ..., $x_n = a_n b_n$, $y_1 = b_1^2$, $y_2 = b_2^2$, ..., $y_n = b_n^2$, то отримаємо:

$$\frac{a_1^2 b_1^2}{b_1^2} + \frac{a_2^2 b_2^2}{b_2^2} + \ldots + \frac{a_n^2 b_n^2}{b_n^2} \geqslant \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

Звідси $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2}{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}$,

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

Таким чином, отримано ще один спосіб доведення нерівності Коші—Буняковського.

4.1.° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c.$$

4.2.° (2.54) Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то

$$\frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2xz} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \geqslant 1.$$

4.3.° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{a^4}{b^3} + \frac{b^4}{c^3} + \frac{c^4}{a^3} \geqslant a + b + c.$$

4.4.•• Для додатних чисел x, y і z доведіть нерівність

$$\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geqslant x^2 + y^2 + z^2.$$

4.5.•• Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

4.6.** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

4.7.** Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $d > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geqslant \frac{a+b+c+d}{3}.$$

4.8.** Дано: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Доведіть, що:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{3}{2}.$$

4.9.** Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то

$$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} \geqslant \frac{1}{2}.$$

4.10.** (приклад 5 п. 3) Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

4.11.* Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть нерівність

$$(x+1)(y+1)(z+1) \geqslant \sqrt{8(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

4.12.* Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть нерівність

$$\frac{x}{2+yz} + \frac{y}{2+zx} + \frac{z}{2+xy} \leqslant 1.$$

4.13.* Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{1+x+yz} + \frac{1}{1+y+xz} + \frac{1}{1+z+xy} \leqslant \frac{3}{x+y+z}.$$

4.14.* Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

4.15.* Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ і $a + b + c = 1$, то

$$a(b^3 + c^3) + b(c^3 + a^3) + c(a^3 + b^3) \geqslant 2abc.$$

4.16.* Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $abc = 1$, то

$$\frac{1}{a(b^3+c^3)} + \frac{1}{b(c^3+a^3)} + \frac{1}{c(a^3+b^3)} \leqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

4.17.* Для додатних чисел a, b і c доведіть нерівність

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+a^2} \geqslant a+b+c.$$

4.18.* Доведіть нерівність $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

4.19.* Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть, що:

$$\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+zx} \geqslant \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}.$$

4.20.* Доведіть нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

4.21.* Доведіть нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1}-2$, де $n \in \mathbb{N}$.

§ 3. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

5. Функція

У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни іншої величини (залежної змінної). Вивчення цих процесів потребує створення їх математичних моделей. Однією з таких найважливіших моделей є **функція**.

З цим поняттям ви ознайомилися в 7 класі. Нагадаємо й уточнимо основні відомості.

Нехай X — множина значень незалежної змінної. **Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної.**

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Кажуть, що змінна y **функціонально залежить** від змінної x. Цей факт позначають так: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції**.

Множину всіх значень, яких набуває аргумент, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Так, областю визначення оберненої пропорційності $y = \frac{2}{x}$ є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Також можна записати $D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ або $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$[1].

У функціональній залежності кожному значенню аргументу x відповідає певне значення залежної змінної y. Значення залежної змінної ще називають **значенням функції** і для функції f позначають $f(x)$. Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна,

[1] $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$.

називають **областю значень функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Так, областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є множина $[0; +\infty)$.

Елементами множин $D(f)$ і $E(f)$ можуть бути об'єкти найрізноманітнішої природи.

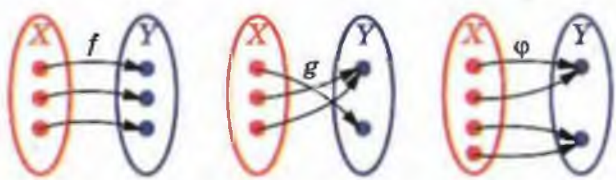
Так, якщо кожному многокутнику поставити у відповідність його площу, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина многокутників, а область значень — множина додатних чисел.

Якщо кожній людині поставити у відповідність день тижня, у який вона народилася, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина людей, а область значень — множина днів тижня.

У разі коли $D(f) \subset \mathbb{R}$ і $E(f) \subset \mathbb{R}$, функцію f називають **числовою**.

Якщо множини X і Y такі, що $X = D(f)$ і $Y = E(f)$, то функцію f також називають **відображенням множини X на множину Y**. Слова «відображення» і «функція» є синонімами. Проте термін «відображення» частіше використовують тоді, коли при заданні функції хочуть наголосити, які множини є областю визначення і областю значень. Наприклад, нумерація елементів деякої зліченної множини — це відображення цієї множини на множину $\mathbb{N}$.

На рисунку 5.1 проілюстровано відображення множини X на множину Y (точками позначено елементи множин).



а) *б)* *в)*

Рис. 5.1

Відображення f принципово відрізняється від відображень g і φ (рис. 5.1): у відображенні f кожний елемент множини Y є відповідним деякому єдиному елементу множини X. Таке відображення називають **взаємно однозначним відображенням множини X на множину Y**.

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за яким можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

Функцію можна задати одним з таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Розглянемо кілька прикладів функцій, заданих описово.

Кожному раціональному числу поставимо у відповідність число 1, а кожному ірраціональному — число 0. Функцію, задану таким чином, називають **функцією Діріхле** і позначають $y = \mathfrak{D}(x)$. Пишуть:

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \{0; 1\}$.

Кожному дійсному числу x поставимо у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує число x. Задану функцію називають **цілою частиною числа** x і позначають $y = [x]$. Наприклад, $[\sqrt{2}] = 1$, $[2] = 2$, $[-\sqrt{2}] = -2$. Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \mathbb{Z}$.

Кожному дійсному числу x поставимо у відповідність різницю $x - [x]$. Задану функцію називають **дробовою частиною числа** x і позначають $y = \{x\}$. Наприклад, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$, $\{2\} = 2 - [2] = 2 - 2 = 0$, $\{-\sqrt{2}\} = -\sqrt{2} - [-\sqrt{2}] = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$. Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [0; 1)$.

Кожному від'ємному числу поставимо у відповідність число -1, кожному додатному числу — число 1, нулю — число 0. Функцію, задану таким чином, називають **сигнум** (від латинського *signum* — знак) і позначають $y = \operatorname{sgn} x$.

Пишуть:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Значення цієї функції характеризує знак відповідного аргументу.

Зауважимо, що $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x|$.

Розглянемо функцію f, у якої $D(f) = \mathbb{N}$. Вважатимемо, що $f(n) = 1$, якщо десятковий запис числа π містить n цифр 4, що йдуть поспіль, і $f(n) = 0$, якщо цей запис такої властивості не має. Звернемо увагу на те, що ми не знаємо, чому дорівнює $f(10\,000\,000\,000)$. Проте область визначення і правило задані, отже, заданою є й сама функція.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є область визначення виразу, який входить до формули. Наприклад, якщо функція f задана формулою $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

Значення однієї функції можуть слугувати значеннями аргументу іншої функції.

Наприклад, розглянемо функції $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = x^2 + x + 1$. Тоді $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Отже, можна говорити, що формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задає функцію $y = f(g(x))$.

Якщо значеннями аргументу функції f є значення функції g, то говорять, що задано **складену функцію** $y = f(g(x))$.

Існують функції, які на різних підмножинах області визначення задаються різними формулами. Наприклад,

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Такі функції називають **кусково заданими.**

Спосіб задання функції однією чи кількома формулами називають **аналітичним**.

У тих випадках, коли область визначення функції є скінченною множиною і кількість її елементів не дуже велика, зручно використовувати табличний спосіб задання функції. Цей спосіб досить часто використовують на практиці. Так, результатом запису спостережень за якою-небудь характеристикою процесу (температурою, швидкістю, тиском і т. п.) є таблиця, яка задає відповідну функцію залежності цієї величини від часу.

Нагадаємо означення графіка функції.

Означення. Графіком числової функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Сказане означає, що коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ належить графіку;

2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Фігура на координатній площині може бути графіком деякої функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше однієї спільної точки. Наприклад, коло не може бути графіком жодної функції.

Графічний спосіб задання функції широко застосовується при дослідженні реальних процесів. Існують прилади, які видають оброблену інформацію у вигляді графіків. Так, у медицині використовують електрокардіограф. Цей прилад рисує криві, які характеризують роботу серця.

Осцилограф

Електрокардіограф

У таблиці наведено функції, які ви вивчали у 7 і 8 класах.

Функція	Область визначення	Область значень	Графік
$y = kx + b$	$(-\infty; +\infty)$	якщо $k \neq 0$, то $(-\infty; +\infty)$, якщо $k = 0$, то область значень складається з одного числа b	пряма
$y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	гіпербола
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	парабола
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	вітка параболи

ПРИКЛАД 1

Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{x^2(x-1)}$.

Розв'язання. Область визначення цієї функції — це множина розв'язків нерівності $x^2(x-1) \geqslant 0$.

Ця нерівність рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} x^2 = 0, \\ x - 1 \geqslant 0. \end{array}\right.$

Звідси $D(y) = \{0\} \cup [1; +\infty)$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть область значень функції $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

Розв'язання. Нехай $a \in E(y)$. Тоді задача зводиться до знаходження всіх значень параметра a, при яких рівняння $\frac{2x}{1+x^2} = a$ має розв'язки.

Це рівняння рівносильне такому:
$2x = a + ax^2$, звідки $ax^2 - 2x + a = 0$.

Якщо $a = 0$, то отримане рівняння має корінь $x = 0$.

Якщо $a \neq 0$, то це рівняння є квадратним, і наявність коренів визначається умовою $D \geqslant 0$.

Маємо: $D = 4 - 4a^2$. Залишається розв'язати нерівність $4 - 4a^2 \geqslant 0$:
$4a^2 \leqslant 4$, $a^2 \leqslant 1$, $|a| \leqslant 1$.

Отже, $E(y) = [-1; 1]$.

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції $y = [x]$.

Розв'язання. Нехай $x \in [k; k + 1)$, де $k \in \mathbb{Z}$. Тоді за означенням цілої частини числа $[x] = k$.

Тепер зрозуміло, що для побудови шуканого графіка потрібно область визначення функції розбити на проміжки виду $[k; k + 1)$, де $k \in \mathbb{Z}$. На кожному з цих проміжків значення функції $y = [x]$ є сталим і дорівнює k.

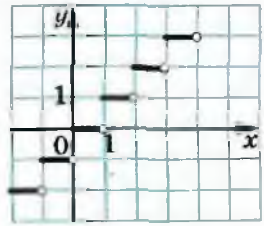


Рис. 5.2

Шуканий графік зображено на рисунку 5.2.

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = \{x\}$.

Розв'язання. Спочатку доведемо важливі властивості цілої і дробової частин числа.

Якщо $k \in \mathbb{Z}$, то $[x + k] = [x] + k$.

Нехай $[x] = c$. Тоді за означенням цілої частини числа $c \leqslant x < c + 1$. Звідси $c + k \leqslant x + k < (c + k) + 1$. Отже, $[x + k] = c + k = [x] + k$.

Якщо $k \in \mathbb{Z}$, то $\{x + k\} = \{x\}$.

Маємо: $\{x + k\} = x + k - [x + k] = x + k - ([x] + k) = x - [x] = \{x\}$.

Доведена властивість дробової частини числа дозволяє стверджувати, що на кожному з проміжків виду $[k; k + 1)$, де $k \in \mathbb{Z}$, графік функції $y = \{x\}$ має однаковий вигляд. Тому досить побудувати його, наприклад, на проміжку $[0; 1)$, а потім отриману фігуру «розмножити».

Якщо $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$ і $\{x\} = x - [x] = x$, тобто при $x \in [0; 1)$ $y = x$.

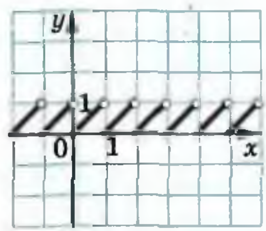


Рис. 5.3

Шуканий графік зображено на рисунку 5.3.

ПРИКЛАД 5 Знайдіть функцію f таку, що $D(f) = \mathbb{R}$ і для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується умова $f(2x - 1) = x^2$.

Розв'язання. Нехай $2x - 1 = t$. Звідси $x = \frac{t+1}{2}$. Тоді $f(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2$.

Ми встановили, що *коли функція f, яка задовольняє умову $f(2x - 1) = x^2$, існує,* то вона має вигляд $f(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$. Залишилося показати, що знайдена функція задовольняє умову задачі.

Маємо: $f(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$.

Тоді $D(f) = \mathbb{R}$ і $f(2x-1) = \left(\frac{(2x-1)+1}{2}\right)^2 = x^2$.

5.1.° **Кожному натуральному числу, більшому за 10, але меншому від 20, поставили у відповідність остачу від ділення цього числа на 5.**

1) Яким способом задано цю функцію?

2) Яка область значень цієї функції?

3) Задайте цю функцію таблично.

5.2.° Дано функції: $f(x) = [x]$, $g(x) = \{x\}$, $\varphi(x) = \mathfrak{D}(x)$. Знайдіть:
1) $f(3{,}2)$, $g(3{,}2)$, $\varphi(3{,}2)$; 2) $f(-3{,}2)$, $g(-3{,}2)$, $\varphi(-3{,}2)$; 3) $f(\sqrt{3})$, $g(\sqrt{3})$, $\varphi(\sqrt{3})$; 4) $f(-\sqrt{3})$, $g(-\sqrt{3})$, $\varphi(-\sqrt{3})$.

5.3.° На рисунку 5.4 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4;\ 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) $f(-3{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
2) значення x, при яких $f(x) = -2{,}5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) область значень функції.

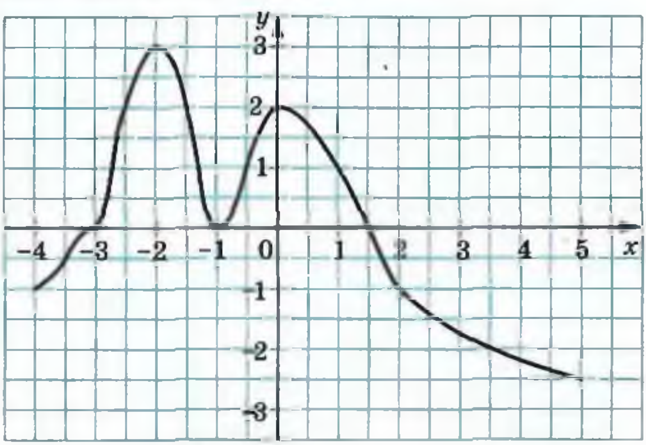


Рис. 5.4

5.4.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $f(x) = \frac{1}{6}x - 7$;

2) $f(x) = \frac{20+4x}{3x-5}$;

3) $g(x) = 9 - x^2$;

4) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$.

5.5.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $h(x) = 9 - 10x$;

2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$;

3) $s(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

5.6.° Дано функцію

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ x^2 - 5, & \text{якщо } -1 < x < 4, \\ 11, & \text{якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$$

Знайдіть: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6{,}4)$.

5.7.° Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 9, & \text{якщо } x \leqslant -3, \\ x^2, & \text{якщо } -3 < x < 1, \\ x, & \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$

5.8.° Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ -x, & \text{якщо } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

5.9.° Побудуйте графік функції $y = \operatorname{sgn} x$.

5.10.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \dfrac{x + 2}{x - 5}$;

2) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 7}$;

3) $f(x) = \sqrt{x + 3} + \dfrac{1}{x^2 - 9}$;

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 4}}{\sqrt{x + 2}} + \dfrac{4x - 3}{x^2 - 7x + 6}$.

5.11.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{x + 4} + \dfrac{2}{x + 1}$;

2) $f(x) = \sqrt{8 - x} + \dfrac{4}{x^2 - 8x}$.

5.12.° Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 1$;

2) $f(x) = 5 - x^2$;

3) $f(x) = -7$;

4) $f(x) = |x + 2| + 2$;

5) $f(x) = \sqrt{-x^2}$;

6) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x}$.

5.13.° Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = x^2 + 3$;

2) $f(x) = 6 - \sqrt{x}$;

3) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

5.14.° Дано функції $f(x) = 1 - 3x$ і $g(x) = x^2 - 1$. Задайте формулою функцію:

1) $y = f(x + 1)$;

2) $y = g\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

3) $y = f(g(x))$;

4) $y = g(f(x))$;

5) $y = f(f(x))$;

6) $y = g(g(x))$.

5.15.° Дано функції $f(x) = \sqrt{x+1}$ і $g(x) = x^2 - 2x$. Задайте формулою функцію:

1) $y = f(3x)$;
2) $y = g(-x)$;
3) $y = f(g(x))$;
4) $y = g(f(x))$;
5) $y = f(f(x))$;
6) $y = g(g(x))$.

5.16.° Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел 1 і 2;
2) множина всіх чисел, не менших від 5;
3) множина всіх чисел, не більших за 10, крім числа −1;
4) множина, яка складається з одного числа −4.

5.17.° Знайдіть область визначення та побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$;
2) $f(x) = \frac{12x - 72}{x^2 - 6x}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 9}$.

5.18.° Знайдіть область визначення та побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$;
2) $f(x) = \frac{x^3}{x}$.

5.19.° Функцію f задано описом: кожному цілому числу поставлено у відповідність остачу від ділення цього числа на 3. Знайдіть $f(2)$, $f(0)$, $f(-17)$, $f(21)$. Знайдіть $E(f)$. Доведіть, що $f(x) = f(x+3)$ для будь-якого $x \in \mathbb{Z}$.

5.20.° Функцію g задано описом: кожному цілому числу поставлено у відповідність остачу від ділення цього числа на 4. Знайдіть $g(3)$, $g(0)$, $g(-21)$, $g(32)$. Знайдіть $E(g)$. Доведіть, що $g(x) = g(x+4)$ для будь-якого $x \in \mathbb{Z}$.

5.21.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{4 - |x|} + \frac{1}{x + 2}$;
2) $y = \sqrt{|x| - 3} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$;
3) $y = \sqrt{(x-1)^2 (x-2)}$;
4) $y = \sqrt{|x + 1|(x - 3)}$;
5) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 (x + 2)}}$;
6) $y = \sqrt{\operatorname{sgn} x}$.

5.22.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\sqrt{3 - |x|}} + \frac{1}{x - 2}$;
2) $y = \frac{1}{\sqrt{|x| - 1}} + \sqrt{x + 4}$;
3) $y = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 (x+3)}}$;
4) $y = \sqrt{(x+4)^2 (x-3)}$;
5) $y = \sqrt{|x + 5|(x + 2)}$;
6) $y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sgn} x}}$.

5.23.** Знайдіть область значень функції:

1) $y = 3x^2 - 2x + 1$; 3) $y = \dfrac{3x+1}{2x+3}$; 5) $y = x + \dfrac{9}{x}$.

2) $y = -2x^2 + 3x - 4$; 4) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$;

5.24.** Знайдіть область значень функції:

1) $y = 5x^2 - x + 1$; 3) $y = \dfrac{2x-1}{5x+4}$; 5) $y = 4x + \dfrac{1}{x}$.

2) $y = -3x^2 - x - 2$; 4) $y = \dfrac{2x}{x^2-4}$;.

5.25.** Побудуйте графік функції $y = \left(\sqrt{(x+2)^2 x}\right)^2 - x^3 - 4x^2$.

5.26.** Відомо, що $D(f) = [-1; 4]$. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = f(-x)$; 3) $y = f(1 - x)$; 5) $y = f(|x|)$;

2) $y = f(2x)$; 4) $y = f(x^2)$; 6) $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

5.27.** Відомо, що $D(g) = [-9; 1]$. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = g(x + 1)$; 3) $y = g(x^2)$; 5) $y = g\left(\sqrt{x}\right)$;

2) $y = g\left(\dfrac{1}{3}x\right)$; 4) $y = g(|x|)$; 6) $y = g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

5.28.** Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{1}{\mathfrak{D}(x)}$; 3) $y = \dfrac{1}{\{x\}}$; 5) $y = \sqrt{\mathfrak{D}(x) - 1}$.

2) $y = \dfrac{1}{[x]}$; 4) $y = \sqrt{-\mathfrak{D}(x)}$;

5.29.** Знайдіть область значень функції:

1) $y = \mathfrak{D}([x])$; 2) $y = \mathfrak{D}(\{x\})$; 3) $y = x\mathfrak{D}(x)$.

5.30.** Знайдіть область значень функції:

1) $y = [\mathfrak{D}(x)]$; 2) $y = \{\mathfrak{D}(x)\}$.

5.31.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(x))$; 2) $y = \{[x]\}$; 3) $y = \sqrt{1 - [x]^2}$.

5.32.** Побудуйте графік функції:

1) $y = [\{x\}]$; 2) $y = \sqrt{\{x\}(\{x\} - 1)}$.

5.33.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{sgn}(x + 1)$; 2) $y = \operatorname{sgn}(1 - x^2)$.

5.34.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{sgn}(1 - x)$; 2) $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$.

5.35.•• Функція задана описом: кожному цілому числу поставлено у відповідність остачу від ділення квадрата цього числа на 5. *Побудуйте графік цієї функції.*

5.36.•• Функція задана описом: кожному цілому числу поставлено у відповідність остачу від ділення квадрата цього числа на 3. Побудуйте графік цієї функції.

5.37.•• Знайдіть функцію f таку, що $D(f) = \mathbb{R}$ і для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(3x - 1) = x + 2$.

5.38.•• Знайдіть функцію g таку, що $D(g) = \mathbb{R}$ і для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $g(4 - x) = 3x + 1$.

5.39.* Знайдіть функцію f таку, що $D(f) = \mathbb{R}$ і для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) + 2f(-x) = x + 1$.

5.40.* Знайдіть функцію f таку, що $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ і для будь-якого $x \in D(f)$ виконується рівність

$$f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}.$$

5.41.* Знайдіть функцію f таку, що $D(f) = \mathbb{R}$ і для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $2f(x) - f(1 - x) = x + 3$.

5.42.* Дано функцію $f(x) = x^2 + 2x$. Розв'яжіть рівняння $f(f(f(x))) = 0$.

5.43.* Дано функцію $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Розв'яжіть рівняння $f(f(f(x))) = x$.

5.44.* Дано функцію $f(x) = x^2 - x + 1$. Розв'яжіть рівняння $f(f(x)) = x$.

З історії розвитку поняття функції

Означення функції, яким ви користуєтеся на даному етапі вивчення математики, з'явилося порівняно недавно — у першій *половині XIX ст. Воно формувалося більше 200 років під впливом* бурхливих суперечок видатних математиків кількох поколінь.

Дослідженням функціональних залежностей між величинами почали займатися ще стародавні вчені. Цей пошук знайшов відображення у відкритті формул для знаходження площ і об'ємів деяких фігур. Прикладами табличного задання функцій можуть слугувати астрономічні таблиці вавилонян, стародавніх греків і арабів.

Проте лише в першій половині XVII ст. своїм відкриттям методу координат видатні французькі математики П. Ферма (1601–1665)

П'єр Ферма

Рене Декарт

і Р. Декарт (1596–1650) заклали основи для виникнення поняття функції. У своїх працях вони досліджували зміну ординати точки залежно від зміни її абсциси.

Значну роль у формуванні поняття функції відіграли роботи великого англійського вченого Ісака Ньютона (1643–1727). Під функцією він розумів величину, яка змінює своє значення з плином часу.

Термін «функція» (від латинського *functio* — здійснення, виконання) запровадив німецький математик Георг Лейбніц (1646–1716). Він і його учень, швейцарський математик Йоганн Бернуллі (1667–1748) під функцією розуміли формулу, яка пов'язує одну змінну з іншою, тобто вони ототожнювали функцію з одним із способів її задання.

Ісак Ньютон

Подальшому розвиткові поняття **функції багато в чому сприяло з'ясування істини в багаторічному спорі видатних математиків Леонарда Ейлера (1707–1783) і Жана Лерона Д'Аламбера (1717–1783), одним з предметів якого було визначення сутності цього поняття. У результаті було сформовано більш загальний**

Георг Лейбніц

Йоганн Бернуллі

погляд на функцію як залежність однієї змінної величини від іншої, у якому це поняття жорстко не пов'язувалося зі способом задання функції.

У 30-х роках XIX ст. ідеї Ейлера набули подальшого розвитку в роботах видатних учених: російського математика Миколи Лобачевського (1792–1856) і німецького математика Петера Густава Лежена Діріхле (1805–1859). Саме тоді з'явилося таке означення: змінну величину y називають функцією змінної величини x,

Леонард Ейлер

Жан Лерон Д'Аламбер

Микола Лобачевський

Петер Діріхле

якщо кожному значенню величини x відповідає єдине значення величини y.

Таке означення функції можна й сьогодні зустріти в шкільних підручниках. Проте більш сучасний погляд — це трактування функції як *правила, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної.*

Коли на межі XIX і XX століть виникла теорія множин і стало зрозумілим, що елементами області визначення і області значень зовсім не обов'язково мають бути числа, то під функцією стали розуміти *правило, яке кожному елементу множини X ставить у відповідність єдиний елемент множини Y.*

Якщо множини X і Y — відповідно область визначення і область значень функції f, то тим самим задається множина

$$\{(x; y) \mid x \in X, y \in Y, y = f(x)\}.$$

Упорядковані пари, які складають цю множину, характеризуються тим, що у них перші компоненти є різними.

Справедливе й обернене твердження: будь-яка множина упорядкованих пар, перші компоненти яких є різними, задає деяку функцію, область визначення якої — множина перших компонентів пар, область значень — множина других компонентів пар. Правило, яке кожному елементу області визначення ставить у відповідність єдиний елемент області значень, визначається самими упорядкованими парами.

Сказане демонструє, що під **функцією можна розуміти множину упорядкованих пар з різними першими компонентами.**

Так, множина $\{(1; 3), (5; -7), (2; 6), (-3; 6)\}$ є деякою функцією f, у якої $D(f) = \{1, 5, 2, -3\}$, $E(f) = \{3, -7, 6\}$. Записують $f = \{(1; 3), (5; -7), (2; 6), (-3; 6)\}$. З цього запису, наприклад, випливає, що $f(5) = -7$.

Наприклад, множини f і g, де $f = \{(x; 2x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $g = \{(x; x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$, є відповідно лінійною і квадратичною функціями.

6. Зростання і спадання функції. Найбільше і найменше значення функції

Часто про властивості об'єкта можна робити висновки за його зображенням: фотографією, рентгенівським знімком, рисунком тощо.

«Зображенням» функції може слугувати її графік. Покажемо, як графік функції дозволяє визначити певні її властивості.

На рисунку 6.1 зображено графік деякої функції $y = f(x)$.

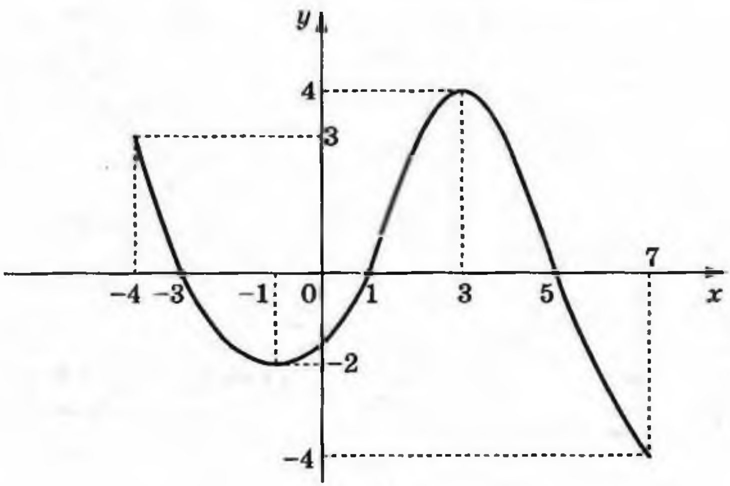


Рис. 6.1

Її областю визначення є проміжок $[-4; 7]$, а областю значень — проміжок $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значення функції дорівнює нулю.

Означення. **Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають** **нулем функції**.

Так, числа -3, 1, 5 є нулями даної функції.

Зауважимо, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ графік функції f розташований над віссю абсцис, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — під віссю абсцис. Це означає, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ функція набуває додатних значень, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — від'ємних.

Означення. Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції f.

Зазначимо, що, наприклад, проміжок $(0; 5)$ не є проміжком знакосталості даної функції.

Зауваження. При пошуку проміжків знакосталості функції вказують ті проміжки, які не є власними підмножинами жодних інших проміжків знакосталості. Наприклад, проміжок $(-2; -1)$ є проміжком знакосталості функції f (рис. 6.1), але до відповіді увійде проміжок $(-3; 1)$, який містить проміжок $(-2; -1)$.

Якщо переміщатися по осі абсцис від -4 до -1, то можна помітити, що графік функції йде вниз, тобто значення функції зменшуються. Кажуть, що на проміжку $[-4; -1]$ **функція спадає**. Із збільшенням x від -1 до 3 графік функції йде вгору, тобто значення функції збільшуються. Кажуть, що на проміжку $[-1; 3]$ **функція зростає**.

Означення. Функцію f називають зростаючою на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Означення. Функцію f називають спадною на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Часто використовують коротше формулювання.

Означення. Функцію f називають зростаючою (спадною) на множині M, якщо для будь-яких значень аргументу з цієї множини більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають **зростаючою**. Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають **спадною**.

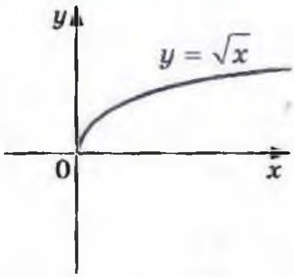


Рис. 6.2

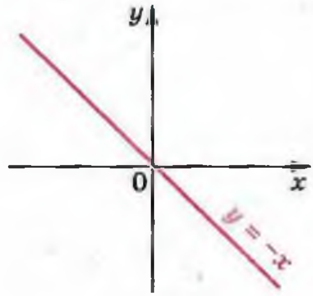


Рис. 6.3

Наприклад, на рисунку 6.2 зображено графік функції $y = \sqrt{x}$. Ця функція є зростаючою[1]. На рисунку 6.3 зображено графік спадної функції $y = -x$.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(-\infty; 0]$, до того ж $x_1 < x_2$. Покажемо, що $x_1^n > x_2^n$, тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Маємо: $x_1 < x_2$, $-x_1 > -x_2$. Обидві частини останньої нерівності є невід'ємними числами. Тоді за властивістю числових нерівностей можна записати, що $(-x_1)^n > (-x_2)^n$. Оскільки n парне, то $x_1^n > x_2^n$.

Зазначимо, що в таких випадках кажуть, що проміжок $(-\infty; 0]$ є **проміжком спадання** заданої функції. Аналогічно можна довести, що проміжок $[0; +\infty)$ є **проміжком зростання** функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число.

Зауваження. У задачах на пошук проміжків зростання і спадання функції вказують ті проміжки, які не є власними підмножинами жодних інших проміжків зростання (спадання), аналогічно тому, як це робиться під час пошуку проміжків знакосталості.

Зазначимо, що існують функції, визначені на $\mathbb{R}$, які не є зростаючими (спадними) на жодному проміжку області визначення. Наприклад, такою функцією є константа. Ще одним прикладом такої функції є функція Діріхле.

[1] Цей факт було доведено у 8 класі (див. п. 31, с. 220).

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(0;\ +\infty)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді за властивістю числових нерівностей $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Отже, дана функція спадає на проміжку $(0;\ +\infty)$.

Аналогічно доводять, що функція $f(x)$ спадає на проміжку $(-\infty;\ 0)$.

Зауважимо, що не можна стверджувати, що дана функція спадає на всій області визначення, тобто є спадною. Дійсно, якщо, наприклад, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то з нерівності $x_1 < x_2$ не випливає, що $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що лінійна функція $f(x) = kx + b$ є зростаючою при $k > 0$ і спадною при $k < 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу, причому $x_1 < x_2$.

Маємо:

$f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2)$.

Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$.

Якщо $k > 0$, то $k(x_1 - x_2) < 0$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$. Отже, при $k > 0$ дана функція є зростаючою.

Якщо $k < 0$, то $k(x_1 - x_2) > 0$, тобто $f(x_1) > f(x_2)$. Отже, при $k < 0$ дана функція є спадною.

Теорема 6.1 ***Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M, то функція $y = -f(x)$ є спадною (зростаючою) на множині M.***

Доведення. Нехай, наприклад, функція $y = f(x)$ є зростаючою на множині M. Тоді для будь-яких x_1 і x_2, які належать множині M і таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Звідси $-f(x_1) > -f(x_2)$. Отже, функція $y = -f(x)$ є спадною.

Аналогічно доводимо, що коли функція $y = f(x)$ спадає на множині M, то функція $y = -f(x)$ зростає на множині M. ▲

Теорема 6.2 ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є зростаючими (спадними) на множині M, то функція $y = f(x) + g(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M.***

Теорема 6.3 ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є зростаючими (спадними) на множині M та $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$ для будь-якого $x \in M$, то функція $y = f(x)\, g(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M.***

Теорема 6.4. ***Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M, яка є проміжком знакосталості функції f, то функція $y = \frac{1}{f(x)}$ є спадною (зростаючою) на множині M.***

Використовуючи означення зростаючої і спадної функції, а також властивості числових нерівностей, доведіть теореми 6.2–6.4 самостійно.

Теорема 6.5. ***Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на $D(f)$, то рівняння $f(x) = a$, де a — деяке число, має не більше одного кореня.***

Доведення. Нехай функція f є зростаючою та рівняння $f(x) = a$ має два корені x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Тоді $f(x_1) < f(x_2)$. Проте $f(x_1) = a$, $f(x_2) = a$, тобто $f(x_1) = f(x_2)$. Отримали суперечність. Отже, рівняння $f(x) = a$ має не більше одного кореня.

Аналогічно розглядається випадок, коли функція f є спадною. ▲

З цього випливає таке твердження:

якщо функція f зростає (спадає) на $D(f)$ і $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 = x_2$, тобто зростаюча (спадна) функція кожного свого значення набуває лише при одному значенні аргументу.

Наслідок. ***Якщо одна з функцій f або g є зростаючою на множині $D(f) \cap D(g)$, а інша — спадною на цій множині, то рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня.***

Доведіть це твердження самостійно.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $x^5 + \sqrt{2x-1} = 2$.

Розв'язання. Легко довести (зробіть це самостійно), що функції $f(x) = x^5$ і $g(x) = \sqrt{2x-1}$ є зростаючими. Отже, згідно з теоремою 6.2 функція $y = f(x) + g(x)$ є зростаючою на множині $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Тоді теорема 6.5 дозволяє стверджувати, що дане рівняння має не більше одного кореня.

Нескладно помітити, що $x = 1$ є коренем даного рівняння. Ураховуючи вищесказане, цей корінь є єдиним.

Відповідь: 1.

Теорема 6.6. ***Якщо функція f є зростаючою, то рівняння $f(f(x)) = x$ рівносильне рівнянню $f(x) = x$.***

Доведення. Нехай x_0 — корінь рівняння $f(x) = x$, тобто $f(x_0) = x_0$. Тоді $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, тобто x_0 — корінь рівняння $f(f(x)) = x$.

Нехай x_1 — корінь рівняння $f(f(x)) = x$, тобто $f(f(x_1)) = x_1$. Доведемо, що $f(x_1) = x_1$. Нехай це не так. Тоді $f(x_1) > x_1$ або $f(x_1) < x_1$.

Розглянемо випадок, коли $f(x_1) > x_1$ (випадок, коли $f(x_1) < x_1$, розглядається аналогічно). Оскільки f — зростаюча функція, то $f(f(x_1)) > f(x_1)$. Але $f(f(x_1)) = x_1$. Звідси $f(x_1) < x_1$. Отримали суперечність.

Отже, $f(x_1) = x_1$ і x_1 — корінь рівняння $f(x) = x$. ▲

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2+\sqrt{2+x}} = x$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{2+x}$. Дане рівняння можна подати в такому вигляді:

$$f(f(x)) = x, \text{ де } f(x) = \sqrt{2+x}.$$

Оскільки функція f є зростаючою, то це рівняння рівносильне рівнянню $f(x) = x$, тобто $\sqrt{2+x} = x$.

Приходимо до рівняння-наслідку:

$$2 + x = x^2.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Перевіркою встановлюємо, що коренем заданого рівняння є тільки $x = 2$.

Відповідь: 2.

Нехай у множині $M \subset D(f)$ існує таке число x_0, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$. У такому випадку говорять, що число $f(x_0)$ — **найбільше значення функції f на множині M**, і записують $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$, то число $f(x_0)$ називають **найменшим значенням функції f на множині M** і записують $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Для $f(x) = \sqrt{x}$ і $M = [0; 4]$ маємо: $\min\limits_{[0;\,4]} f(x) = \min\limits_{[0;\,4]} \sqrt{x} = f(0) = 0$,

$\max\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(4) = 2$ (рис. 6.4).

Для $f(x) = |x|$ і $M = [-1; 2]$ маємо: $\min\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(0) = 0$,

$\max\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(2) = 2$ (рис. 6.5).

Рис. 6.4

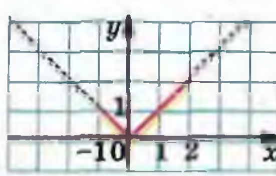


Рис. 6.5

Якщо c — деяке число і $f(x) = c$ для будь-якого $x \in M$, то це число є і найбільшим, і найменшим значенням функції f на множині M.

Не будь-яка функція на заданій множині $M \subset D(f)$ має найменше або найбільше значення. Так, для функцій $f(x) = x^2$ і $f(x) = \{x\}$ $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$, а найбільшого значення на $\mathbb{R}$ ці функції не мають.

Функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множині $M = (0; +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень.

Часто при знаходженні найбільшого і найменшого значень функції зручно користуватися таким очевидним фактом:

- якщо функція f зростає на відрізку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$;
- якщо функція f спадає на відрізку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$.

ПРИКЛАД 6 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x + 2$ на відрізку $[-2; 1]$.

Розв'язання. Функції $y = x^3$ і $y = 3x + 2$ є зростаючими. За теоремою 6.2 зростаючою є і функція f. Отже, $\min\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(-2) = -12$, $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(1) = 6$.

Нехай для будь-якого $x \in D(f) \cap D(g)$ виконується нерівність $f(x) \leqslant A$ і $g(x) \geqslant A$, тоді рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Це очевидне міркування є ключем до розв'язування цілої низки рівнянь.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Розв'язання. Розглянемо функції $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$ і $g(x) = x^2 - 6x + 11$.

Маємо: $g(x) = (x-3)^2 + 2 \geqslant 2$.

Для наборів $\left(\sqrt{x-2}; \sqrt{4-x}\right)$ і $(1; 1)$ застосуємо нерівність Коші—Буняковського:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{x-2} \cdot 1 + \sqrt{4-x} \cdot 1 \leqslant \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{x-2}\right)^2 + \left(\sqrt{4-x}\right)^2} =$$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{x - 2 + 4 - x} = 2$. Звідси $f(x) \leqslant 2$.

Тоді задане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2,\\ (x-3)^2+2=2.\end{cases}$$

Корінь $x = 3$ другого рівняння системи також є коренем першого рівняння.

Відповідь: 3.

ПРИКЛАД 8 Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть нерівність:

$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x) \leqslant 1.$

Розв'язання. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)-1 = x(1-y-z)-yz+y+$ $+z-1$. Вважаючи y і z параметрами, розглянемо функцію $f(x)=(1-y-z)x-yz+y+z-1$. Функція f є лінійною, і при $D(f)=[0; 1]$ її графіком є відрізок. Отже, найбільшого значення функція f набуває на одному з кінців відрізка. Маємо:

$f(0)=-yz+y+z-1=-(y-1)(z-1)\leqslant 0,$

$f(1)=1-y-z-yz+y+z-1=-yz\leqslant 0.$

Отже, $f(0)\leqslant 0$, $f(1)\leqslant 0$. Тому $\max\limits_{[0;\,1]} f(x)\leqslant 0$. Це означає, що для будь-якого $x \in [0; 1]$ виконується нерівність $f(x)\leqslant 0$.

6.1.° На рисунку 6.6 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на $\mathbb{R}$. Які з даних тверджень є правильними:

1) функція спадає на проміжку $(-\infty; -9]$;
2) $f(x) < 0$ при $-5 \leqslant x \leqslant 1$;
3) функція зростає на проміжку $[-2; +\infty)$;
4) $f(x) = 0$ при $x = -5$ і при $x = 1$;
5) функція набуває найменшого значення при $x = -2$?

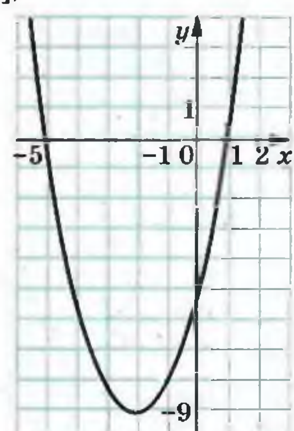


Рис. 6.6

6.2.° На рисунку 6.7 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) значення x, при яких $y < 0$;
3) проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

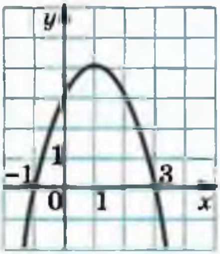


Рис. 6.7

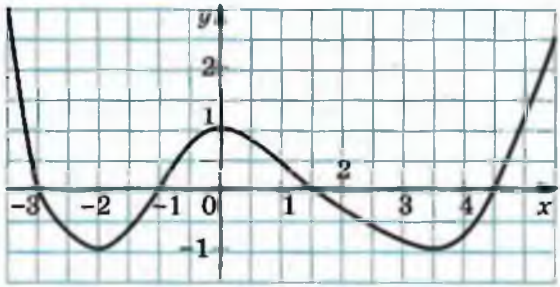


Рис. 6.8

6.3.° На рисунку 6.8 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) проміжки знакосталості функції;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
4) $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)$, $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)$;
5) $\min\limits_{[-2;\,1]} f(x)$, $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x)$;
6) $\min\limits_{[-1;\,4]} f(x)$, $\max\limits_{[-1;\,4]} f(x)$;
7) $\max\limits_{(-2;\,0)} f(x)$, $\min\limits_{(-2;\,0)} f(x)$.

6.4.° На рисунку 6.9 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) проміжки знакосталості функції;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
4) $\max\limits_{[0;\,2]} f(x)$, $\min\limits_{[0;\,2]} f(x)$;
5) $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)$, $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)$;
6) $\max\limits_{[-1;\,0)} f(x)$, $\min\limits_{[-1;\,0)} f(x)$.

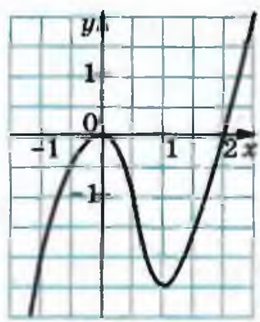


Рис. 6.9

6.5.° Побудуйте графік функції

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 8, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -2x + 8, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

6.6.° Побудуйте графік функції

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x}, \text{ якщо } x<-1,\\ \frac{x}{4}, \text{ якщо } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{4}{x}, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

6.7.° Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = 9x - 4$; 3) $y = 12 - 3x$;
2) $y = -4x + 10$; 4) $y = -x$?

6.8.° Знайдіть нулі функції:

1) $y=\sqrt{x^2-1}$; 4) $y = x^2 + 1$; 7) $y = |x| - x$;
2) $y=\frac{x^2+x-6}{x+3}$; 5) $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$; 8) $y = \{x\}$;
3) $y = x^3 - 4x$; 6) $y=x\sqrt{x-1}$; 9) $y = \mathfrak{D}(x)$.

6.9.° Знайдіть нулі функції:

1) $y=\sqrt{x^2-4}$; 4) $y = |x| + x$; 7) $y = x\mathfrak{D}(x)$;
2) $y = -5$; 5) $y=\frac{x^2-9}{\sqrt{x-2}}$; 8) $y = \operatorname{sgn}(2x - 1)$.
3) $y=\frac{x^2-25}{x+5}$; 6) $y = [x]$;

6.10.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = x^2 - 2x + 1$; 3) $y=\sqrt{x-1}$; 5) $y=\sqrt{x(x-1)^2}$;
2) $y=\frac{9}{3-x}$; 4) $y = |x + 1|$; 6) $y = \{x\}$.

6.11.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = -x^2 - 1$; 4) $y = |x| - 1$; 7) $y = [x]$.
2) $y = x^2 + 4x + 4$; 5) $y = |x^2 - 4|$;
3) $y=\sqrt{x}+2$; 6) $y=\sqrt{(x-1)(x-3)^2}$;

6.12.° При якому найбільшому цілому значенні n функція $y = (8 - 3n)x - 7$ є зростаючою?

6.13.° При яких значеннях m функція $y = mx - m - 3 + 2x$ є спадною?

6.14.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = \{x\}$.

6.15.° Доведіть, що функція є зростаючою:

1) $y = \sqrt{x-1}$; 2) $y = \sqrt{2x+1}$.

6.16.° Доведіть, що функція є зростаючою:

1) $y = \sqrt{x-3} + 2$; 2) $y = \sqrt{3x-1} - 1$.

6.17.° Функція $y = f(x)$ є спадною. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = 3f(x)$; 3) $y = -f(x)$;

2) $y = \frac{1}{3}f(x)$; 4) $y = f(x) + 5$?

6.18.° Функція $y = f(x)$ зростає на множині $\mathbb{R}$. Зростаючою чи спадною на множині $\mathbb{R}$ є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 3) $y = f(-x)$;

2) $y = -3f(x)$; 4) $y = f(x+5)$?

6.19.° Доведіть, що функція $y = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$, n — непарне, є зростаючою.

6.20.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = x^2 + 1$.

6.21.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = -x^2 - 4$.

6.22.° Доведіть, що функція:

1) $y = \frac{6}{3-x}$ зростає на проміжку $(3; +\infty)$;

2) $y = x^2 - 4x + 3$ спадає на проміжку $(-\infty; 2]$.

6.23.° Доведіть, що функція:

1) $y = \frac{7}{x+5}$ спадає на проміжку $(-5; +\infty)$;

2) $y = 6x - x^2$ зростає на проміжку $(-\infty; 3]$.

6.24.° Доведіть, що функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ при $k > 0$ і зростає на кожному з цих проміжків при $k < 0$.

6.25.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = \frac{1}{x^2+1}$.

6.26.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = \frac{1}{-x^2-4}$.

6.27.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $y = |x - a|$.

6.28.° Доведіть, що функція є зростаючою:

1) $y = x^5 + x$; 3) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x}$; 5) $y = x\sqrt{-x}$;

2) $y = x^4 + \sqrt{x}$; 4) $y = x\sqrt{x}$; 6) $y = (\sqrt{x}+1)^2$.

6.29.° Доведіть, що функція є спадною:

1) $y = -x + \frac{1}{\sqrt{x}}$;
2) $y = \sqrt{2 - x} + \sqrt{-x}$;
3) $y = -x\sqrt{-x}$;
4) $y = -x\sqrt{x}$.

6.30.° Функція $y = f(x)$ є зростаючою. Чи правильне твердження, що зростаючою є функція: 1) $y = (f(x))^2$; 2) $y = (f(x))^3$?

6.31.° Знайдіть $\max\limits_M f(x)$ і $\min\limits_M f(x)$, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $M = \mathbb{R}$;
2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $M = (0; +\infty)$;
3) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $M = D(f)$;
4) $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 4}$, $M = \mathbb{R}$.

6.32.° Знайдіть $\max\limits_M f(x)$ і $\min\limits_M f(x)$, якщо:

1) $f(x) = -x^2 - 8x - 3$, $M = \mathbb{R}$;
2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $M = (-\infty; 0)$;
3) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $M = D(f)$.

6.33.** Знайдіть:

1) $\min\limits_{\mathbb{R}} \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$;
2) $\max\limits_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}\right)$;
3) $\max\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 1}$.

6.34.** Функції f і g визначені на множині $\mathbb{R}$. Зростаючою чи спадною є функція $y = f(g(x))$, якщо:
1) f і g — функції, які зростають на $\mathbb{R}$;
2) f і g — функції, які спадають на $\mathbb{R}$?

6.35.** Функції f і g визначені на множині $\mathbb{R}$. Зростаючою чи спадною є функція $y = f(g(x))$, якщо:
1) f зростає на $\mathbb{R}$, g спадає на $\mathbb{R}$;
2) f спадає на $\mathbb{R}$, g зростає на $\mathbb{R}$?

6.36.** При яких значеннях параметра a функція $y = x\,|x - a|$ є зростаючою?

6.37.** При яких значеннях параметра a функція $y = (x - 1)(x - a)^2$ є зростаючою?

6.38.** При яких значеннях параметра a функція $y = |x - a|$ зростає на проміжку $[2; +\infty)$?

6.39.** При яких значеннях параметра a функція $y = |x + a|$ спадає на проміжку $(-\infty; -1]$?

6.40.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 + x^3 + x = -3$;
2) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 6} + \sqrt{x + 13} = 9$;
3) $x^3 + 2x\sqrt{x - 1} = 12$.

6.41.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^7 + x^5 + x = 4$;

2) $2\sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{2x+7} = 13$;

3) $4x^3 + 3x\sqrt{4x-1} = 2$.

6.42.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 23 - 2x$;

2) $x^3 + \sqrt{x} = \frac{2}{x}$.

6.43.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + \sqrt{x} = \frac{12}{x} + 15$;

2) $\frac{17}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

6.44.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^7 - y = y^7 - x, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$

6.45.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^4 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x}, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

6.46.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2\sqrt{x+y} + (x+y)^4 = 3, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

6.47.* Розв'яжіть рівняння $|x| + |x-1| = \frac{4x}{4x^2+1}$.

6.48.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = x^2 + 2$.

6.49.* Розв'яжіть рівняння $2x\sqrt{2x - x^2} = x^2 + 1$.

6.50.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{(4-|x|)(x^2+1)} = x^2 + 2$.

6.51.* Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть нерівність

$$x + y + z - xy - yz - zx \leqslant 1.$$

6.52.* Відомо, що $x_1 \in [0; 1]$, $x_2 \in [0; 1]$, ..., $x_n \in [0; 1]$. Доведіть нерівність

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) + (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \leqslant 2^n.$$

6.53.* Відомо, що $a \in [0; 1]$, $b \in [0; 1]$, $c \in [0; 1]$. Доведіть нерівність

$$abc + 2 \geqslant a + b + c.$$

6.54.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{6 + \sqrt{6 + x}} = x$.

6.55.* Розв'яжіть рівняння $(x^3 + 1)^3 = 8(2x - 1)$.

6.56.* Функція f така, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Чи може функція f бути зростаючою або спадною?

7. Парні і непарні функції

Означення. Функцію f називають парною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = f(x)$.

Означення. Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Очевидно, що функція $y = x^2$ є парною, а функція $y = x^3$ — непарною.

Виконання рівностей $f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Таку множину називають **симетричною відносно початку координат**.

З вищенаведених означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути парною (непарною).

Наприклад, область визначення функції $y = \frac{1}{x-1}$ не є симетричною відносно початку координат. Тому ця функція не є ні парною, ні непарною.

У функції $f(x) = x^3 + x^2$ $D(f) = \mathbb{R}$, тобто її область визначення симетрична відносно початку координат. Проте вона не є ні парною, ні непарною. Дійсно,

$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2$; $-f(x) = -x^3 - x^2$.

Існують деякі значення x, наприклад 0, при яких $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$, проте ці рівності виконуються не для всіх $x \in \mathbb{R}$.

ПРИКЛАД 1 Дослідіть на парність функцію

$$f(x) = \frac{|x-2|}{1+x} + \frac{|x+2|}{1-x}.$$

Розв'язання. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ і } x \neq 1\}$. Отже, область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1-x} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Отже, функція f є парною.

ПРИКЛАД 2 Дослідіть на парність функцію $f(n) = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$, $D(f) = \mathbb{Z}$.

Розв'язання. Множина $\mathbb{Z}$ є симетричною відносно початку координат.

Для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$ маємо:

$$f(-n)=\frac{2^{-n}-1}{2^{-n}+1}=\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2^n}+1}=\frac{\frac{1-2^n}{2^n}}{\frac{1+2^n}{2^n}}=-\frac{2^n-1}{2^n+1}=-f(n).$$

Отже, функція f є непарною.

Теорема 7.1. ***Якщо точка M $(a; b)$ належить графіку парної функції f, то точка M_1 $(-a; b)$ також належить її графіку***[1].

Доведення. Якщо точка $M(a; b)$ належить графіку функції f, то $f(a) = b$. Оскільки функція f є парною, то $f(-a) = f(a) = b$. Це означає, що точка M_1 $(-a; b)$ також належить графіку функції f (рис. 7.1). ▲

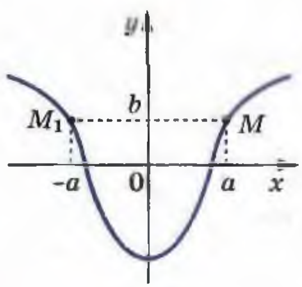


Рис. 7.1

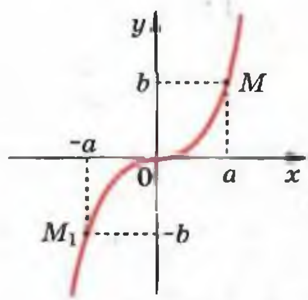


Рис. 7.2

Теорема 7.2. ***Якщо точка M $(a; b)$ належить графіку непарної функції f, то точка M_1 $(-a; -b)$ також належить її графіку***[2] (рис. 7.2).

Доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 7.3. ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є парними (непарними) і $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функція $y = f(x) \pm g(x)$ є парною (непарною).***

Теорема 7.4. ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є парними (непарними) і $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функція $y = f(x)\,g(x)$ є парною. Якщо одна з функцій f або g є парною, а інша — непарною, то функція $y = f(x)\,g(x)$ є непарною.***

Використовуючи означення парної і непарної функцій, доведіть теореми 7.3 і 7.4 самостійно.

---

[1] Про такі графіки говорять, що вісь ординат є їх віссю симетрії, або графік є симетричним відносно осі ординат. Про фігури, які мають вісь симетрії, ви дізнаєтесь з курсу геометрії 9 класу.

[2] Про такі графіки говорять, що початок координат є їх центром симетрії або графік є симетричним відносно початку координат. Про фігури, які мають центр симетрії, ви дізнаєтесь з курсу геометрії 9 класу.

Очевидно, що функція $y = 0$, у якої $D(y) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною функцією. Покажемо, що інших функцій з областю визначення $\mathbb{R}$, які є одночасно і парними, і непарними, не існує.

Нехай функція f, визначена на множині $\mathbb{R}$, є і парною, і непарною. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності $f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$. Звідси $f(x) = -f(x)$, тобто $2f(x) = 0$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$. Отже, функція f така, що $f(x) = 0$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 7.5. ***Кожну функцію f, область визначення якої симетрична відносно початку координат, можна єдиним способом подати у вигляді суми парної і непарної функцій.***

Доведення. Розглянемо функції $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ і $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Легко встановити (переконайтеся в цьому самостійно), що функція g — парна, а функція h — непарна. Очевидно, що $f(x) = g(x) + h(x)$.

Доведемо, що подати функцію f у вигляді суми парної та непарної функцій можна єдиним способом. Нехай це не так, тобто знайдуться парні функції g_1 і g_2 і непарні функції h_1 і h_2 такі, що для будь-якого $x \in D(f)$:

$$f(x) = g_1(x) + h_1(x),$$
$$f(x) = g_2(x) + h_2(x).$$

Звідси для будь-якого $x \in D(f)$ виконується рівність $g_1(x) - g_2(x) = h_2(x) - h_1(x)$.

Нехай $\varphi(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Функція φ — парна.

З іншого боку, функція $\varphi(x) = h_2(x) - h_1(x)$, а отже, функція φ — непарна. Звідси випливає, що функція φ — константа, яка дорівнює нулю. Отже, для будь-якого $x \in D(f)$ виконується рівність $g_1(x) = g_2(x)$ і $h_2(x) = h_1(x)$. ▲

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра a рівняння $2ax^4 + |x| + x^2 = a^2 - 1$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = 2ax^4 + |x| + x^2 - a^2 + 1$. Вона є парною. Тому коли рівняння $f(x) = 0$ має корінь x_0, то воно також має корінь $-x_0$. Оскільки дане рівняння повинно мати єдиний корінь, то $x_0 = -x_0$, тобто $x_0 = 0$. Тоді необхідно, щоб $x = 0$ було коренем даного рівняння.

Підставимо $x = 0$ до заданого рівняння. Отримаємо: $a^2 - 1 = 0$. Звідси $a = \pm 1$.

При цих значеннях параметра a число 0 є коренем заданого рівняння. Проте це не означає, що рівняння не має інших ко-

ренів, відмінних від нуля. Тому знайдені значення параметра a слід перевірити.

При $a = 1$ маємо: $2x^4 + |x| + x^2 = 0$. Оскільки $2x^4 \geqslant 0$, $|x| \geqslant 0$ і $x^2 \geqslant 0$, то це рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

При $a = -1$ маємо: $-2x^4 + |x| + x^2 = 0$. Це рівняння, крім кореня $x = 0$, має й інші корені, наприклад, $x = 1$. Отже, значення $a = -1$ не підходить.

***Відповідь*: $a = 1$.**

7.1.° Функція f є парною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\,f(-5) = -2$; 3) $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 0$?

7.2.° Функція f є парною. Чи обов'язково виконується рівність $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 1$?

7.3.° Функція f є непарною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\,f(-2) = 3$; 3) $\dfrac{f(-2)}{f(2)} = 0$?

7.4.° Доведіть, що функція є парною:

1) $f(x) = 171$;

2) $f(x) = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$ і n — парне;

3) $f(x) = -3x^2 + |x| - 1$;

4) $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}$;

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{x^2 + 3x + 5}$;

6) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}$;

7) $f(x) = \dfrac{|5x-2| + |5x+2|}{x^2 - 1}$;

8) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^7} - \dfrac{1}{(3x+1)^7}$;

9) $f(x) = (x+2)\,|x-4| - (x-2)\,|x+4|$.

7.5.° Доведіть, що функція є непарною:

1) $g(x) = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$ і n — непарне;

2) $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

3) $g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}$;

4) $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}$;

5) $g(x) = \dfrac{|4x-1|-|4x+1|}{x^4-1}$;

6) $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-x+1} + \dfrac{3x-2}{x^2+x+1}$.

7.6.° Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \dfrac{x}{x}$;
2) $y = \dfrac{x-1}{x-1}$;
3) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$;
4) $y = \sqrt{x^2-1}$;
5) $y = \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$;
6) $y = \mathfrak{D}(x)$;
7) $y = x\mathfrak{D}(x)$;
8) $y = \operatorname{sgn} x$.

7.7.° Парні функції f і g такі, що функція $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

7.8.° Непарні функції f і g такі, що функція $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

7.9.° Одна з функцій f або g є парною, інша — непарною. Відомо, що функція $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

7.10.° Функції f і g такі, що функція $y = f(g(x))$ визначена. Дослідіть її на парність, якщо:
1) f і g — парні функції;
2) f і g — непарні функції;
3) f — парна функція, а g — непарна;
4) f — непарна функція, а g — парна.

7.11.° Непарна функція f така, що $0 \in D(f)$. Знайдіть $f(0)$.

7.12.° Непарна функція f має 4 нулі. Доведіть, що $0 \notin D(f)$.

7.13.° Непарна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

7.14.° Парна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

7.15.° Дослідіть на парність функцію $f(n) = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$, $D(f) = \mathbb{Z}$.

7.16.° Дослідіть на парність функцію $f(n) = \left(\sqrt{2}+1\right)^n - \left(\sqrt{2}-1\right)^n$, $D(f) = \mathbb{Z}$.

7.17.° Парна функція f, визначена на $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty; 0]$.

7.18.* Непарна функція f, визначена на $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty; 0]$.

7.19.* Функція f є парною і $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 5$. Знайдіть $\min\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$.

7.20.* Функція f є непарною і $\min\limits_{[2;\,5]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[2;\,5]} f(x) = 3$. Знайдіть $\min\limits_{[-5;\,-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;\,-2]} f(x)$.

7.21.** Парна функція f визначена на відрізку $[-5; 5]$ і на кінцях цього проміжку досягає найбільшого і найменшого значень. Знайдіть $f(-0{,}2) - f(1)$.

7.22.** Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $y = (x - 1)^4 + a(x + 1)^4$ є: 1) парною; 2) непарною.

7.23.* Після розкриття дужок і зведення подібних доданків у виразі $(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{20})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{20})$ отримали многочлен. Доведіть, що цей многочлен не містить одночленів непарного степеня.

7.24.* При яких значеннях параметра a рівняння $ax^5 + 1 = a^2\sqrt{1 - |x|}$ має єдиний корінь?

8. Як побудувати графіки функцій $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

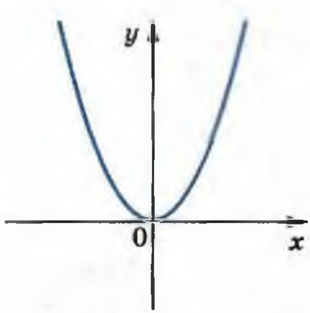


Рис. 8.1

У 8 класі ви ознайомилися з функцією $y = x^2$ і дізналися, що її графіком є фігура, яку називають параболою (рис. 8.1).

Покажемо, як можна, використовуючи графік функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$.

Побудуємо, наприклад, графік функції $y = 2x^2$.

Складемо таблицю значень функцій $y = x^2$ і $y = 2x^2$ при одних і тих самих значеннях аргументу:

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = 2x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18

Ця таблиця підказує, що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0; 2y_0)$ графіка функції $y = 2x^2$. А кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = 2x^2$ є відповідною єдиній точці $\left(x_1; \frac{y_1}{2}\right)$ графіка функції $y = x^2$. Тобто між точками графіків $y = x^2$ і $y = 2x^2$ можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тому всі точки графіка функції $y = 2x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на 2 (рис. 8.2).

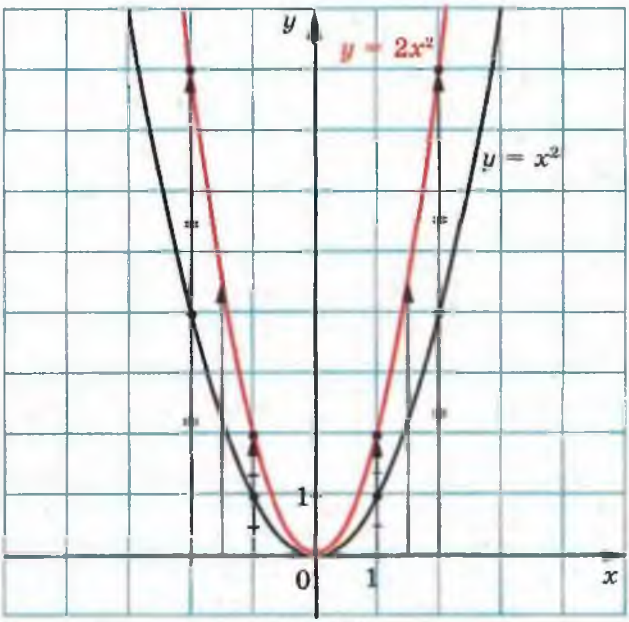


Рис. 8.2

Використовуючи графік функції $y = x^2$, побудуємо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$.

Очевидно, що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $\left(x_0; \frac{1}{2}y_0\right)$ графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2$. Отже, усі точки графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на $\frac{1}{2}$ (рис. 8.3).

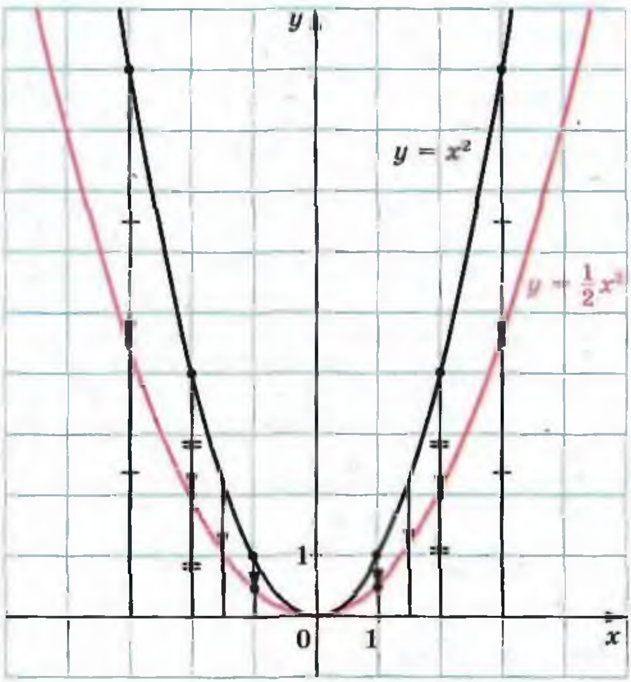


Рис. 8.3

Ці приклади підказують, як, використовуючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$.

Графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на k.

На рисунках 8.4, 8.5 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ і $y = \frac{3}{x}$.

Кажуть, що графік функції $y = kf(x)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті **розтягу в k разів від осі абсцис**, якщо $k > 1$, або в результаті **стиску в $\frac{1}{k}$ разів до осі абсцис**, якщо $0 < k < 1$.

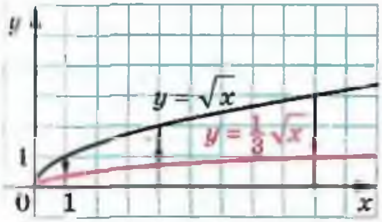


Рис. 8.4

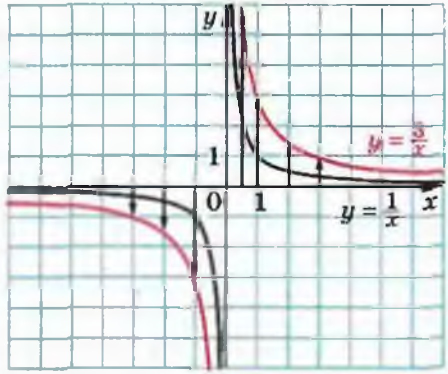


Рис. 8.5

Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = -x^2$. Кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0; -y_0)$ графіка функції $y = -x^2$. А кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = -x^2$ є відповідною єдиній точці $(x_1; -y_1)$ графіка функції $y = x^2$. Тобто між точками графіків $y = x^2$ і $y = -x^2$ можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тому всі точки графіка функції $y = -x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на -1 (рис. 8.6). Також говорять, що графік функції $y = -x^2$ отримано з графіка функції $y = x^2$ в результаті **симетрії відносно осі абсцис.**

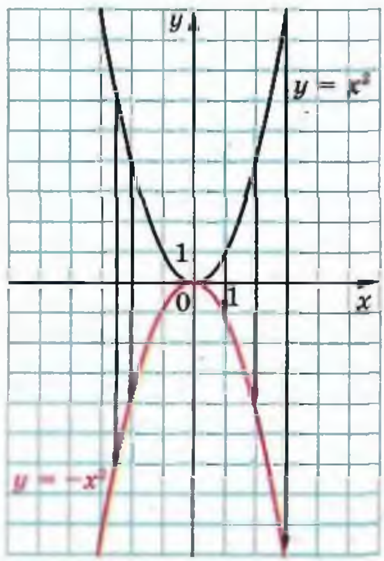


Рис. 8.6

З огляду на це стає зрозумілим, що правило побудови графіка функції $y = kf(x)$, де $k < 0$, таке саме, як і для випадку, коли $k > 0$.

Наприклад, на рисунку 8.7 показано, як можна за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Рисунок 8.8 ілюструє, як за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудувати графіки функцій $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ і $y = -2\sqrt{x}$.

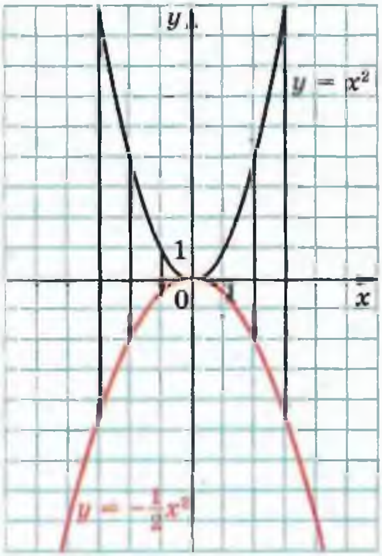


Рис. 8.7

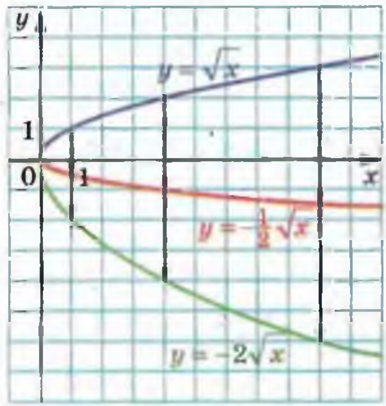


Рис. 8.8

Зауважимо, що при $k \neq 0$ нулі функцій $y = f(x)$ і $y = kf(x)$ збігаються. Отже, графіки цих функцій перетинають вісь абсцис в одних і тих самих точках (рис. 8.9).

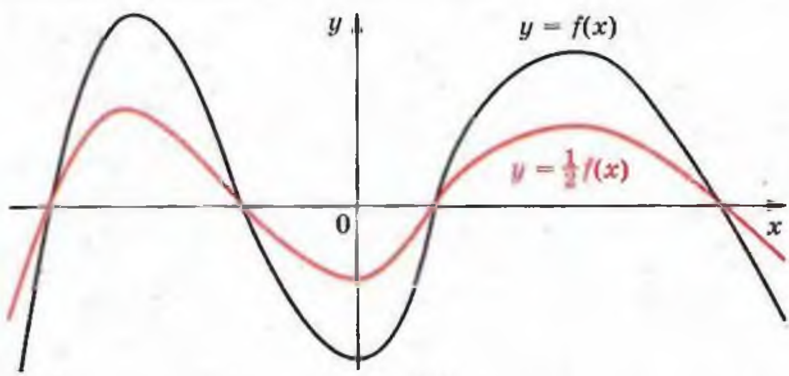


Рис. 8.9

На рисунку 8.10 зображено графіки функцій $y = ax^2$ при деяких значеннях параметра a. Кожний із цих графіків, як і графік функції $y = x^2$, називають **параболою**. Точка (0; 0) є вершиною кожної з цих парабол.

Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.

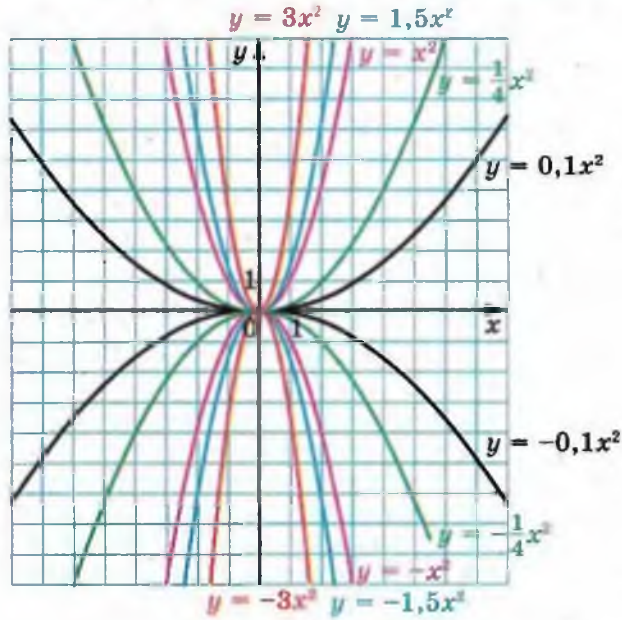


Рис. 8.10

Часто замість вислову «дано функцію $y = ax^2$» вживають «дано параболу $y = ax^2$».

У таблиці наведено властивості функції $y = ax^2$, $a \neq 0$.

Властивість	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$
Зростає на проміжку	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$
Парність	парна	парна

Покажемо, як можна побудувати графік функції $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Розглянемо випадок, коли $k > 0$. Якщо точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ належить графіку функції $y = f(kx)$. Справді, при $x = \frac{x_0}{k}$ маємо: $f(kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) =$

$= f(x_0) = y_0$.

Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ графіка функції $y = f(kx)$. Аналогічно можна показати, що кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(kx)$ є відповідною єдиній точці $(kx_1; y_1)$ графіка функції $y = f(x)$. Тобто між точками графіків функцій $y = f(x)$ і $y = f(kx)$ можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Тому ***всі точки графіка функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою ординатою і абсцисою, поділеною на k.***

На рисунку 8.11 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{2x}$ і $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

Говорять, що графік функції $y = f(kx)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті **стиску в k разів до осі ординат**, якщо $k > 1$, або в результаті **розтягу в $\frac{1}{k}$ разів від осі ординат**, якщо $0 < k < 1$.

Покажемо, як побудувати графік функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

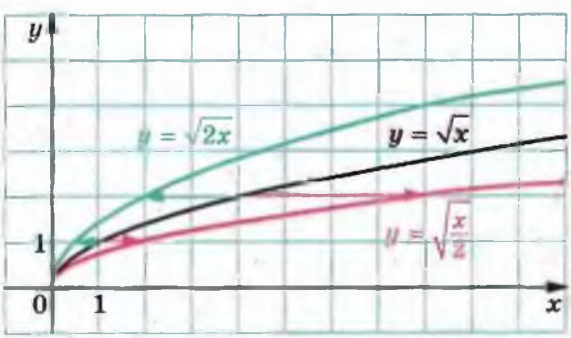


Рис. 8.11

Зазначимо, що коли точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(-x)$. Дійсно, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Зрозуміло, що між точками графіків функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$ можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тоді всі точки графіка функції $y = f(-x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з такою самою ординатою і протилежною абсцисою.

Таке перетворення графіка функції $y = f(x)$ називають **симетрією відносно осі ординат**.

На рисунку 8.12 показано, як за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудовано графік функції $y = \sqrt{-x}$.

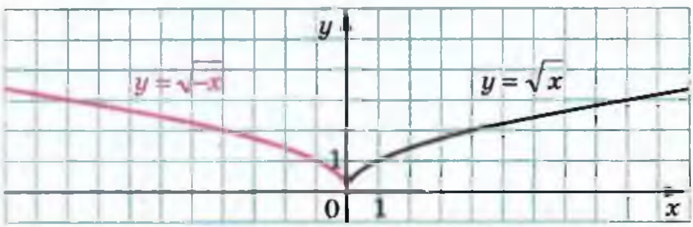


Рис. 8.12

З огляду на сказане стає зрозумілим, що правило побудови графіка функції $y = f(kx)$, де $k < 0$, аналогічне випадку, коли $k > 0$. Наприклад, на рисунку 8.13 показано, як можна за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудувати графіки функцій $y = \sqrt{-3x}$ і $y = \sqrt{-\frac{x}{2}}$.

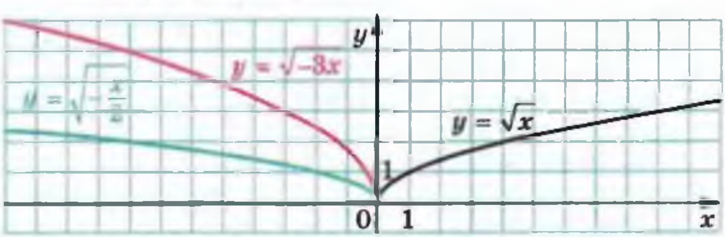


Рис. 8.13

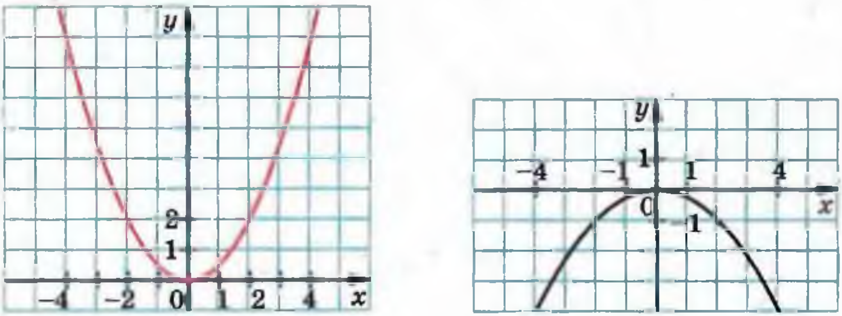
8.1.° При яких значеннях параметра a точка $A(a; 16)$ належить графіку функції $y = 4x^2$?

8.2.° При яких значеннях параметра b точка $B(-2; b)$ належить графіку функції $y = -0{,}2x^2$?

8.3.° Відомо, що точка M (3; −6) належить графіку функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.

8.4.° Відомо, що точка K (−5; 10) належить графіку функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.

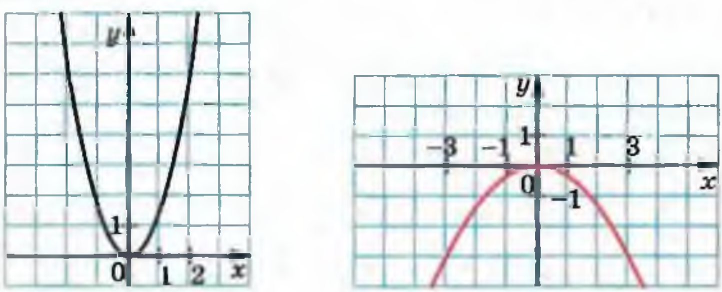
8.5.° На рисунку 8.14 зображено графік функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.



а) *б)*

Рис. 8.14

8.6.° На рисунку 8.15 зображено графік функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.



а) *б)*

Рис. 8.15

8.7.° На рисунку 8.16 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -f(x)$; 3) $y = -2f(x)$.

8.8.° На рисунку 8.17 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{3}g(x)$; 2) $y = -\frac{1}{2}g(x)$.

8.9.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 8.18, побудуйте графік функції $y = f(-x)$.

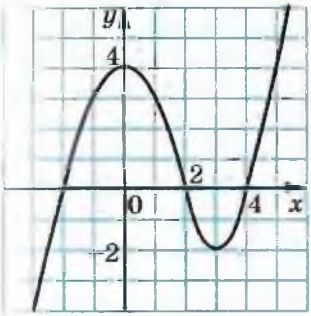


Рис. 8.16

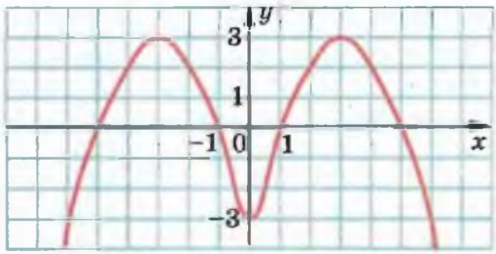
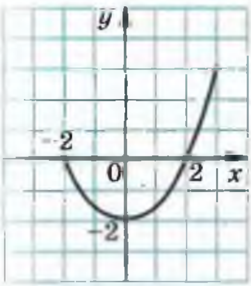
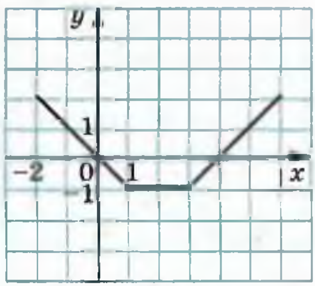


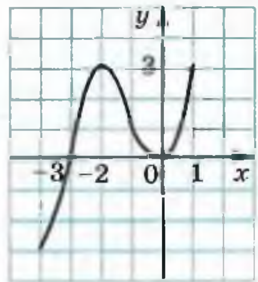
Рис. 8.17



а)



б)



в)

Рис. 8.18

8.10.° Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x-2}$. Використовуючи побудований графік, побудуйте графік функції $y = \sqrt{-x-2}$.

8.11.° На рисунку 8.19 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(2x)$; 2) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$.

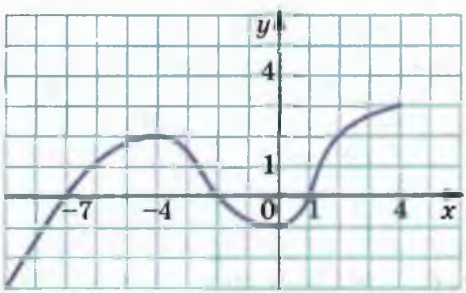


Рис. 8.19

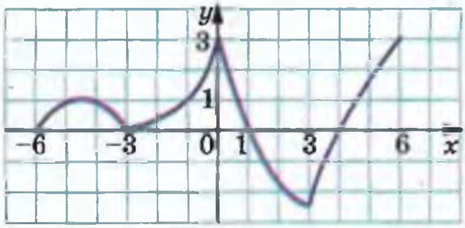


Рис. 8.20

8.12.° На рисунку 8.20 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = g\left(\frac{3}{2}x\right)$; 2) $y = g(-3x)$.

8.13.° Використовуючи графік функції $y = x^2$, побудуйте графіки функцій $y = 3x^2$ і $y = -\frac{1}{4}x^2$.

8.14.° Використовуючи графік функції $y = \sqrt{x}$, побудуйте графіки функцій $y = 4\sqrt{x}$ і $y = \sqrt{-\frac{x}{3}}$.

8.15.° Використовуючи графік функції $y = \sqrt{x}$, побудуйте графіки функцій $y = -\sqrt{x}$ і $y = \sqrt{3x}$.

8.16.° Використовуючи графік функції $y = |x|$, побудуйте графіки функцій $y = \frac{1}{2}|x|$ і $y = -2|x|$.

8.17.° Доведіть, що функція $y = ax^2$ при $a > 0$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

8.18.° Доведіть, що функція $y = ax^2$ при $a < 0$ зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

8.19.° Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ -x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -x^2, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.

8.20.° Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} -2, & \text{якщо } x < -1, \\ -2x^2, & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2x^2, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.

8.21.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = -2x^2$ на множині M, якщо:
1) $M = [-3; -2]$; 3) $M = [-2; 1]$; 5) $M = [1; 3)$.
2) $M = [1; 2]$; 4) $M = (-3; 1]$;

8.22.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = \frac{1}{2}x^2$ на множині M, якщо:
1) $M = [-2; -1]$; 3) $M = [-2; 4]$; 5) $M = (-4; -2)$.
2) $M = [2; 4]$; 4) $M = [-2; 4)$;

8.23.° Побудуйте графік функції:
1) $y = 2[x]$; 2) $y = -\frac{1}{2}\{x\}$; 3) $y = 3 \operatorname{sgn} x$.

8.24.° Побудуйте графік функції:
1) $y = -\frac{1}{2}[x]$; 2) $y = 2\{x\}$; 3) $y = -2 \operatorname{sgn} x$.

8.25.• Побудуйте графік функції:
1) $y = [2x]$; 2) $y = \left\{-\frac{x}{2}\right\}$.

8.26.• Побудуйте графік функції:
1) $y = \left[-\frac{x}{2}\right]$; 2) $y = \{2x\}$.

9. Як побудувати графіки функцій $y = f(x) + b$ і $y = f(x + a)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Покажемо, як, використовуючи графік функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = x^2 + 2$.

Складемо таблицю значень цих функцій при одних і тих самих значеннях аргументу.

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = x^2 + 2$	11	8,25	6	4,25	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11

Кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0; y_0 + 2)$ графіка функції $y = x^2 + 2$. А кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = x^2 + 2$ є відповідною єдиній точці $(x_1; y_1 - 2)$ графіка функції $y = x^2$. Тобто між точками графіків функцій $y = x^2$ і $y = x^2 + 2$ можна встановити взаємно однозначну відповідність. Тому всі точки графіка функції $y = x^2 + 2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, збільшеною на 2 (рис. 9.1).

Говорять, що графік функції $y = x^2 + 2$ отримано в результаті **паралельного перенесення**[1] графіка функції $y = x^2$ на дві одиниці вгору.

Аналогічно графік функції $y = x^2 - 4$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ на 4 одиниці вниз (рис. 9.2).

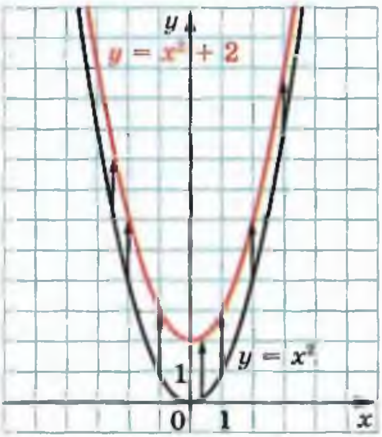


Рис. 9.1

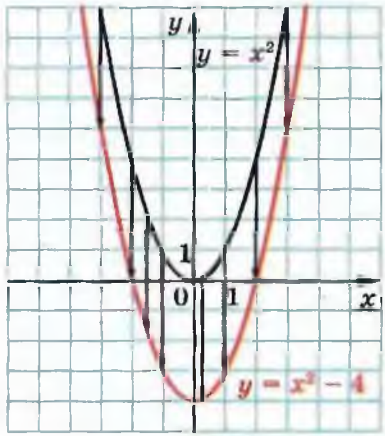


Рис. 9.2

Очевидно, що в результаті паралельного перенесення отримуємо фігуру, яка дорівнює фігурі, що є графіком вихідної функції. Наприклад, графіками функцій $y = x^2 + 2$ і $y = x^2 - 4$ є параболи, які дорівнюють параболі $y = x^2$.

Ці приклади підказують, як можна, використовуючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = f(x) + b$.

Графік функції $y = f(x) + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на b одиниць угору, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць униз, якщо $b < 0$.

На рисунках 9.3, 9.4 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{x} + 3$ і $y = \frac{1}{x} - 1$.

Покажемо, як можна за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = (x + 2)^2$.

---

[1] Пізніше на уроках геометрії ви більш докладно ознайомитесь із паралельним перенесенням.

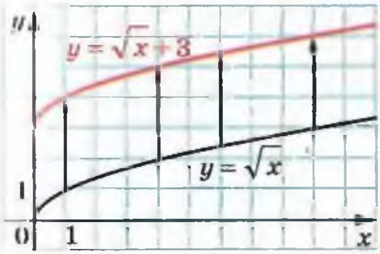


Рис. 9.3

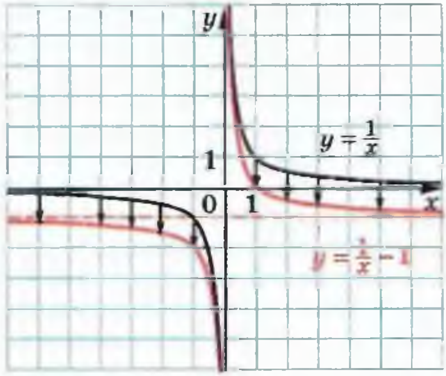


Рис. 9.4

Нехай точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = x^2$, тобто $x_0^2 = y_0$. Доведемо, що точка $(x_0 - 2; y_0)$ належить графіку функції $y = (x + 2)^2$. Знайдемо значення цієї функції у точці з абсцисою $x_0 - 2$. Маємо: $((x_0 - 2) + 2)^2 = x_0^2 = y_0$. Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0 - 2; y_0)$ графіка функції $y = (x + 2)^2$. Аналогічно можна показати, що кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = (x + 2)^2$ є відповідною єдиній точці $(x_1 + 2; y_1)$ графіка функції $y = x^2$. Тобто між точками графіків функцій $y = x^2$ і $y = (x + 2)^2$ можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Тому всі точки графіка функції $y = (x + 2)^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою ординатою і абсцисою, зменшеною на 2 (рис. 9.5).

Також кажуть, що графік функції $y = (x + 2)^2$ отримують у результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ на дві одиниці вліво.

Розглянемо ще один приклад. Побудуємо графік функції $y = (x - 2)^2$. Легко показати (зробіть це самостійно), що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0 + 2; y_0)$ графіка функції $y = (x - 2)^2$ і кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = (x - 2)^2$ є відповідною єдиній

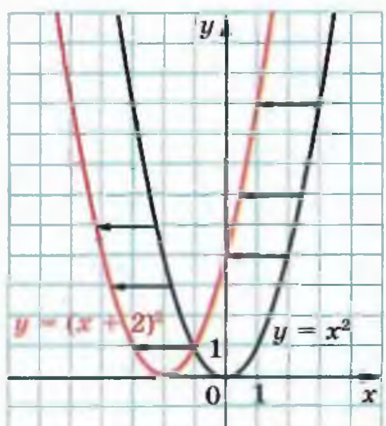


Рис. 9.5

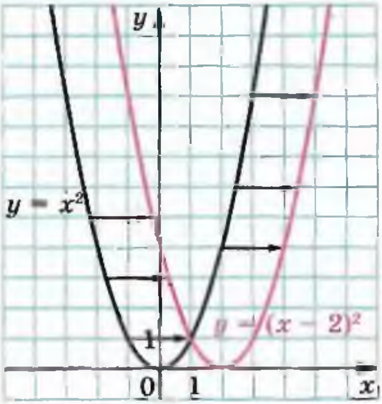


Рис. 9.6

точці $(x_1 - 2;\ y_1)$ графіка функції $y = x^2$. Тому графік функції $y = (x - 2)^2$ отримують у результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ на 2 одиниці вправо (рис. 9.6).

Зрозуміло, що в результаті описаного паралельного перенесення отримуємо фігуру, яка дорівнює фігурі, що є графіком вихідної функції. Наприклад, графіками функцій $y = (x + 2)^2$ і $y = (x - 2)^2$ є параболи, які дорівнюють параболі $y = x^2$.

Ці приклади підказують, як можна, використовуючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = f(x + a)$.

Графік функції $y = f(x + a)$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на a одиниць вліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць вправо, якщо $a < 0$.

На рисунках 9.7, 9.8 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{x + 3}$ і $y = \dfrac{1}{x - 1}$.

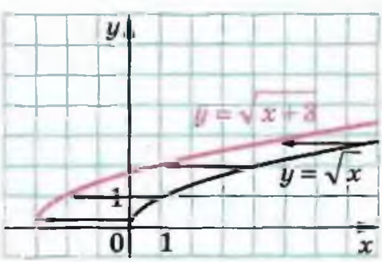


Рис. 9.7

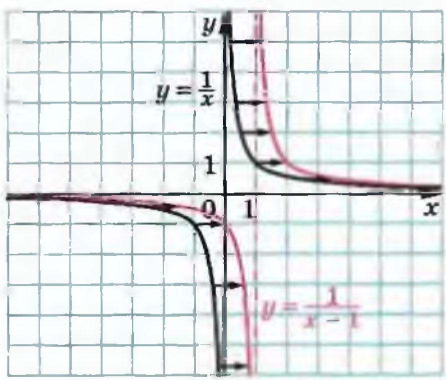


Рис. 9.8

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y = (x - 1)^2 + 3$.

Розв'язання

1) Побудуємо графік функції $y = x^2$.

2) Паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 1 одиницю вправо. Отримаємо графік функції $y = (x - 1)^2$ (рис. 9.9).

3) Паралельно перенесемо графік функції $y = (x - 1)^2$ на 3 одиниці вгору. Отримаємо графік функції $y = (x - 1)^2 + 3$ (рис. 9.9).

Описаний алгоритм побудови можна подати у вигляді такої схеми:

$$y = x^2 \xrightarrow[\text{на 1 од.}]{\text{управо}} y = (x - 1)^2 \xrightarrow[\text{на 3 од.}]{\text{угору}} y = (x - 1)^2 + 3$$

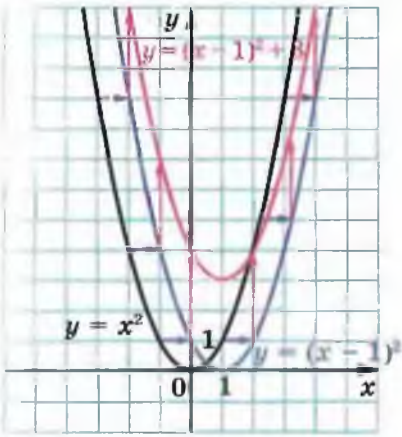


Рис. 9.9

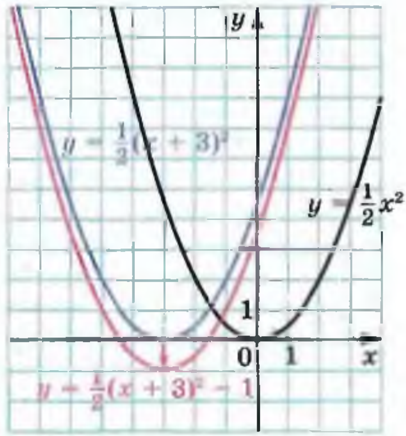


Рис. 9.10

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$.

Розв'язання.

1) Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 9.10).

2) Паралельно перенесемо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ на 3 одиниці вліво. Отримаємо графік функції $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ (рис. 9.10).

3) Паралельно перенесемо графік функції $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ на 1 одиницю вниз. Отримаємо шуканий графік.

Схема побудови має такий вигляд:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[\text{на 3 од.}]{\text{уліво}} y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 \xrightarrow[\text{на 1 од.}]{\text{униз}} y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$$

З описаних перетворень випливає, що графіком функції $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$ є парабола з вершиною в точці $(-3; -1)$, яка дорівнює параболі $y = \frac{1}{2}x^2$.

З цього прикладу стає зрозумілим алгоритм побудови графіка функції $y = kf(x + a) + b$, зокрема $y = k(x + a)^2 + b$. **Графіком функції $y = k(x + a)^2 + b$, $k \neq 0$, є парабола, яка дорівнює параболі $y = kx^2$ і вершина якої знаходиться в точці $(-a; b)$.**

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції $y = -2x^2 - 20x - 47$.

Розв'язання. Маємо: $-2x^2 - 20x - 47 = -2x^2 - 20x - 50 + 3 = -2(x + 5)^2 + 3$.

Отже, формулу, яка задає дану функцію, можна подати у вигляді $y = kf(x + a) + b$, де $f(x) = x^2$, $k = -2$, $a = 5$, $b = 3$.

Схема побудови має такий вигляд:

$$y = -2x^2 \xrightarrow[\text{на 5 од.}]{\text{уліво}} y = -2(x + 5)^2 \xrightarrow[\text{на 3 од.}]{\text{угору}} y = -2(x + 5)^2 + 3$$

Побудований графік є параболою з вершиною в точці $(-5; 3)$, яка дорівнює параболі $y = -2x^2$ (рис. 9.11).

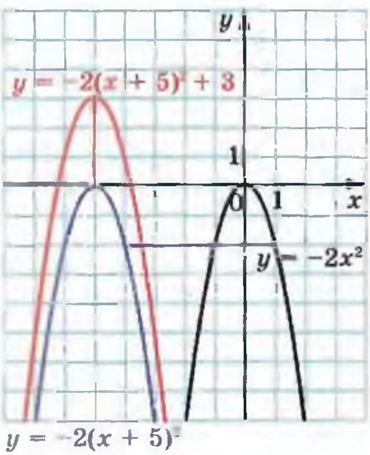


Рис. 9.11

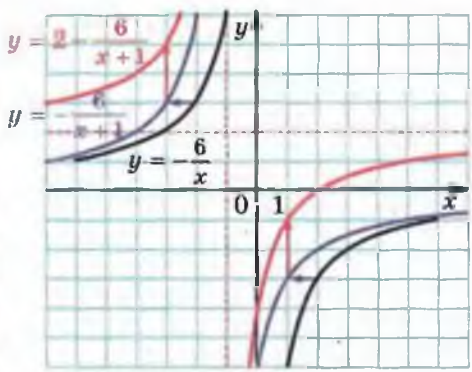


Рис. 9.12

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = \dfrac{2x - 4}{x + 1}$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{2x - 4}{x + 1} = \dfrac{2x + 2 - 6}{x + 1} = \dfrac{2(x + 1) - 6}{x + 1} = 2 - \dfrac{6}{x + 1}$.

Схема побудови має такий вигляд (рис. 9.12):

$$y = -\frac{6}{x} \xrightarrow[\text{на 1 од.}]{\text{уліво}} y = -\frac{6}{x + 1} \xrightarrow[\text{на 2 од.}]{\text{угору}} y = 2 - \frac{6}{x + 1}$$

З описаних перетворень випливає, що шуканий графік є гіперболою, яка дорівнює гіперболі $y = -\dfrac{6}{x}$.

Цей приклад підказує, як розв'язати більш загальну задачу: побудувати графік функції $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, де a, b, c, d — параметри, причому $c \neq 0$.

Маємо: $\dfrac{ax + b}{cx + d} = \dfrac{\frac{a}{c}(cx + d) - \frac{ad}{c} + b}{cx + d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$.

Таким чином, функцію, яка розглядається, подали у вигляді $y = m + \dfrac{k}{x + n}$, де $m = \dfrac{a}{c}$, $n = \dfrac{d}{c}$, $k = \dfrac{b}{c} - \dfrac{ad}{c^2}$. Будувати такий графік ми вже вміємо.

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \sqrt{3x - 2}$.

Розв'язання. Схема побудови має такий вигляд (рис. 9.13):

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{управо на 2 од.}} y = \sqrt{x - 2} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y = \sqrt{3x - 2}$$

Якщо задану функцію подати у вигляді $y = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)}$, то побудову графіка можна вести за такою схемою (рис. 9.14):

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y = \sqrt{3x} \xrightarrow{\text{управо на } \frac{2}{3} \text{ од.}} y = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)}$$

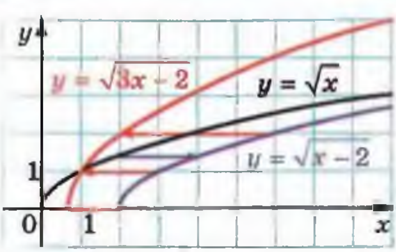


Рис. 9.13

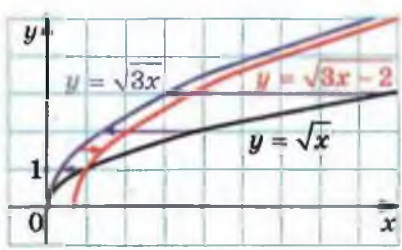


Рис. 9.14

ПРИКЛАД 6 Побудуйте графік функції $y = \sqrt{1 - 3x}$.

Розв'язання. Побудову графіка можна вести за однією з трьох таких схем (рис. 9.15–9.17 відповідно):

$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y=\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-x+1} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{-3x+1}$

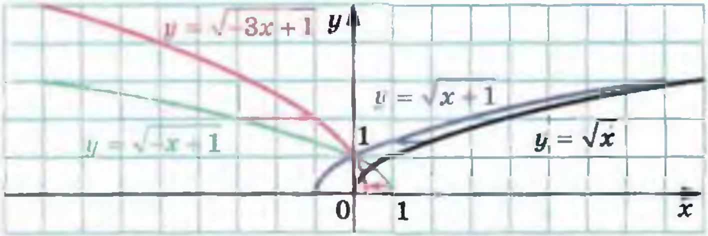


Рис. 9.15

$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y=\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-3x+1}$

Рис. 9.16

$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-x} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{-3x} \xrightarrow{\text{управо на } \frac{1}{3} \text{ од.}} y=\sqrt{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}$

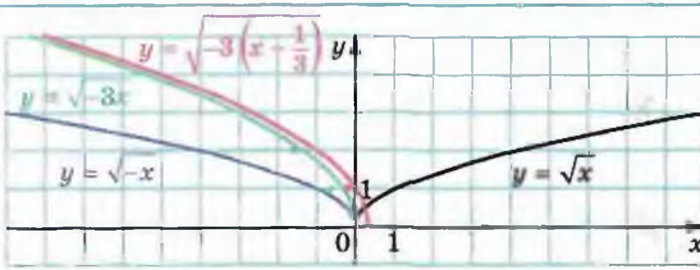


Рис. 9.17

ПРИКЛАД 7 Визначте кількість коренів рівняння $|x - a| + 2|x + 1| = 3$ залежно від значення параметра a.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння так:

$$|x - a| = 3 - 2|x + 1|.$$

Розглянемо функції $f(x) = |x - a|$ і $g(x) = 3 - 2|x + 1|$. Задача зводиться до того, щоб з'ясувати, скільки точок перетину залежно від значення параметра a мають графіки функцій f і g.

Графік функції g зображено на рисунку 9.18 червоним кольором.

Графік функції f — це фігура, яку отримують у результаті паралельного перенесення вздовж осі абсцис графіка функції $y = |x|$ (синім кольором зображено графік для від'ємного значення a, зеленим — для додатного, чорним — для $a = 0$).

З рисунка 9.18 видно, що коли вершина кута, який є графіком функції f, розміщена на осі абсцис лівіше від точки A або правіше від точки B, то графіки функцій f і g не перетинаються. Якщо вершина кута збігається або з точкою A, або з точкою B, то графіки функцій f і g мають одну спільну точку — точку $C(-1; 3)$. Якщо вершина кута знаходиться між точками A і B, то графіки функцій f і g мають дві спільні точки.

Координати точок A і B мають вигляд $(a; 0)$.

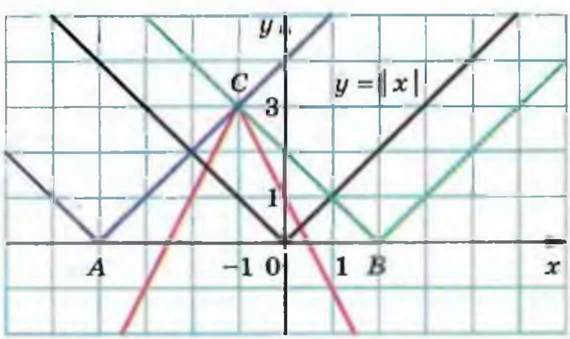


Рис. 9.18

Значення параметра a можна знайти, підставивши в рівняння $y = |x - a|$ координати точки C. Маємо: $3 = |-1 - a|$. Звідси $a = -4$ або $a = 2$.

Маємо: $A(-4; 0)$, $B(2; 0)$.

Звернувшись ще раз до рисунка 9.18, можна записати відповідь.

Відповідь: Якщо $a < -4$ або $a > 2$, то коренів немає; якщо $a = -4$ або $a = 2$, то один корінь; якщо $-4 < a < 2$, то 2 корені.

9.1.° Графік якої функції отримаємо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо:
1) на 6 одиниць угору;
2) на 9 одиниць управо;
3) на 12 одиниць униз;
4) на 7 одиниць уліво;
5) на 2 одиниці вправо і на 3 одиниці вниз;
6) на 1 одиницю вліво і на 1 одиницю вгору?

9.2.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 4 одиниці вправо:
1) $y = x^2 + 4$;
2) $y = x^2 - 4$;
3) $y = (x + 4)^2$;
4) $y = (x - 4)^2$?

9.3.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 5 одиниць угору:
1) $y = x^2 + 5$;
2) $y = x^2 - 5$;
3) $y = (x + 5)^2$;
4) $y = (x - 5)^2$?

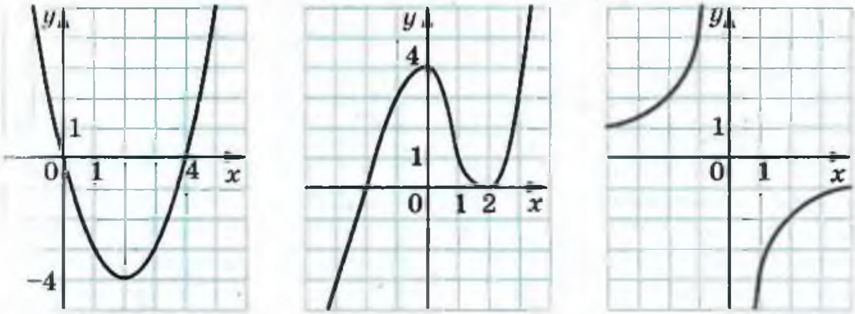
9.4.° Які координати має вершина параболи:
1) $y = x^2 + 8$;
2) $y = x^2 - 8$;
3) $y = (x + 8)^2$;
4) $y = (x - 8)^2$;
5) $y = (x - 4)^2 + 3$;
6) $y = (x + 4)^2 + 3$;
7) $y = (x - 4)^2 - 3$;
8) $y = (x + 4)^2 - 3$?

9.5.° У якій координатній чверті знаходиться вершина параболи:
1) $y = (x + 10)^2 - 16$;
2) $y = (x - 11)^2 + 15$;
3) $y = (x + 15)^2 + 4$;
4) $y = (x - 11)^2 - 9$?

9.6.° Як треба паралельно перенести графік функції $y = \frac{5}{x}$, щоб отримати графік функції $y = \frac{5}{x - 8}$:
1) на 8 одиниць угору;
2) на 8 одиниць униз;
3) на 8 одиниць управо;
4) на 8 одиниць уліво?

9.7.° Як треба паралельно перенести графік функції $y = \sqrt{x}$, щоб отримати графік функції $y = \sqrt{x + 3}$:
1) на 3 одиниці вгору;
2) на 3 одиниці вниз;
3) на 3 одиниці вправо;
4) на 3 одиниці вліво?

9.8.° На рисунку 9.19 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:
1) $y = f(x) - 2$;
2) $y = f(x) + 4$;
3) $y = f(x - 3)$;
4) $y = f(x + 1)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = 3 - f(x)$.



а) *б)* *в)*

Рис. 9.19

9.9.° На рисунку 9.20 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

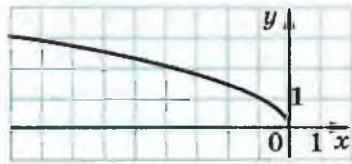


Рис. 9.20

1) $y = f(x) + 5$; 4) $y = f(x - 2)$;
2) $y = f(x) - 3$; 5) $y = -f(x)$;
3) $y = f(x + 1)$; 6) $y = -f(x) - 1$.

9.10.° Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 3$; 3) $y = (x - 5)^2$; 5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
2) $y = x^2 + 4$; 4) $y = (x + 2)^2$; 6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

9.11.° Побудуйте графік функції $y = -x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = -x^2 + 1$; 3) $y = -(x - 2)^2$; 5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
2) $y = -x^2 - 2$; 4) $y = -(x + 4)^2$; 6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

9.12.° Побудуйте графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = -\frac{6}{x} + 5$; 2) $y = -\frac{6}{x - 2}$; 3) $y = -\frac{6}{x + 4} - 2$.

9.13.° Побудуйте графік функції $y = \frac{2}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$; 2) $y = \frac{2}{x + 1}$; 3) $y = \frac{2}{x - 3} + 6$.

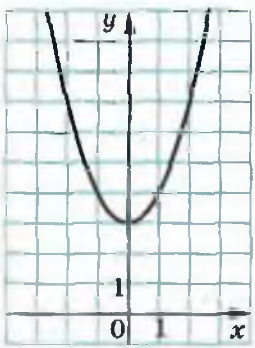
9.14.° Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x} - 4$; 2) $y = \sqrt{x - 4}$; 3) $y = \sqrt{x - 1} + 3$.

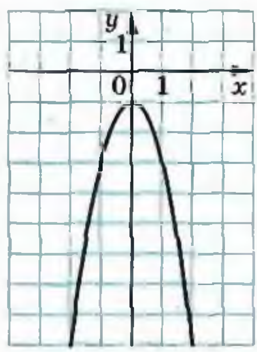
9.15.° Побудуйте графік функції $y = (x + 5)^2 - 9$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) нулі функції;
2) при яких значеннях аргументу функція набуває додатних значень;
3) проміжок зростання і проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

9.16.° Побудуйте графік функції $y = (x - 4)^2 + 4$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) нулі функції;
2) при яких значеннях аргументу функція набуває від'ємних значень;
3) проміжок зростання і проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

9.17.° Задайте формулою виду $y = ax^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 9.21.



а)



б)

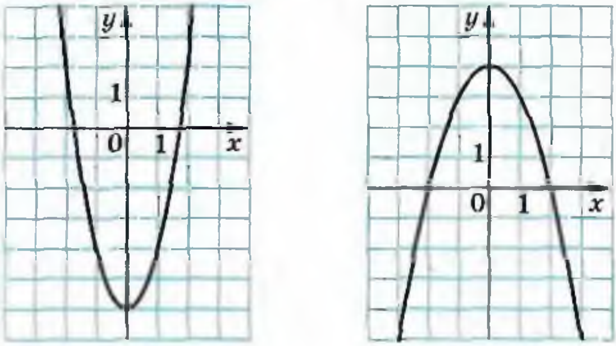
Рис. 9.21

9.18.° Задайте формулою виду $y = ax^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 9.22.

9.19.° Задайте формулою виду $y = a(x + m)^2$ функцію, графік якої зображено на рисунку 9.23.

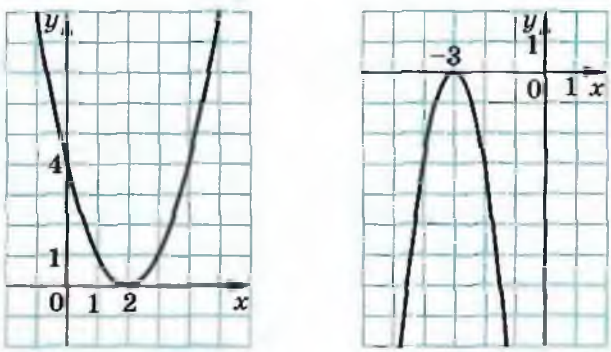
9.20.° Задайте формулою виду $y = a(x + m)^2$ функцію, графік якої зображено на рисунку 9.24.

9.21.° Задайте формулою виду $y = a(x + m)^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 9.25.



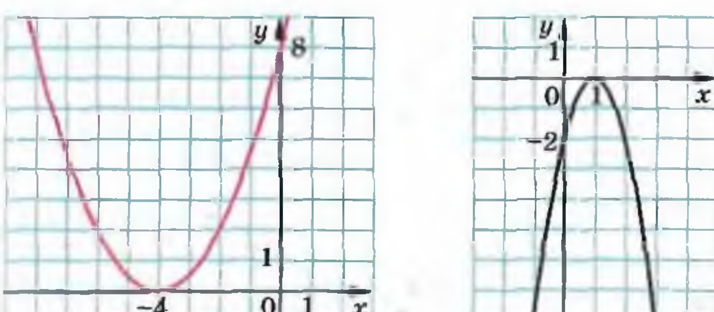
а) б)

Рис. 9.22



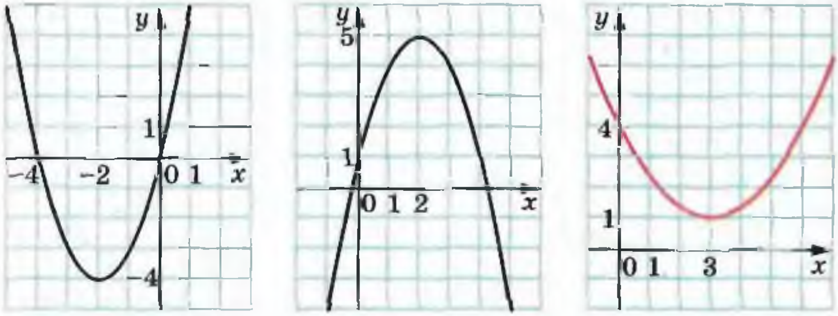
а) б)

Рис. 9.23



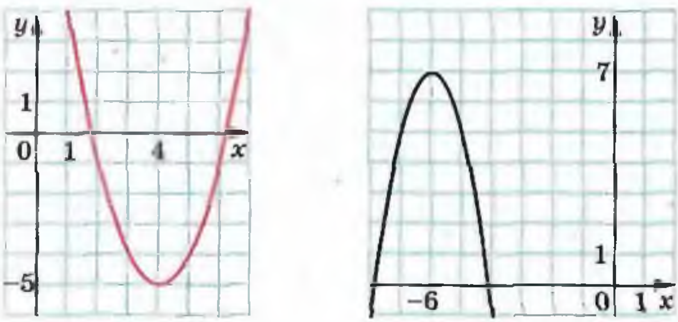
а) б)

Рис. 9.24



а) б) в)

Рис. 9.25



а) б)

Рис. 9.26

9.22.° Задайте формулою виду $y = a(x + m)^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 9.26.

9.23.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $(x-1)^2 = \frac{2}{x}$; 2) $2 - x^2 = \sqrt{x}$.

9.24.° Розв'яжіть графічно рівняння $\frac{3}{x} = \sqrt{x} + 2$.

9.25.° Побудуйте графік функції $y = |x|$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = |x - 2| + 1$; 3) $y = 3 - |x + 2|$; 5) $y = 1 - 2|x - 1|$.

2) $y = |3 - x| - 2$; 4) $y = \frac{1}{2}|x + 1| - 3$;

9.26.° Побудуйте графік функції $y = |x|$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = |x - 1| - 3$; 2) $y = 2 - |x + 4|$; 3) $y = 2 - 3|x + 1|$.

9.27. Прямі m і n, зображені на рисунку 9.27, паралельні, причому пряма n є графіком функції $y = f(x)$. Яке з тверджень є правильним:

1) пряма m є графіком функції $y = f(x) + b$;
2) пряма m є графіком функції $y = f(x - a)$?

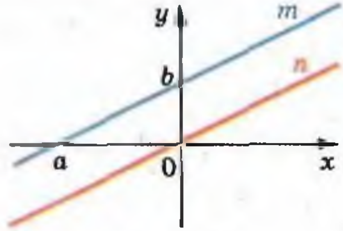


Рис. 9.27

9.28. Задайте дану функцію формулою виду $y = a(x - m)^2 + n$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$;
2) $y = -x^2 + 6x - 6$;
3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

9.29. Задайте дану функцію формулою виду $y = a(x - m)^2 + n$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 2x - 8$;
2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

9.30. Задайте дану функцію формулою виду $y = \dfrac{k}{x + a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{3x + 8}{x}$; 2) $y = \dfrac{2x + 14}{x + 3}$; 3) $y = \dfrac{-2x}{x - 1}$; 4) $y = \dfrac{x - 1}{2x + 1}$.

9.31. Задайте дану функцію формулою виду $y = \dfrac{k}{x + a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{4x + 14}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{7 - x}{x - 2}$; 3) $y = \dfrac{3x - 2}{x + 1}$.

9.32. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{4x - 1}$; 2) $y = \sqrt{1 - \dfrac{x}{2}}$; 3) $y = (2x + 1)^2$; 4) $y = |2x - 1|$.

9.33. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{3x + 1}$; 2) $y = \sqrt{-\dfrac{x}{3} - 1}$; 3) $y = (3x - 1)^2$; 4) $y = |3x + 2|$.

9.34. Побудуйте графік функції:

1) $y = [x - 1]$;
2) $y = [x] - 1$;
3) $y = \left\{x + \dfrac{1}{2}\right\}$;
4) $y = \{x\} - 1$;
5) $y = [2x - 1]$;
6) $y = [1 - 3x]$;
7) $y = \left\{\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}\right\}$;
8) $y = \left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3}\right\}$.

9.35.° Побудуйте графік функції:

1) $y = [x + 1]$;
2) $y = [x] + 2$;
3) $y = \left\{x - \frac{1}{3}\right\}$;
4) $y = \{x\} + 1$;
5) $y = [3x + 1]$;
6) $y = [1 - 2x]$;
7) $y = \left\{\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right\}$;
8) $y = \left\{\frac{1}{3} - \frac{x}{2}\right\}$.

9.36.° Визначте кількість коренів рівняння $a - |x| = x^2$ залежно від значення параметра a.

9.37.° При яких значеннях параметра a рівняння $|x| + a = -x^2$ має два корені?

9.38.° Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\sqrt{x - a} = 1 - x$?

9.39.° Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\sqrt{x + a} = 2 - x$?

9.40.°° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = |x - a|$ на відрізку $[1; 3]$.

9.41.°° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = (x + a)^2$ на відрізку $[-4; -2]$.

9.42.°° Визначте кількість коренів рівняння $3|x| = |x - a|$ залежно від значення параметра a.

9.43.°° Визначте кількість коренів рівняння $|x - a| + |x| = 2$ залежно від значення параметра a.

9.44.°° Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $x^2 + 1 = |x - a|$?

9.45.°° Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $2 - x^2 = |x + a|$?

10. Як побудувати графіки функцій $y = f(|x|)$ і $y = |f(x)|$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Скориставшись означенням модуля, можна записати:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geq 0, \\ f(-x), & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Звідси можна зробити висновок, що графік функції $y = f(|x|)$ при $x \geqslant 0$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при $x < 0$ — з графіком функції $y = f(-x)$.

Тоді побудову графіка функції $y = f(|x|)$ можна проводити за такою схемою:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;

2) побудувати ту частину графіка функції $y = f(-x)$, усі точки якої мають від'ємні абсциси.

Об'єднання цих двох частин і складатиме графік функції $y = f(|x|)$.

На рисунку 10.1 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x - 2)^2$ побудовано графік функції $y = (|x| - 2)^2$.

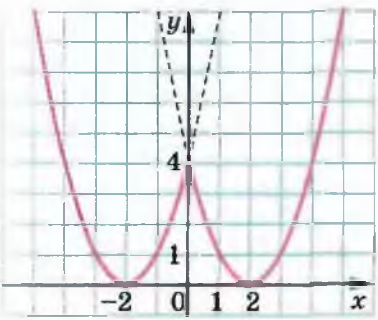


Рис. 10.1

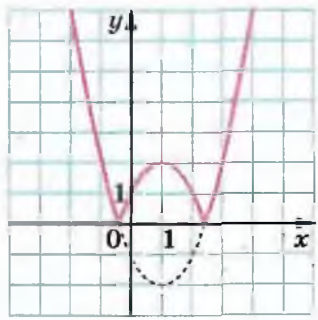


Рис. 10.2

Для функції $y = |f(x)|$ можна записати:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = |f(x)|$ при всіх x, для яких $f(x) \geq 0$, збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при всіх x, для яких $f(x) < 0$, — з графіком функції $y = -f(x)$.

Тоді будувати графік функції $y = |f(x)|$ можна за такою схемою:

1) усі точки графіка функції $y = f(x)$ з невід'ємними ординатами залишити незмінними;

2) точки з від'ємними ординатами замінити на точки з тими самими абсцисами, але протилежними ординатами.

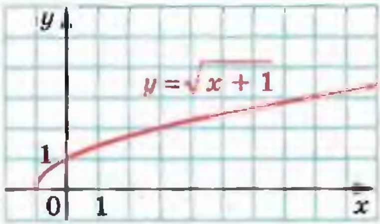
На рисунку 10.2 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x - 1)^2 - 2$ побудовано графік функції $y = |(x - 1)^2 - 2|$.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y = \left|\sqrt{|x|+1} - 2\right|$.

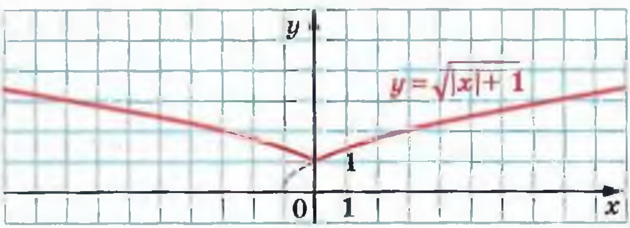
Розв'язання. Алгоритм побудови шуканого графіка можна подати у вигляді такої схеми:

$$y = \sqrt{x+1} \to y = \sqrt{|x|+1} \to y = \sqrt{|x|+1} - 2 \to y = \left|\sqrt{|x|+1} - 2\right|$$

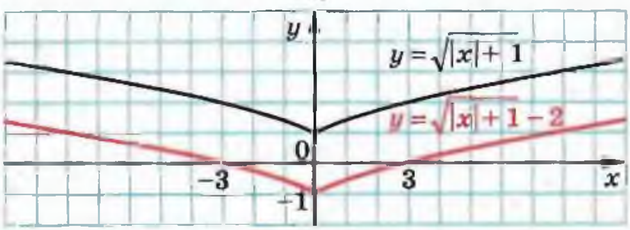
(рис. 10.3).



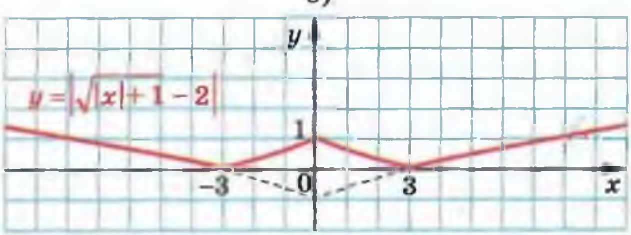
а)



б)



в)



г)

Рис. 10.3

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$.

Розв'язання. Побудову шуканого графіка можна подати за такою схемою:

$$y = \sqrt{|x|} \to y = \sqrt{|x+1|} \to y = \sqrt{|x+1|} - 1 \to y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$$

(рис. 10.4).

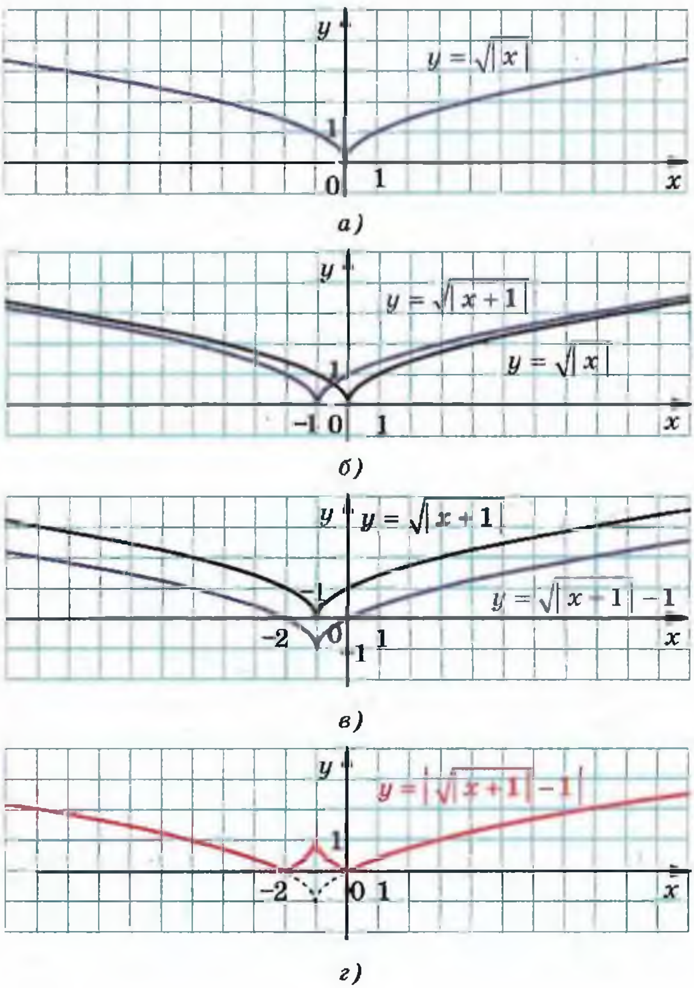


Рис. 10.4

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра a рівняння $|2|x|-1| = x - a$ має три корені?

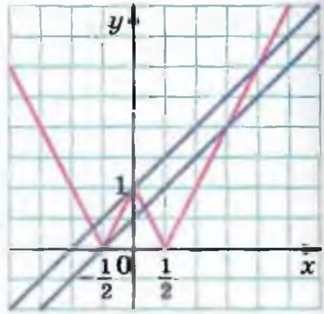


Рис. 10.5

Розв'язання. На рисунку 10.5 червоним кольором зображено графік функції $f(x) = |2|x|-1|$. Задача зводиться до того, щоб знайти таке положення прямої $g(x) = x - a$, при якому графіки функцій f і g мають три спільні точки.

Ця умова буде виконана лише тоді, коли пряма $g(x) = x - a$ пройде через точку $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ або через точку (0; 1) (рис. 10.5). Маємо: $-\frac{1}{2} - a = 0$, $a = -\frac{1}{2}$ або $0 - a = 1$, $a = -1$.

Відповідь: $a = -\frac{1}{2}$ або $a = -1$.

10.1.$^{\bullet}$ Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 10.6, побудуйте графік функції: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

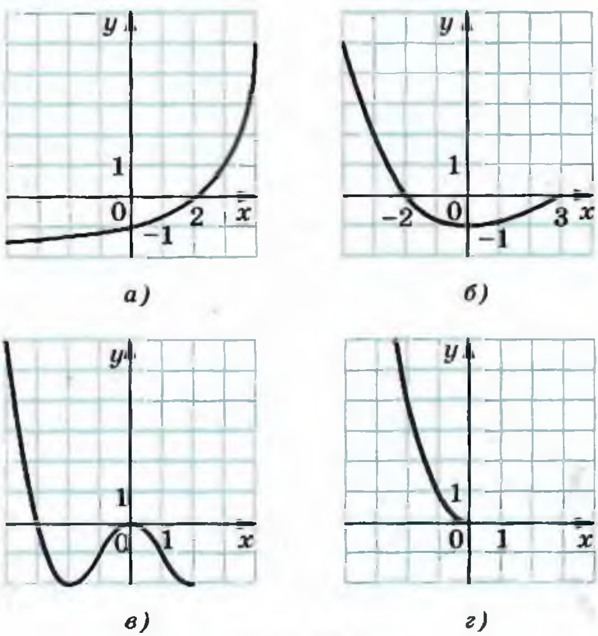


Рис. 10.6

10.2.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 10.7, побудуйте графік функції: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

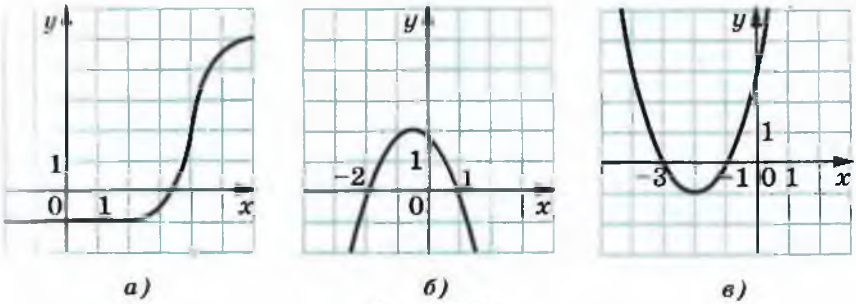


Рис. 10.7

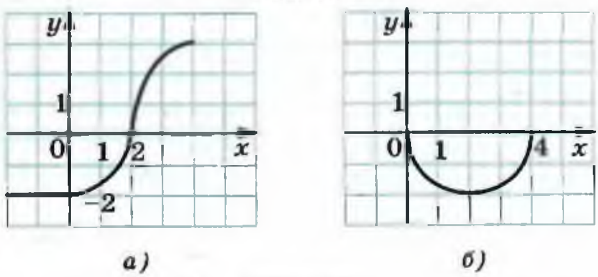


Рис. 10.8

10.3.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 10.8, побудуйте графік функції $y = |f(|x|)|$.

10.4.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{1}{|x|}$; 2) $y = -\dfrac{6}{|x|}$.

10.5.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{2}{|x|}$; 2) $y = -\dfrac{1}{|x|}$.

10.6.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 1|$; 3) $y = \left|\dfrac{2}{x} - 1\right|$; 5) $y = \left|\dfrac{x-4}{x+1}\right|$.

2) $y = |\sqrt{x} - 2|$; 4) $y = \left|\dfrac{2}{x-1}\right|$;

10.7.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 4|$; 3) $y = \left|\dfrac{4}{x} - 2\right|$; 5) $y = \left|\dfrac{x+2}{x-3}\right|$.

2) $y = |\sqrt{x} - 1|$; 4) $y = \left|\dfrac{4}{x-2}\right|$;

10.8.° Про функцію $y = f(x)$ відомо, що $D(f) = [-3; 7]$ і $E(f) = [-6; 5]$. Знайдіть: 1) область визначення функції $y = f(|x|)$; 2) область визначення і область значень функції $y = |f(x)|$.

10.9.° Про функцію $y = f(x)$ відомо, що $D(f) = \mathbb{R}$, числа -3 і 2 є її нулями, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. Знайдіть нулі і проміжки знакосталості функції: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

10.10.° Про функцію $y = g(x)$ відомо, що $D(f) = \mathbb{R}$, числа -1 і 3 є її нулями, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. Знайдіть нулі і проміжки знакосталості функції: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

10.11.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 10.9, побудуйте графік функції: 1) $y = f(|x| - 1)$; 2) $y = f(|x - 1|)$.

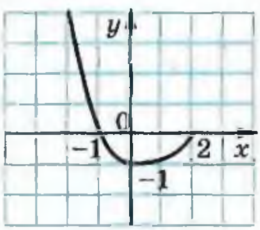


Рис. 10.9

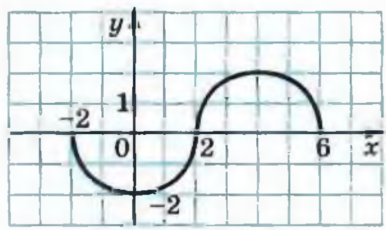


Рис. 10.10

10.12.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 10.10, побудуйте графік функції: 1) $y = f(|x| + 2)$; 2) $y = f(|x + 2|)$.

10.13.° Побудуйте графік функції:

1) $y = (|x| - 1)^2$;
2) $y = \sqrt{|x| + 2}$;
3) $y = \frac{1}{|x| - 3}$;
4) $y = \sqrt{1 - |x|}$.

10.14.° Побудуйте графік функції:

1) $y = (|x| + 2)^2$;
2) $y = \sqrt{|x| - 3}$;
3) $y = \frac{1}{|x| - 4}$;
4) $y = \sqrt{2 - |x|}$.

10.15.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{|x + 2|}$;
2) $y = (|x - 2| - 1)^2$;
3) $y = \sqrt{|x - 1| + 2}$;
4) $y = \frac{1}{|x + 1| - 3}$.

10.16.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{|x - 3|}$;
2) $y = (|x + 1| + 2)^2$;
3) $y = \sqrt{|x - 2| - 3}$;
4) $y = \frac{1}{|x - 1| - 4}$.

10.17.* Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $||x| - 1| = a$;
2) $|(x+1)^2 - 1| = a$;
3) $|(|x| - 1)^2 - 1| = a$;
4) $|\sqrt{x} - 2| = a$?

10.18.* Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $|x^2 - 1| = a$;
2) $|(x+2)^2 - 3| = a$;
3) $|(|x| - 2)^2 - 3| = a$.

10.19.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{2|x| - 1}$;
2) $y = \sqrt{1 - 3|x|}$;
3) $y = \sqrt{|2x - 1|}$.

10.20.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{3|x| + 1}$;
2) $y = \sqrt{|3x + 1|}$.

10.21.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\frac{4}{|x|} - 2\right|$;
2) $y = \left|\frac{4}{|x| - 2}\right|$;
3) $y = |1 - |1 - |x|||$.

10.22.* Побудуйте графік функції:

1) $y = ||x| - 4|$;
2) $y = |2|x| - 4|$;
3) $y = |||x - 1| - 1| - 1|$.

10.23.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\sqrt{|x| - 1} - 1\right|$;
2) $y = \left|\sqrt{|x - 1|} - 1\right|$;
3) $y = \left|\frac{1}{|x| - 2} - 1\right|$;
4) $y = \left|\frac{1}{|x - 2|} - 1\right|$;
5) $y = \left|\frac{|x| + 2}{|x| - 1}\right|$.

10.24.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\sqrt{2|x| - 1} - 1\right|$;
2) $y = \left|\sqrt{|3x + 1|} - 2\right|$;
3) $y = \left|\frac{|x| - 2}{|x| + 1}\right|$.

10.25.** При яких значеннях параметра a рівняння $||x - 1| - 1| = x - a$ має безліч коренів?

10.26.** При яких значеннях параметра a рівняння $||x + 2| - 3| = a - x$ має безліч коренів?

10.27.** При яких значеннях параметра a рівняння $|2|x - 1| - 3| = x - a$ має 3 корені?

10.28.** При яких значеннях параметра a рівняння $|3|x + 1| - 2| = a - x$ має 3 корені?

10.29.** При яких значеннях параметра a рівняння $|2|x + a| - 1| = x - 1$ має один корінь?

10.30.** При яких значеннях параметра a рівняння $|3|x - a| - 2| = 2 - x$ має один корінь?

11. Квадратична функція, її графік і властивості

Означення. **Функцію, яку можна задати формулою виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a, b і c — параметри, причому $a \neq 0$, називають квадратичною.**

Квадратична функція не є для вас новою. Так, у 8 класі ви вивчали її окремий вид, а саме функцію $y = x^2$. Функціональна залежність площі S круга від його радіуса r визначає квадратичну функцію $S(r) = \pi r^2$, яка у свою чергу є окремим видом функції $y = ax^2$.

На уроках фізики ви ознайомилися з формулою $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Вона визначає залежність висоти h, на якій знаходиться тіло, що кинули вертикально вгору з початковою швидкістю v_0, від часу руху t. Ця формула задає квадратичну функцію $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Установимо деякі властивості квадратичної функції. Маємо:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Введемо позначення $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$.

Тоді формулу $y = ax^2 + bx + c$ можна подати у вигляді:

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Дослідимо функцію f на зростання і спадання.

Нехай $x_1 < x_2 \leqslant x_0$. Маємо:

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_0)^2 + y_0 - a(x_2 - x_0)^2 - y_0 =$$

$$= a(x_1 - x_2)((x_1 - x_0) + (x_2 - x_0)).$$

Оскільки $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 - x_0 < 0$ і $x_2 - x_0 \leqslant 0$, то знак різниці, яка розглядається, залежить тільки від знака параметра a:

- якщо $a < 0$, то $f(x_1) - f(x_2) < 0$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$, а отже, функція f зростає на проміжку $(-\infty; x_0]$;
- якщо $a > 0$, то $f(x_1) > f(x_2)$, тобто функція f спадає на проміжку $(-\infty; x_0]$.

Аналогічно можна дослідити функцію f на проміжку $[x_0; +\infty)$:

- якщо $a < 0$, то функція f спадає на проміжку $[x_0; +\infty)$;
- якщо $a > 0$, то функція f зростає на проміжку $[x_0; +\infty)$.

З урахуванням отриманих результатів можна зробити такі висновки.

Якщо $a > 0$, то $f(x_0) \leqslant f(x)$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$. Отже, при $a > 0$ $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(x_0) = -\frac{D}{4a}$.

Якщо $a < 0$, то $f(x_0) \geqslant f(x)$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$. Отже, при $a < 0$ $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(x_0) = -\frac{D}{4a}$.

Також зазначимо, що при $a > 0$ функція f не досягає найбільшого значення, а при $a < 0$ не досягає найменшого значення.

Узагалі, якщо $a > 0$, то $E(f) = \left[-\frac{D}{4a}; +\infty\right)$;

якщо $a < 0$, то $E(f) = \left(-\infty; -\frac{D}{4a}\right]$.

Очевидно, що коли $x_0 = 0$, то функція f є парною. Якщо $x_0 \neq 0$, то функція f не є ні парною, ні непарною.

У таблиці підсумовано вищесказане:

Властивість	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	$\left[-\frac{D}{4a}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; -\frac{D}{4a}\right]$
Зростає на проміжку	$\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$
Спадає на проміжку	$\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$	$\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$
Найбільше значення функції на $D(f)$	не існує	$-\frac{D}{4a}$
Найменше значення функції на $D(f)$	$-\frac{D}{4a}$	не існує

Покажемо, як графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ можна отримати з графіка функції $y = ax^2$.

Ви вже будували графіки функцій виду $y = ax^2 + bx + c$, виділяючи квадрат двочлена (див. приклад 3 пункту 9). Використаємо цей прийом у загальному вигляді. Можна записати $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

Тепер зрозуміло, що схема побудови шуканого графіка є такою:

$$y = ax^2 \xrightarrow[\text{на } |x_0| \text{ од.}]{\text{управо або вліво}} y = a(x - x_0)^2 \xrightarrow[\text{на } |y_0| \text{ од.}]{\text{угору або вниз}} y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола з вершиною в точці $(x_0; y_0)$, де $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$, яка дорівнює параболі $y = ax^2$.

Зрозуміло, що вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ напрямлені так само, як і вітки параболи $y = ax^2$: якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.

Загальне уявлення про графік квадратичної функції дають координати вершини параболи і напрям її віток. Це уявлення буде тим повнішим, чим більше точок, які належать графіку, ми знатимемо. Тому, не використовуючи паралельних перенесень, можна побудувати графік квадратичної функції за такою схемою:

1) знайти абсцису вершини параболи за формулою $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

2) знайти ординату вершини параболи за формулою[1]

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a},$$

де D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, і позначити на координатній площині вершину параболи;

3) визначити напрям віток параболи;

4) побудувати графік функції.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Користуючись графіком функції, знайдіть область значень функції, проміжки зростання і спадання, проміжки знакосталості, найменше і найбільше значення функції.

Розв'язання. Дана функція є квадратичною функцією $y = ax^2 + bx + c$, де $a = 1$, $b = 4$, $c = -5$. Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору ($a > 0$).

---

[1] Формулу $y_0 = -\frac{D}{4a}$ запам'ятовувати необов'язково. Достатньо обчислити значення функції $y = ax^2 + bx + c$ у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Абсциса вершини параболи $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$, ордината вершини $y_0 = f(x_0) = f(-2) = 4 - 8 - 5 = -9$.

Тоді точка $(-2; -9)$ — вершина параболи.

Знайдемо точки перетину параболи з віссю абсцис:

$$x^2 + 4x - 5 = 0;$$

$$x_1 = -5,\ x_2 = 1.$$

Отже, парабола перетинає вісь абсцис у точках $(-5; 0)$ і $(1; 0)$.

Знайдемо точку перетину параболи з віссю ординат: $f(0) = -5$. Парабола перетинає вісь ординат у точці $(0; -5)$.

Позначимо знайдені чотири точки параболи на координатній площині (рис. 11.1).

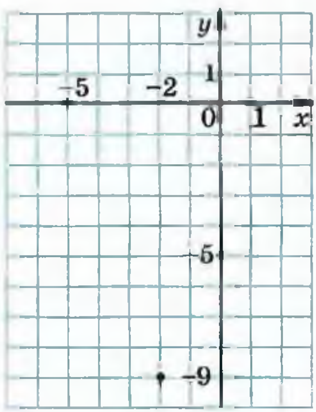


Рис. 11.1

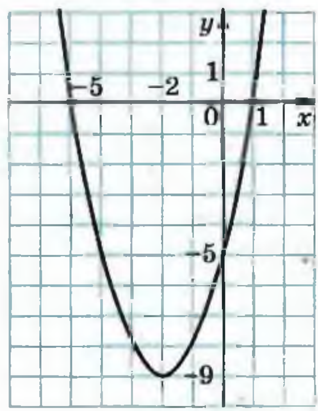


Рис. 11.2

Тепер зрозуміло, що зручно знайти значення даної функції в точках -1, -3, -4 і, позначивши відповідні точки на координатній площині, провести через усі знайдені точки графік даної функції.

Маємо: $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = f(0) = -5$.

Шуканий графік зображено на рисунку 11.2.

Область значень функції $E(f) = [-9; +\infty)$.

Функція зростає на проміжку $[-2; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; -2]$.

$f(x) > 0$ при $x < -5$ або $x > 1$; $f(x) < 0$ при $-5 < x < 1$.

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -9$, найбільшого значення не існує.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{12x}{x^2+1} + 2$ на її області визначення.

Розв'язання. Дана функція визначена на множині $\mathbb{R}$. Нехай $\frac{2x}{x^2+1} = t$. У прикладі 2 п. 5 було встановлено, що $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Задача звелася до знаходження найбільшого і найменшого значення функції $f(t) = t^2 - 6t + 2$ на відрізку $[-1; 1]$.

Оскільки функція f спадає на проміжку $(-\infty; 3]$ і $[-1; 1] \subset (-\infty; 3]$, то $\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f(-1) = 9$, $\min\limits_{[-1;1]} f(t) = f(1) = -3$.

Цю задачу також можна розв'язати графічно (рис. 11.3).

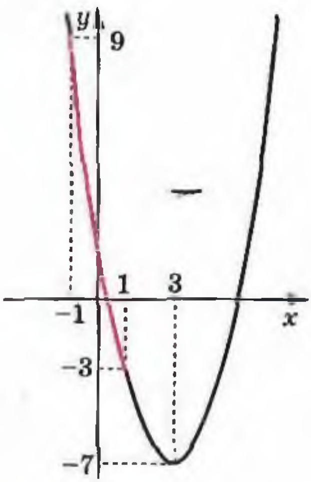


Рис. 11.3

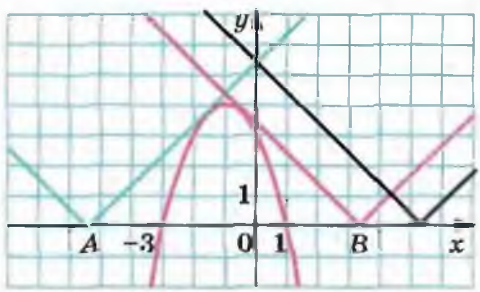


Рис. 11.4

ПРИКЛАД 3 Знайдіть усі значення параметра a, при яких найменше значення функції $f(x) = x^2 + 2x - 1 + |x - a|$ більше за 2.

Розв'язання. Оскільки $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) > 2$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + 2x - 1 + |x - a| > 2. \qquad (*)$$

Отже, задача зводиться до того, щоб знайти всі значення параметра a, при яких нерівність (*) виконується при всіх x.

Маємо: $|x - a| > -x^2 - 2x + 3$.

Розглянемо функції $g(x) = |x - a|$ і $h(x) = -x^2 - 2x + 3$.

Достатньо знайти ті значення параметра a, при яких усі точки графіка функції g знаходяться вище за відповідні (тобто з тими самими абсцисами) точки графіка функції h.

З рисунка 11.4 видно, що коли вершина кута, який є графіком функції g, розміщена на осі абсцис лівіше точки A або правіше точки B, то отримуємо шукане взаємне розташування графіків функцій g і h.

Якщо вершина кута збігається з точкою A, то пряма $y = x - a$ має з параболою $y = -x^2 - 2x + 3$ одну спільну точку. Значення параметра a, яке відповідає цьому випадку, знайдемо, вимагаючи, щоб рівняння $-x^2 - 2x + 3 = x - a$ мало єдиний розв'язок.

Маємо: $-x^2 - 3x + 3 + a = 0$; $D = 9 + 12 + 4a = 0$. Звідси $a = -\frac{21}{4}$.

Якщо вершина кута збігається з точкою B, то пряма $y = a - x$ дотикається до параболи $y = -x^2 - 2x + 3$. Значення параметра a, яке відповідає моменту дотику, дорівнює $\frac{13}{4}$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Відповідь: $a < -\frac{21}{4}$ або $a > \frac{13}{4}$.

ПРИКЛАД 4 При яких значеннях параметра a рівняння $(a + 4x - x^2 - 3)(a - 1 - |x - 2|) = 0$ має три корені?

Розв'язання. Розглянемо координатну площину xa, тобто координатну площину, кожна точка якої має координати виду $(x; a)$, де a — параметр.

У цій координатній площині побудуємо графік даного рівняння.

Переходимо до рівносильної сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 4x + 3, \\ a = |x - 2| + 1. \end{array}\right.$$

Графіком першого рівняння сукупності є парабола, другого — кут. Отже, графіком заданого рівняння є об'єднання цих фігур (рис. 11.5).

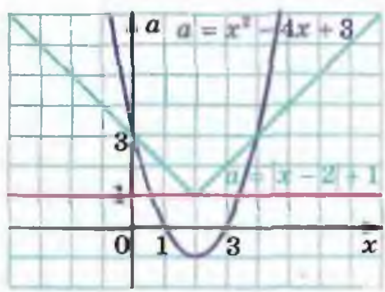


Рис. 11.5

Кількість точок перетину з цим графіком горизонтальної прямої $a = a_1$ відповідає кількості коренів даного рівняння при значенні параметра a, який дорівнює a_1.

З рисунка 11.5 видно, що тільки пряма $a = 1$ перетинає графік рівняння в трьох точках.

Відповідь: $a = 1$.

11.1.° Визначте напрям віток і координати вершини параболи:

1) $y = x^2 - 12x + 3$;
2) $y = -x^2 + 4x - 6$;
3) $y = 0{,}3x^2 + 2{,}4x - 5$;
4) $y = -5x^2 + 10x + 2$.

11.2.° Знайдіть область значень та проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$;
2) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 6$;
3) $f(x) = 4 - 12x - 0{,}3x^2$;
4) $f(x) = 7x^2 + 21x$.

11.3.° Знайдіть область значень та проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$;
2) $f(x) = 9 + 8x - 0{,}2x^2$.

11.4.° Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 4x - 5$;
2) $y = -x^2 + 2x + 3$;
3) $y = 6x - x^2$;
4) $y = 2x^2 - 8x + 8$;
5) $y = x^2 - 2x + 4$;
6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$;
7) $y = x^2 - 6x + 5$;
8) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

11.5.° Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 + 2x - 8$;
2) $y = x^2 - 2x$;
3) $y = -x^2 + 4x - 5$;
4) $y = 2x^2 - 2x - 4$.

11.6.° Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях аргументу функція набуває додатних значень, а при яких — від'ємних.

11.7.° Побудуйте графік функції $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Користуючись графіком, знайдіть множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$.

11.8.° Побудуйте графік функції $f(x) = x - 0{,}5x^2$. Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях x виконується нерівність $f(x) \leqslant 0$.

11.9.° Побудуйте графік функції $f(x) = 3x^2 - 6x$. Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях x виконується нерівність $f(x) \geqslant 0$.

11.10.° Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 - 3x - 1 = -\frac{3}{x}$.

11.11.° Розв'яжіть графічно рівняння $-\frac{1}{4}x^2 + x + 2 = \sqrt{x}$.

11.12.° Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ та встановіть кількість коренів рівняння $f(x) = g(x)$:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 7$; $g(x) = -\sqrt{x}$;
2) $f(x) = 4x - 2x^2$; $g(x) = -\frac{4}{x}$.

11.13.° Побудувавши в одній системі координат графіки функцій $y = x^2 + 4x + 1$ і $y = \frac{6}{x}$, установіть кількість коренів рівняння $x^2 + 4x + 1 = \frac{6}{x}$.

11.14.° Знайдіть координати точки параболи $y = -x^2 + 9x + 9$, у якої:

1) абсциса і ордината рівні;

2) сума абсциси і ординати дорівнює 25.

11.15.° Знайдіть координати точки параболи $y = 2x^2 - 3x + 6$, у якої ордината на 12 більша за абсцису.

11.16.° Побудуйте графік даної функції, укажіть її область значень та проміжки зростання і спадання:

$$y = \begin{cases} 3 - x, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2 - 2x - 3, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -3, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$$

11.17.° Побудуйте графік даної функції, укажіть її область значень та проміжки зростання і спадання:

$$y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 4x - x^2, & \text{якщо } 0 < x < 5, \\ x - 10, & \text{якщо } x \geqslant 5. \end{cases}$$

11.18.° Знайдіть найменше значення функції $y = 3x^2 - 18x + 2$ на проміжку:

1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$.

11.19.° Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 - 8x + 10$ на проміжку:

1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.

11.20.° При яких значеннях p і q графік функції $y = x^2 + px + q$ проходить через точки $M\ (-1; 4)$ і $K\ (2; 10)$?

11.21.° При яких значеннях a і b нулями функції $y = ax^2 + bx + 7$ є числа -2 і 3?

11.22.° При яких значеннях a і b парабола $y = ax^2 + bx - 4$ проходить через точки $C\ (-3; 8)$ і $D\ (1; 4)$?

11.23.° Нехай D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Зобразіть схематично графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:

1) $a > 0,\ D > 0,\ c > 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

2) $a > 0,\ D = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$;

3) $a < 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

4) $a < 0,\ c = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$.

11.24.• Нехай D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Зобразіть схематично графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:

1) $a > 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$;

2) $a < 0,\ D > 0,\ c < 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

3) $a < 0,\ D = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$.

11.25.• Знайдіть усі значення параметра a, при яких вершина параболи $y = -x^2 + 6x - a$ належить осі абсцис.

11.26.• При якому значенні параметра b проміжок $(-\infty; 2]$ є проміжком зростання функції $y = -4x^2 - bx + 5$?

11.27.• При якому значенні параметра b проміжок $(-\infty; -3]$ є проміжком спадання функції $y = 3x^2 + bx - 8$?

11.28.• При яких значеннях параметра a функція $y = 2x^2 - 4ax + 3$ зростає на проміжку $[-1; 4]$?

11.29.• При яких значеннях параметра a функція $y = -x^2 - 2ax + 1$ спадає на проміжку $[-3; -2]$?

11.30.• При якому значенні параметра a графік функції $y = ax^2 + (a-2)x + \frac{1}{4}$ має з віссю абсцис одну спільну точку?

11.31.• При якому значенні параметра c найбільше значення функції $y = -5x^2 + 10x + c$ дорівнює -3?

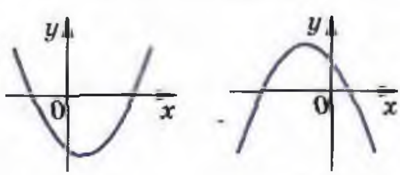
11.32.• При якому значенні параметра c найменше значення функції $y = 0{,}6x^2 - 6x + c$ дорівнює -1?

11.33.• При яких значеннях параметра c вершина параболи $y = x^2 - 8x + c$ розміщена вище від прямої $y = -2$?

11.34.• При яких значеннях параметра a пряма $y = x - 1$ має з параболою $y = x^2 - 2ax + 3$ одну спільну точку?

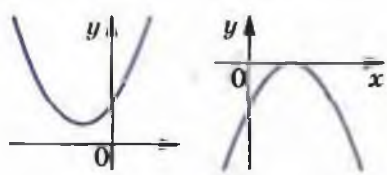
11.35.• При яких значеннях параметра a пряма $y = -x + 4$ має з параболою $y = x^2 - 3x - a$ одну спільну точку?

11.36.• На рисунку 11.6 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a, b і c.



а) б)

Рис. 11.6



а) б)

Рис. 11.7

11.37.° На рисунку 11.7 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a, b і c.

11.38.° Чи можуть графіки квадратичних функцій $y = ax^2 + bx + c$ і $y = cx^2 + bx + a$ бути розміщені так, як показано на рисунку 11.8?

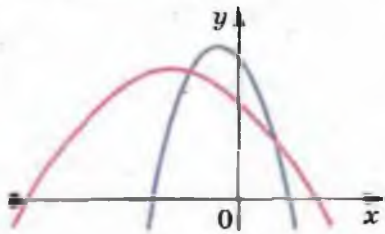


Рис. 11.8

11.39.° Про квадратичну функцію $f(x) = ax^2 + bx + c$ відомо, що $f(1) + f(3) < 2f(2)$. Визначте напрям віток параболи.

11.40.° Графік квадратичної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$ не має спільних точок з віссю абсцис і $a + b + c > 0$. Визначте знак параметра c.

11.41.° Про квадратичну функцію f відомо, що $f(-3) = f(7)$. Знайдіть усі значення x, при яких $f(x) = f(3)$.

11.42.° При яких значеннях параметра a вершина параболи $y = x^2 - 4ax + 5a^2 - 3$ рівновіддалена від осей координат?

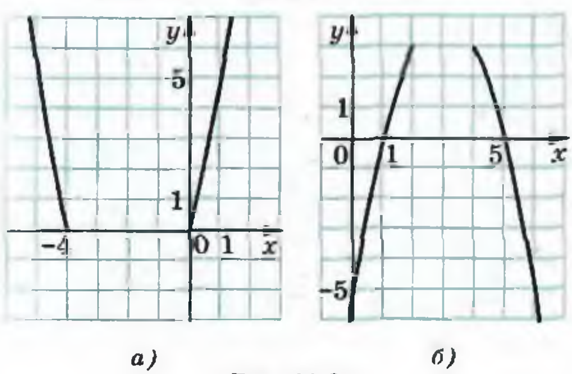
11.43.° При яких значеннях параметра a вершина параболи $y = x^2 - 6ax + 4 + 8a^2$ знаходиться у другій чверті?

11.44.° При яких значеннях коефіцієнтів p і q вершина параболи $y = x^2 + px + q$ знаходиться в точці $A(2; 5)$?

11.45.° Парабола $y = ax^2 + bx + c$ має вершину в точці $C(4; -10)$ і проходить через точку $D(1; -1)$. Знайдіть значення коефіцієнтів a, b і c.

11.46.° Знайдіть ординату вершини параболи, фрагмент якої зображено на рисунку 11.9.

11.47.° Знайдіть ординату вершини параболи, фрагмент якої зображено на рисунку 11.10.



а) б)

Рис. 11.9

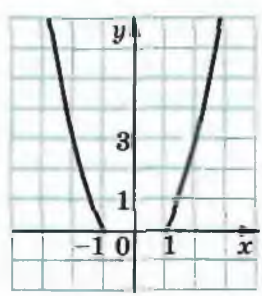


Рис. 11.10

11.48.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - x - 2|$; 2) $y = |2x^2 - 3x - 2|$.

11.49.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 + 4x + 3|$; 2) $y = |3x^2 + 2x - 1|$.

11.50.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 2|x||$; 2) $y = |x^2 - 2|x| - 3|$.

11.51.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 3|x||$; 2) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

11.52.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{8x + 2x^2 - x^3}{x}$; 3) $y = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$;

2) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} - 3$; 4) $y = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

11.53.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{(x + 3)^3}{x + 3}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x}$; 3) $y = \dfrac{x^4 - 1}{1 - x^2}$.

11.54.° Побудуйте графік функції:

1) $y = x|x|$; 4) $y = \dfrac{x}{|x|}(x^2 - x - 6)$;

2) $y = x^2 - 4|x| + 3$; 5) $y = x^2 + 3x \cdot \dfrac{|x - 3|}{x - 3} - 4$.

3) $y = x^2 - 4|x - 1| - 1$;

11.55.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 6|x| - x^2$; 3) $y = \dfrac{x^3}{|x|} + 4x$.

2) $y = x^2 + 3|x - 1| - 1$;

11.56.° Установіть, скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $|x^2 - 4|x| + 3| = a$; 2) $x^2 + 3|x - 1| - 1 = a$.

11.57.° Установіть, скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $|x^2 - 2|x| - 3| = a$; 2) $x^2 - 4|x - 1| - 1 = a$.

11.58.•• При якому значенні параметра a відрізок прямої $x = a$, кінці якого належать параболам $y = x^2$ і $y = -(x + 1)^2$, має найменшу довжину?

11.59.•• Про квадратичну функцію f відомо, що існує рівно три значення аргументу, при яких модуль значення функції дорівнює 2. Скільки коренів має рівняння $f(x) = 1{,}1$?

11.60.** Чи можуть графіки квадратичних функцій $y = ax^2 + bx + c$ і $y = bx^2 + cx + a$ бути розміщені так, як показано на рисунку 11.11?

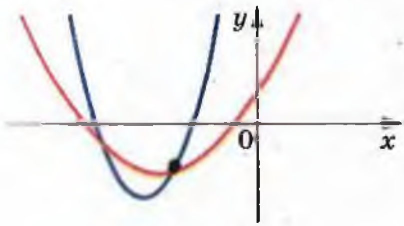


Рис. 11.11

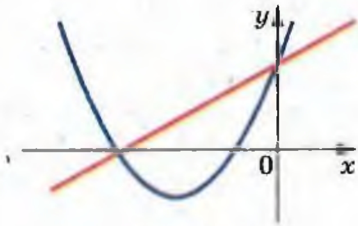


Рис. 11.12

11.61.** Чи є правильним твердження, що на рисунку 11.12 зображено параболу $y = ax^2 + bx + c$ і пряму $y = cx + a$?

11.62.** Відомо, що $2p - q = 4$. Доведіть, що всі параболи виду $y = x^2 + px + q$ проходять через одну точку.

11.63.** Функція $f(x) = x^2 + px + q$ набуває тільки невід'ємних значень. Знайдіть найменше значення виразу $p + q$.

11.64.** Параметр a набуває всіх дійсних значень. Доведіть, що вершини парабол $f(x) = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1$ утворюють пряму.

11.65.** Параметр a набуває всіх дійсних значень. Доведіть, що вершини парабол $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 + 1$ утворюють параболу.

11.66.* Дано функцію $f(t) = t^2 - 2t$. Побудуйте графік функції g, якщо $g(x) = \min\limits_{[x-1;\, x]} f(t)$.

11.67.* Дано функцію $f(t) = -t^2 - 2t$. Побудуйте графік функції g, якщо $g(x) = \max\limits_{[x;\, x+1]} f(t)$.

11.68.* Знайдіть найменше значення функції $y = (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 2$.

11.69.* При яких значеннях параметра a рівняння $|x^2 - 4x + 3| + x - a = 0$ має три корені?

11.70.* При яких значеннях параметра a найменше значення функції $y = x^2 - 4x + 3 + |x - a|$ менше від 2?

11.71.* При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - a + 1 = 0$ буде найменшою?

11.72.* При яких значеннях параметра a добуток коренів рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - 2a + 4 = 0$ буде найменшим?

11.73.* На координатній площині xy укажіть усі точки, через які не проходить жодна з парабол виду $y = x^2 - 4ax + 2a^2 - 3$.

11.74.* Визначте кількість коренів рівняння $x^4 + 2x^2a - x + a^2 + a = 0$ залежно від значення параметра a.

11.75.* Функція $f(x) = x^2 + bx + c$ має два нулі, один з яких належить проміжку $(0; 1)$, а другий не належить цьому проміжку. Доведіть, що $f(c) \leqslant 0$.

11.76.* Розглядаються всі параболи виду $y = x^2 + px + q$, $q > 0$, які перетинають осі координат у трьох точках. Для кожної параболи через зазначені три точки проводять коло. Доведіть, що всі ці кола мають спільну точку.

11.77.* Розглядаються всі параболи виду $y = x^2 + px + q$, $q < 0$, які перетинають осі координат у трьох точках. Для кожної параболи через зазначені три точки проводять коло. Доведіть, що всі ці кола мають спільну точку.

11.78.* Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant a^2b + b^2c + c^2a + 1$, якщо $a \in [0; 1]$, $b \in [0; 1]$, $c \in [0; 1]$.

11.79.* Доведіть нерівність $3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z) \leqslant 3$, якщо $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$.

12. Розв'язування квадратних нерівностей

На рисунку 12.1 зображено графік деякої функції $y = f(x)$, областю визначення якої є множина дійсних чисел.

За допомогою цього графіка легко визначити проміжки знакосталості функції f, а саме: $y > 0$, якщо $x \in (-5; -2) \cup (1; +\infty)$; $y < 0$, якщо $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; 1)$.

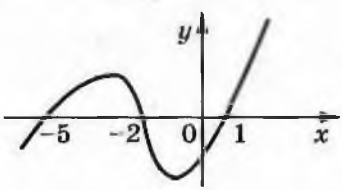


Рис. 12.1

Встановивши проміжки знакосталості функції f, ми тим самим розв'язали нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Множиною розв'язків нерівності $f(x) > 0$ є множина $(-5; -2) \cup (1; +\infty)$.

Множиною розв'язків нерівності $f(x) < 0$ є множина $(-\infty; -5) \cup (-2; 1)$.

Такий метод розв'язування нерівностей $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$ за допомогою графіка функції $y = f(x)$ називають **графічним**.

Покажемо, як за допомогою цього методу розв'язують квадратні нерівності.

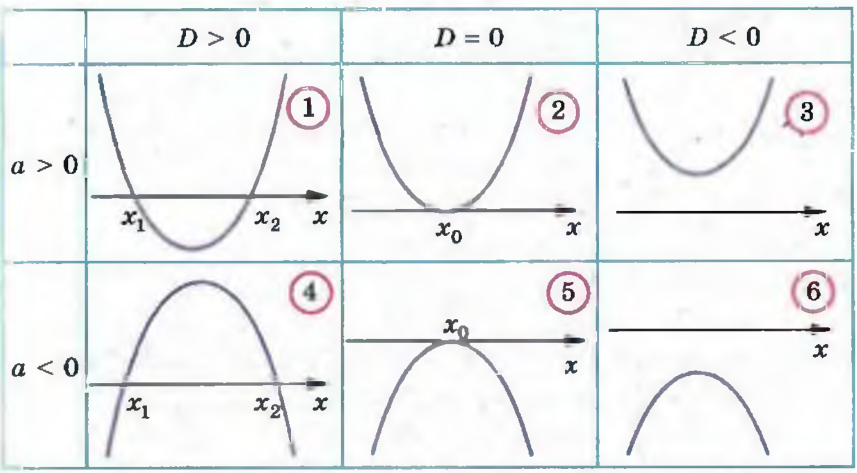
Означення. **Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, де x — змінна, a, b і c — параметри, $a \neq 0$, називають квадратними.**

З'ясуємо, як визначити положення графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис.

Наявність і кількість нулів квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ визначають за допомогою дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$: якщо $D > 0$, то нулів у функції два; якщо $D = 0$, то нуль один; якщо $D < 0$, то нулів немає.

Знак старшого коефіцієнта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ визначає напрям віток параболи $y = ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ вітки напрямлені вгору, при $a < 0$ — вниз.

Схематичне розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис залежно від знаків параметрів a і D відображено в таблиці (x_1 і x_2 — нулі функції, x_0 — абсциса вершини параболи):



Пояснимо, як цю таблицю використовувати для розв'язування квадратних нерівностей.

Наприклад, нехай потрібно розв'язати нерівність $ax^2 + bx + c > 0$, де $a < 0$ і $D > 0$. Цим умовам відповідає клітинка 4 таблиці. Тоді зрозуміло, що відповіддю буде проміжок $(x_1; x_2)$, на якому графік відповідної квадратичної функції розміщено над віссю абсцис.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $2x^2 - x - 1 > 0$.

Розв'язання. Для квадратного тричлена $2x^2 - x - 1$ маємо: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$. Цим умовам відповідає клітинка 1 таблиці.

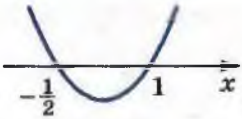


Рис. 12.2

Розв'яжемо рівняння $2x^2 - x - 1 = 0$. Отримуємо $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Тоді схематично графік функції $y = 2x^2 - x - 1$ можна зобразити так, як показано на рисунку 12.2.

З рисунка 12.2 видно, що відповідна квадратична функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ і $(1; +\infty)$.

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

Розв'язання. Маємо: $a = -9$, $D = 0$. Цим умовам відповідає клітинка 5 таблиці. Встановлюємо, що $x_0 = \frac{1}{3}$. Тоді схематично графік функції $y = -9x^2 + 6x - 1$ можна зобразити так, як показано на рисунку 12.3.

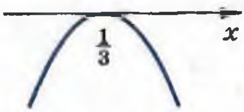


Рис. 12.3

З рисунка 12.3 видно, що розв'язками нерівності є всі числа, крім $\frac{1}{3}$.

Зауважимо, що цю нерівність можна розв'язати іншим способом. Перепишемо дану нерівність так: $9x^2 - 6x + 1 > 0$. Тоді $(3x - 1)^2 > 0$. Виходячи з цього, маємо той самий висновок.

Відповідь: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $3x^2 - x + 1 < 0$.

Розв'язання. Маємо: $a = 3 > 0$, $D = -11 < 0$. Цим умовам відповідає клітинка 3 таблиці. У цьому випадку графік функції $y = 3x^2 - x + 1$ не має точок з від'ємними ординатами.

Відповідь: розв'язків немає.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $0{,}2x^2 + 2x + 5 \leqslant 0$.

Розв'язання. Оскільки $a = 0{,}2 > 0$, $D = 0$, то даному випадку відповідає клітинка 2 таблиці, причому $x_0 = -5$. Але у цьому випадку квадратична функція набуває тільки невід'ємних значень. Отже, дана нерівність має єдиний розв'язок $x = -5$.

Відповідь: -5.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $2\,|\,x - 2\,| \leqslant 2x^2 - 5x - 1$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 2x - 4 \leqslant 2x^2 - 5x - 1, \\ 2x - 4 \geqslant -2x^2 + 5x + 1. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \geqslant 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0. \end{cases}$$

За допомогою рисунка 12.4 встановлюємо, що множиною розв'язків першої нерівності системи є множина

$$M_1 = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty).$$

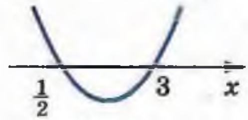


Рис. 12.4

Множина $M_2 = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$ є множиною розв'язків другої нерівності системи (рис. 12.5).

Множиною розв'язків системи є множина $M_1 \cap M_2$. Її знайдемо за допомогою рисунка 12.6.

Відповідь: $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

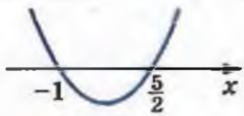


Рис. 12.5

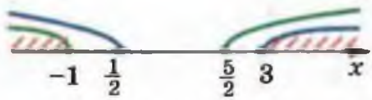


Рис. 12.6

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $x\,|\,2x - 3\,| < 2$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3 < 0, \\ x(3 - 2x) < 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3 \geqslant 0, \\ x(2x - 3) < 2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \frac{3}{2}, \\ 2x^2 - 3x + 2 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant \frac{3}{2}, \\ 2x^2 - 3x - 2 < 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x < \frac{3}{2}, \\ \begin{cases} x \geqslant \frac{3}{2}, \\ -\frac{1}{2} < x < 2; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x < \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2} \leqslant x < 2; \end{array}\right.$ $x < 2$.

Відповідь: $(-\infty; 2)$.

ПРИКЛАД 7 При яких значеннях параметра a нерівність $(a - 1) \times x^2 + 4ax - 2a - 4 \geqslant 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Якщо $a = 1$, то дана нерівність набуває вигляду $4x - 6 \geqslant 0$ і має безліч розв'язків. Отже, $a = 1$ не підходить.

Для випадку, коли $a \neq 1$, розглянемо квадратичну функцію $y = (a - 1)x^2 + 4ax - 2a - 4$.

Якщо $a - 1 > 0$, то цій умові відповідають клітинки 1 – 3 таблиці. У цьому разі множина значень аргументу, при яких квадратична функція набуває невід'ємних значень, є нескінченною.

Залишилося розглянути випадок, коли $a - 1 < 0$. Тоді вимозі задачі відповідає клітинка 5 таблиці. Отже, шуканими значеннями параметра a є розв'язки системи $\begin{cases} a - 1 < 0, \\ D = 0, \end{cases}$ тобто системи $\begin{cases} a - 1 < 0, \\ 24a^2 + 8a - 16 = 0. \end{cases}$ Розв'язавши цю систему, отримаємо $a = -1$ або $a = \frac{2}{3}$.

Відповідь: $a = -1$ або $a = \frac{2}{3}$.

ПРИКЛАД 8 Про числа a, b і c відомо, що $c(a + b + c) < 0$. Доведіть, що $b^2 > 4ac$.

Розв'язання. Якщо $a = b = 0$, то з умови випливає, що $c^2 < 0$. Отже, числа a і b не можуть дорівнювати нулю одночасно.

Нехай $a = 0$. Тоді $b \neq 0$ і нерівність $b^2 > 4ac$ стає очевидною.

Нехай $a \neq 0$. Тоді можна розглянути квадратичну функцію $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Маємо: $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$.

З умови випливає, що $f(0)\,f(1) < 0$, тобто квадратична функція f у точках $x = 0$ і $x = 1$ набуває значень різних знаків. Тоді її графіку відповідає клітинка 1 або клітинка 4 таблиці. Отже, функція f має два нулі. Тому дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ додатний, тобто $b^2 > 4ac$.

12.1.° На рисунку 12.7 зображено графік функції $y = x^2 + 4x - 5$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 + 4x - 5 < 0$;
2) $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$;
3) $x^2 + 4x - 5 > 0$;
4) $x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$.

12.2.° На рисунку 12.8 зображено графік функції $y = -3x^2 - 6x$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $-3x^2 - 6x < 0$;
2) $-3x^2 - 6x \leqslant 0$;
3) $-3x^2 - 6x > 0$;
4) $-3x^2 - 6x \geqslant 0$.

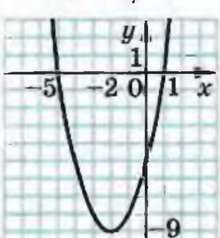


Рис. 12.7

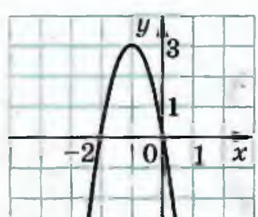


Рис. 12.8

12.3.° На рисунку 12.9 зображено графік функції $y = x^2 - 4x + 4$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 - 4x + 4 < 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$;
3) $x^2 - 4x + 4 > 0$;
4) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$.

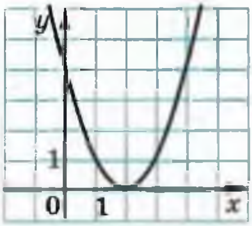


Рис. 12.9

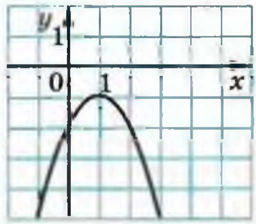


Рис. 12.10

12.4.° На рисунку 12.10 зображено графік функції $y = -x^2 + 2x - 2$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $-x^2 + 2x - 2 < 0$;
2) $-x^2 + 2x - 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 2x - 2 > 0$;
4) $-x^2 + 2x - 2 \geqslant 0$.

12.5.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + 6x - 7 < 0$;
2) $x^2 - 2x - 48 \geqslant 0$;
3) $-x^2 - 6x - 5 > 0$;
4) $-x^2 + 4x - 3 < 0$;
5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$;
6) $2x^2 + 3x + 1 > 0$;
7) $4x^2 - 12x \leqslant 0$;
8) $4x^2 - 9 > 0$;
9) $x^2 - 12x + 36 > 0$;
10) $4x^2 - 12x + 9 \geqslant 0$;
11) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
12) $49x^2 - 14x + 1 \leqslant 0$;
13) $2x^2 - x + 3 > 0$;
14) $3x^2 - 4x + 5 \leqslant 0$;
15) $-4x^2 + 5x - 7 > 0$;
16) $-2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$.

12.6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + 4x + 3 > 0$;
2) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 12x + 45 < 0$;
4) $-3x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$;
5) $x^2 - 5x > 0$;
6) $-25x^2 + 16 \leqslant 0$;
7) $5x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$;
8) $-3x^2 + 6x - 4 > 0$;
9) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \leqslant 0$;
10) $-x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36} > 0$;
11) $2x^2 - 2x + 0{,}5 < 0$.

12.7.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 \leqslant 49$;
2) $x^2 > 5$;
3) $7x^2 \leqslant 4x$;
4) $0{,}9x^2 < -27x$.

12.8.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 > 1$; 3) $-3x^2 \geqslant -12x$;

2) $x^2 < 3$; 4) $-2x^2 < -128$.

12.9.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x(x+5) - 2 < 4x$;

2) $11 - (x+1)^2 \leqslant x$;

3) $(2x+1)^2 - (x+1)(x-7) \leqslant 5$;

4) $5x(x+4) - (2x-3)(2x+3) > 30$;

5) $(3x-7)(x+2) - (x-4)(x+5) > 30$;

6) $\frac{2x^2-1}{4} - \frac{3-4x}{6} + \frac{8x-5}{8} \leqslant \frac{19}{24}$.

12.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2(x^2+2) \geqslant x(x+5)$;

2) $x - (x+4)(x+5) > -5$;

3) $(6x-1)(6x+1) - (12x-5)(x+2) < 7 - 3x$;

4) $\frac{x-1}{4} - \frac{2x-3}{2} < \frac{x^2+3x}{8}$.

12.11.° При яких значеннях аргументу значення функції $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 9$ більші за відповідні значення функції $y = 2x - 1$?

12.12.° При яких значеннях аргументу значення функції $y = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 1$ менші від відповідних значень функції $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4$?

12.13.° Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $42 - x^2 - x > 0$; 2) $2x^2 - 3x - 20 < 0$.

12.14.° Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $1{,}5x^2 - 2x - 2 < 0$; 2) $-2x^2 - 15x - 25 \geqslant 0$.

12.15.° Складіть яку-небудь нерівність, множина розв'язків якої:

1) об'єднання проміжків $(-\infty; -4)$ і $(8; +\infty)$;

2) проміжок $[-2; 9]$;

3) складається з одного числа 7.

12.16.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}$;

2) $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$; 4) $y = \frac{x+2}{\sqrt{6x - 2x^2}}$.

12.17.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt{2x^2 - 9x - 18}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$.

12.18.° Чи рівносильні нерівності:

1) $x^2 - 2x - 15 > 0$ і $x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$;

2) $\frac{1}{x^2 - x - 20} < 0$ і $\frac{1}{x^2 - x - 20} \leqslant 0$;

3) $x^2 - 6x + 10 > 0$ і $-x^2 + x - 1 \leqslant 0$;

4) $x^2 + 2x + 3 < 0$ і $-2x^2 - 4 > 0$?

12.19.° При яких значеннях параметра a не має коренів рівняння:

1) $x^2 - ax + 4 = 0$;

2) $x^2 + (a - 2)x + 25 = 0$;

3) $4{,}5x^2 - (4a + 3)x + 3a = 0$?

12.20.° При яких значеннях параметра b має два різні корені рівняння:

1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$;

2) $2x^2 + 2(b - 6)x + b - 2 = 0$?

12.21.° Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 \geqslant 0, \\ x + 4 \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 \leqslant 0, \\ 6x - x^2 < 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0. \end{cases}$

12.22.° Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} -6x^2 + 13x - 5 \leqslant 0, \\ 6 - 2x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

12.23.° Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 18 \geqslant 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - (\sqrt{5} - 3)x - 3\sqrt{5} \leqslant 0, \\ x^2 + x > 0. \end{cases}$

12.24.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{5}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}} + \sqrt{x + 1}$;

2) $y = \frac{x - 3}{\sqrt{18 + 3x - x^2}} + \frac{8}{x - 5}$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 5x - 14} - \frac{9}{x^2 - 81}$;

4) $y = \frac{1}{\sqrt{6 - 7x - 3x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x + 1}}$.

12.25.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{20 + 4x - 3x^2} + \frac{3}{\sqrt{8 - 4x}}$;

2) $y = \frac{x + 5}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \frac{x - 1}{|x| - 6}$.

12.26.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 - 8|x| - 33 < 0$;

2) $8x^2 + 7|x| - 1 \geqslant 0$;

3) $x^2 - 8|x| + 15 \leqslant 0$;

4) $4x^2 - 5|x| + 1 > 0$.

12.27.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $5x^2 - 7|x| + 2 \geqslant 0$;

2) $x^2 + 10|x| - 24 \leqslant 0$;

3) $6x^2 - 5|x| + 1 < 0$.

12.28.* Розв'яжіть нерівність:

1) $|x^2 - x - 3| < 9$;
2) $|x^2 - 4| < 3x$;
3) $|4x^2 - 1| < x + 2$;
4) $x^2 - 5x + 9 > |x - 6|$;
5) $|4x - 3| \geqslant x^2 - 3x + 3$;
6) $|x^2 + 3x| \geqslant 2 - x^2$;
7) $|3x - 2|x < 1$;
8) $|x - 4|(x + 2) \geqslant 4x$.

12.29.* Розв'яжіть нерівність:

1) $|x^2 + 5x| < 6$;
2) $|x^2 + 3x| < x + 4$;
3) $x^2 - x - 2 < |5x - 3|$;
4) $|x^2 - 3x| \geqslant x + 5$;
5) $x|3x - 1| < -2$;
6) $x^2 + |x - 3| - 9 < 0$.

12.30.** При яких значеннях параметра a дана нерівність виконується при всіх значеннях x:

1) $x^2 - 4x + a > 0$;
2) $x^2 + (a - 1)x + 1 - a - a^2 \geqslant 0$;
3) $-\frac{1}{4}x^2 + 5ax - 9a^2 - 8a < 0$;
4) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0$;
5) $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$?

12.31.** При яких значеннях параметра a не має розв'язків нерівність:

1) $-x^2 + 6x - a > 0$;
2) $x^2 - (a + 1)x + 3a - 5 < 0$;
3) $ax^2 + (a - 1)x + (a - 1) < 0$;
4) $(a + 4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$?

12.32.** При яких значеннях параметра a функція $y = 0{,}5x^2 - 3x + a$ набуває невід'ємних значень при всіх дійсних значеннях x?

12.33.** При яких значеннях параметра a функція $y = -4x^2 - 16x + a$ набуває від'ємних значень при всіх дійсних значеннях x?

12.34.** При яких значеннях параметра a нерівність $ax^2 + (2 - a)x + 3 - 2a \leqslant 0$ має єдиний розв'язок?

12.35.** Для кожного значення a розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leqslant 0, \\ x < a. \end{cases}$

12.36.** Для кожного значення a розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 72 < 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0, \\ x < a. \end{cases}$

12.37.** При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$ є наслідком нерівності $x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a < 0$?

12.38.[••] При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 + x - 2 < 0$ є наслідком нерівності $x^2 - (2a - 1)x - 3a^2 + a < 0$?

12.39.[••] При яких значеннях параметра a з нерівності $x^2 - x < 0$ випливає нерівність $x^2 - (2a + 3)x + a^2 + 3a \leqslant 0$?

12.40.[••] При яких значеннях параметра a з нерівності $x^2 + x < 0$ випливає нерівність $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a \leqslant 0$?

12.41.[••] Відомо, що $b^2 - 4ac = 0$ і $a + b + c < 0$. Розв'яжіть квадратну нерівність $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.

12.42.[••] Відомо, що $b^2 - 4ac < 0$ і $a + c > b$. Розв'яжіть квадратну нерівність $ax^2 + bx + c \leqslant 0$.

12.43.[••] При яких значеннях параметра a рівняння має єдиний розв'язок:

1) $\dfrac{x^2 - (4 + 3a)x + 12a}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0$; 2) $\dfrac{x^2 - 3ax - 3a - 1}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}} = 0$?

12.44.[••] При яких значеннях параметра a рівняння має єдиний розв'язок:

1) $\dfrac{x^2 - (5 + 2a)x + 10a}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0$; 2) $\dfrac{x^2 - (2a + 2)x + 6a - 3}{\sqrt{2 + x - x^2}} = 0$?

12.45.[••] Про числа a, b і c відомо, що $(a + b + c)(a - b + c) < 0$. Доведіть, що $b^2 > 4ac$.

12.46.[••] Про числа a, b і c відомо, що $a(a + b + c) < 0$. Доведіть, що $b^2 > 4ac$.

12.47.[*] Розв'яжіть рівняння $x^2 - 8[x] + 7 = 0$.

12.48.[*] Розв'яжіть рівняння $x^2 - 6[x] + 5 = 0$.

13. Метод інтервалів. Розв'язування раціональних нерівностей

Квадратні нерівності, які ви навчилися розв'язувати в попередньому пункті, є окремим випадком раціональних нерівностей.

Означення. **Нерівність, ліва і права частини якої є раціональними виразами, називають *раціональною*.**

Як відомо, будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді раціонального дробу. Тому для того, щоб навчитися розв'язувати раціональні нерівності, достатньо навчитися розв'язувати нерівності виду $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ або $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени.

На рисунку 13.1 зображено графік деякої функції f, у якої $D(f) = \mathbb{R}$ і нулями є числа x_1, x_2 і x_3. Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

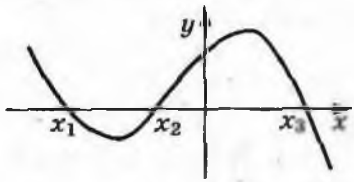


Рис. 13.1

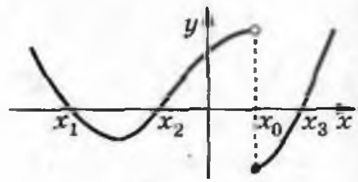


Рис. 13.2

А чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки знакосталості? Відповідь на це запитання негативна. Для функції g, графік якої зображено на рисунку 13.2, проміжок $(x_2; x_3)$ не є проміжком знакосталості. Справді, якщо $x \in (x_2; x_0)$, то $g(x) > 0$, а якщо $x \in (x_0; x_3)$, то $g(x) < 0$.

Принципова відмінність між функціями f і g полягає в тому, що графіком функції f є **неперервна крива**, а графік функції g такої властивості не має. Говорять, що функція f **неперервна в кожній точці області визначення**, або, як ще прийнято говорити, **неперервна на $D(f)$**, а функція g **у точці x_0 має розрив**.

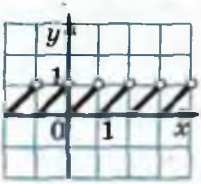


Рис. 13.3

Так, функція $y = \{x\}$ має розрив у кожній точці x такій, що $x \in \mathbb{Z}$. При цьому, наприклад, у кожній точці проміжку $(0; 1)$ ця функція є неперервною (рис. 13.3).

Таке уявлення про неперервну функцію інтуїтивно зрозуміле. Більш детально з цим поняттям ви ознайомитеся в старших класах. Там же буде доведена така наочно очевидна теорема:

Теорема 13.1. ***Якщо функція f неперервна і не має нулів на деякому проміжку, то вона на цьому проміжку зберігає постійний знак.***

Простою ілюстрацією до цієї теореми слугують графіки функцій, наведені в таблиці на с. 117.

Ця теорема дозволяє, не будуючи графіка функції f, розв'язувати нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Звернемося знову до рисунка 13.1.

Уявимо собі, що з цього рисунка зникли всі точки графіка функції f, за винятком точок $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(x_3; 0)$ (рис. 13.4). Очевидно, що кожний з проміжків $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ не містить нулів функції f.

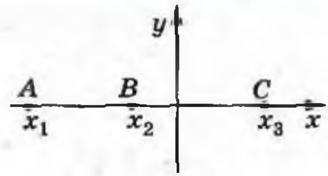


Рис. 13.4

Тоді, пам'ятаючи, що функція f неперервна на $D\ (f)$, можна стверджувати: вказані проміжки є проміжками знакосталості функції f.

Залишається лише з'ясувати, якого знака набувають значення функції f на цих проміжках. Це можна зробити за допомогою «пробних точок».

Нехай, наприклад, $a \in (-\infty;\ x_1)$ і $f\ (a) > 0$. Тоді для будь-якого $x \in (-\infty;\ x_1)$ виконується нерівність $f\ (x) > 0$. Аналогічно можна «взяти пробу» з кожного проміжку знакосталості.

Описаний метод розв'язування нерівностей називають **методом інтервалів.**

Справедливою є така теорема, яку буде доведено в старших класах.

Теорема 13.2. ***Функція*** $y = \frac{f\ (x)}{g\ (x)}$, ***де*** $f\ (x)$ ***і*** $g\ (x)$ ***— многочлени, неперервна на*** $D\ (y)$.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ неперервна в кожній точці множини $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, тобто на $D\ (y)$.

Ця теорема дозволяє для нерівності виду $\frac{f\ (x)}{g\ (x)} > 0$ або $\frac{f\ (x)}{g\ (x)} < 0$, де $f\ (x)$ і $g\ (x)$ — многочлени, застосовувати метод інтервалів.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $(x + 3)\ (x - 1)\ (x - 2) > 0$.

Розв'язання. Числа -3, 1 і 2 є нулями функції $f\ (x) = (x + 3) \times$ $\times\ (x - 1)\ (x - 2)$, яка неперервна на $D\ (f) = \mathbb{R}$. Тому ці числа розбивають множину $\mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f: $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$ (рис. 13.5).

За допомогою «пробних точок» установимо знаки функції f на зазначених проміжках.

Маємо:

$-4 \in (-\infty;\ -3)$; $f\ (-4) < 0$, тому $f\ (x) < 0$ при будь-якому $x \in (-\infty;\ -3)$;

$0 \in (-3;\ 1)$; $f\ (0) > 0$, тому $f\ (x) > 0$ при будь-якому $x \in (-3;\ 1)$;

$\frac{3}{2} \in (1;\ 2)$; $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, тому $f\ (x) < 0$ при будь-якому $x \in (1;\ 2)$;

$3 \in (2;\ +\infty)$; $f\ (3) > 0$, тому $f\ (x) > 0$ при будь-якому $x \in (2;\ +\infty)$.

Результати дослідження знака функції f показано на рисунку 13.6.

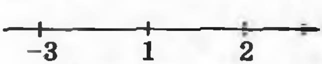


Рис. 13.5

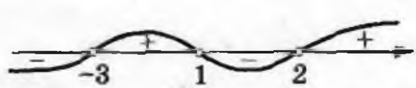


Рис. 13.6

Тепер можна записати відповідь.

Відповідь: $(-3;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$.

Зауваження. При оформленні розв'язування нерівностей процес дослідження знака функції можна проводити усно, фіксуючи результати у вигляді схеми, показаної на рисунку 13.6.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $(x + 1)(3 - x)(x - 2)^2 > 0$.

Розв'язання. Позначимо нулі функції $f(x) = (x + 1)(3 - x)(x - 2)^2$ на координатній прямій (рис. 13.7). Вони розбивають множину $D(f) = \mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f.

Дослідимо знак функції f на цих проміжках. Результат дослідження показано на рисунку 13.8.

Відповідь: $(-1;\ 2) \cup (2;\ 3)$.

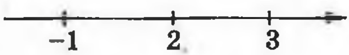


Рис. 13.7

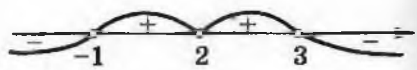


Рис. 13.8

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Розв'язання. Областю визначення функції

$f(x) = \dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$ є множина $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2};\ 4\right) \cup (4;\ +\infty)$.

Функція f є неперервною на кожному з проміжків $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2};\ 4\right)$, $(4;\ +\infty)$. Тому нулі -2, 1, 5 функції f розбивають $D(f)$ на проміжки знакосталості $(-\infty;\ -2)$, $\left(-2;\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2};\ 1\right)$, $(1;\ 4)$, $(4;\ 5)$, $(5;\ +\infty)$.

Результат дослідження знака функції f на цих проміжках показано на рисунку 13.9.

Відповідь: $(-\infty;\ -2) \cup \left(-2;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1;\ 4) \cup (4;\ 5)$.

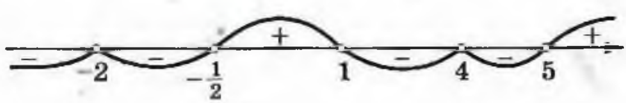


Рис. 13.9

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)} < 0$; $\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)} < 0$.

Областю визначення функції $f(x) = \frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}$ є множина $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$. Функція f нулів не має. Оскільки функція f неперервна на кожному з проміжків $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; +\infty)$, то ці проміжки є для неї проміжками знакосталості.

На рисунку 13.10 показано результат дослідження знака функції f.

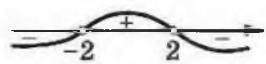


Рис. 13.10

Розв'язання цієї нерівності можна оформити інакше. Оскільки дискримінант квадратного тричлена $x^2 - 4x + 8$ від'ємний, а старший коефіцієнт додатний, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ маємо $x^2 - 4x + 8 > 0$. Тому нерівність $\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)} < 0$ рівносильна такій: $(2 - x)(2 + x) < 0$. Далі слід звернутися до рисунка 13.10.

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

За допомогою методу інтервалів можна розв'язувати і нестрогі нерівності $f(x) \geqslant 0$ або $f(x) \leqslant 0$. Множина розв'язків такої нерівності — це об'єднання множини розв'язків нерівності $f(x) > 0$ (або відповідно $f(x) < 0$) і множини коренів рівняння $f(x) = 0$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\frac{4x^2+4x+1}{x^2+2x-3} \geqslant 0$.

Розв'язання. Радимо, якщо це можливо, многочлени, записані в чисельнику і знаменнику дробу, розкладати на множники. У цьому випадку набагато зручніше досліджувати знак функції на проміжках знакосталості.

Маємо: $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} \geqslant 0$.

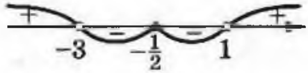


Рис. 13.11

Установлюємо (рис. 13.11), що множина $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ є множиною розв'язків нерівності $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} > 0$.

Рівняння $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} = 0$ має єдиний корінь $x = -\frac{1}{2}$.

Об'єднавши множини розв'язків рівняння і нерівності, отримаємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $(x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$.

Зауважимо, що ця нерівність не є раціональною. Проте для її розв'язування метод інтервалів також є застосовним.

Розв'язання. Маємо: $(x - 2)(x - 4)\sqrt{(x - 1)(x - 3)} \geqslant 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = (x - 2)(x - 4)\sqrt{(x - 1)(x - 3)}$. Легко встановити (рис. 13.12), що $D(f) = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Множина коренів рівняння $f(x) = 0$ має вигляд $\{1; 3; 4\}$.

Розв'яжемо нерівність $f(x) > 0$. Нулі функції f розбивають її область визначення на такі проміжки знакосталості: $(-\infty; 1)$, $(3; 4)$, $(4; +\infty)$.

Рис. 13.12

Рис. 13.13

Установлюємо (рис. 13.13), що множина $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$ є множиною розв'язків нерівності $f(x) > 0$. Об'єднавши множини розв'язків рівняння $f(x) = 0$ і нерівності $f(x) > 0$, отримаємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty) \cup \{3\}$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $\dfrac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 2$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{3 - x}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 2. \end{cases}$ Перетворивши другу нерівність системи, отримуємо:

$$\begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6} \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ \dfrac{(x - 3)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{(x - 2)(x - 3)} \leqslant 0. \end{cases}$$

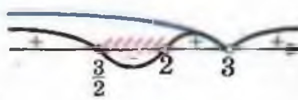


Рис. 13.14

Схема розв'язання отриманої системи зображена на рисунку 13.14. Отже, маємо: $\frac{3}{2} \leqslant x < 2$.

2) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{2x^2 - 11x + 15}{x^2 - 5x + 6} \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3, \\ \dfrac{2(x - 3)\left(x - \frac{5}{2}\right)}{(x - 2)(x - 3)} \leqslant 0. \end{cases}$

Ця система розв'язків не має (переконайтеся в цьому самостійно).

Відповідь: $\left[\frac{3}{2}; 2\right)$.

13.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+1)(x-2)(x+5)>0$;
2) $x(x-3)(x+2)<0$;
3) $(2x+3)(3x-1)(x+4)>0$;
4) $(2x-1)(3-x)(x+1)<0$;
5) $(x-3)(2x+1)(1-5x)(x+4)>0$.

13.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+3)(x-1)(x+4)<0$;
2) $(3x+2)(x-5)(4x-1)>0$;
3) $(1-3x)(x+2)(3-x)<0$;
4) $x(5x+3)(2-x)(4x-3)(x+5)>0$.

13.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-1)(x+3)^2(x-2)<0$;
2) $|x-4|(x+1)(x-3)>0$;
3) $(2x+3)(1-4x)^4(x-2)^3(x+6)<0$;
4) $(1-3x)^3(x+2)^2(x-4)^5(x-3)>0$.

13.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2(x+1)(x-4)>0$;
2) $(3-x)^3|x+2|(x-1)(2x-5)<0$;
3) $(1-2x)(x-3)^9(2x+7)^6(x+4)(x-2)^2>0$.

13.5.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x+1)(x-3)(x^2+4)<0$;
2) $(2-x)(3x+5)(x^2-x+1)>0$;
3) $(2x+1)^2(x^2-4x+3)>0$;
4) $(3x^2-5x-2)(2x^2+x+1)<0$;
5) $3x^3+2x^2-x<0$;
6) $x^3-2x^2-x+2>0$;
7) $(2x^2+5x-3)(2x^2-5x+2)>0$.

13.6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(4-x)(3x+1)(x^4+x^2+1)<0$;
2) $|x-3|(3x+2)^3(3x^2-5x+6)>0$;
3) $4x^3-25x<0$;
4) $x^3-6x+5>0$;
5) $(x^2-4)(3x^2+7x+2)>0$.

13.7.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x+3}{x-1}>0$;
2) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-4}<0$;
3) $\dfrac{(2x+1)(x-3)}{(2-x)(x-5)}<0$;

4) $\dfrac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(x-8)(1-4x)} > 0;$

5) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8} < 0;$

6) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} > 0;$

7) $\dfrac{(x-4)(x-3)(3x-7-x^2)}{x^2+x-2} > 0;$

8) $\dfrac{(x^2-9)(x^2-7x+10)(x^2-7x+13)}{(2x^2+7)(3-2x)} > 0;$

9) $\dfrac{x^6+3x^4-x^2-3}{x^3-64x} < 0.$

13.8.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x}{x+2} < 0;$

2) $\dfrac{(3x-2)(4-x)}{(x+3)(x-1)} > 0;$

3) $\dfrac{(x-2)(2x+1)^3}{(3-x)^4(1-5x)^5} > 0;$

4) $\dfrac{(x-2)(x^2-1)(4x-5-3x^2)}{x+7} < 0;$

5) $\dfrac{x^2-5x+7}{-2x^2+3x+2} > 0;$

6) $\dfrac{(x^3-8)(x^2-6x-7)}{(3x-2x^2-4)(3x^2-10x+3)} < 0;$

7) $\dfrac{x^2+5x-6}{(x+2)(1-3x)} < 0;$

8) $\dfrac{(x^4-3x^2)(x^4+x^3-8x-8)}{(1-x)(x+2)} < 0.$

13.9.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{1}{x} < 1;$

2) $\dfrac{x}{x+3} > \dfrac{1}{2};$

3) $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{3}{x-3};$

4) $\dfrac{4}{x+1} + \dfrac{2}{1-x} < 1;$

5) $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x+1}{x-1} < 2;$

6) $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} < \dfrac{1}{x-3};$

7) $\dfrac{7}{x^2-5x+6} + \dfrac{9}{x-3} < -1;$

8) $\dfrac{2}{3x+7} < \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+1}.$

13.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x}{x-4} < \dfrac{1}{3};$

2) $\dfrac{5x+8}{4-x} < 2;$

3) $\dfrac{2}{x+3} > \dfrac{1}{x-1};$

4) $\dfrac{2(x-3)}{x(x-6)} < \dfrac{1}{x-1};$

5) $\dfrac{2x+3}{x^2+x-12} < \dfrac{1}{2};$

6) $\dfrac{x+7}{x-5} + \dfrac{3x+1}{2} > 0;$

7) $\dfrac{2x}{x^2-9} < \dfrac{1}{x+2};$

8) $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{x}.$

13.11.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(3x+1)(3-x)(x+5) \leqslant 0$;
2) $(2x+1)^2(x-1)(x-2) \geqslant 0$;
3) $\dfrac{(x-3)(5x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)^2} \geqslant 0$;
4) $\dfrac{x^5|3x-1|(x+3)}{x-2} \leqslant 0$;
5) $\dfrac{1-2x-3x^2}{3x-x^2-5} \geqslant 0$;
6) $\dfrac{5x+4}{x+3} - \dfrac{x+2}{1-x} \leqslant 0$.

13.12.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)(x+2)^2(x-5) \geqslant 0$;
2) $\dfrac{(2-x)(4x+3)}{(x-3)^3(x+1)^2} \leqslant 0$;
3) $\dfrac{(x+6)^3(x+4)(6-x)^5}{|x+5|} \geqslant 0$;
4) $\dfrac{20}{x^2-7x+12} + \dfrac{10}{x-4} + 1 \geqslant 0$.

13.13.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-5)(x+4)(x^2+6x+9) \geqslant 0$;
2) $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1) \leqslant 0$;
3) $\dfrac{4x^2-4x+1}{x^2+x-12} \geqslant 0$;
4) $\dfrac{x^3-3x+2}{6-x} \leqslant 0$;
5) $\dfrac{|x|(x+1)^3}{|x-4|^3(x+3)} \leqslant 0$.

13.14.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2-4)(x^2+x-2) \leqslant 0$;
2) $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10) \leqslant 0$;
3) $\dfrac{(x^2-10x+21)(x^2-6x-7)}{(x^2+5x+6)(x^2-4)} \leqslant 0$;
4) $\dfrac{|x-5|^5|x-2|}{(1-x)^3(x+4)} \leqslant 0$.

13.15.• Розв'яжіть нерівність $\left|\dfrac{x+2}{x}\right|(x^2-4x-5) \leqslant 0$.

13.16.• Розв'яжіть нерівність $\left|\dfrac{x-5}{x}\right|(x^2-x-12) \leqslant 0$.

13.17.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15} > 0$;
2) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15} \geqslant 0$;
3) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15} < 0$;
4) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15} \leqslant 0$;
5) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} < 0$;
6) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} > 0$;
7) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} \leqslant 0$;
8) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} \geqslant 0$;
9) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} < 0$;
10) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} > 0$;
11) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} \leqslant 0$;
12) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} \geqslant 0$.

13.18.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} > 0$;
2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} \geqslant 0$;
3) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} < 0$;
4) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} \leqslant 0$;
5) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} < 0$;
6) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} > 0$;
7) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} \leqslant 0$;
8) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} \geqslant 0$;
9) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6} > 0$;
10) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6} < 0$;
11) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6} \leqslant 0$;
12) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6} \geqslant 0$.

13.19.° Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x}{x^2-9}\right| < \frac{x}{x^2-9}$.

13.20.° Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x-1}{x^2-16}\right| \leqslant \frac{x-1}{x^2-16}$.

13.21.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(|x|-3)(|x|-8) \geqslant 0$;
2) $\frac{|x+2|-x}{x} < 2$;
3) $\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x$;
4) $\frac{|x-1|}{x+2} + x - 3 > \frac{1}{x+2}$.

13.22.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(|x|-5)(|x|-7) \leqslant 0$;
2) $\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1$;
3) $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0$;
4) $\frac{2}{x|x-1|} \leqslant -1$.

13.23.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| \geqslant 2$; 2) $\left|\frac{3x}{x^2-4}\right| \leqslant 1$; 3) $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| \leqslant 1$.

13.24.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left|\frac{x-3}{x-5}\right| \geqslant 1$; 2) $\left|\frac{x+4}{x+2}\right| \leqslant 1$; 3) $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| < 1$.

13.25.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x-1| + |x^2-x-6| = x^2+x-7$;
2) $|x^2-4| + |x^2-x-2| = |2x^2-x-6|$.

13.26.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $|3x-2| + |x^2-5x+6| = x^2-2x+4$;
2) $|x^2-9| + |x^2+4x+3| = |2x^2+4x-6|$.

13.27.°° Знайдіть множину розв'язків нерівності залежно від значення параметра a:

1) $|x-a|(5x^2-2x-3) < 0$; 2) $|x-a|(5x^2-2x-3) \leqslant 0$.

13.28.** Знайдіть множину розв'язків нерівності залежно від значення параметра a:

1) $|x - a|(7x^2 - 4x - 3) < 0$; 2) $|x - a|(7x^2 - 4x - 3) \leqslant 0$.

13.29.** Знайдіть множину розв'язків нерівності залежно від значення параметра a:

1) $|x - 1|(x^2 - (a + 3)x + 3a) < 0$;
2) $|x - 1|(x^2 - (a + 3)x + 3a) \leqslant 0$.

13.30.** Знайдіть множину розв'язків нерівності залежно від значення параметра a:

1) $|x + 2|(x^2 - (a + 1)x + a) < 0$;
2) $|x + 2|(x^2 - (a + 1)x + a) \leqslant 0$.

13.31.* Розв'яжіть рівняння $2\{x\} - \{x\}[x] = x - 5$.

13.32.* Розв'яжіть рівняння $[x]\{x\} - 3\{x\} = 6 - x$.

14. Розміщення нулів квадратичної функції відносно заданої точки

Розглянемо квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$, нулі якої дорівнюють x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$. Нехай число α не є нулем даної функції. Тоді можливі три випадки розміщення нулів функції відносно числа α:

- $\alpha < x_1 < x_2$;
- $x_1 < \alpha < x_2$;
- $x_1 < x_2 < \alpha$.

У цьому пункті буде розглянуто задачі на пошук значень параметрів, при яких нулі квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ розміщені відносно заданого числа α в один з трьох зазначених способів.

Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ є повним квадратом, то нулі квадратичної функції зручно виразити через коефіцієнти, а потім розв'язати відповідну нерівність або систему нерівностей. Задачі такого типу ви вже розв'язували (див. № 12.37–12.40).

Якщо дискримінант квадратного тричлена не є повним квадратом, то реалізація цього плану пов'язана зі значними технічними труднощами. Розглянемо більш раціональні способи розв'язування подібних задач.

ПРИКЛАД 1 При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 + (a - 1)x + 2a^2 - a - 1 = 0$ має корені різних знаків?

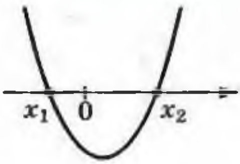


Рис. 14.1

Розв'язання. Розглянемо квадратичну функцію $f(x) = x^2 + (a - 1)x + 2a^2 - a - 1$. Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору. З умови випливає, що точка 0 має бути розміщена між числами x_1 і x_2 — нулями функції f (рис. 14.1).

Таке розміщення параболи характеризується тим, що значення квадратичної функції в точці 0 є від'ємним. Тому шукане значення параметра a знайдемо з умови $f(0) < 0$.

Маємо: $2a^2 - a - 1 < 0$.

Розв'язавши цю нерівність, отримуємо відповідь.

Відповідь: $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $x^2 - (a - 3)x - 2a^2 + 5a - 2 > 0$ виконується при всіх невід'ємних значеннях x.

Розв'язання

- Якщо дискримінант D квадратного тричлена, записаного в лівій частині нерівності, від'ємний, то дана нерівність виконується при всіх x, а отже, і при всіх невід'ємних значеннях x.

Маємо: $D = (a - 3)^2 + 8a^2 - 20a + 8 = 9a^2 - 26a + 17$;

$$9a^2 - 26a + 17 < 0;\ 1 < a < \frac{17}{9}.$$

Отже, проміжок $\left(1; \frac{17}{9}\right)$ слід включити до відповіді.

- Розглянемо випадок, коли $D \geqslant 0$. Нехай x_1 і x_2 — нулі функції $f(x) = x^2 - (a - 3)x - 2a^2 + 5a - 2$, причому $x_1 \leqslant x_2$. Тоді множиною розв'язків даної нерівності є множина $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Для виконання умови задачі достатньо вимагати, щоб $[0; +\infty) \subset$ $\subset (x_2; +\infty)$. Ця умова має геометричну інтерпретацію (рис. 14.2).

Знайдемо аналітичні співвідношення, які описують рисунок 14.2.

Здавалося б, досить вимагати: $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ f(0) > 0. \end{cases}$

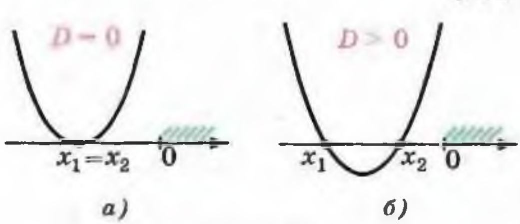


Рис. 14.2

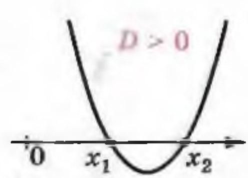


Рис. 14.3

Проте цю умову задовольняє і, наприклад, ситуація, зображена на рисунку 14.3. Але тут не виконується вимога $[0; +\infty) \subset (x_2; +\infty)$. Тому до наведених вище співвідношень потрібно додати таке, що забезпечить розміщення вершини параболи лівіше точки 0.

Маємо: $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ f(0) > 0, \\ x_0 < 0, \end{cases}$

де x_0 — абсциса вершини параболи.

Звідси $\begin{cases} 9a^2 - 26a + 17 \geqslant 0, \\ -2a^2 + 5a - 2 > 0, \\ \dfrac{a-3}{2} < 0. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему, отримаємо проміжок $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$, який містить проміжок $\left(1; \dfrac{17}{9}\right)$.

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Зауважимо, що приклади 1 і 2 можна розв'язати, використовуючи теорему Вієта (зробіть це самостійно).

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра a усі корені рівняння $x^2 - ax + 2 = 0$ задовольняють умову $1 < x < 3$?

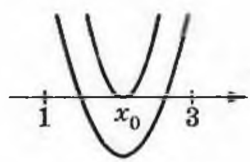


Рис. 14.4

Розв'язання. Рисунок 14.4 є перекладом умови задачі графічною мовою.

Умови $D \geqslant 0$, $f(1) > 0$, $f(3) > 0$ є лише необхідними для виконання умови задачі. Ми отримаємо достатню умову, якщо додамо ще одну нерівність $1 < x_0 < 3$, де x_0 — абсциса вершини параболи. Отже, отримуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} a^2 - 8 \geqslant 0, \\ 3 - a > 0, \\ 11 - 3a > 0, \\ 1 < \dfrac{a}{2} < 3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо відповідь.

Відповідь: $2\sqrt{2} \leqslant a < 3$.

ПРИКЛАД 4 Знайдіть усі значення параметра a, при яких з нерівності $-1 < x < 2$ випливає нерівність $(a + 1)x^2 - (3a + 4)x + 4 > 0$.

Розв'язання. Умова задачі означає, що проміжок $(-1;\ 2)$ має міститися в множині розв'язків другої нерівності.

- Якщо $a = -1$, то отримуємо: $-x + 4 > 0$; $x < 4$, тобто $x \in (-\infty;\ 4)$. Оскільки $(-1;\ 2) \subset (-\infty;\ 4)$, то $a = -1$ входить до відповіді.
- Нехай $a \neq -1$. Розглянемо квадратичну функцію $f(x) = (a + 1)\,x^2 - (3a + 4)\,x + 4$.

• Якщо $a + 1 < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз. У цьому випадку нерівність $(a + 1)\,x^2 - (3a + 4)\,x + 4 > 0$ матиме розв'язки, якщо розміщення параболи буде таким, як зображено на рисунку 14.5. При цьому множиною розв'язків буде проміжок $(x_1;\ x_2)$, де x_1 і x_2 — нулі функції f.

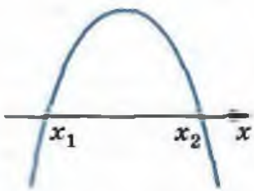


Рис. 14.5

У цьому разі умову задачі буде виконано, якщо $(-1;\ 2) \subset (x_1;\ x_2)$ (рис. 14.6).

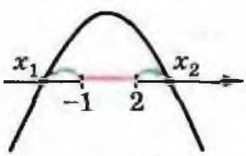


Рис. 14.6

Таке розміщення параболи відносно точок -1 і 2 забезпечується *системою нерівностей*:

$$\begin{cases} a + 1 < 0, \\ f(-1) \geqslant 0, \\ f(2) \geqslant 0. \end{cases}$$

На перший погляд здається, що в системі не вистачає умови $D > 0$. Проте ця вимога є надлишковою з таких наочно очевидних міркувань: *якщо вітки параболи напрямлені вниз (вгору) і існує точка, у якій квадратична функція набуває додатного (від'ємного) значення, то парабола перетинає вісь абсцис у двох точках.*

Маємо: $\begin{cases} a + 1 < 0, \\ (a + 1) + (3a + 4) + 4 \geqslant 0, \\ 4(a + 1) - 2(3a + 4) + 4 \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $-\dfrac{9}{4} \leqslant a < -1$.

• Нехай тепер $a + 1 > 0$. Тоді вітки параболи напрямлені вгору.

Якщо $D < 0$, то множиною розв'язків нерівності є множина $\mathbb{R}$, яка, звісно, містить проміжок $(-1;\ 2)$. Отже, розв'язки системи $\begin{cases} a + 1 > 0, \\ D < 0 \end{cases}$ входять до відповіді. Маємо: $\begin{cases} a + 1 > 0, \\ 9a^2 + 8a < 0. \end{cases}$

Звідси $-\dfrac{8}{9} < a < 0$.

Якщо $D \geqslant 0$, то множиною розв'язків нерівності $(a + 1)\,x^2 - (3a + 4)\,x + 4 > 0$ є об'єднання двох променів $(-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$.

Для виконання умови задачі достатньо вимагати, щоб $(-1;\ 2) \subset (-\infty;\ x_1)$ (рис. 14.7) або $(-1;\ 2) \subset (x_2;\ +\infty)$ (рис. 14.8).

Для рисунка 14.7 маємо:

$$\begin{cases} a+1>0, \\ D \geqslant 0, \\ f(2) \geqslant 0, \\ 2 \leqslant x_0. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} a+1>0, \\ 9a^2+8a \geqslant 0, \\ 4(a+1)-2(3a+4)+4 \geqslant 0, \\ 2 \leqslant \dfrac{3a+4}{2(a+1)}. \end{cases}$$

Рис. 14.7

Розв'язавши цю систему, отримуємо $a \in \{0\} \cup \left(-1;\ -\dfrac{8}{9}\right]$.

Для рисунка 14.8 маємо:

$$\begin{cases} a+1>0, \\ D \geqslant 0, \\ f(-1) \geqslant 0, \\ x_0 \leqslant -1. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} a+1>0, \\ 9a^2+8a \geqslant 0, \\ a+1+3a+4+4 \geqslant 0, \\ \dfrac{3a+4}{2(a+1)} \leqslant -1. \end{cases}$$

Легко переконатися, що ця система розв'язків не має.

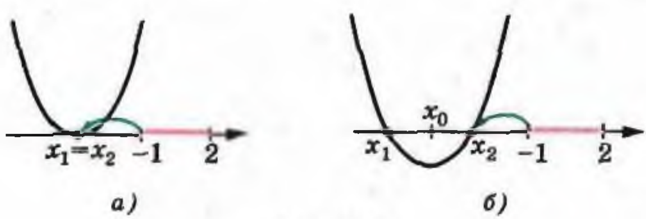


Рис. 14.8

Отже, відповіддю цієї задачі є об'єднання множин

$$\{-1\} \cup \left[-\frac{9}{4};\ -1\right) \cup \{0\} \cup \left(-\frac{8}{9};\ 0\right) \cup \left(-1;\ -\frac{8}{9}\right].$$

Відповідь: $-\dfrac{9}{4} \leqslant a \leqslant 0$.

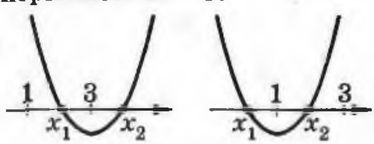
ПРИКЛАД 5 При яких значеннях параметра a тільки один корінь рівняння $x^2 - ax + 2 = 0$ задовольняє умову $1 < x < 3$?

Розв'язання. В умові не сказано, що дане рівняння має два різні корені. Тому спочатку розглянемо випадок, коли $D = 0$. Маємо: $a^2 - 8 = 0$; $a = -2\sqrt{2}$ або $a = 2\sqrt{2}$. Для першого значення параметра отримуємо $x = -\sqrt{2} \notin (1; 3)$; для другого $x = \sqrt{2} \in (1; 3)$. Отже, $a = 2\sqrt{2}$ входить до відповіді.

У разі коли $D > 0$, позначимо корені рівняння x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$). Виходячи з умови, вимагатимемо, щоб $x_1 \in (1; 3)$, а $x_2 \notin (1; 3)$ або $x_1 \notin (1; 3)$, а $x_2 \in (1; 3)$. Розміщення парабол на рисунку 14.9 визначає така сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(1) > 0, \\ f(3) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(1) < 0, \\ f(3) > 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Зазначимо, що нерівності в системах гарантують виконання нерівності $D > 0$.



а) б)

Рис. 14.9

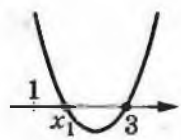


Рис. 14.10

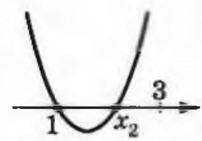


Рис. 14.11

Отримана сукупність рівносильна нерівності $f(1) \cdot f(3) < 0$. Звідси $(3 - a)(11 - 3a) < 0$; $3 < a < \frac{11}{3}$.

Проте існують й інші випадки розташування парабол, які задовольняють умову задачі. Це $x_1 \in (1; 3)$, $x_2 = 3$ (рис. 14.10) або $x_2 \in (1; 3)$, $x_1 = 1$ (рис. 14.11). Розглянемо ці випадки.

Якщо $f(3) = 0$, то $a = \frac{11}{3}$. Звідси $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = 3$, що не задовольняє умову $x_1 \in (1; 3)$.

Якщо $f(1) = 0$, то $a = 3$. Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, що задовольняє умову задачі.

Відповідь: $3 \leqslant a < \frac{11}{3}$ або $a = 2\sqrt{2}$.

14.1.° Знайдіть усі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння $x^2 + (a^2 - 2)x - a^2 + 3a + 2 = 0$ більший за 1, а другий менший від 1.

14.2.$^{\bullet}$ Знайдіть усі значення параметра a, при яких один з коренів рівняння $ax^2 - (a - 1)x + a^2 - 10 = 0$ більший за -3, а другий менший від -3.

14.3.$^{\bullet}$ При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 4a + 3 = 0$ є додатними числами?

14.4.$^{\bullet}$ При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 + 2(2a + 3)x + 4a^2 - 3a - 1 = 0$ є від'ємними числами?

14.5.$^{\bullet}$ Знайдіть усі значення параметра a, при яких корені рівняння $x^2 - (2a + 1)x + 2a + 9 = 0$ більші за -1.

14.6.$^{\bullet}$ Знайдіть усі значення параметра a, при яких корені рівняння $x^2 - 2(a + 1)x - 2a - 2 = 0$ менші від 1.

14.7.$^{\bullet}$ При яких значеннях параметра a корені рівняння $(a - 1)x^2 - 2x + 5 = 0$ більші за 2?

14.8.$^{\bullet}$ При яких значеннях параметра a корені рівняння $(a + 2)x^2 - 4x + 1 = 0$ менші від 3?

14.9.$^{\bullet}$ При яких значеннях параметра a один з коренів рівняння $x^2 + 4ax + 4 - a^2 = 0$ менший від 0, а другий більший за 1?

14.10.$^{\bullet}$ При яких значеннях параметра a один з коренів рівняння $(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$ менший від 2, а другий більший за 3?

14.11.$^{\bullet}$ При яких значеннях параметра a усі корені рівняння $(a - 1)x^2 - 2(a + 2)x + a = 0$ належать проміжку $(-1; 2)$?

14.12.$^{\bullet}$ При яких значеннях параметра a усі корені рівняння $(1 + a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ належать проміжку $(2; 5)$?

14.13.$^{\bullet}$ Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $x^2 - (a + 1)x - a^2 < 0$ виконується для всіх $x \in [1; 2]$.

14.14.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $x^2 - 2(a + 1)x + a^2 - a - 6 > 0$ виконується для всіх недодатних значень x.

14.15.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a нерівність $ax^2 + 2(a + 1)x + 3a + 1 \leqslant 0$ виконується для всіх значень x, менших від 1?

14.16.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 + 2ax + 3a^2 - 5a + 2 > 0$ виконується для всіх значень x, більших за -1?

14.17.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $ax^2 - 2(a - 3)x + a + 3 > 0$ виконується для всіх $x \in [-2; 2]$.

14.18.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a з нерівності $2x^2 + x < 0$ випливає нерівність $ax^2 - 2(a - 3)x + a - 1 > 0$?

14.19.** Знайдіть усі значення параметра a, при яких з нерівності $ax^2 + 2(a-2)x + a - 5 > 0$ випливає нерівність $x^2 - 3x + 2 > 0$.

14.20.** При яких значеннях параметра a нерівність

$$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a > 0$$

випливає з нерівності $x^2 - 4x + a^2 > 0$?

Парабола

Незалежно від розміщення кола на координатній площині xy його рівняння має вигляд

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \qquad (*)$$

де a і b — відповідно абсциса і ордината центра кола, R — його радіус.

Ця властивість дозволяє дати нове означення кола як фігури, яка є графіком рівняння (*).

У пункті 8 фігуру, яка була графіком рівняння $y = ax^2$, де $a \neq 0$, ми називали параболою.

На рисунку 14.12 зображено параболу $y = x^2$. Якщо фігуру, яка дорівнює цій параболі, розташувати, наприклад, так, як на рисунку 14.13, то очевидно, що рівняння цієї фігури не має ні вигляду $y = ax^2$, ні навіть $y = ax^2 + bx + c$. Виходить, що ми не можемо фігуру, зображену на рисунку 14.13, називати параболою.

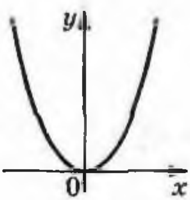


Рис. 14.12

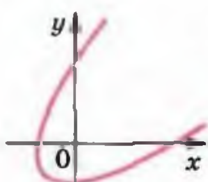


Рис. 14.13

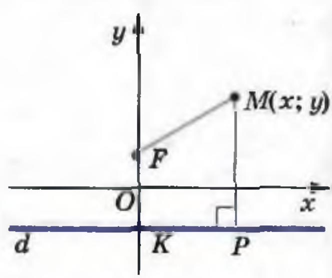


Рис. 14.14

Але природно, щоб рівні фігури мали однакові назви. Тому бажано дати таке означення параболи, яке не було б пов'язане з рівнянням фігури, наприклад, аналогічне означенню кола як ГМТ, рівновіддалених від заданої точки.

Розглянемо таку задачу. Нехай дано пряму d і точку F, яка не належить цій прямій. Знайдемо ГМТ, рівновіддалених від прямої d і точки F.

Розв'язання. Опустимо з точки F перпендикуляр FK на пряму d. Нехай точка O — середина відрізка FK (рис. 14.14).

Оберемо систему координат так, щоб вісь ординат збігалася з прямою FK, а вісь абсцис — із серединним перпендикуляром відрізка FK.

Оберемо одиничний відрізок так, щоб $FK = \frac{1}{2}$. Тоді $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, $K\left(0; -\frac{1}{4}\right)$, рівняння прямої d має вигляд $y = -\frac{1}{4}$.

Нехай $M\ (x;\ y)$ — точка, яка належить шуканому ГМТ. Тоді відстань від точки M до прямої d (довжина відрізка MP) дорівнює $\left|y + \frac{1}{4}\right|$, а довжина відрізка MF дорівнює $\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}$.

З урахуванням умови можна записати: $MP = MF$, тобто

$$\left|y + \frac{1}{4}\right| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}.$$

Звідси $\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$;

$$y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16};$$

$$y = x^2.$$

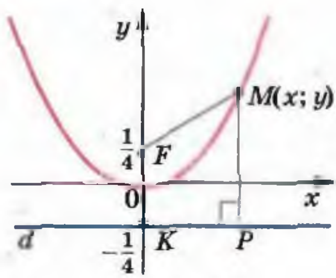


Рис. 14.15

Отже, шукане ГМТ — це фігура, яка є графіком рівняння $y = x^2$, тобто парабола (рис. 14.15).

Легко показати (зробіть це самостійно), що коли точки F і K обрати так, що $FK = \frac{1}{2a}$, де $a > 0$, то в результаті аналогічних міркувань буде отримано рівняння $y = ax^2$.

Цей результат дозволяє дати таке означення параболи.

Означення. Параболою називають ГМТ, рівновіддалених від даної прямої та даної точки, яка не лежить на цій прямій.

Дану пряму називають **директрисою** (від латинського *directrixe* — напрямна), а дану точку — **фокусом** (від латинського *focus* — вогнище, осередок).

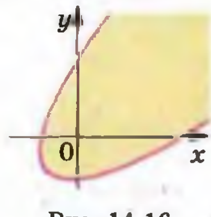


Рис. 14.16

Пряму, яка проходить через фокус і перпендикулярна до директриси, називають **віссю параболи**.

Параболі притаманна ціла низка цікавих властивостей.

Парабола ділить площину на дві фігури, одна з яких є опуклою (на рисунку 14.16 вона зафарбована жовтим кольором). **Її називають внутрішньою областю параболи.**

Відстань від будь-якої точки внутрішньої області параболи до фокуса менша, ніж відстань від цієї точки до директриси. Відстань від будь-якої точки, яка не належить внутрішній області параболи, до директриси не більша, ніж відстань від цієї точки до фокуса. Ці дві властивості доведіть самостійно.

Промені, які виходять з джерела світла, розміщеного у фокусі параболи, після відбивання від неї стають паралельними осі параболи.

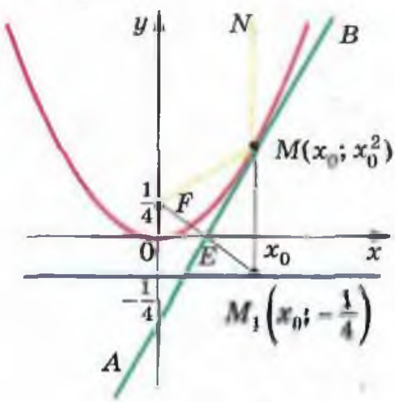


Рис. 14.17

Пояснимо цю оптичну властивість на прикладі параболи $y = x^2$. Нехай промінь, який виходить з фокуса $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, відбивається від точки $M\left(x_0; x_0^2\right)$ параболи $y = x^2$ (рис. 14.17). За відомим з оптики законом $\angle FMA = \angle NMB$, де пряма AB — дотична[1] до параболи $y = x^2$. Опустимо перпендикуляр MM_1 на директрису параболи. Коли ми доведемо рівність кутів NMB і AMM_1, то тим самим покажемо, що точки N, M і M_1 лежать на одній прямій, паралельній осі ординат.

Рівняння прямої AB, яка проходить через точку $M\left(x_0; x_0^2\right)$, має вигляд $y = k(x - x_0) + x_0^2$, де k — кутовий коефіцієнт прямої AB.

У цієї прямої і параболи $y = x^2$ є єдина спільна точка, отже, рівняння $x^2 = k(x - x_0) + x_0^2$ має єдиний розв'язок. Звідси:

$x^2 - kx + kx_0 - x_0^2 = 0$;

$D = k^2 - 4kx_0 + 4x_0^2 = 0$. Звідси $k = 2x_0$.

Тоді рівняння прямої AB набуває вигляду

$$y = 2x_0x - x_0^2. \qquad (**)$$

Нехай точка E — середина відрізка FM_1.

Маємо: $E\left(\frac{0 + x_0}{2}; \frac{\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)}{2}\right)$, тобто $E\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$.

[1] Більш докладно з поняттям дотичної до кривої ви ознайомитеся в 11 класі.

Легко перевірити, що координати точки E задовольняють рівняння (**). Отже, точка E належить прямій AB. У рівнобедреному трикутнику FMM_1 ($MF = MM_1$) відрізок ME — медіана. Тоді $\angle FME = \angle EMM_1$. З урахуванням вищесказаного $\angle EMM_1 = \angle NMB$.

Якщо параболу обертати навколо її осі, то отримаємо поверхню, яку називають параболоїдом обертання (рис. 14.18). Таку форму мають дзеркала прожекторів, автомобільних фар, телескопів. Промені світла від джерела, розміщеного в фокусі параболи, відбиваючись від поверхні обертання, утворюють паралельний пучок світла. І навпаки, усі світлові промені, які йдуть паралельно осі обертання, після відбивання збираються в одній точці — фокусі. Ця властивість лежить в основі принципу роботи параболічних антен.

Рис. 14.18

З кривими, які мають форму параболи, можна зустрітися, вивчаючи рух предметів. Наприклад, траєкторія польоту каменя, кинутого під кутом до горизонту, футбольного м'яча або артилерійського снаряду за відсутності опору повітря є параболою. Струмені води у фонтанах утворюють фігуру, яка схожа на параболу.

Знання властивостей параболи дозволяє розв'язати цілу низку красивих задач. Проілюструємо це на прикладах.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що скінченною множиною внутрішніх областей парабол неможливо замостити площину.

Розв'язання. Проведемо пряму, яка не паралельна жодній з осей парабол (така пряма існує, оскільки парабол скінченна кількість). Кожна з внутрішніх областей парабол або не має спільних точок з проведеною прямою, або множина спільних точок утворює відрізок. Але скінченною кількістю відрізків неможливо покрити пряму.

ПРИКЛАД 2 На площині задано скінченну множину прямих і скінченну множину точок, жодна з яких не належить заданим прямим. Доведіть, що на площині існує точка, відстань від якої до будь-якої із заданих прямих менша, ніж відстань до будь-якої із заданих точок.

Розв'язання. Кожну пару (пряма; точка) розглядатимемо як директрису і фокус деякої параболи. Таким чином, задано скінченну множину внутрішніх областей парабол. Згідно з результатом попередньої задачі вони не замощують усю площину. Візьмемо будь-яку з непокритих точок, яка не належить жодній параболі. Вона і буде шуканою.

§ 4. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ З ДВОМА ЗМІННИМИ

15. Рівняння з двома змінними та його графік

Вирази $x^2 + y^2$, $\frac{x+y}{x-y}$, $(x-1)(y+2)$, $x - 3y$ є прикладами виразів з двома змінними x і y.

Вираз зі змінними x і y позначають так: $F(x; y)$ (читають: «еф від ікс і ігрек»).

Тоді рівність $F(x; y) = 0$ є рівнянням з двома змінними x і y.

Наприклад, якщо $F(x; y) = ax + by - c$, то $F(x; y) = 0$ є лінійним рівнянням з двома змінними.

Нагадаємо, що коли $F(x; y)$ — многочлен стандартного вигляду, то його степенем називають найбільший із степенів одночленів, які в нього входять. У цьому разі степенем відповідного рівняння $F(x; y) = 0$ називають степінь многочлена $F(x; y)$.

Наприклад, степінь рівняння $x^2 - x^2y^3 + y^3 = 0$ дорівнює 5.

Якщо в лінійному рівнянні $ax + by - c = 0$ параметри a і b одночасно не дорівнюють нулю ($a^2 + b^2 \neq 0$), то це рівняння є **рівнянням першого степеня зі змінними x і y.**

Рівняння другого степеня зі змінними x і y має вигляд: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, де a, b, c, d, e, f — параметри, причому $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Нагадаємо, що пару чисел $(x_0; y_0)$ називають **розв'язком** рівняння $F(x; y) = 0$, коли $F(x_0; y_0) = 0$ — правильна числова рівність.

Якщо на координатній площині xy позначити всі точки, координати яких є розв'язком рівняння $F(x; y) = 0$, то отриману фігуру називають **графіком** цього рівняння.

Наприклад, графіком рівняння першого степеня є пряма, графіком рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $R \neq 0$, є коло, графіком рівняння $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, є парабола.

У пунктах 8–10 ви навчилися перетворювати графіки функцій, тим самим істотно розширивши клас функцій, графіки яких ви вмієте будувати.

Аналогічні перетворення можна виконувати з графіками рівнянь.

- **Графік рівняння $F(x + a; y) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ вздовж осі абсцис на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$.**

Наприклад, графік рівняння $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ можна отримати, якщо перенести коло $x^2 + y^2 = 4$ вздовж осі абсцис на дві одиниці вліво (рис. 15.1).

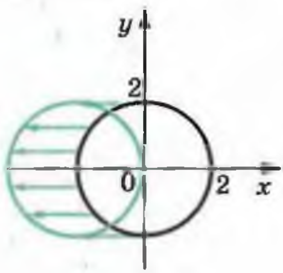


Рис. 15.1

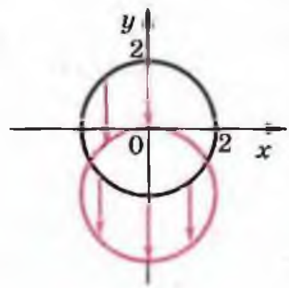


Рис. 15.2

- **Графік рівняння $F(x; y + b) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ вздовж осі ординат на b одиниць униз, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць угору, якщо $b < 0$.**

Наприклад, графік рівняння $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ можна отримати, якщо перенести коло $x^2 + y^2 = 4$ вздовж осі ординат на дві одиниці вниз (рис. 15.2).

- **Графік рівняння $F(-x; y) = 0$ можна отримати в результаті симетричного відображення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ відносно осі ординат.**

Наприклад, графік рівняння $(-x + 2)^2 + y^2 = 4$ можна отримати, симетрично відобразивши коло $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ відносно осі ординат (рис. 15.3).

- **Графік рівняння $F(x; -y) = 0$ можна отримати в результаті симетричного відображення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ відносно осі абсцис.**

Наприклад, графік рівняння $x^2 + (-y + 2)^2 = 4$ можна отримати, симетрично відобразивши коло $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ відносно осі ординат (рис. 15.4).

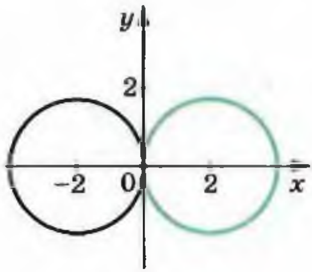


Рис. 15.3

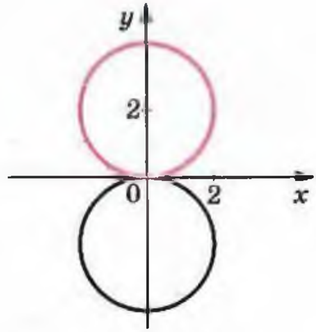


Рис. 15.4

Графік рівняння $F(kx; y) = 0$, де $k > 0$, можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ в результаті стиску в k разів до осі ординат, якщо $k > 1$, або в результаті розтягу в $\frac{1}{k}$ разів від осі ординат, якщо $0 < k < 1$.

Наприклад, графік рівняння $(2x)^2 + y^2 = 4$ можна отримати, якщо стиснути в 2 рази коло $x^2 + y^2 = 4$ до осі ординат (рис. 15.5). Отриману фігуру називають **еліпсом**.

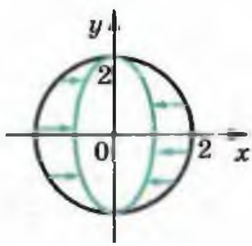


Рис. 15.5

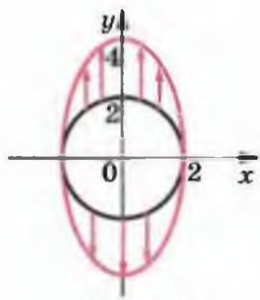


Рис. 15.6

Графік рівняння $F(x; ky) = 0$, де $k > 0$, можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ в результаті стиску в k разів до осі абсцис, якщо $k > 1$, або в результаті розтягу в $\frac{1}{k}$ разів від осі абсцис, якщо $0 < k < 1$.

Наприклад, графік рівняння $x^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 4$ можна отримати, якщо розтягнути в 2 рази коло $x^2 + y^2 = 4$ від осі абсцис (рис. 15.6). Отримана фігура також є еліпсом.

➤ **Графік рівняння $F(|x|; y) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ таким чином: побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x; y) = 0$ при $x \geqslant 0$, і побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі ординат. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.**

На рисунку 15.7 зеленим кольором зображено графік рівняння $(|x| - 1)^2 + y^2 = 4$.

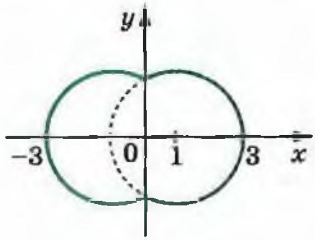


Рис. 15.7

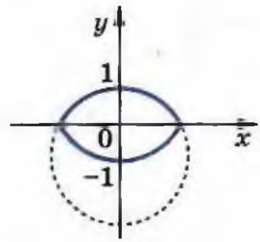


Рис. 15.8

➤ **Графік рівняння $F(x; |y|) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ таким чином: побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x; y) = 0$ при $y \geqslant 0$, і побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі абсцис. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.**

На рисунку 15.8 синім кольором зображено графік рівняння $x^2 + (|y| + 1)^2 = 4$.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік рівняння $x = y^2$.

Розв'язання. Якщо в даному рівнянні замінити x на y, а y на x, то отримаємо рівняння $y = x^2$, графіком якого є парабола.

Виконана заміна означає, що шуканий графік — це графік рівняння $y = x^2$, побудований на координатній площині yx, тобто в системі координат, у якій осі абсцис і ординат помінялися місцями.

Це означає, що графіком рівняння $x = y^2$ є парабола, зображена на рисунку 15.9.

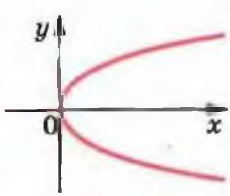


Рис. 15.9

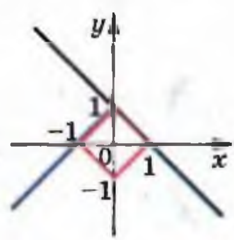


Рис. 15.10

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік рівняння $|x| + |y| = 1$.

Розв'язання. Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ позначає рівняння $x + y = 1$. Тоді шуканий графік можна побудувати за такою схемою (рис. 15.10):

$$F(x; y) = 0 \to F(|x|; y) = 0 \to F(|x|; |y|) = 0.$$

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік рівняння $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Розв'язання. Задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} y^2 = 1 - x^2, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Отже, шуканим графіком є півколо, яке лежить у верхній півплощині відносно осі абсцис (рис. 15.11).

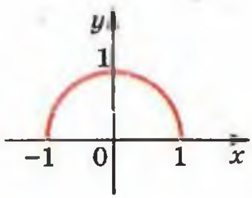


Рис. 15.11

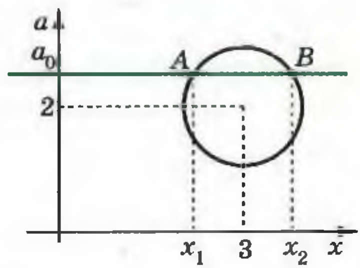


Рис. 15.12

ПРИКЛАД 4 При яких значеннях параметра a модуль різниці коренів рівняння $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ набуває найбільшого значення?

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння так: $(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1$.

Його графіком в системі координат xa є коло (рис. 15.12).

Якщо пряма $a = a_0$ перетинає коло в точках A і B, то модуль різниці коренів рівняння дорівнює довжині відрізка AB (рис. 15.12). Отже, слід знайти таке положення прямої $a = a_0$, при якому хорда AB має найбільшу довжину. Очевидно, що ця умова виконується тоді, коли хорда AB є діаметром кола. Звідси $a = 2$.

15.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 8x + y^2 + 4y + 20 = 0$;
2) $5x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 1 = 0$;
3) $\sqrt{y - 1} = \sqrt{-x^2(x - 1)^2}$;
4) $y^2 = \sqrt{1 - x^2} - 1$.

15.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 13 = 0$;
2) $x^2 + 2xy + 10y^2 - 12y + 4 = 0$;
3) $\sqrt{x-1} = \sqrt{-y^2(y+1)^2}$;
4) $x^2 + \sqrt{y^2+1} = 1$.

15.3.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x^2 = y^2$;
2) $x^2 = 4$;
3) $(x + 2)(y - 3) = 0$;
4) $y^2 + 6xy = 0$;
5) $xy - 3x + y = 3$;
6) $y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$.

15.4.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x^2 = 4y^2$;
2) $y^2 = 1$;
3) $xy - 4x + 2y = 8$;
4) $x^2 - 6xy + 5y^2 = 0$.

15.5.° Побудуйте графік рівняння:

1) $|y| = x$;
2) $|y| = x - 2$;
3) $|y - 1| = x - 2$;
4) $|x + 2y| = 1$;
5) $|x + 3| = |y - 2|$;
6) $xy = |x|$;
7) $(x + 2)y = |y|$;
8) $|x|y = 1$;
9) $x|y| = 1$;
10) $|xy| = 1$.

15.6.° Побудуйте графік рівняння:

1) $|y - 1| = x$;
2) $|y + 1| = x + 3$;
3) $|x - 3y| = 2$;
4) $(x - 4)^2 = (y + 1)^2$;
5) $xy = |y|$;
6) $|x|y = -6$;
7) $x|y| = -6$.

15.7.° На рисунку 15.13 зображено графік рівняння $F(x; y) = 0$. За допомогою цього графіка побудуйте графік рівняння:

1) $F(-x; y) = 0$;
2) $F(x; y - 1) = 0$;
3) $F(2x; y) = 0$;
4) $F(x; |y|) = 0$;
5) $F(|x + 1|; y) = 0$.

15.8.° На рисунку 15.14 зображено графік рівняння $F(x; y) = 0$. За допомогою цього графіка побудуйте графік рівняння:

1) $F(x; -y) = 0$;
2) $F(x + 1; y) = 0$;
3) $F(x; 2y) = 0$;
4) $F(|x|; |y|) = 0$;
5) $F(x; |y - 1|) = 0$.

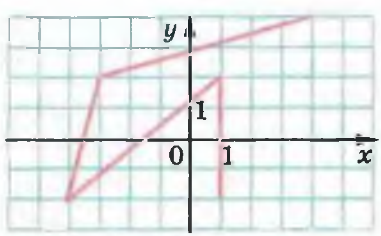


Рис. 15.13

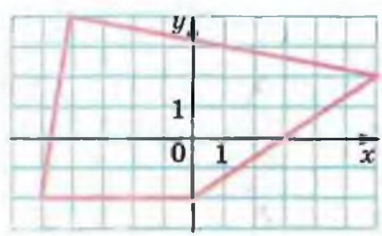


Рис. 15.14

15.9.° На координатній площині xy побудуйте графік рівняння:

1) $x = \sqrt{y}$;
2) $x = \sqrt{y-1}$;
3) $x = \sqrt{y-1}+2$;
4) $x = \sqrt{-y}$;
5) $x-2 = \sqrt{-y}$;
6) $x = \sqrt{|y|}$;
7) $x = \sqrt{|y+1|}$;
8) $x = \sqrt{|y|+1}$;
9) $|x| = \sqrt{|y|}$;
10) $|x-1| = \sqrt{|y+1|}$;
11) $|x|-1 = \sqrt{|y+1|}$;
12) $|x|-1 = \sqrt{|y|+1}$.

15.10.° Побудуйте графік рівняння:

1) $|y| = \sqrt{x}$;
2) $|y+1| = \sqrt{x}$;
3) $|y| = \sqrt{x+1}$;
4) $|y|+1 = \sqrt{x+1}$;
5) $|y+1| = \sqrt{|x|+1}$;
6) $|y| = \sqrt{|x+1|}$;
7) $|y|+1 = \sqrt{|x|+1}$.

15.11.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x = (y-1)^2$;
2) $|x| = (y-1)^2$;
3) $x+2 = (y-1)^2$;
4) $|x+2| = (|y|-1)^2$;
5) $|x|+2 = (|y|-1)^2$.

15.12.° Побудуйте графік рівняння:

1) $|y| = x^2$;
2) $|y| = x^2+1$;
3) $|y| = 1-x^2$;
4) $|y-1| = x^2$;
5) $|y| = (x-1)^2$;
6) $|y-1| = (x-1)^2$;
7) $|y| = (|x|-1)^2$;
8) $|y-1| = (|x|-1)^2$.

15.13.° Побудуйте графік рівняння:

1) $(x-2)^2+(y-1)^2 = 9$;
2) $(3x-2)^2+(y-1)^2 = 9$;
3) $(|x|-2)^2+(y-1)^2 = 9$;
4) $(|x|-2)^2+(|y|-1)^2 = 9$.

15.14.° Побудуйте графік рівняння:

1) $(x-1)^2+(y-2)^2 = 16$;
2) $(x-1)^2+(4y-2)^2 = 16$;
3) $(|x|-1)^2+(y-2)^2 = 16$;
4) $(|x|-1)^2+(|y|-2)^2 = 16$.

15.15.° Побудуйте графік рівняння:

1) $|x|+|y| = 2$;
2) $|x-1|+|y| = 2$;
3) $|x-1|+|y+2| = 2$;
4) $|2x-1|+|y+2| = 2$;
5) $|x-1|+|2y+2| = 2$.

15.16.° Побудуйте графік рівняння:

1) $|x|-|y| = 2$;
2) $|x+1|-|y| = 2$;
3) $|x+1|-|y-1| = 2$;
4) $|2x+1|-|y-1| = 2$;
5) $|x+1|-|2y-1| = 2$.

15.17.° Побудуйте графік рівняння:

1) $y = \sqrt{4-x^2}$;
2) $y = -\sqrt{4-x^2}$;
3) $y-1 = \sqrt{4-x^2}$;
4) $|y| = \sqrt{4-x^2}$;
5) $|y-1| = \sqrt{4-x^2}$;
6) $|y|-1 = \sqrt{4-x^2}$;
7) $y = \sqrt{2x-x^2}$;
8) $y = \sqrt{2|x|-x^2}$.

15.18.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x = \sqrt{1 - y^2}$; 4) $|x| = \sqrt{1 - y^2}$; 7) $x = \sqrt{4y - y^2}$;

2) $x = -\sqrt{1 - y^2}$; 5) $|x + 2| = \sqrt{1 - y^2}$; 8) $x = \sqrt{4|y| - y^2}$.

3) $x + 2 = \sqrt{1 - y^2}$; 6) $|x| + 2 = \sqrt{1 - y^2}$;

15.19.° Побудуйте графік рівняння:

1) $\frac{y - x^2}{y - x} = 0$; 5) $\frac{x^2 - x}{y - x} = 1$;

2) $\frac{x^2 + y^2 - 1}{|x| - 1} = 0$; 6) $\frac{3x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2} = 1$;

3) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} = 0$; 7) $\frac{x^2 - y^2}{|x| - |y|} = 1$;

4) $\frac{(y^2 - 1)(y - x)}{x^2 - 4} = 0$; 8) $\frac{x^2 + x}{y^2 + y} = 1$.

15.20.° Побудуйте графік рівняння:

1) $\frac{y^2 - x}{x + y} = 0$; 5) $\frac{(y^2 - 4)(y + x)}{x^2 - 1} = 0$;

2) $\frac{x^2 + y^2 - 1}{|y| - 1} = 0$; 6) $\frac{y^2 + y}{x + y} = 1$;

3) $\frac{|x| - |y|}{y - x^2} = 0$; 7) $\frac{3|x| + |y| - 2}{|x| - |y|} = 1$;

4) $\frac{|x| + |y| - 1}{1 - x^2 - y^2} = 0$; 8) $\frac{y^2 - y}{x^2 - x} = 1$.

15.21.** Визначте кількість коренів рівняння $(x^2 + a^2 - 1) \times (a - x) = 0$ залежно від значень параметра a.

15.22.** Визначте кількість коренів рівняння $(4 - x^2 - a^2) \times (3a - x^2) = 0$ залежно від значень параметра a.

15.23.** При яких значеннях параметра a рівняння $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$ має єдиний розв'язок?

15.24.** При яких значеннях параметра a рівняння $ax + \sqrt{-5 - x^2 - 6x} = 2$ має два корені?

15.25.** Побудуйте графік рівняння $(x^4 + 1)(y^4 + 1) = 4x^2y^2$.

15.26.** Побудуйте графік рівняння $(x^2 - 2x + 2)(y^2 + 4y + 6) = 2$.

15.27.* Побудуйте графік рівняння $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 2 - x^2 - y^2$.

15.28.* Побудуйте графік рівняння

$$\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} + 2\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{6}(x + 1).$$

15.29.* Побудуйте графік рівняння $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$.

15.30.* Побудуйте графік рівняння $\{x\} = \{y\}$.

15.31.* Побудуйте графік рівняння $\{x\} = -\{y\}$.

15.32.* Знайдіть найменше значення виразу $|x| + |y|$, якщо $x^2 + (y-4)^2 = 1$.

15.33.* Знайдіть найменше значення виразу $x^2 + y^2$, якщо $|x+3| + |y| = 1$.

16. Графічні методи розв'язування систем рівнянь з двома змінними

У 7 класі ви ознайомилися з графічним методом розв'язування систем рівнянь. Нагадаємо, що його суть полягає в пошуку координат спільних точок графіків рівнянь, які входять до системи.

За два навчальні роки ви набули значного досвіду в побудові графіків функцій і рівнянь. Це розширює можливості застосування графічного методу для розв'язування систем рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0, \\ y = 2x^2 - 8x + 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Перше рівняння системи рівносильне такому: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$. Його графіком є коло, зображене на рисунку 16.1.

Графіком другого рівняння є парабола, яка перетинає побудоване коло в двох точках: (1; 1) і (3; 1) (рис. 16.1).

Як відомо, графічний метод не гарантує того, що отриманий результат є точним. Тому знайдені розв'язки потрібно перевірити. Перевірка підтверджує, що пари чисел (1; 1) і (3; 1) справді є розв'язками даної системи.

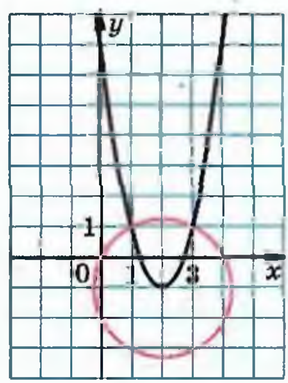


Рис. 16.1

Зауважимо, що ця система є «зручною» для графічного методу: координати точок перетину графіків виявилися цілими числами. Зрозуміло, що така ситуація траплятиметься далеко не завжди. Тому графічний метод є ефективним тоді, коли потрібно визначити кількість розв'язків або достатньо знайти їх наближено. Наприклад, за допомогою графічних міркувань легко з'ясувати, скільки розв'язків має система лінійних рівнянь з двома змінними.

Розглянемо систему $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ у якій $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ і $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Зрозуміло, що кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розташування двох прямих на площині, які є графіками рівнянь системи:

- якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;
- якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків;
- якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має.

ПРИКЛАД 2 Визначте кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} (a+3)x + 4y = 5 - 3a, \\ 2x + (5+a)y = 8 \end{cases}$ залежно від значень параметра a.

Розв'язання. Графіком першого рівняння є невертикальна пряма $y = -\frac{a+3}{4}x + \frac{5-3a}{4}$.

Якщо $a = -5$, то графіком другого рівняння системи є вертикальна пряма $x = 4$. Очевидно, що в цьому разі система має єдиний розв'язок.

Нехай $a \neq -5$. Перепишемо задану систему так:

$$\begin{cases} y = -\frac{a+3}{4}x + \frac{5-3a}{4}, \\ y = -\frac{2}{5+a}x + \frac{8}{5+a}. \end{cases}$$

Якщо $-\frac{a+3}{4} \neq -\frac{2}{5+a}$, тобто $a \neq -7$ і $a \neq -1$, то прямі, які є графіками рівнянь цієї системи, мають різні кутові коефіцієнти, а отже, вони перетинаються.

Якщо виконується рівність $-\frac{a+3}{4} = -\frac{2}{5+a}$, то зазначені прямі або паралельні, або збігаються.

Прямі паралельні, якщо $\begin{cases} \frac{a+3}{4} = \frac{2}{5+a}, \\ \frac{5-3a}{4} \neq \frac{8}{5+a}. \end{cases}$ Звідси $a = -7$.

Прямі збігаються, якщо $\begin{cases} \frac{a+3}{4} = \frac{2}{5+a}, \\ \frac{5-3a}{4} = \frac{8}{5+a}. \end{cases}$ Звідси $a = -1$.

Відповідь: Якщо $a \neq -7$ і $a \neq -1$, то система має єдиний розв'язок; якщо $a = -1$, то безліч розв'язків; якщо $a = -7$, то розв'язків немає.

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x + 3|y| + 5 = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ має рівно три розв'язки?

Розв'язання. Графіком першого рівняння системи є об'єднання двох променів, які мають спільний початок A (−5; 0) (рис. 16.2).

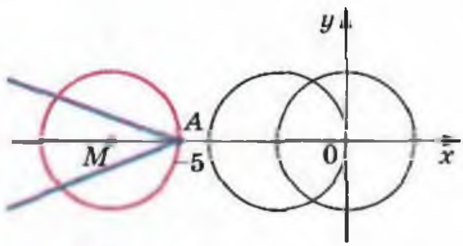


Рис. 16.2

Графіком другого рівняння системи є коло з центром у точці (a; 0) і радіусом 2.

Нас цікавить таке положення кола, при якому воно має три спільні точки з графіком першого рівняння системи. З рисунка 16.2 видно, що така вимога виконується, якщо центр кола знаходиться в точці M (−7; 0). Звідси $a = -7$.

Відповідь: $a = -7$.

16.1.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y + x^2 = 3, \\ y = x + 1; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12; \end{cases}$
5) $\begin{cases} x = y^2 - 2y, \\ x + y = 2. \end{cases}$

16.2.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x + 2, \\ xy = 8; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$
4) $\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2; \end{cases}$
5) $\begin{cases} x = y^2 - 4y, \\ x + y = 4. \end{cases}$

16.3.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - y = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = 6 - x^2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy = -6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = -1, \\ xy = 4; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = y^2 - 4y, \\ y = x^2 - 4x; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3, \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y = -1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x = y^2 - 1. \end{cases}$

16.4.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = (x - 5)^2, \\ xy = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} |x + 1| + |y| = 1, \\ x + y^2 + 1 = 0. \end{cases}$

16.5.° Доведіть, що система рівнянь не має розв'язків:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}01, \\ y = x^2 + 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 13, \\ y = -x^2 + 2x + 2. \end{cases}$

16.6.° Скільки розв'язків залежно від значень параметра a має система рівнянь:

1) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = a? \end{cases}$

16.7.° Скільки розв'язків залежно від значень параметра a має система рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 4? \end{cases}$

16.8.•• Знайдіть значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases}(2a-3)x-ay=3a-2,\\5x-(2a+3)y=5\end{cases}$ має єдиний розв'язок.

16.9.•• Покажіть, що система рівнянь $\begin{cases}ax+(a-1)y=2a,\\3(a+2)x+(4a+1)y=a+5\end{cases}$ має єдиний розв'язок при всіх значеннях параметра a.

16.10.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases}2x+(9a^2-2)y=3a,\\x+y=1\end{cases}$ не має розв'язків.

16.11.•• При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases}(a-2)x+27y=4,5,\\2x+(a+1)y=-1\end{cases}$ має безліч розв'язків?

16.12.•• Знайдіть усі значення параметрів a і b, при яких збігаються множини розв'язків систем рівнянь $\begin{cases}ax+2y=b+1,\\x+y=3\end{cases}$ і $\begin{cases}2x+y=a^2+2,\\x+3y=3.\end{cases}$

16.13.•• Знайдіть усі такі значення параметра b, при яких система рівнянь $\begin{cases}3x+y=a,\\ax-y=b\end{cases}$ при будь-яких значеннях параметра a має хоча б один розв'язок.

16.14.•• Визначте, при яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases}x^2+y^2=2(1+a),\\(x+y)^2=14\end{cases}$ має рівно два розв'язки.

16.15.•• Визначте, при яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases}(y-x)^2=4,\\x^2+y^2=3-a\end{cases}$ має рівно два розв'язки.

16.16.•• Знайдіть найменше значення параметра c, при якому система рівнянь $\begin{cases}\left(x-c\sqrt{3}\right)^2+y^2-2y=0,\\\sqrt{3}|x|-y=4\end{cases}$ має єдиний розв'язок.

16.17.•• Знайдіть найбільше значення параметра c, при якому система рівнянь $\begin{cases}\left(x+c\sqrt{3}\right)^2+y^2+6y+8=0,\\\sqrt{3}|x|+y=6\end{cases}$ має єдиний розв'язок.

16.18.** Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} x = a + \sqrt{y}, \\ y^2 - x^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$ має розв'язки.

16.19.* Доведіть, що точки перетину парабол $y = x^2 - 5$ і $x = y^2 - 4$ лежать на одному колі.

17. Розв'язування систем рівнянь з двома змінними методом підстановки і методами додавання та множення

Означення. **Дві системи рівнянь з двома змінними називають рівносильними, якщо множини їх розв'язків збігаються.**

Наприклад, системи $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{1-y} = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} |x| + |y| = 0, \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} = 2 \end{cases}$ є рівносильними, оскільки множина розв'язків кожної з них складається з одного елемента — пари (0; 0).

Означення. **Якщо множина розв'язків першої системи рівнянь є підмножиною множини розв'язків другої системи рівнянь, то другу систему рівнянь називають наслідком першої системи рівнянь.**

Наприклад, система $\begin{cases} x = y, \\ (x + y - 2)(x + y - 4) = 0 \end{cases}$ є наслідком системи рівнянь $\begin{cases} x = y, \\ x + y = 2. \end{cases}$

При розв'язуванні систем рівнянь їх замінюють на більш прості, рівносильні їм системи. При цьому керуються таким очевидним твердженням:

якщо одне з рівнянь системи замінити на рівносильне, то отримаємо систему рівнянь, рівносильну даній.

У 7 класі ви навчилися розв'язувати системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. При цьому ви застосовували спосіб підстановки або спосіб додавання. У ряді випадків ці прийоми є також ефективними для розв'язування нелінійних систем рівнянь.

«Законність» методів підстановки і додавання забезпечують такі дві теореми.

Теорема 17.1. ***Якщо в системі рівнянь***

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x;\, y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

замінити в другому рівнянні змінну y виразом f (x), то буде отримано систему

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x;\, f(x)) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

яка рівносильна даній.

Доведення. Нехай пара чисел $(x_0;\, y_0)$ є розв'язком системи (1). Тоді отримуємо дві правильні числові рівності: $y_0 = f(x_0)$ і $F(x_0;\, y_0) = 0$. У другій рівності замінимо число y_0 числом $f(x_0)$, що йому дорівнює. Отримаємо правильну числову рівність $F(x_0;\, f(x_0)) = 0$. А це означає, що пара $(x_0;\, y_0)$ є розв'язком системи (2).

Аналогічно можна показати, що коли пара $(x_1;\, y_1)$ є розв'язком системи (2), то вона також є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) рівносильні. ▲

Теорема 17.2. ***Якщо в системі рівнянь*** $\begin{cases} F(x;\, y) = 0, \\ G(x;\, y) = 0 \end{cases}$ ***замінити одне з рівнянь рівнянням*** $F(x;\, y) + G(x;\, y) = 0$***, то буде отримано систему, яка рівносильна даній.***

Доведення теореми 17.2 аналогічне доведенню теореми 17.1. Проведіть його самостійно.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} \dfrac{2}{y^2-1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 = x + 5. \end{cases}$

Підставивши в перше рівняння замість y^2 двочлен $x + 5$, отримаємо систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+4} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 = x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = x + 4, \\ y^2 = x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y^2 = 9; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = -3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: (4; 3), (4; −3).

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}(x-y)\left(y-\dfrac{1}{x}\right)=0,\\ y^2-x=0.\end{cases}$

Розв'язання. При розв'язуванні цієї системи здається природним перейти до такої сукупності систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0,\\ y^2-x=0,\end{cases}\\ \begin{cases}y-\dfrac{1}{x}=0,\\ y^2-x=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Але такий перехід не є рівносильним. Справді, множина розв'язків першої системи сукупності містить пару (0; 0), яка не є розв'язком заданої системи.

Причина появи стороннього розв'язку полягає в тому, що при заміні системи на сукупність не було враховано область визначення заданої системи рівнянь.

Насправді задана система рівносильна такій сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0,\\ y^2-x=0,\\ x\neq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}y-\dfrac{1}{x}=0,\\ y^2-x=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Завершіть розв'язання самостійно.

Відповідь: (1; 1).

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}x^2+y^2-x=2,\\ 2x^2-xy-4x+y+2=0.\end{cases}$$

Розв'язання. Маємо: $2x^2-xy-4x+y+2=2x^2-4x+2-xy+$ $+\,y=2\,(x-1)^2-y\,(x-1)=(x-1)\,(2x-2-y)$.

Перепишемо задану систему:

$$\begin{cases}x^2+y^2-x=2,\\ (x-1)(y-2x+2)=0.\end{cases}$$

Ця система рівносильна сукупності двох систем.

а) $\begin{cases} x^2+y^2-x=2, \\ x=1; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=\sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=-\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$

б) $\begin{cases} x^2+y^2-x=2, \\ y=2x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+(2x-2)^2-x=2, \\ y=2x-2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{9+\sqrt{41}}{10}, \\ x=\dfrac{9-\sqrt{41}}{10}, \end{array}\right. \\ y=2x-2; \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{9+\sqrt{41}}{10}, \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{9-\sqrt{41}}{10}, \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $(1;\sqrt{2})$, $(1;-\sqrt{2})$, $\left(\dfrac{9+\sqrt{41}}{10};\ \dfrac{-1+\sqrt{41}}{5}\right)$, $\left(\dfrac{9-\sqrt{41}}{10};\ \dfrac{-1-\sqrt{41}}{5}\right)$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2-2x=0, \\ x^2-2xy+1=0. \end{cases}$

Розв'язання. Додамо рівняння системи. Отримаємо:
$x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1=0,$
$(x-y)^2+(x-1)^2=0.$
Дана система рівносильна такій:

$$\begin{cases} (x-y)^2+(x-1)^2=0, \\ x^2+y^2-2x=0. \end{cases} \qquad (*)$$

Перше рівняння отриманої системи, у свою чергу, рівносильне системі $\begin{cases} x=1, \\ y=x, \end{cases}$ розв'язок якої — пара (1; 1). Безпосередньо переконуємося, що пара (1; 1) є розв'язком другого рівняння системи (*).

Відповідь: (1; 1).

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x + y) = -2. \end{cases}$

Розв'язання. Помножимо обидві частини другого рівняння на 3:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ 3x^2y + 3y^2x = -6. \end{cases}$$

Ця система рівносильна такій: $\begin{cases} x^3 + y^3 + 3x^2y + 3y^2x = 1, \\ xy(x + y) = -2. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} (x + y)^3 = 1, \\ xy(x + y) = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2. \end{cases}$

Зрозуміло, що цю систему можна розв'язати методом підстановки. Але є й інший шлях. З теореми, оберненої до теореми Вієта, випливає, що числа x і y є коренями квадратного рівняння $t^2 - t - 2 = 0$, яке має корені -1 і 2. Звідси, якщо $x = -1$, то $y = 2$, і навпаки, якщо $x = 2$, то $y = -1$.

Відповідь: $(-1; 2)$, $(2; -1)$.

У ряді випадків для розв'язування систем нелінійних рівнянь ефективними є методи почленного множення і ділення рівнянь системи.

Теорема 17.3. ***Якщо в системі рівнянь*** $\begin{cases} F(x; y) = c_1, \\ G(x; y) = c_2, \end{cases}$ ***де*** $c_1 \neq 0$ ***і*** $c_2 \neq 0$, ***замінити одне з рівнянь рівнянням*** $F(x; y)\, G(x; y) = c_1c_2$ **або** $\dfrac{F(x; y)}{G(x; y)} = \dfrac{c_1}{c_2}$, ***то буде отримано систему, яка рівносильна даній.***

Доведення теореми 17.3 аналогічне доведенню теореми 17.1. Проведіть його самостійно.

Зауважимо, що у формулюванні теореми 17.3 вимога $c_1 \neq 0$ і $c_2 \neq 0$ є суттєвою. Наприклад, система $\begin{cases} x - y = 0, \\ xy = 1 \end{cases}$ має два розв'язки: $(1; 1)$ і $(-1; -1)$. А система $\begin{cases} x - y = 0, \\ xy(x - y) = 0 \end{cases}$ має безліч розв'язків виду $(t; t)$, де $t \in \mathbb{R}$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2y^3 = 81, \\ x^3y^2 = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Дана система рівносильна такій: $\begin{cases} x^5y^5 = 243, \\ x^3y^2 = 3. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} xy = 3, \\ x(xy)^2 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 3, \\ x = \frac{1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = 9. \end{cases}$

Відповідь: $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (x + y)xy = 6, \\ (x - y)xy = 2. \end{cases}$

Розв'язання. Дана система рівносильна такій: $\begin{cases} \frac{x + y}{x - y} = 3, \\ (x + y)xy = 6. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x + y = 3x - 3y, \\ (x + y)xy = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y, \\ 3y \cdot 2y^2 = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y, \\ y^3 = 1. \end{cases}$

Відповідь: (2; 1).

17.1.° Розв'яжіть методом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y - x = 2, \\ x^2 - 2xy = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 4y = 2, \\ xy + 2y = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x + 4y = 24, \\ xy = 12; \end{cases}$

6) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4y - 3x = 4, \\ 5x^2 + 16y = 60; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - x - 2y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

17.2.° Розв'яжіть методом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y - 2x^2 = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x - 1)(y - 2) = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 3x^2 - 8y = -5. \end{cases}$

17.3.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{3x + y}{x - 1} - \frac{x - y}{2y} = 2, \\ x - y = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2}{y - 1} + \frac{3}{x + 1} = \frac{5}{2}, \\ \frac{1}{x - 2} = -\frac{3}{y}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{y - 2}{x - 1} = 2, \\ y - 2x = x^2 - 1. \end{cases}$

17.4.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2},\\ x-y=1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{4}{5},\\ 3x+y=8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{1}{y+1}=\frac{2}{x-1},\\ \frac{4}{x+2}+\frac{1}{y-1}=\frac{1}{3};\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{4}{x-1}-\frac{5}{y+1}=1,\\ \frac{4}{x+5}=\frac{2}{y}.\end{cases}$

17.5.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x+y^2=2,\\ 2y^2+x^2=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y^2=3,\\ x^4+y^4+6x=29;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^2-y^2=2,\\ x^3-xy^2+x^2=3.\end{cases}$

17.6.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x+y^3=2,\\ 2x+x^2+5y^3=8;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^3+y=1,\\ y^3-4y^2+4y+x^6=1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ y^3+x^2y+y^2=6.\end{cases}$

17.7.• Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта:

1) $\begin{cases}x+y=3,\\ xy=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}xy^3=8,\\ x+y^3=9.\end{cases}$

17.8.° Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта:

1) $\begin{cases}x+y=-4,\\ xy=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^5y=32,\\ x^5+y=33.\end{cases}$

17.9.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}(x-2)(y+2)=0,\\ x^2+2y^2-3x=5;\end{cases}$

2) $\begin{cases}4x^2+y^2-2xy=7,\\ (2x-y)y=y;\end{cases}$

3) $\begin{cases}(x+4)(y-1)=x^2+5x+4,\\ x^2-y^2-3x+8=0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2+y^2+2x+2y=23,\\ x^2+y^2+2xy=9.\end{cases}$

17.10.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}2x^2-3xy+5y=5,\\ (x-2)(y-1)=0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}(x-1)y=2x-2,\\ x^2+y^2+3xy=4;\end{cases}$

3) $\begin{cases}2x^2-xy-3y=7,\\ 2x^2+x-3=(x-1)(y+5);\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=9,\\ 4x^2+xy+4y^2=18.\end{cases}$

17.11.° Розв'язіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2, \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ xy + 4y^2 = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2y^2 + x^2 + xy = 4, \\ 3xy - 2y = 5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y + \frac{1}{4} = 0, \\ y^2 + x + \frac{1}{4} = 0. \end{cases}$

17.12.° Розв'язіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2x + y - 5 = 0, \\ 2x^2 - xy - 3x - y - 5 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ y^2 - xy = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy = 5, \\ y^2 - 2xy = -1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 12, \\ 4x + 3xy - x^2 = 16; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = 0, \\ y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0. \end{cases}$

17.13.° Розв'язіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 11x - 7y + 10 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x - 3y + 5 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 2y - 2 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - x - y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 + 10x - 12y = 17, \\ 2x^2 + y^2 + 4x + 4y = -2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3 + 2x^2y + xy^2 - x - y = 2, \\ y^3 + 2xy^2 + x^2y + x + y = 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y, \\ y^2 - y + 1 = x; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 = 1, \\ y^3 + x + y = 1. \end{cases}$

17.14.° Розв'язіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 23 - 2y, \\ 2x^2 + 2y^2 + 5y = 27 + 3x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 2, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = -22; \end{cases}$

3) $\begin{cases}(x^2+y)^2(x^2-xy+y)=4,\\(x^2+y)^2(x^2+xy+y)=12;\end{cases}$

4) $\begin{cases}y^2+x+1=-y,\\x^2+y+1=-x;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^3-3x^2y+3xy^2=-1,\\y^3+y-x=1.\end{cases}$

17.15.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x^2y^5=1,\\x^5y^2=-1;\end{cases}$

2) $\begin{cases}(x-y)^2(x+2y)=4,\\(x-y)^4(x+2y)^5=16;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^3y+x^2y^2=6,\\x^2y^2+xy^3=12;\end{cases}$

4) $\begin{cases}2xy+6x-y^2-3y=14,\\2x^2+4x-xy-2y=35;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^2+4xy+3y^2-x-3y=24,\\2x^2+xy-y^2-2x+y=6;\end{cases}$

6) $\begin{cases}\dfrac{x^3}{y}+xy=40,\\\dfrac{y^3}{x}+xy=10.\end{cases}$

17.16.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x^8y^6=64,\\x^6y^8=256;\end{cases}$

2) $\begin{cases}(x+y)(x-2y)^4=81,\\(x+y)^6(x-2y)^3=27;\end{cases}$

3) $\begin{cases}xy^3+x^3y=-10,\\x^2y^4+x^4y^2=20;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2+3xy+x+3y=8,\\3y^2+xy-2x-6y=-4;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^2+xy-2y^2+x+2y=-7,\\x^2-3xy+2y^2+x-2y=5;\end{cases}$

6) $\begin{cases}2x^2+xy-4x-2y=5,\\x^2-3xy-2x+6y=6.\end{cases}$

17.17.** Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2y^2)=1+4y^4,\\(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2y^2)=1-4y^4.\end{cases}$$

17.18.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}(x^2+y^2-xy)(x-y)=1+y^3,\\(x^2+y^2+xy)(x+y)=1-y^3.\end{cases}$

17.19.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}xy+24=\dfrac{x^3}{y},\\xy-6=\dfrac{y^3}{x};\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^3y^5=4x^2y^3-9,\\xy=x^2y^3-6.\end{cases}$

17.20.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x^2y+6=\dfrac{y^3}{x^2},\\x^2y-1=\dfrac{4x^4}{y^2};\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x^8=x^4y^4+1,\\3y^8=x^4y^4+2.\end{cases}$

17.21.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$

17.22.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^4 + 4y^4 = 5, \\ x^2 - 2xy + 2y^2 = 1. \end{cases}$

17.23.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2} = \dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2} = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$

17.24.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x, \\ \dfrac{1+y^2}{1+x^2} = 5. \end{cases}$

17.25.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 = 2y - 1, \\ x^4 + y^4 = 2. \end{cases}$

17.26.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y^2 = x - 2, \\ x^4 + y^4 = 82. \end{cases}$

18. Метод заміни змінних та інші способи розв'язування систем рівнянь з двома змінними

У 8 класі ви навчилися розв'язувати рівняння методом заміни змінної. Вдало виконана заміна зводить розв'язування заданого рівняння до розв'язування більш простого рівняння. Цей прийом є ефективним і при розв'язуванні багатьох систем рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{16y^2}{x^2} + 4\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x}\right) + 8 = 0, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $\dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = t$. Тоді $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{16y^2}{x^2} = t^2 - 8$. Отримуємо:

$t^2 - 8 + 4t + 8 = 0$; $t^2 + 4t = 0$; $t = -4$ або $t = 0$.

Маємо: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = -4$ або $\dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = 0$.

Тоді задана система рівносильна сукупності двох систем.

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = -4, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

Нехай $\dfrac{x}{y} = u$. Тоді $u + \dfrac{4}{u} = -4$;

$u^2 + 4u + 4 = 0$; $u = -2$.

Звідси $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = -2, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

Ця система рівнянь має два розв'язки: $(2; -1)$, $(-2; 1)$.

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = 0, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

Очевидно, що ця система розв'язків не має.

Відповідь: $(2; -1)$, $(-2; 1)$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x(x+1)(3x+5y) = 144, \\ x^2 + 4x + 5y = 24. \end{cases}$

Розв'язання. Перепишемо дану систему в такому вигляді:

$$\begin{cases} (x^2 + x)(3x + 5y) = 144, \\ (x^2 + x) + (3x + 5y) = 24. \end{cases}$$

Нехай $x^2 + x = u$, $3x + 5y = v$. Тоді $\begin{cases} uv = 144, \\ u + v = 24. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} u = 12, \\ v = 12. \end{cases}$

Далі $\begin{cases} x^2 + x = 12, \\ 3x + 5y = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -4, \end{array} \right. \\ 3x + 5y = 12. \end{cases}$

Відповідь: $\left(3; \dfrac{3}{5}\right)$, $\left(-4; \dfrac{24}{5}\right)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1, \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1, \\ 2x + y + 1 + x + y = 5. \end{cases}$

Нехай $\sqrt{2x + y + 1} = u$, $\sqrt{x + y} = v$. Отримуємо: $\begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + v^2 = 5. \end{cases}$

Звідси $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u = 2, \\ v = 1,\end{cases} \\ \begin{cases}u = -1, \\ v = -2.\end{cases}\end{array}\right.$

Оскільки $u \geqslant 0$ і $v \geqslant 0$, то дана система рівносильна такій:

$$\begin{cases}\sqrt{2x + y + 1} = 2, \\ \sqrt{x + y} = 1.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}2x + y + 1 = 4, \\ x + y = 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x = 2, \\ y = -1.\end{cases}$

Відповідь: (2; −1).

Означення. **Многочлен, усі члени якого мають один і той самий степінь, називають однорідним многочленом.**

Наприклад,

$x - 2y$ — однорідний многочлен першого степеня,

$x^2 - 3xy - y^2$ — однорідний многочлен другого степеня,

$3x^3 - 2xy^2 + x^2y - y^3$ — однорідний многочлен третього степеня.

Для розв'язування систем виду $\begin{cases}F(x; y) = a, \\ G(x; y) = b,\end{cases}$ де $F(x; y)$ і $G(x; y)$ — однорідні многочлени, ефективною є заміна $\frac{x}{y} = t$. Продемонструємо це на прикладах.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ 2x^2 - y^2 = 7.\end{cases}$

Розв'язання. Нескладно переконатися, що пара виду $(x_0; 0)$ не є розв'язком даної системи. Поділивши обидві частини першого рівняння на y^2, отримаємо систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{5x}{y} + 6 = 0, \\ 2x^2 - y^2 = 7.\end{cases}$$

Нехай $\frac{x}{y} = t$. Тоді $t^2 - 5t + 6 = 0$. Звідси $t = 2$ або $t = 3$.

Задана система рівносильна сукупності таких систем:

а) $\begin{cases}\dfrac{x}{y} = 2, \\ 2x^2 - y^2 = 7.\end{cases}$ *б*) $\begin{cases}\dfrac{x}{y} = 3, \\ 2x^2 - y^2 = 7.\end{cases}$

Розв'язавши кожну з цих систем методом підстановки, отримуємо відповідь.

Відповідь: (2; 1), (−2; −1), $\left(3\sqrt{\frac{7}{17}}; \sqrt{\frac{7}{17}}\right)$, $\left(-3\sqrt{\frac{7}{17}}; -\sqrt{\frac{7}{17}}\right)$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$

Розв'язання. Очевидно, що пара виду $(x_0; 0)$ не є розв'язком даної системи. Тоді можна виконати заміну $\frac{x}{y} = t$. Звідси $x = yt$.

Маємо: $\begin{cases} y^3t^3 - y^3 = 7, \\ y^3t^2 + y^3t = 6. \end{cases}$ Звідси $\frac{y^3t^3 - y^3}{y^3t^2 + y^3t} = \frac{7}{6}$; $\frac{y^3(t^3 - 1)}{y^3(t^2 + t)} = \frac{7}{6}$;

$$6t^3 - 7t^2 - 7t - 6 = 0;$$
$$6t^3 - 12t^2 + 5t^2 - 10t + 3t - 6 = 0;$$
$$6t^2(t - 2) + 5t(t - 2) + 3(t - 2) = 0;$$
$$(t - 2)(6t^2 + 5t + 3) = 0;$$
$$t = 2.$$

Задана система рівносильна такій: $\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему методом підстановки, отримуємо відповідь.

Відповідь: (2; 1).

Якщо в многочлені $F(x; y)$ замінити x на y, а y на x, то отриманий многочлен позначатимемо $F(y; x)$. Наприклад, якщо $F(x; y) = x^2 - xy^8 + y^3$, то $F(y; x) = y^2 - x^8y + x^3$.

Означення. **Якщо при будь-яких значеннях x і y виконується рівність $F(x; y) = F(y; x)$, то многочлен $F(x; y)$ називають симетричним.**

Наведемо приклади симетричних многочленів: $x + y$, $x^2 - xy + y^2$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$.

Введемо позначення $u = x + y$, $v = xy$. Многочлени u і v називають **елементарними симетричними многочленами від x і y**. Ця назва пов'язана з тим, що справедливою є така теорема:

будь-який симетричний многочлен від змінних x і y можна подати у вигляді многочлена від u і v.

Ми не будемо доводити цю теорему, а лише продемонструємо її справедливість на прикладах.

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$;

$x^3 + y^3 = (x + y)((x + y)^2 - 3xy) = u(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv;$
$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2.$

Розглянемо систему виду $\begin{cases} F(x; y) = a, \\ G(x; y) = b, \end{cases}$ де $F(x; y)$ і $G(x; y)$ — симетричні многочлени.

Вводячи заміну

$$x + y = u,\ xy = v,$$

отримуємо систему виду $\begin{cases} F_1(u; v) = a, \\ G_1(u; v) = b. \end{cases}$

Якщо отриману систему розв'язати досить легко, то застосована заміна є ефективною.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8, \\ x^3 + y^3 + x^2y + y^2x = 15. \end{cases}$$

Розв'язання. Зауважимо, що ліві частини рівнянь системи є симетричними многочленами.

«Підготуємо» задану систему до заміни $x + y = u$, $xy = v$. Маємо:

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy + x + y = 8, \\ (x + y)((x + y)^2 - 3xy) + xy(x + y) = 15. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} u^2 - 2v + u = 8, \\ u(u^2 - 3v) + uv = 15; \end{cases}$ $\begin{cases} -2v = 8 - u^2 - u, \\ u(u^2 - 2v) = 15. \end{cases}$

Тоді $u(u^2 + 8 - u^2 - u) = 15$; $u^2 - 8u + 15 = 0$; $\left[\begin{array}{l} u = 5, \\ u = 3. \end{array}\right.$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 5, \\ v = 11, \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3, \\ v = 2. \end{cases} \end{array}\right.$

Задана система рівносильна сукупності двох систем:

а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 11. \end{cases}$ Ця система розв'язків не має.

б) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \end{array}\right.$

Відповідь: (1; 2), (2; 1).

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^4 - x^2 + y^4 - y^2 = 72, \\ x^2 + xy + y^2 = 13. \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки ліві частини рівнянь є симетричними многочленами, то можна скористатися заміною $x + y = u$, $xy = v$.

Проте виявляється більш ефективним, перетворивши систему до вигляду

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2) - 2x^2y^2 = 72, \\ (x^2 + y^2) + xy = 13, \end{cases}$$

зробити таку заміну: $x^2 + y^2 = u$, $xy = v$.

Маємо: $\begin{cases} u^2 - u - 2v^2 = 72, \\ u + v = 13. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему методом підстановки, отримаємо:

$\begin{cases} u = 10, \\ v = 3 \end{cases}$ або $\begin{cases} u = 41, \\ v = -28. \end{cases}$

Залишилось розв'язати системи $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3 \end{cases}$ і $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = -28. \end{cases}$

Завершіть розв'язання самостійно.

Відповідь: (3; 1), (1; 3), (−3; −1), (−1; −3).

Розглянемо систему, розв'язання якої не пов'язане з жодним з раніше розглянутих методів.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y. \end{cases}$

Розв'язання. Розглянемо перше рівняння системи як квадратне відносно x. Його дискримінант дорівнює $y^4 - 16$. Вимагаючи $y^4 - 16 \geqslant 0$, отримуємо, що $|y| \geqslant 2$.

Перепишемо друге рівняння системи так:

$$x^2 - 4x + 4 = 2y - y^2;\ (x - 2)^2 = 2y - y^2.$$

Звідси $2y - y^2 \geqslant 0$, тобто $0 \leqslant y \leqslant 2$.

Отримані обмеження для змінної y дозволяють зробити такий висновок: якщо задана система має розв'язки, то ними можуть бути лише пари виду $(x; 2)$.

Підставивши $y = 2$ в задану систему, отримаємо $x = 2$.

Відповідь: (2; 2).

ПРИКЛАД 9 Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} |x - 4| + |x + 4| = y^3, \\ ax^2 + y + a^2 - a = 2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання. Якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком даної системи, то й пара $(-x_0; y_0)$ також є розв'язком. Оскільки дана система повинна мати єдиний розв'язок, то $x_0 = -x_0$, тобто $x_0 = 0$. Тоді необхідно, щоб пара $(0; y_0)$ була розв'язком даної системи.

Маємо: $\begin{cases} |0-4|+|0+4| = y_0^3, \\ a \cdot 0^2 + y_0 + a^2 - a = 2. \end{cases}$

Звідси $y_0 = 2$ і $a = 0$ або $a = 1$.

При цих значеннях параметра a пара $(0; 2)$ є розв'язком даної системи. Проте це не означає, що система не має інших розв'язків. Тому знайдені значення параметра a слід перевірити.

При $a = 0$ маємо: $\begin{cases} |x-4|+|x+4| = y^3, \\ y = 2. \end{cases}$

Ця система має безліч розв'язків (переконайтеся в цьому самостійно).

При $a = 1$ маємо: $\begin{cases} |x-4|+|x+4| = y^3, \\ x^2 + y = 2. \end{cases}$

Оскільки $|x-4|+|x+4| \geqslant 8$ (доведіть це самостійно), то $y^3 \geqslant 8$, тобто $y \geqslant 2$. З другого рівняння цієї системи випливає, що $y \leqslant 2$. Отже, ця система може мати розв'язки тільки виду $(x_0; 2)$. Легко переконатися, що пара $(0; 2)$ є єдиним розв'язком цієї системи.

Відповідь: $a = 1$.

18.1.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+y)^4 + 4(x+y)^2 = 117, \\ x - y = 25; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{5x}} + \sqrt{\frac{5x}{x+y}} = \frac{34}{15}, \\ x + y = 12. \end{cases}$

18.2.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+y+1)^2 + (x+y)^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4, \\ x^2 + 4x + y^2 - 3y = 0. \end{cases}$

18.3.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2xy - \dfrac{3x}{y} = 15, \\ xy + \dfrac{x}{y} = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{36}, \\ xy^2 - x^2y = 324; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \dfrac{2y}{x} = 1, \\ x^2 + y^2 + \dfrac{4x}{y} = 22; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x + 3y} + \dfrac{x + 3y}{xy} = 2, \\ \dfrac{xy}{x - y} + \dfrac{x - y}{xy} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

18.4.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2y - xy^2 = 6, \\ xy + x - y = -5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}} = 2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}} - \sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}} = \dfrac{3}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{3}, \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{2}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y + \dfrac{x^2}{y^2} = 7, \\ \dfrac{(x + y)x^2}{y^2} = 12. \end{cases}$

18.5.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 9x^2 + \sqrt{9x^2 + 2y + 1} = 1 - 2y, \\ 6x + y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

18.6.° Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + \sqrt{3x^2 - 2y + 3} = \dfrac{2}{3}y + 5, \\ 3y - 2x = 5. \end{cases}$

18.7.° Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x^2 - 2y^2) = 4, \\ \dfrac{y}{x}(x^2 + 2y^2) = 3. \end{cases}$

18.8.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt{4 - x + y} + \sqrt{9 - 2x + y} = 7, \\ 2y - 3x = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

18.9.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{2x + y + 3} = 7, \\ 3x + 2y = 22; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

18.10.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

18.11.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + 4xy - 5y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy + 4y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 5y^2 = 0, \\ x + y^2 + 1 = 0. \end{cases}$

18.12.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 7, \\ y^2 + xy = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + 4xy - 3y^2 = 2, \\ x^2 - xy + 5y^2 = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 20, \\ x^2 + 3xy - 3y^2 = 28; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ x^2 + xy - y^2 = 5. \end{cases}$

18.13.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3xy + 7y^2 = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy - 3y^2 = -9, \\ x^2 - y^2 - 2xy = -7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3, \\ 3x^2 - xy + 2y^2 = 16. \end{cases}$

18.14.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 16, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 40; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 - 3x^2y = -4, \\ y^3 - xy^2 = -1. \end{cases}$

18.15.° Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (x + y)(x^2 - y^2) = 9, \\ (x - y)(x^2 + y^2) = 5. \end{cases}$

18.16.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x + y) = 23, \\ x^2 + y^2 + xy = 19. \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + 2x + 2y = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8; \end{cases}$

18.17.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + xy + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 18, \\ x^2 + y^2 - xy = 13. \end{cases}$

18.18.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} xy(x - 1)(y - 1) = 72, \\ (x + 1)(y + 1) = 20; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 10, \\ (x + y)(xy + 1) = 25; \end{cases}$

18.19.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x - 1)(y - 1) = 1, \\ x^2y + xy^2 = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases}$

18.20.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2y + y^2x = 20, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12, \\ x + xy + y = 0. \end{cases}$

18.21.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = 5, \\ xy - x - y = -1. \end{cases}$

18.22.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 12, \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

18.23.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5(x^4 + y^4) = 41(x^2 + y^2), \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3xy - x^2 - y^2 = 5, \\ 7x^2y^2 - x^4 - y^4 = 155; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2} + 2xy = \dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \dfrac{21}{4}. \end{cases}$

18.24.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \dfrac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{17}{4}, \\ x(x + y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y + \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}} = \dfrac{20}{x + y}, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0, \\ 2x^2 + 3y^2 - 2x - 6y - 13 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{y + \dfrac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x = 4xy. \end{cases}$

18.25.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y + \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} = \dfrac{12}{x-y}, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 - 3y + 4x = 4, \\ y(y-4)(y+4x) = -21. \end{cases}$

18.26.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + 6 = 0, \\ 24 - y^2 = (4x^2 - y^2)^2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0; \end{cases}$

18.27.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2 + 3y^2 = 2xy, \\ |xy - 2| = 6 - x^2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^4 = 0, \\ x^2 - 4x + 6 - 2y^6 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1; \end{cases}$

18.28.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y^2 - x^2 + 4x - 5 = 0, \\ \sqrt{1 - y^2} + x^2 = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3 - (y+1)^2 = \sqrt{x - y}, \\ x + 8y = \sqrt{x - y - 9}. \end{cases}$

18.29.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 13 = 0, \\ \sqrt{4 - x^2} + y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - (x-3)^2 = \sqrt{x - y}, \\ y^2 - 4 = \sqrt{x - y - 1}. \end{cases}$

18.30.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^5 + y^5 = 1. \end{cases}$

18.31.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$

18.32.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y^3 - y^2 + y = x^2, \\ x^3 - x^2 + x = y^2. \end{cases}$

18.33.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 = 8y + x, \\ y^3 = 8x + y. \end{cases}$

18.34.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{2x}{1 + x^2} = y, \\ \dfrac{2y}{1 + y^2} = x. \end{cases}$

18.35.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y, \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = x. \end{cases}$

18.36.* Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a+1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

18.37.* Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} 3y - a\sqrt{x^2+1} = 1, \\ y + x + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

18.38.* Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} a(x^4+1) = y + 1 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

19. Нерівності з двома змінними

Нерівності $2x - y > 1$, $y \geqslant x^2$, $x^2 + y^2 < 4$ є прикладами нерівностей з двома змінними.

Означення. **Пару значень змінних, яка перетворює нерівність з двома змінними на правильну числову нерівність, називають розв'язком нерівності з двома змінними.**

Так, для нерівності $2x - y > 1$ кожна з пар чисел $(3; -1)$, $(0; -2)$, $(1; 0)$ є її розв'язком, а, наприклад, пара $(0; 0)$ не є її розв'язком.

Означення. **Графіком нерівності з двома змінними називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких є розв'язками даної нерівності.**

ПРИКЛАД 1 Зобразіть графік нерівності $2x - y > 1$.

Розв'язання. Графіком рівняння $2x - y = 1$ є пряма. Ця пряма розбиває координатну площину на дві області, кожну з яких називають **відкритою півплощиною**[1] (рис. 19.1). Покажемо, що жовта область є шуканим графіком.

---

[1] Відкрита півплощина відрізняється від півплощини тим, що вона не містить пряму, яка її обмежує.

Перепишемо задану нерівність так: $y < 2x - 1$.

Розглянемо довільну точку $M(x_1; y_1)$, яка належить зазначеній відкритій півплощині.

Нехай пряма, яка проходить через точку M і перпендикулярна до осі абсцис, перетинає пряму $y = 2x - 1$ у точці $K(x_1; y_2)$. Зрозуміло, що $y_2 > y_1$. Маємо: $y_2 = 2x_1 - 1 > y_1$. Отже, пара $(x_1; y_1)$ є розв'язком даної нерівності.

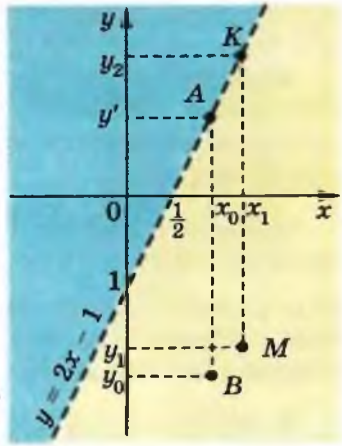


Рис. 19.1

Ми показали, що координати будь-якої точки жовтої області є розв'язком заданої нерівності. Залишилось показати, що будь-який розв'язок нерівності є координатами точки, яка належить зазначеній області.

Розглянемо пару $(x_0; y_0)$, яка є розв'язком нерівності $y < 2x - 1$, тобто $y_0 < 2x_0 - 1$. Нехай $2x_0 - 1 = y'$. Тоді точка $A(x_0; y')$ належить прямій $y = 2x - 1$ (рис. 19.1). Оскільки $y_0 < y_1$, то точка $B(x_0; y_0)$ лежить нижче від точки A, тобто належить жовтій області.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що синя область є графіком нерівності $2x - y < 1$.

Також говорять, що жовту і синю області задають відповідно нерівності $2x - y > 1$ і $2x - y < 1$.

Домовимося, що в зображенні графіка пунктирна лінія позначає точки, які не належать шуканому графіку. Тому на рисунку 19.1 пряма $y = 2x - 1$ зображена пунктиром.

ПРИКЛАД 2 Зобразіть графік нерівності $x > 2$.

Розв'язання. На координатній площині xy графіком рівняння $x = 2$ є вертикальна пряма, яка розбиває площину на дві відкриті півплощини (рис. 19.2). Покажемо, що відкрита півплощина, розміщена праворуч від прямої $x = 2$, є шуканим графіком. Перепишемо задану нерівність так: $x + 0y > 2$.

Нехай точка $M(x_1; y_1)$ належить зазначеній області. Тоді $x_1 > 2$, а отже, пара $(x_1; y_1)$ є розв'язком заданої нерівності.

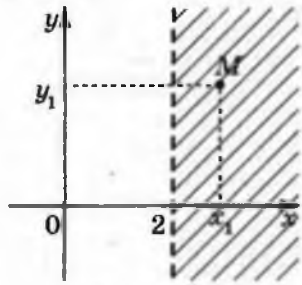


Рис. 19.2

Нехай пара $(x_2; y_2)$ є розв'язком нерівності $x + 0y > 2$, тобто $x_2 + 0 \cdot y_2 > 2$;

$x_2 > 2$. Отже, точка $K\ (x_2;\ y_2)$ розміщена праворуч від прямої $x = 2$.

Ми показали, що координати будь-якої точки відкритої півплощини є розв'язком даної нерівності і навпаки, будь-який розв'язок нерівності є координатами точки, яка належить відкритій півплощині.

Нерівності, розглянуті в прикладах 1 і 2, є окремими випадками нерівності $ax + by > c$.

Означення. Лінійною нерівністю з двома змінними називають нерівність виду $ax + by > c$ або $ax + by < c$, де x і y — змінні, a, b і c — параметри.

Міркуючи аналогічно наведеному в прикладах 1 і 2, можна показати, що при $a^2 + b^2 \neq 0$ графіком лінійної нерівності є одна з відкритих півплощин, на які пряма $ax + by = c$ розбиває координатну площину xy.

Якщо $a^2 + b^2 = 0$, то графіком лінійної нерівності є або вся координатна площина, або порожня множина (доведіть це самостійно).

Нерівності виду $ax + by \geqslant c$ і $ax + by \leqslant c$ теж вважають лінійними. Зрозуміло, що графіком нерівності $ax + by \geqslant c$ або $ax + by \leqslant c$, де $a^2 + b^2 \neq 0$, є півплощина.

Розглянемо приклади побудови графіків нелінійних нерівностей.

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік нерівності $y > x^2$.

Розв'язання. Парабола $y = x^2$ розбиває координатну площину на дві області (рис. 19.3). Шуканим графіком є множина точок, які лежать вище від параболи $y = x^2$. Це можна показати, міркуючи так, як у прикладі 1.

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік нерівності $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

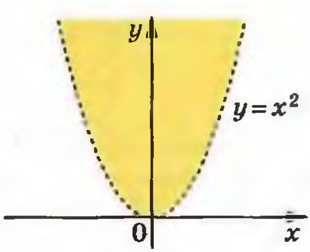


Рис. 19.3

Розв'язання. Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 4$ є коло радіуса 2 з центром у початку координат. Очевидно, що розв'язками даної нерівності є координати тих і тільки тих точок, які віддалені від початку координат на відстань, не більшу за 2. Тому шуканим графіком є круг радіуса 2 з центром у початку координат (рис. 19.4).

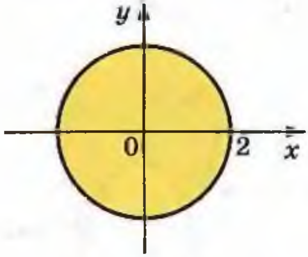


Рис. 19.4

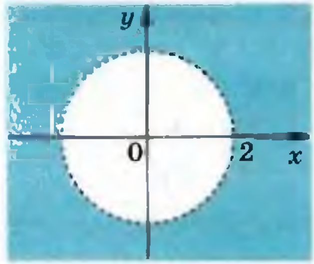


Рис. 19.5

Зрозуміло, що графіком нерівності $x^2 + y^2 > 4$ є множина точок координатної площини, які не належать кругу радіуса 2 з центром у початку координат (рис. 19.5).

Зазначимо, що приклади 1–4 ми розв'язували за однією загальною схемою: будували графік рівняння $F(x; y) = 0$, який розбивав координатну площину на дві області. Одна з цих областей (можливо, разом з графіком рівняння) була шуканим графіком нерівності. Ця схема застосовна і в тих випадках, коли рівняння $F(x; y) = 0$ розбиває площину на три й більше областей. Які з цих областей належать шуканому графіку, з'ясовують за допомогою «пробних точок». Пояснимо суть цього прийому на прикладах.

ПРИКЛАД 5 Зобразіть на координатній площині xy графік нерівності $xy > 6$.

Розв'язання. Графік рівняння $xy = 6$ розбиває координатну площину на три області (рис. 19.6). Як «пробні» розглянемо точки $A(-3; -3)$, $O(0; 0)$, $B(3; 3)$. Вони належать відповідно жовтій, синій і зеленій областям. При цьому пари $(3; 3)$ і $(-3; -3)$ є розв'язками даної нерівності, а пара $(0; 0)$ розв'язком не є.

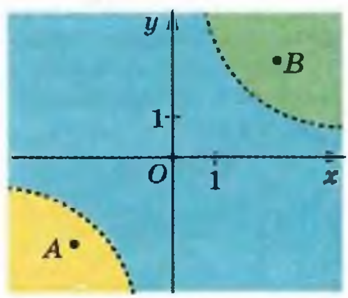


Рис. 19.6

Тоді можна зробити такий висновок: жовта і зелена області належать графіку нерівності, а синя область не належить.

Звідси шуканим графіком є об'єднання жовтої та зеленої областей.

ПРИКЛАД 6 Зобразіть графік нерівності $x^2 - y^2 < 0$.

Розв'язання. Графіком рівняння $x^2 - y^2 = 0$ є об'єднання прямих $x + y = 0$ і $x - y = 0$. Тоді графік рівняння $x^2 - y^2 = 0$ розбиває координатну площину на чотири області (рис. 19.7).

За допомогою «пробних точок» встановлюємо, що шуканим графіком є об'єднання заштрихованих областей (рис. 19.7).

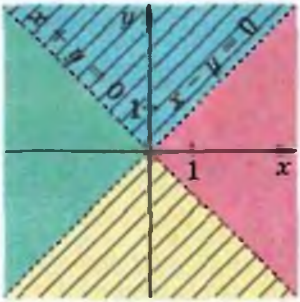


Рис. 19.7

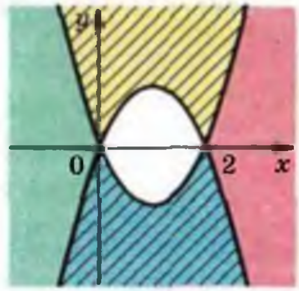


Рис. 19.8

ПРИКЛАД 7 Зобразіть графік нерівності $|y| \geqslant |x^2 - 2x|$.

Розв'язання. Графіком рівняння $|y| = |x^2 - 2x|$ є об'єднання парабол $y = x^2 - 2x$ і $y = 2x - x^2$. Він розбиває координатну площину xy на 5 областей (рис. 19.8). За допомогою «пробних точок» встановлюємо, що шуканим графіком є об'єднання заштрихованих областей разом з їх межами.

ПРИКЛАД 8 При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $|x - 3| + |a - 2| \leqslant 4$ є числовий відрізок, довжина якого не більша за 4?

Розв'язання. Графіком даної нерівності на координатній площині xa є квадрат, зображений на рисунку 19.9.

Якщо горизонтальна пряма $a = a_0$ перетинає квадрат по відрізку MN, то множиною розв'язків нерівності є відрізок $[x_1; x_2]$ (рис. 19.9).

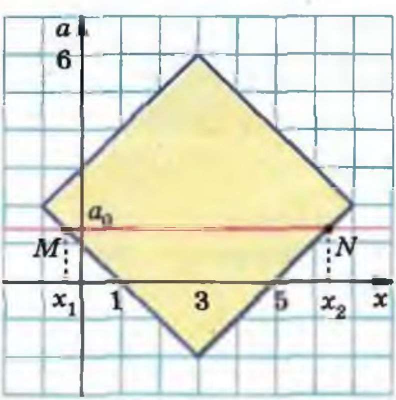


Рис. 19.9

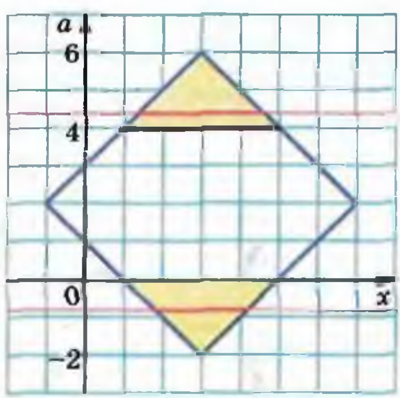


Рис. 19.10

З рисунка 19.10 видно, що довжина відрізка MN буде не більшою за 4, якщо $4 \leqslant a < 6$ або $-2 < a \leqslant 0$.

Відповідь: $4 \leqslant a < 6$ або $-2 < a \leqslant 0$.

19.1.° Укажіть нерівності, для яких пара $(-1; 2)$ є розв'язком:

1) $-2x + y > 3$;
2) $x^2 + y^2 \geqslant 7$;
3) $x^2 + y^2 < 5$;
4) $y \leqslant 3x^2 + x$.

19.2.° Які пари чисел є розв'язками нерівності $x^2 - xy + y^2 \geqslant 2$:

1) $(1; 1)$;
2) $(-1; 1)$;
3) $(1; -1)$;
4) $\left(\sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
5) $\left(0; \sqrt{2}\right)$?

19.3.° Які точки належать графіку нерівності $\sqrt{x} > y$:

1) $A\ (0; -1)$; 2) $B\ (-1; 0)$; 3) $C\ (1; 0)$; 4) $D\ (4; 3)$?

19.4.° Задайте нерівністю з двома змінними півплощину з границею $2x + 3y = -1$, яка містить точку $A\ (-1; 1)$.

19.5.° Задайте нерівністю з двома змінними відкриту півплощину з границею $3x - y = 2$, яка не містить точку $B\ (0; -1)$.

19.6.° Зобразіть графік нерівності:

1) $3x - y > 1$; 2) $2x + y \geqslant 2$; 3) $y \leqslant -1$; 4) $x < 3$.

19.7.° Зобразіть графік нерівності:

1) $x - 2y < 3$; 2) $x + 4y \geqslant 5$; 3) $y > -2$; 4) $x \geqslant -2$.

19.8.° Графіками яких нерівностей є відкриті півплощини:

1) $3x > y + 1$;
2) $x > 0$;
3) $y \leqslant 0$;
4) $x + y \geqslant 1$;
5) $\frac{y - x - 1}{x^2 + y^2} < 0$;
6) $\frac{x + y}{x^2 + y^2} > 0$;
7) $\frac{(x + y)^2}{x + y} \geqslant 0$;
8) $\sqrt{x} > -y^2$;
9) $|x| > x$?

19.9.° Графіками яких нерівностей є півплощини:

1) $x - 5y < -3$;
2) $x \geqslant 2$;
3) $y < 1$;
4) $\frac{x + y}{x^2 + y^2} \geqslant 0$;
5) $\frac{(x - y)^2}{x - y} \geqslant 0$;
6) $\frac{y - x + 1}{x^2 + y^2} \geqslant 0$;
7) $\sqrt{x} \geqslant -y^2$;
8) $|x| \geqslant x$?

19.10.° Побудуйте графік нерівності:

1) $y < 2x - x^2$;
2) $y \leqslant x^2 - 4x + 3$;
3) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 < 1$;
4) $x^2 + 2x + y^2 \geqslant 3$;
5) $xy < 2$;
6) $xy \geqslant 12$;
7) $(x - y)(x + y - 1) < 0$.

19.11.° Побудуйте графік нерівності:

1) $y > x^2 - x - 2$;
2) $y \leqslant -x^2 - 3x$;
3) $(x + 2)^2 + y^2 \leqslant 4$;
4) $x^2 + y^2 - 4y > 0$;
5) $xy \leqslant 6$;
6) $xy > -12$;
7) $(x + y)(x - y - 1) > 0$.

19.12.° Побудуйте графік нерівності:

1) $x^2 > 4$;
2) $|y| < 1$;
3) $y > |x|$;
4) $y \leqslant 2|x| - 1$;
5) $y \geqslant |2|x| - 1|$.

19.13.° Побудуйте графік нерівності:

1) $y^2 \leqslant 4$;
2) $|x| < 3$;
3) $y < |x + 1| - 2$.

19.14.° Побудуйте графік нерівності:

1) $y < |x^2 - 4x|$;
2) $y \geqslant x^2 - 4|x|$;
3) $y \leqslant |x^2 - 4|x||$;
4) $|y| < |x^2 - 4x|$;
5) $x^2 - 2|x| + y^2 \leqslant 0$;
6) $x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| + 1 > 0$;
7) $|x|y > 3$;
8) $x|y| \leqslant 6$;
9) $|xy| > 12$;
10) $|x| + |y| \leqslant 1$;
11) $|x| - |y| > 1$.

19.15.° Побудуйте графік нерівності:

1) $y \geqslant x^2 - 4|x| + 3$;
2) $|y| < x^2 - 4x + 3$;
3) $|y| > x^2 - 4|x| + 3$;
4) $x^2 - 2|x| + y^2 \leqslant 3$;
5) $x^2 + y^2 - 4|x| - 4|y| + 7 \leqslant 0$;
6) $x|y| > 8$;
7) $||x| - 1| + |y| \leqslant 1$.

19.16.** Побудуйте графік нерівності:

1) $(x + y)^2 (x + y + 1) \leqslant 0$;
2) $(x + y + 1)(x - y)^2 < 0$;
3) $(x - y)|x| \leqslant 0$;
4) $\dfrac{x^2 + y^2 - 4}{|y|} < 0$.

19.17.** Побудуйте графік нерівності:

1) $x^2 (y - x^2) > 0$;
2) $\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x^2 - y^2)^2} > 0$.

19.18.** При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $2|x + 1| + |a - 4| \leqslant 2$ є числовий відрізок, довжина якого не менша від 1?

19.19.* Знайдіть усі значення параметра a, при яких множина розв'язків нерівності $(x^2 - a)(a - 2x - 8) > 0$ не містить жодного розв'язку нерівності $x^2 \leqslant 4$.

19.20.* При яких значеннях параметра a множина розв'язків нерівності $x(x - 4) + a^2(a + 4) \leqslant ax(a + 1)$ містить не більше чотирьох цілих значень x?

20. Системи нерівностей з двома змінними

Пара (1; 2) є розв'язком кожної з нерівностей $y - x^2 \geqslant 0$ і $y - x \geqslant 1$. У такому разі говорять, що пара (1; 2) є **розв'язком системи нерівностей**

$$\begin{cases} y - x^2 \geqslant 0, \\ y - x \geqslant 1. \end{cases}$$

Щоб знайти розв'язок системи, потрібно знайти перетин множин розв'язків нерівностей, які входять до системи.

Розв'язки системи можна зображати на координатній площині. Для цього слід побудувати графіки нерівностей, які складають систему, і знайти їх перетин. Отримана фігура є зображенням множини розв'язків системи.

Побудуємо зображення розв'язків записаної вище системи.

Графіком першої нерівності є фігура, показана на рисунку 20.1 горизонтальною штриховкою. Графіком другої нерівності є півплощина, показана на рисунку 20.1 вертикальною штриховкою. Фігура, яка зображує розв'язки системи, позначена подвійною штриховкою.

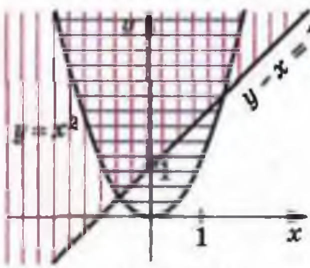


Рис. 20.1

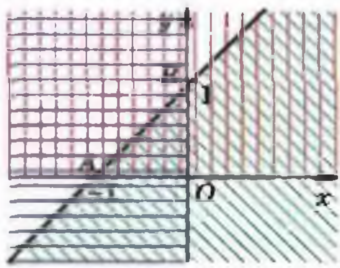


Рис. 20.2

Також кажуть, що **система нерівностей** $\begin{cases} y - x^2 \geqslant 0, \\ y - x \geqslant 1 \end{cases}$ задає побудовану фігуру.

Наприклад, система нерівностей $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x \leqslant 0, \\ -x + y \leqslant 1 \end{cases}$ задає трикутник ABO (рис. 20.2).

Півкруг, зображений на рисунку 20.3, задає система нерівностей $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ x - y \geqslant 0. \end{cases}$

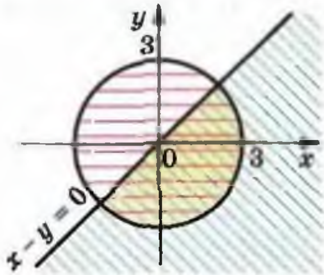


Рис. 20.3

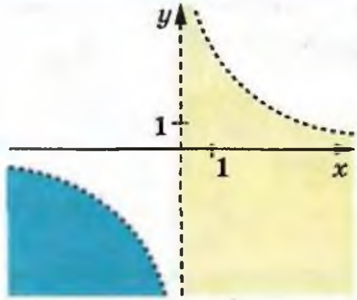


Рис. 20.4

ПРИКЛАД 1 Зобразіть на координатній площині xy графік нерівності $y < \frac{6}{x}$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 0,\\ xy < 6,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ xy > 6.\end{cases}\end{array}\right.$

Множину розв'язків першої системи зображено на рисунку 20.4 жовтим кольором, а множину розв'язків другої системи — синім.

Графік заданої нерівності — це об'єднання отриманих фігур.

Зауважимо, що цю задачу можна розв'язати за допомогою «методу областей», який розглянуто в попередньому пункті. Якщо задану нерівність переписати так: $\frac{xy - 6}{x} < 0$, то легко встановити, що вона рівносильна нерівності $x\,(xy - 6) < 0$. Графік рівняння $x\,(xy - 6) = 0$ розбиває координатну площину xy на 4 області (рис. 20.5). Завершіть розв'язування самостійно.

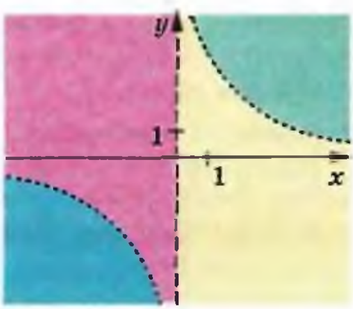


Рис. 20.5

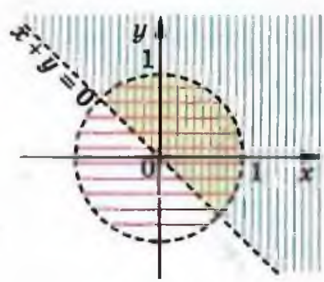


Рис. 20.6

ПРИКЛАД 2 Зобразіть графік нерівності $\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x+y)>0$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x+y>0, \\ 1-x^2-y^2>0. \end{cases}$

Графіком першої нерівності системи є відкрита півплощина, графіком другої — внутрішня область круга радіуса 1 з центром у початку координат.

Отже, графіком даної нерівності є відкритий півкруг (рис. 20.6).

ПРИКЛАД 3 Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $3-|x-a|>x^2$ має хоча б один від'ємний розв'язок.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність так:

$$|x-a|<3-x^2.$$

Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x-a<3-x^2, \\ x-a>-3+x^2. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} a>x^2+x-3, \\ a<-x^2+x+3. \end{cases}$

Отримана система повинна мати хоча б один від'ємний розв'язок. Ця вимога рівносильна такій: система $\begin{cases} a>x^2+x-3, \\ a<-x^2+x+3, \\ x<0 \end{cases}$ повинна мати розв'язок.

На координатній площині xa зобразимо розв'язки останньої системи.

Графіком першої нерівності системи є множина точок, які лежать вище параболи $a=x^2+x-3$, графіком другої нерівності — множина точок, які лежать нижче параболи $a=-x^2+x+3$, графіком третьої нерівності — відкрита півплощина, розміщена ліворуч від осі ординат. Перетин зазначених множин зображено на рисунку 20.7 жовтим кольором.

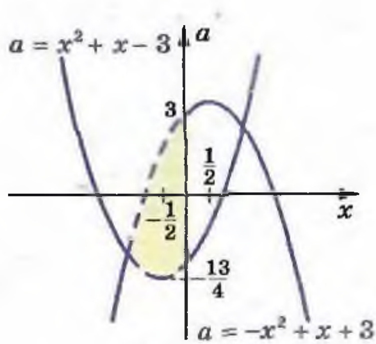


Рис. 20.7

Система має розв'язок, якщо горизонтальні прямі перетинають побудовану фігуру. Цей перетин забезпечується умовою $-\frac{13}{4}<a<3$.

Відповідь: $-\frac{13}{4}<a<3$.

20.1.° Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x - 3y \geqslant 1, \\ x + 2y < 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ 2x - y > -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x + 2y > 5, \\ y < -1{,}5x + 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x + y \leqslant 0, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y > 1, \\ 2x - y < 2; \end{cases}$

20.2.° Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} -x + 2y < -2, \\ x - y > 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 3y > 1, \\ x > 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x - y > 2, \\ 6x - 2y < 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y \geqslant -1, \\ 2x - y \leqslant 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y + 3 \geqslant 2x, \\ 2x - y \geqslant -2; \end{cases}$

20.3.° Зобразіть на координатній площині xy множину $C = A \cap B$, де:

1) $A = \{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x;\ y) \mid y \geqslant 2x\}$;

2) $A = \{(x;\ y) \mid y \leqslant -x^2 + 1\}$, $B = \{(x;\ y) \mid y \geqslant -4\}$;

3) $A = \{(x;\ y) \mid y \geqslant x^2 - 4x + 3\}$, $B = \{(x;\ y) \mid y \leqslant -x^2 + 4x - 5\}$;

4) $A = \{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 \geqslant 4\}$, $B = \{(x;\ y) \mid y \leqslant x^2\}$.

20.4.° Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x^2 + (y + 3)^2 \leqslant 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 > 4, \\ (x - 3)^2 + y^2 < 9; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y \leqslant -x^2 + 1, \\ y \geqslant |x| - 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 5, \\ xy \geqslant 2; \end{cases}$

20.5.° Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ |x| \leqslant 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 10, \\ xy \leqslant -3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ xy \geqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1, \\ y \geqslant -|x|; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy \geqslant 6, \\ |y| \leqslant 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ xy \leqslant 0. \end{cases}$

20.6.° Задайте системою нерівностей фігуру, зображену на рисунку 20.8.

20.7.° Задайте системою нерівностей фігуру, зображену на рисунку 20.9.

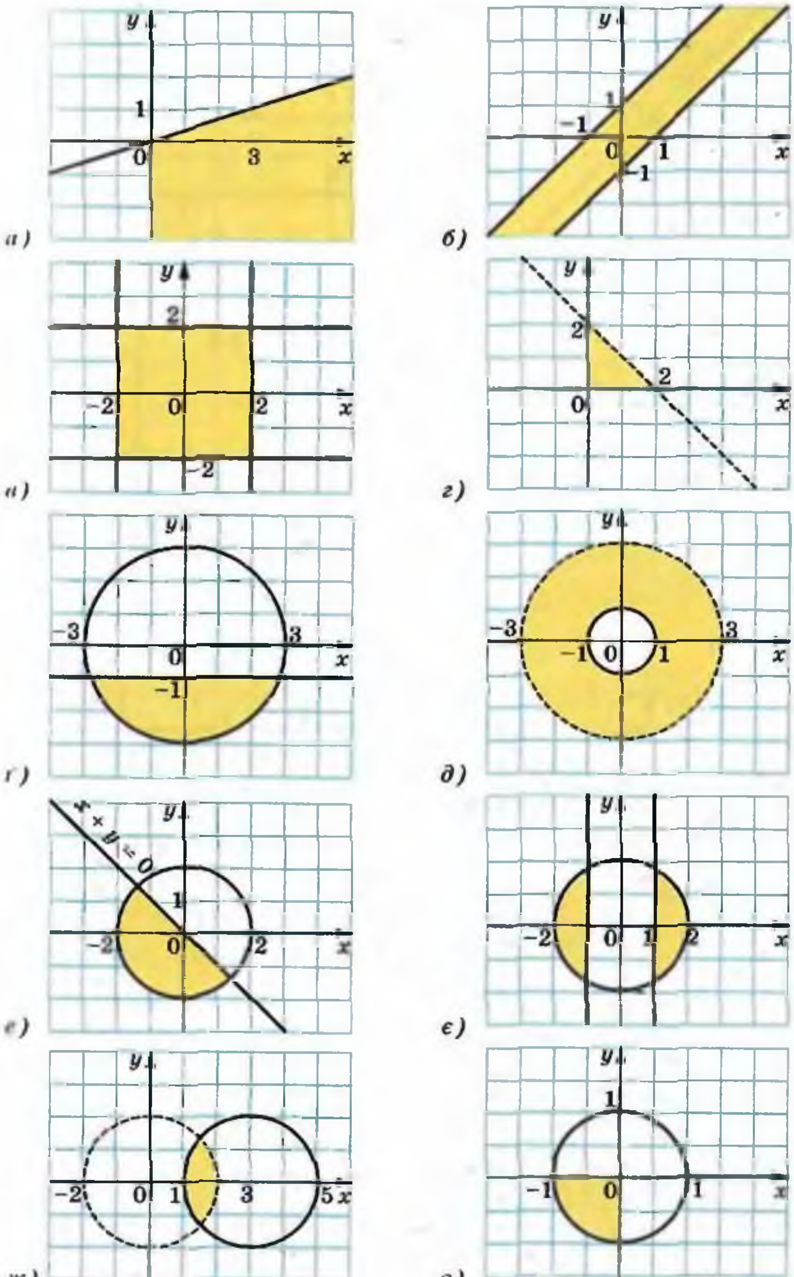


Рис. 20.8

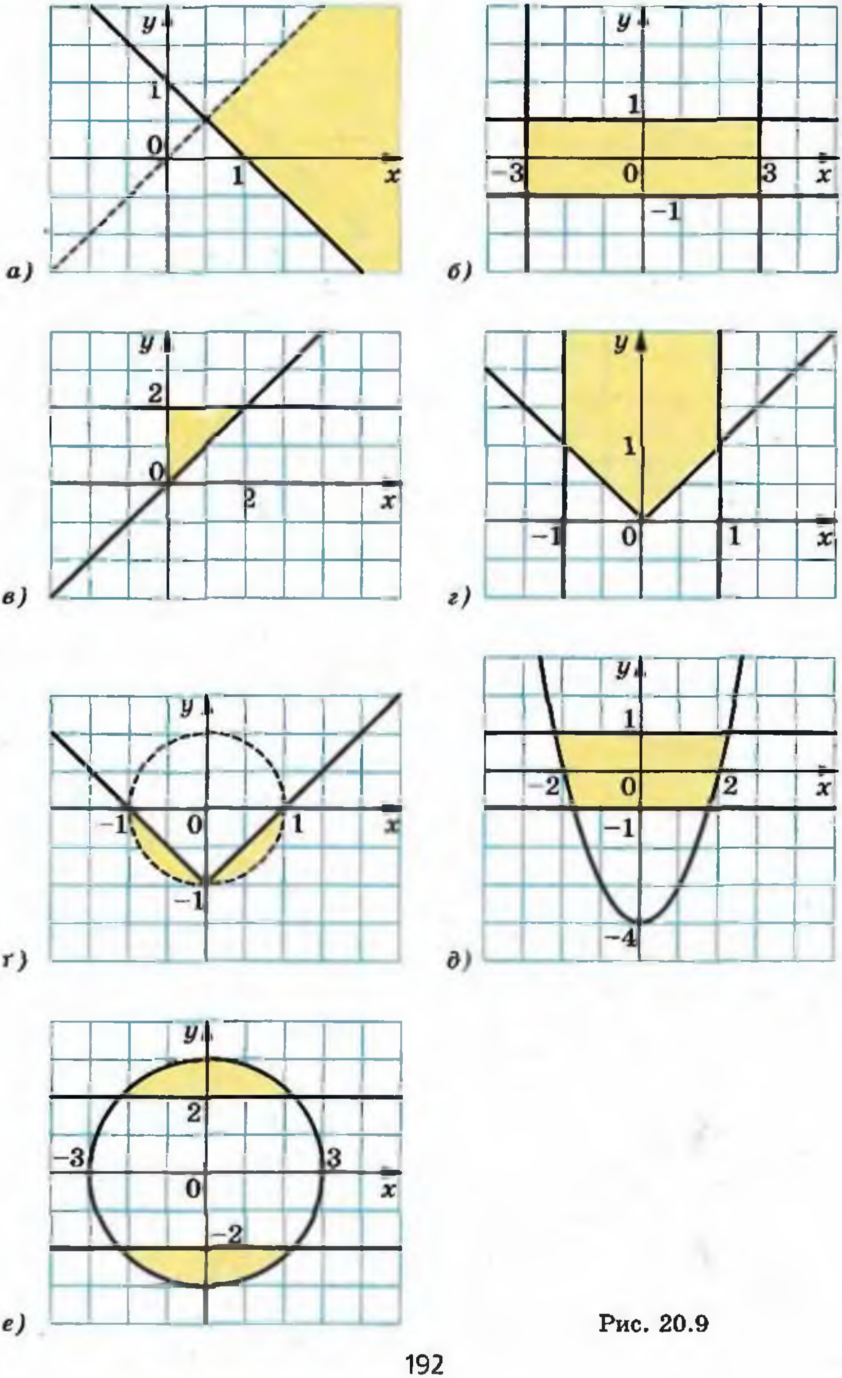


Рис. 20.9

20.8.° Зобразіть графік нерівності:

1) $|x - y| \leqslant 2$;
2) $|y - 3x| \geqslant 4$;
3) $|x + y| \leqslant x - y$;
4) $|x - y| \geqslant 2x + y$;
5) $\sqrt{x-y} \leqslant 2$;
6) $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{2x-y+1}$;
7) $\sqrt{2x+y} \geqslant \sqrt{x-y-1}$.

20.9.° Зобразіть графік нерівності:

1) $|x + y| \geqslant 3$;
2) $|2x - y| \leqslant 1$;
3) $|2x - y| \leqslant x + y$;
4) $|x + y| \geqslant x - y$;
5) $\sqrt{x+y} \leqslant 1$;
6) $\sqrt{x-2y-1} \leqslant \sqrt{x-y}$.

20.10.° Зобразіть графік нерівності:

1) $x > \frac{8}{y}$;
2) $y < -\frac{6}{x}$;
3) $y \geqslant \frac{12}{x}$;
4) $\frac{12}{xy} > 1$.

20.11.° Зобразіть графік нерівності:

1) $y > -\frac{1}{x}$;
2) $x \leqslant -\frac{2}{y}$;
3) $\frac{6}{xy} \leqslant -1$.

20.12.° Зобразіть графік нерівності:

1) $(x+y-1)\sqrt{x^2+y^2-1} < 0$;
2) $(x+y-1)\sqrt{x^2+y^2-1} \geqslant 0$.

20.13.° Зобразіть графік нерівності:

1) $\sqrt{1-|x|}(y-x^2) > 0$;
2) $\sqrt{1-|x|}(y-x^2) \leqslant 0$;
3) $(y+x+2)\sqrt{x^2+y^2-2} \leqslant 0$.

20.14.° Яка фігура є графіком нерівності $|x + y| + |x - y| \leqslant 2$?

20.15.° Яка фігура є графіком нерівності $|2x - y| + |x + y| \leqslant 6$?

20.16.° Зобразіть графік нерівності:

1) $|x^2 + y^2 - 4x| \leqslant 2x$;
2) $|x^2 - y| \leqslant y - 1$;
3) $\sqrt{x^2-1} \leqslant \sqrt{2x+1-y^2}$.

20.17.° Зобразіть графік нерівності:

1) $|x^2 - y| \leqslant x^2 - 1$;
2) $|x^2 - 1| \geqslant y^2 - 1$;
3) $|x^2 + y^2 - 2| \leqslant 2(x + y)$.

20.18.•• Зобразіть на координатній площині xy множину точок, координати яких задовольняють умову:

1) $\max\{2x;\ 1\} = x^2 + y^2$;
2) $\min\{y;\ 2y - 1\} = x^2$.

20.19.•• Зобразіть на координатній площині xy множину точок, координати яких задовольняють умову:

1) $\max\{x^2 + y^2 - 1;\ 3\} = x^2$;
2) $\min\{x^2;\ |x|\} = y$.

20.20.** Знайдіть усі значення параметра a, при яких система нерівностей $\begin{cases} x^2 + a + 4x + 3 \leqslant 0, \\ 2a - x + 2 \geqslant 0 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

20.21.** Знайдіть усі значення параметра a, при яких система нерівностей $\begin{cases} x^2 - 4x + a \leqslant 0, \\ x^2 + 2x - 3a \leqslant 0 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

20.22.** При яких значеннях параметра a система

$\begin{cases} x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 2a < 0, \\ x + a^2 = 0 \end{cases}$ має розв'язки?

20.23.** При яких значеннях параметра a система

$\begin{cases} x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$ має розв'язки?

20.24.** Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $2 > |x + a| + x^2$ має хоча б один додатний розв'язок.

20.25.* При яких значеннях параметра a система нерівностей

$\begin{cases} |2x - a| + |x + a| \leqslant 6, \\ 2x^2 + x - 2a \geqslant 2 \end{cases}$ має:

1) розв'язки;
2) єдиний розв'язок;
3) тільки від'ємні розв'язки;
4) тільки додатні розв'язки;
5) тільки розв'язки, що задовольняють умову $|x| \geqslant 1$;
6) множину розв'язків, що містить не більше одного цілого числа?

21. Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь і систем нерівностей

Розглянемо задачі, у яких системи рівнянь і системи нерівностей використовуються як математичні моделі реальних ситуацій.

ПРИКЛАД 1 З двох пунктів, відстань між якими дорівнює 18 км, вирушили одночасно назустріч один одному двоє туристів і зустрілися через 2 год. З якою швидкістю йшов кожний турист, якщо для проходження всієї відстані між пунктами одному з них потрібно на 54 хв більше, ніж другому?

Розв'язання. Нехай швидкість першого туриста дорівнює x км/год, а другого — y км/год, $x < y$. До зустрічі перший турист пройшов $2x$ км, а другий — $2y$ км. Разом вони пройшли 18 км. Тоді $2x + 2y = 18$.

Усю відстань між пунктами перший турист проходить за $\frac{18}{x}$ год, а другий — за $\frac{18}{y}$ год. Оскільки першому туристу для проходження цієї відстані потрібно на $54 \text{ хв} = \frac{9}{10}$ год більше, ніж другому, то $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \frac{2}{9 - y} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Розв'язавши друге рівняння останньої системи, отримуємо: $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. Корінь -36 не підходить за змістом задачі. Отже, $y = 5$, $x = 4$.

Відповідь: 4 км/год, 5 км/год.

ПРИКЛАД 2 Двоє робітників можуть разом виконати деяку роботу за 10 днів. Після 6 днів спільної роботи один з них був переведений на іншу роботу, а другий продовжував працювати. Через 2 дні самостійної роботи другого з'ясувалося, що зроблено $\frac{2}{3}$ всієї роботи. За скільки днів кожний робітник може виконати всю роботу?

Розв'язання. Нехай перший робітник може виконати всю роботу за x днів, а другий — за y днів. За 1 день перший робітник виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{x}$ частину роботи. Другий робітник за 1 день виконує $\frac{1}{y}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{y}$ частину роботи. Оскільки за 10 днів спільної праці вони виконують всю роботу, то $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Перший робітник працював 6 днів і виконав $\frac{6}{x}$ частину роботи, а другий працював 8 днів і виконав $\frac{8}{y}$ частину роботи. Оскільки внаслідок цього було виконано $\frac{2}{3}$ роботи, то $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}$.

Отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1, \\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}, \end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел $x = 15$, $y = 30$. Отже, перший робітник може виконати всю роботу за 15 днів, а другий — за 30 днів.

Відповідь: 15 днів, 30 днів.

ПРИКЛАД 3 Поїзд через 2 год після виходу з пункту A зупинився на 1 год, а потім продовжив свій шлях, зменшивши швидкість на 0,2 початкової швидкості. Поїзд прибув у пункт B із запізненням на 3,5 год. Якби поїзд зупинився на 180 км ближче до пункту B, то він прибув би до пункту B із запізненням лише на 1,5 год. Знайдіть відстань між пунктами A і B.

Розв'язання. Нехай s км — відстань між пунктами A і B, v км/год — початкова швидкість поїзда. Тоді $\frac{s}{v}$ год — час, протягом якого поїзд мав би знаходитись у дорозі, якби рухався за розкладом. За перші 2 год поїзд пройшов відстань, яка дорівнює $2v$ км, а залишок шляху він йшов зі швидкістю $0{,}8v$ км/год. Тоді час, який поїзд витратив на шлях від A до B, дорівнює $\left(\frac{s-2v}{0{,}8v}+3\right)$ год. Отримуємо:

$$\left(\frac{s-2v}{0{,}8v}+3\right)-\frac{s}{v}=3{,}5.$$

Міркуючи аналогічно, складаємо друге рівняння системи:

$$\left(\frac{180}{v}+\frac{s-180-2v}{0{,}8v}+3\right)-\frac{s}{v}=1{,}5.$$

Отже, система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \left(\frac{s-2v}{0{,}8v}+3\right)-\frac{s}{v}=3{,}5, \\ \left(\frac{180}{v}+\frac{s-180-2v}{0{,}8v}+3\right)-\frac{s}{v}=1{,}5. \end{cases}$$

Віднімаючи від першого рівняння системи друге, отримуємо: $\frac{180}{0,8v} - \frac{180}{v} = 2$. Звідси $v = 22,5$. Тепер нескладно отримати, що $s = 270$.

Відповідь: 270 км.

ПРИКЛАД 4 Шлях проходить через пункти A і B. Велосипедист виїхав з пункту A в напрямку до пункту B. Водночас з пункту B вийшли з однаковою швидкістю два пішоходи: перший — до пункту A, другий — у протилежному напрямку. Велосипедист зустрів першого пішохода через 0,3 год після виїзду з пункту A, а другого наздогнав через 1 год після моменту проїзду через пункт B. Визначте час руху велосипедиста від пункту A до пункту B.

Розв'язання. Нехай s км — відстань між пунктами A і B, v_1 км/год — швидкість велосипедиста, v_2 км/год — швидкість кожного пішохода. Зауважимо, що час, потрібний велосипедисту для подолання відстані між пунктами A і B, дорівнює $\frac{s}{v_1}$ год, а відстань між ним і другим пішоходом у момент його проїзду через пункт B дорівнюватиме $\frac{sv_2}{v_1}$ км. Тоді можна записати:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v_1 + v_2} = \dfrac{3}{10}, \\ \dfrac{sv_2}{v_1(v_1 - v_2)} = 1. \end{cases}$$

Поділимо почленно ліві і праві частини рівнянь системи. Маємо:

$\frac{v_1(v_1 - v_2)}{v_2(v_1 + v_2)} = \frac{3}{10}$ або після перетворень $10v_1^2 - 13v_1v_2 - 3v_2^2 = 0$.

Останнє рівняння рівносильне рівнянню

$$10\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 13\left(\frac{v_1}{v_2}\right) - 3 = 0.$$

Звідси з урахуванням того, що за умовою задачі $\frac{v_1}{v_2} > 0$, отримуємо $\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}$, тобто $v_2 = \frac{2}{3}v_1$. Підставимо отриманий вираз для v_2 у перше рівняння системи:

$\frac{s}{v_1 + \frac{2}{3}v_1} = \frac{3}{10}$. Звідси $\frac{s}{v_1} = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$ год.

ПРИКЛАД 5 За контрольну роботу з математики учні отримали оцінки «9», «10», «11», «12». Оцінки «9», «10», «12» отримала однакова кількість учнів, а оцінок «11» було поставлено більше, ніж решту інших оцінок, узятих разом. Оцінку вище «10» отримало менше 10 учнів. Скільки оцінок «10» і скільки оцінок «11» було поставлено, якщо контрольну роботу писали не менше 12 учнів?

Розв'язання. Нехай оцінки «9», «10», «12» отримали по x учнів, а оцінку «11» — y учнів. Оскільки оцінку «11» отримало більше учнів, ніж решту інших оцінок, узятих разом, то $y > 3x$. Оцінку вище «10» отримало менше 10 учнів, тому $x + y < 10$. Оскільки контрольну роботу писали не менше 12 учнів, то $3x + y \geqslant 12$. Отримали систему нерівностей:

$$\begin{cases} y > 3x, \\ x + y < 10, \\ 3x + y \geqslant 12. \end{cases}$$

Тоді $x + y > x + 3x = 4x$; $4x < 10$; $x < 2{,}5$.

Оскільки x — ціле невід'ємне число, то з нерівності $x < 2{,}5$ випливає, що $x = 0$, або $x = 1$, або $x = 2$.

При $x = 0$ отримуємо систему $\begin{cases} y > 0, \\ y < 10, \\ y \geqslant 12, \end{cases}$ яка розв'язків не має.

При $x = 1$ отримуємо систему $\begin{cases} y > 3, \\ y < 9, \\ y \geqslant 9, \end{cases}$ яка також розв'язків не має.

При $x = 2$ маємо: $\begin{cases} y > 6, \\ y < 8, \\ y \geqslant 6, \end{cases}$ звідки $y = 7$.

Отже, оцінку «10» отримали 2 учні, оцінку «11» — 7 учнів.

Відповідь: 2 учні, 7 учнів.

ПРИКЛАД 6 О 6 год ранку з пункту A до пункту B за течією річки вирушили човен і катер. Човен прибув у пункт B о 16 год того самого дня. Катер, дійшовши до пункту B, одразу повернув назад і на своєму шляху з пункту B до пункту A зустрів човен не пізніше ніж о 14 год, а прибув у пункт A не раніше ніж о 22 год того самого дня. Знайдіть час прибуття катера у пункт B, якщо його власна швидкість удвічі більша за власну швидкість човна.

Розв'язання. Нехай x км/год — власна швидкість човна, y км/год — швидкість течії річки. За умовою човен, рухаючись за течією, прибув у пункт B через 10 год після виходу з пункту A. Тоді відстань між пунктами A і B дорівнює $10\,(x + y)$ км.

Катер рухався з пункту A в пункт B зі швидкістю $(2x + y)$ км/год, а назад — зі швидкістю $(2x - y)$ км/год, а тому витратив на весь шлях $\left(\frac{10(x+y)}{2x+y} + \frac{10(x+y)}{2x-y}\right)$ год. Отримуємо нерівність:

$$\frac{10(x+y)}{2x+y} + \frac{10(x+y)}{2x-y} \geqslant 16.$$

До моменту зустрічі човен і катер були в дорозі не більше 8 год. За цей час човен пройшов не більше ніж $8\,(x + y)$ км, отже, катеру після зустрічі залишилося пройти не більше ніж $8\,(x + y)$ км проти течії. До моменту зустрічі катер знаходився в дорозі не більше 8 год, а отже, на весь шлях з A до B і назад катеру знадобилося не більше $\left(8 + \frac{8(x+y)}{2x-y}\right)$ год. Отримуємо ще одну нерівність:

$$\frac{10(x+y)}{2x+y} + \frac{10(x+y)}{2x-y} \leqslant 8 + \frac{8(x+y)}{2x-y}.$$

Запишемо отриману систему нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{10(x+y)}{2x+y} + \frac{10(x+y)}{2x-y} \geqslant 16, \\ \frac{10(x+y)}{2x+y} + \frac{10(x+y)}{2x-y} \leqslant 8 + \frac{8(x+y)}{2x-y}. \end{cases}$$

Ураховуючи, що $2x + y > 0$ і $2x - y > 0$, можна записати:

$$\begin{cases} 5(x+y)(2x-y) + 5(x+y)(2x+y) \geqslant 8(4x^2 - y^2), \\ 5(x+y)(2x-y) + (x+y)(2x+y) \leqslant 4(4x^2 - y^2). \end{cases}$$

Після перетворень отримуємо систему $\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 2y^2 \leqslant 0, \\ x^2 - 2xy \geqslant 0. \end{cases}$

Зробимо заміну $x = yt$. Отримуємо $\begin{cases} 3y^2t^2 - 5y^2t - 2y^2 \leqslant 0, \\ y^2t^2 - 2y^2t \geqslant 0. \end{cases}$

Ураховуючи, що $y > 0$, можна записати $\begin{cases} 3t^2 - 5t - 2 \leqslant 0, \\ t^2 - 2t \geqslant 0. \end{cases}$

Остання система має єдиний додатний розв'язок $t = 2$.
Завершіть розв'язування самостійно.
Відповідь: о 12 год.

ПРИКЛАД 7 Авіалінію, яка зв'язує міста A і B, обслуговують літаки трьох типів. Кожний літак першого, другого і третього типів може прийняти відповідно 230, 100 і 40 пасажирів. Усі літаки лінії можуть одночасно перевезти 760 пасажирів. Скільки літаків кожного типу обслуговують цю авіалінію?

Розв'язання. Позначимо через x, y, z кількість літаків першого, другого, третього типу відповідно. Тоді отримуємо систему:

$$\begin{cases} 230x + 100y + 40z = 760, \\ x \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{N}, \\ z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 23x + 10y + 4z = 76, \\ x \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{N}, \\ z \in \mathbb{N}. \end{cases}$

З рівняння системи випливає, що x — парне число. Крім того, $23x = 76 - (10y + 4z) \leqslant 62$. Тоді $x \leqslant \frac{62}{23}$, а отже, $x = 2$.

З урахуванням знайденого значення x отримуємо систему:

$$\begin{cases} 10y + 4z = 30, \\ y \in \mathbb{N}, \\ z \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 5y + 2z = 15, \\ y \in \mathbb{N}, \\ z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

З рівняння отриманої системи випливає, що z — число, яке кратне 5. Крім того, $2z = 15 - 5y \leqslant 10$. Звідси $z \leqslant 5$, а отже, $z = 5$, $y = 1$.

Відповідь: 2 літаки, 1 літак, 5 літаків.

21.1.° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см, а його площа — 30 см^2. Знайдіть катети цього трикутника.

21.2.° Периметр прямокутного трикутника дорівнює 40 см, а один з катетів — 8 см. Знайдіть другий катет трикутника і його гіпотенузу.

21.3.° Площа прямокутника дорівнює 180 см^2. Якщо одну його сторону зменшити на 3 см, а другу — на 2 см, то його площа дорівнюватиме 120 см^2. Знайдіть початкові розміри прямокутника.

21.4.° Якщо довжину прямокутника зменшити на 3 см, а ширину збільшити на 2 см, то його площа збільшиться на 6 см^2. Якщо довжину прямокутника зменшити на 5 см, а ширину збільшити на 3 см, то площа прямокутника не зміниться. Знайдіть сторони даного прямокутника.

21.5.° Два мотоциклісти виїхали одночасно з міст A і B назустріч один одному. Через годину вони зустрілись і, не зупиняючись, продовжили рухатись із тією самою швидкістю. Один з них прибув у місто A на 35 хв раніше, ніж другий – у місто B. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста, якщо відстань між містами становить 140 км.

21.6.° Зі станції M до станції N, відстань між якими дорівнює 450 км, вирушив швидкий поїзд. Через 3 год після цього зі станції N до станції M вийшов товарний поїзд, який зустрівся зі швидким через 3 год після свого виходу. Швидкий поїзд долає відстань між станціями M і N на 7 год 30 хв швидше, ніж товарний. Знайдіть швидкість кожного поїзда.

21.7.° З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 240 км, виїхали одночасно автобус і автомобіль. Автобус прибув до пункту призначення на 1 год пізніше за автомобіль. Знайдіть швидкість автомобіля й автобуса, якщо за 2 год автобус проїжджає на 40 км більше, ніж автомобіль за одну годину.

21.8.° Турист проплив на човні по річці від пристані A до пристані B і повернувся назад за 6 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо 2 км за течією річки турист пропливає за той самий час, що й 1 км проти течії, а відстань між пристанями A і B становить 16 км.

21.9.° Два приятелі в одному човні пропливли по річці вздовж берега і повернулися тим самим шляхом через 5 год після моменту відплиття. Увесь шлях склав 10 км. Кожні 2 км проти течії вони пропливали за той самий час, що й кожні 3 км за течією. Знайдіть швидкість течії.

21.10.° Теплохід пройшов за течією річки 100 км і проти течії 64 км за 9 год. За цей час він міг пройти 80 км за течією і 80 км проти течії. Знайдіть власну швидкість теплохода.

21.11.° Катер проходить 48 км проти течії річки і 30 км за течією річки за 3 год, а 15 км за течією на 1 год швидше, ніж 36 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера і швидкість течії.

21.12.° З міст A і B, відстань між якими 40 км, одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти, один з яких прибув у місто B через 40 хв, а другий — у місто A через 1,5 год після зустрічі. Знайдіть швидкість руху кожного велосипедиста.

21.13.° З двох пунктів, відстань між якими 180 км, одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі. Перший автомобіль прибув у другий пункт через 1 год 36 хв після зустрічі, а другий автомобіль прибув у перший пункт через 2,5 год після зустрічі. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

21.14.° Відстань між селами *M* і *N* дорівнює 36 км. Із села *N* виїхав велосипедист, а через 0,5 год назустріч йому із села *M* виїхав другий велосипедист, швидкість якого на 6 км/год більша, ніж швидкість першого. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста, якщо вони зустрілися на середині дороги між селами *M* і *N*.

21.15.° Два автомобілі виїхали одночасно з одного пункту в одному напрямку. Швидкість першого автомобіля 50 км/год, а другого — 40 км/год. Через 0,5 год з того ж пункту в тому самому напрямку виїхав третій автомобіль, який обігнав перший на 1,5 год пізніше, ніж другий. Знайдіть швидкість третього автомобіля.

21.16.° Відстань між пристанями *A* і *B* дорівнює 28 км. Катер, вирушивши від пристані *A* до пристані *B*, через 2 год після початку руху зустрів пліт, відправлений від пристані *B* за течією річки за 2 год до початку руху катера. Знайдіть швидкість течії річки і власну швидкість катера, якщо катер проходить відстань від пристані *A* до пристані *B* і повертається назад за 4 год 48 хв.

21.17.° Маса куска одного металу дорівнює 336 г, а другого — 320 г. Об'єм куска першого металу на 10 см^3 менший від об'єму другого, а густина першого — на 2 г/см^3 більша за густину другого. Знайдіть густину кожного металу.

21.18.° Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати виробниче завдання за 8 днів. Якщо перша бригада, працюючи самостійно, виконає $\frac{1}{3}$ завдання, а потім її змінить друга бригада, то завдання буде виконане за 20 днів. За скільки днів кожна бригада може виконати це виробниче завдання, працюючи самостійно?

21.19.° Якщо відкрити одночасно дві труби, то басейн буде наповнено за 12 год. Якщо спочатку наповнювати басейн тільки через першу трубу протягом 5 год, а потім тільки через другу протягом 9 год, то водою буде наповнено половину басейну. За скільки годин може наповнити басейн кожна труба, працюючи самостійно?

21.20.* Два трактористи, працюючи разом, можуть зорати поле за 6 год. Якщо перший тракторист працюватиме самостійно 4 год, а потім його змінить другий, то цей тракторист закінчить оранку за 9 год. За який час, працюючи самостійно, може зорати поле кожен тракторист?

21.21.* До баку місткістю 500 м^3 підведено три труби. Протягом певного часу до баку, який спочатку був порожнім, подавали воду тільки через першу трубу. Потім першу трубу закрили і відкрили дві інші труби, які працювали разом до наповнення бака, причому ці дві труби пропрацювали вдвічі довше, ніж перша. Якби ці дві труби працювали 12 год 30 хв, то вони подали б у бак стільки ж води, скільки подала перша труба за час своєї роботи. З'ясуйте, скільки часу працювала перша труба, якщо відомо, що через неї до басейну щохвилини надходило 300 л води.

21.22.** З пункту A до пункту B вийшов товарний поїзд. Через 5 год з пункту B у пункт A вийшов пасажирський поїзд. Зустрілися вони в пункті C. Від C до B товарний поїзд йшов 4 год, а пасажирський від C до A — 6 год. За скільки годин кожний поїзд може подолати шлях між A і B?

21.23.** Два спортсмени вибігають одночасно: перший з A в B, другий з B в A. Вони біжать з різними швидкостями і зустрічаються на відстані 300 м від A. Пробігши доріжку AB до кінця, кожний з них одразу повертає назад і зустрічає іншого на відстані 400 м від B. Знайдіть довжину AB.

21.24.** Три плавці мають проплисти дистанцію від A до B і назад. Спочатку стартує перший, через 5 с — другий, а ще через 5 с — третій. Деяку точку C, яка знаходиться між A і B, усі плавці на шляху до B пройшли одночасно. Третій плавець, пропливши до B і повертаючись назад, зустрів другого за 9 м, а першого — за 15 м від B. Знайдіть швидкість третього плавця, якщо дистанція AB дорівнює 55 м.

21.25.** З пункту A до пункту B через рівні проміжки часу відправляються три автомобілі. До пункту B вони прибувають одночасно, потім виїжджають у пункт C, який лежить на відстані 120 км від пункту B. Перший автомобіль прибуває туди через годину після другого. Третій автомобіль, прибувши в пункт C, одразу повертає назад і на відстані 40 км від пункту C зустрічає перший. Знайдіть швидкість першого автомобіля.

21.26.** З пункту *A* до пункту *B* вийшов пішохід. Услід за ним через 2 год з пункту *A* виїхав велосипедист, а ще через 30 хв — мотоцикліст. Через кілька хвилин після виїзду мотоцикліста виявилося, що до цього моменту всі троє подолали однакову частину шляху від пункту *A* до пункту *B*. На скільки хвилин раніше від пішохода у пункт *B* прибув велосипедист, якщо пішохід прибув у пункт *B* на 1 год пізніше за мотоцикліста?

21.27.** Пристань *A* знаходиться вище за течією річки, ніж пристань *B*. Від пристаней *A* і *B* одночасно назустріч один одному почали рух пліт і моторний човен. Діставшись пристані *A*, човен негайно повернув назад і наздогнав пліт у той момент часу, коли він проплив $\frac{2}{3}$ відстані між пристанями *A* і *B*. Знайдіть час, який витрачає пліт на шлях від пристані *A* до пристані *B*, якщо відомо, що моторний човен пропливає від пристані *B* до пристані *A* і назад за 3 год.

21.28.* У два однакові басейни одночасно почали наливати воду. До першого басейну надходить за годину на 30 м^3 більше води, ніж до другого. У деякий момент в обох басейнах разом виявилося стільки води, скільки становить об'єм кожного з них. Після цього через 2 год 40 хв наповнився перший басейн, а ще через 3 год 20 хв — другий. Скільки води надходило за годину до кожного басейну?

21.29.* Біля будинку ростуть липи і берези, причому загальна їх кількість не менша від 14. Якщо збільшити вдвічі кількість лип, а кількість беріз збільшити на 18, то беріз стане більше, ніж лип. Якщо ж збільшити вдвічі кількість беріз, не змінюючи кількості лип, то лип все одно буде більше, ніж беріз. Скільки лип і скільки беріз росте біля будинку?

21.30.** Два автогосподарства відправили кілька машин для перевезення вантажу. Кількість машин, відправлених з другого автогосподарства, менша від подвоєної кількості машин, відправлених з першого. Якби перше автогосподарство відправило на 2 машини більше, а друге — на дві менше, то машин з другого автогосподарства було б більше, ніж машин з першого. Скільки машин було відправлено з кожного автогосподарства, якщо разом було відправлено не більше ніж 18 машин?

21.31.* О 7 год ранку від першого причалу відпливли два човни. Спочатку вони пливли 8 км по озеру, а потім 5 км за течією річки до другого причалу. Перший човен приплив до місця призначення не пізніше 9 год 50 хв, а другий — не раніше

10 год 40 хв того самого дня. Чому дорівнює швидкість кожного човна в стоячій воді, якщо швидкість течії ріки дорівнює 2 км/год, а швидкість другого човна в стоячій воді становить 75 % від швидкості першого човна в стоячій воді?

21.32.* Два робітники виготовили по 60 однакових деталей, причому 30 деталей кожний з них зробив, працюючи з деякою продуктивністю, яка у другого робітника була на 20 % вище, ніж у першого. Потім перший робітник став виготовляти більше на 2 деталі, а другий — на 3 деталі за годину. Перший робітник витратив на виконання всього завдання не менше ніж 5 год 30 хв, а другий — не більше ніж 4 год 30 хв. Скільки деталей за годину виготовляв другий робітник під час виконання першої половини завдання?

21.33.* Токарю було доручено виготовити 90 деталей, а учню — 35. Перші 30 деталей токар робив з продуктивністю вдвічі більшою, ніж учень. Виготовляючи решту 60 деталей, він робив ще на 2 деталі за годину більше і закінчив свою роботу пізніше, ніж учень, не менше ніж на 1 год. Проте якби токар перші 30 деталей виготовляв з такою самою продуктивністю, що й решту 60, то він закінчив би роботу не раніше, ніж через 30 хв після учня. Скільки деталей за годину робив учень?

21.34.* Бригади робітників отримували зі складу одяг для роботи: по 2 комплекти на кожну людину. Кожна бригада отримала на 20 комплектів більше, ніж було бригад. Якби бригад було на 4 більше і кожній бригаді видавали б по 12 комплектів, то одягу на всіх не вистачило б. Скільки комплектів одягу було на складі?

21.35.* Солдатів, які прибули на парад, планували вишикувати так, щоб у кожному ряду стояло по 24 солдати. По прибутті виявилося, що не всі вони зможуть узяти участь у параді, тому їх вишикували так, що кількість рядів стала на 2 меншою, а кількість людей у ряду — на 26 більшою за нову кількість рядів. Скільки солдатів прибуло на парад, якщо відомо, що коли б усі вони взяли участь у параді, то їх можна було б вишикувати так, щоб кількість рядів дорівнювала кількості чоловік у ряду?

21.36.* Хімічний завод має цехи трьох типів. У кожному цеху першого, другого і третього типу працює відповідно 350, 80 і 60 робітників. Разом у цехах заводу працює 980 робітників. Знайдіть кількість цехів кожного типу.

§ 5. ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

22. Математичне моделювання

Мабуть, немає сьогодні такої галузі знань, де б не застосовувалися досягнення математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують математичний апарат.

У чому ж полягає секрет універсальності «математичного інструменту»?

«Ключ до розв'язання багатьох наукових задач — їх вдалий переклад мовою математики». Таку відповідь на поставлене запитання дав один із засновників і перший директор Інституту математики Академії наук України академік Д. О. Граве.

Справді, формулювання задач з різних галузей знань містять нематематичні поняття. Якщо математик бере участь у розв'язуванні такої задачі, то він насамперед прагне перекласти її своєю «рідною» математичною мовою, тобто мовою виразів, формул, рівнянь, нерівностей, функцій, графіків тощо. Результат такого перекладу називають **математичною моделлю**, а саму задачу — **прикладною задачею**.

Дмитро Олександрович Граве
(1863–1939)

Термін «модель» (від латинського *modulus* — зразок) ми вживаємо дуже часто: модель літака, модель атомного ядра, модель Сонячної системи, модель якогось процесу або явища тощо. Вивчаючи властивості моделі об'єкта, ми тим самим вивчаємо властивості самого об'єкта.

Науку, яка займається побудовою і вивченням математичних моделей, називають **математичним моделюванням**.

У таблиці наведено зразки прикладних задач і відповідних їм математичних моделей.

№	Прикладна задача	Математична модель
1	Один кілограм картоплі коштує 2 грн. Скільки картоплі можна купити за 14 грн.?	Чому дорівнює частка 14 : 2?
2	У магазині є 3 види чашок і 2 види тарілок. Скільки існує варіантів скласти набір з однієї чашки й однієї тарілки?	Чому дорівнює добуток $3 \cdot 2$?
3	На стоянці було кілька машин. Коли 5 машин поїхало, залишилося 2 машини. Скільки машин було на стоянці спочатку?	Знайдіть корінь рівняння $x - 5 = 2$
4	Із 156 жовтих, 234 білих і 390 червоних троянд склали букети. Яку найбільшу кількість букетів можна скласти, щоб у всіх букетах троянд кожного кольору було порівну і всі троянди було використано?	Знайдіть НСД (156; 234; 390)
5	Автомобіль витрачає 7,8 л бензину на 100 км шляху. Чи вистачить 40 л бензину, щоб доїхати від Києва до Одеси, якщо відстань між цими містами 490 км?	Порівняйте значення виразу $\frac{7{,}8 \cdot 490}{100}$ з числом 40

Мета розв'язування будь-якої задачі — отримати правильну відповідь. Тому складання математичної моделі — це тільки перший етап розв'язування прикладної задачі.

Насправді розв'язування прикладної задачі складається з трьох етапів:

1) побудова математичної моделі;

2) розв'язання математичної задачі;

3) результат, отриманий на другому етапі, аналізується, виходячи зі змісту прикладної задачі.

Перший етап ілюструють наведені вище приклади. Зазначимо, що успішна реалізація цього кроку потребує наявності певних знань із галузі, до якої належить дана прикладна задача.

Реалізація другого етапу пов'язана лише з математичною діяльністю: знаходження значень виразів, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, побудова графічних об'єктів тощо.

На третьому етапі отриманий результат потрібно записати мовою прикладної задачі. Пояснимо це, звернувшись до наведеної таблиці. Наприклад, відповіді до першої, другої, третьої задач треба записати так: можна купити 7 кг картоплі; покупку можна здійснити 6 способами; на стоянці було 7 машин. Далі відповідь слід проаналізувати на відповідність умові прикладної задачі. Наприклад, відповідь «1,5 учня» не може бути прийнятною для жодної прикладної задачі.

ПРИКЛАД Маса дерев'яної балки становить 120 кг, а маса залізної балки — 140 кг, причому залізна балка на 1 м коротша від дерев'яної. Яка довжина кожної балки, якщо маса 1 м залізної балки на 5 кг більша за масу 1 м дерев'яної?

Розв'язання. При розв'язуванні задачі виділимо три етапи.

I етап. Побудова математичної моделі

Нехай довжина дерев'яної балки дорівнює x м, тоді довжина залізної становить $(x - 1)$ м. Маса 1 м дерев'яної балки дорівнює $\frac{120}{x}$ кг, а маса 1 м залізної — $\frac{140}{x-1}$ кг, що на 5 кг більше за масу 1 м дерев'яної. Тоді $\frac{140}{x-1} - \frac{120}{x} = 5$. Отримане рівняння і є математичною моделлю даної прикладної задачі.

II етап. Розв'язування рівняння

Маємо:

$$\frac{140}{x-1} - \frac{120}{x} = 5;$$

$$\frac{28}{x-1} - \frac{24}{x} = 1;$$

$$\begin{cases} 28x - 24(x-1) = x^2 - x, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 24 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$x = 8 \text{ або } x = -3.$$

III етап. Аналіз результату, отриманого на II етапі, виходячи зі змісту прикладної задачі

Корінь −3 не задовольняє умову задачі, оскільки така величина, як довжина, не може виражатися від'ємним числом.

Отже, довжина дерев'яної балки дорівнює 8 м, а довжина залізної — 7 м.

Відповідь: 8 м, 7 м.

22.1.° Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) З одного місця в одному напрямку одночасно стартували по велотреку два велосипедисти. Один з них проїжджає коло велотреку за 1 хв, а другий — за 45 с. Через яку найменшу кількість хвилин після початку руху велосипедисти знову зустрінуться в місці старту?
2) Один робітник може виконати завдання за 30 год, а другий — за 45 год. За який час вони виконають це завдання, працюючи разом?
3) Маємо два водно-сольові розчини. Перший розчин містить 25 %, а другий — 40 % солі. Скільки кілограмів кожного розчину треба взяти, щоб одержати розчин масою 60 кг, який містить 35 % солі?
4) З металевого листа прямокутної форми виготовили відкриту коробку. Для цього в кутах листа вирізали квадрати зі стороною 4 см. Знайдіть довжину і ширину листа, якщо його периметр дорівнює 60 см, а об'єм коробки — 160 см^3.
5) У прямокутній кришці зі сторонами 30 см і 15 см потрібно зробити прямокутний отвір площею 100 см^2 так, щоб його краї були на однаковій відстані від країв кришки. На якій відстані від краю кришки має бути край отвору?

22.2.° Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) Одна швачка може виконати замовлення за 4 год, а друга — за 6 год. Чи вистачить їм 2 год 30 хв, щоб, працюючи разом, виконати замовлення?
2) Вкладник поклав до банку 2000 грн. на два різні рахунки. По першому з них банк виплачує 8 % річних, а по другому — 10 % річних. Через рік вкладник отримав 176 грн. відсоткових грошей. Скільки гривень він поклав на кожний рахунок?
3) З одного порту одночасно вийшли два теплоходи, один з яких рухався на південь, а другий — на захід. Через 2 год 30 хв відстань між ними була 125 км. З якою швидкістю рухався кожний теплохід, якщо швидкість першого теплохода була на 10 км/год більша за швидкість другого?

22.3.˙ Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) Під час збирання врожаю з кожної з двох ділянок зібрали по 300 ц пшениці. Площа першої ділянки на 5 га менша від площі другої. Скільки центнерів пшениці зібрали з 1 га кожної ділянки, якщо врожайність пшениці на 1 га на першій ділянці на 5 ц більша, ніж на другій?

2) З пунктів A і B одночасно назустріч один одному вирушили відповідно велосипедист і пішохід, які зустрілися через 1 год після початку руху. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо велосипедист прибув у пункт B на 2 год 40 хв раніше, ніж пішохід у пункт A, а відстань між цими пунктами становить 16 км.

3) Дві бригади вантажників, працюючи разом, можуть розвантажити товарний поїзд за 6 год. Перша бригада виконала $\frac{3}{5}$ усієї роботи, потім її змінила друга бригада, яка й закінчила розвантаження. Уся робота була виконана за 12 год. Скільки часу потрібно кожній бригаді для самостійного розвантаження поїзда?

4) Вартість доставки на будівництво однієї машини піску становить 250 грн., а машини гравію — 350 грн. За день планується 50 рейсів, причому транспортні витрати мають не перевищувати 14 000 грн. Скільки машин гравію може бути доставлено за день?

5) При послідовному з'єднанні двох провідників опір в електричному колі становитиме 150 Ом, а при паралельному — 36 Ом. Знайдіть опір кожного провідника.

6) По двох сторонах прямого кута в напрямку до його вершини рухаються два тіла. Перше тіло рухається зі швидкістю 12 м/хв, а друге — 16 м/хв. У певний момент часу відстань між тілами становила 100 м. Через 2 хв після цього відстань між тілами стала 60 м. На якій відстані від вершини прямого кута знаходилося кожне тіло у перший зафіксований момент часу?

7) Теплохід проходить шлях від пункту A до пункту B за 3 год, а повертається назад за 4 год. За який час долають шлях від пункту A до пункту B плоти?

8) Човен пройшов 34 км за течією річки і 39 км проти течії, витративши на це стільки часу, скільки йому потрібно, щоб пройти в стоячій воді 75 км. Знайдіть відношення швидкості човна в стоячій воді до швидкості течії.

9) З пунктів A і B назустріч один одному одночасно виходять два туристи. Після зустрічі перший прибуває в пункт B через 4 год, а другий у пункт A — через 9 год. Знайдіть швидкість кожного туриста, якщо швидкість першого на 2 км/год більша за швидкість другого.

10) Два вершники виїжджають одночасно з пунктів A і B назустріч один одному і перший прибуває в пункт B через 27 хв, а другий — у пункт A через 12 хв після зустрічі. За скільки хвилин кожний вершник проїхав шлях між пунктами A і B?

11) З пункту B виїхав мотоцикліст. Водночас з пункту A в тому самому напрямку виїхав автомобіль, який наздогнав мотоцикліста через 6 год після виїзду. Якби вони їхали з пунктів A і B назустріч один одному, то зустрілися б через 2 год після виїзду. Скільки часу потрібно кожному з них для подолання відстані між пунктами A і B?

12) Три труби, працюючи одночасно, наповнюють водою басейн об'ємом 540 м^3 за 12 год. Якщо одночасно всі три труби працюють тільки перші 4 год, а потім першу трубу вимикають, то загальний час наповнення басейну збільшується на 4 год. Перша і третя труби наповнюють басейн за 20 год. Скільки води надходить у басейн через третю трубу за 1 год?

13) Дві бригади трактористів одночасно почали орати дві ділянки землі, причому ділянка другої бригади вдвічі більша за ділянку першої. У другій бригаді було на 10 трактористів більше, ніж у першій. Коли перша бригада ще працювала, друга вже зорала свою ділянку. Яка найбільша кількість трактористів могла бути в першій бригаді, якщо всі трактористи працювали з однаковою продуктивністю?

14) У двох сплавах маси міді й цинку відносяться як 5 : 2 і 3 : 4. Скільки потрібно взяти кілограмів першого сплаву і скільки другого, щоб, сплавивши їх, отримати 28 кг нового сплаву з рівним вмістом міді й цинку?

15) Є два сплави міді й цинку. У першому сплаві міді у 2 рази більше, ніж цинку, а в другому міді у 5 разів менше, ніж цинку. У скільки разів більше потрібно взяти другого сплаву, ніж першого, щоб отримати новий сплав, у якому цинку було б у 2 рази більше, ніж міді?

22.4.° Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) З міста A до міста B одночасно вирушили автобус і автомобіль. Через 1 год 30 хв після початку руху автомобіль випереджав

автобус на 30 км. Коли автомобіль прибув у місто B, автобус знаходився на відстані 80 км від цього міста. З якою швидкістю рухалися автобус і автомобіль, якщо відстань між містами A і B становить 300 км?

2) Модуль рівнодіючої двох сил, направлених під прямим кутом, дорівнює 25 Н. Якщо модуль однієї сили збільшити на 8 Н, а другої — зменшити на 4 Н, то модуль їх рівнодіючої не зміниться. Знайдіть модулі цих сил.

3) Під час змагань зі стрільби кожний учасник робить 25 пострілів. За кожний влучний постріл він отримує 4 очки, а за кожний промах знімається 2 очки. Скільки промахів може зробити стрілець, щоб набрати не менше 60 очок?

4) При послідовному з'єднанні трьох провідників одного виду і одного провідника другого виду опір в електричному колі становитиме 18 Ом. Якщо паралельно сполучити по одному провіднику першого і другого видів, то при напрузі 24 В сила струму в електричному колі становитиме 10 А. Знайдіть опір провідника кожного виду.

5) Два автомобілі виїжджають одночасно з двох міст назустріч один одному і після зустрічі продовжують рух. Після цього перший прибуває в пункт призначення через 25 год, а другий — через 36 год. Перший автомобіль рухається зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж другий. Яка швидкість кожного автомобіля?

6) Одночасно почали наповнювати водою два басейни. Воду подавали за допомогою насосів однакової потужності. При цьому кількість насосів, які подавали воду до першого басейну, була на 5 меншою від кількості насосів, які подавали воду до другого басейну. Місткість першого басейну вдвічі менша від місткості другого. Коли другий басейн наповнився, наповнення першого ще не закінчилося. Яка найбільша кількість насосів могла подавати воду до першого басейну?

7) Є два зливки сплавів золота і міді. У першому зливку відношення мас золота і міді дорівнює 1 : 2, а в другому 2 : 3. Якщо сплавити $\frac{1}{3}$ першого зливка з $\frac{5}{6}$ другого, то в отриманому зливку виявиться стільки золота, скільки було міді в першому зливку, а якщо сплавити $\frac{2}{3}$ першого зливка і половину другого, то в отриманому зливку виявиться міді на 1 кг більше, ніж було золота в другому зливку. Скільки золота в кожному зливку?

22.5.•• Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) До резервуара постачають воду по п'яти трубах. Перша труба наповнює резервуар за 40 хв; друга, третя і четверта, працюючи разом, — за 15 хв; друга, третя і п'ята — за 20 хв, і, нарешті, четверта і п'ята — за 30 хв. За який час наповнять резервуар усі п'ять труб, працюючи разом?
2) Один турист вийшов з пункту A о 6 год, а другий — назустріч йому з пункту B о 7 год. Зустрілися вони о 8 год і, не зупиняючись, продовжили рух. Скільки часу витратив кожний з них на весь шлях, якщо перший прийшов у пункт B на 28 хв пізніше, ніж другий прийшов у пункт A?
3) Дротяною сіткою завдовжки 600 м потрібно огородити ділянку землі прямокутної форми. При яких розмірах ділянки її площа буде найбільшою?
4) З пунктів A і B (рис. 22.1), відстань між якими дорівнює 13 км, одночасно вирушили у вказаних напрямках два туристи. Швидкість туриста, який вийшов з пункту A, дорівнює 4 км/год, а туриста, який вийшов з пункту B, — 6 км/год. Через який час після початку руху відстань між туристами буде найменшою?

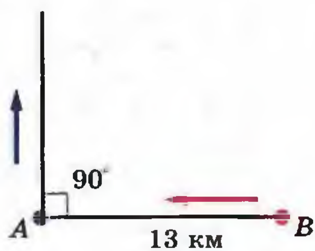


Рис. 22.1

5) З пунктів A і B назустріч один одному одночасно вирушили два туристи. При зустрічі з'ясувалося, що турист, який вийшов з пункту A, пройшов на 6 км більше, ніж другий. Продовживши рух з такими самими швидкостями, перший турист прийшов у пункт B через 2 год після зустрічі, а другий турист — у пункт A через 4,5 год. Яка відстань між пунктами A і B?
6) (*Задача Л. Ейлера.*) Один купець придбав коней і биків на суму 1770 талерів. За кожного коня він заплатив по 31 талеру, а за кожного бика — по 21 талеру. Скільки коней і скільки биків було куплено?

22.6.•• Розв'яжіть задачу, побудувавши її математичну модель.

1) Переріз тунелю має форму прямокутника, завершеного згори півколом (рис. 22.2). Периметр перерізу дорівнює


Рис. 22.2

20 м. При якому радіусі півкола площа перерізу тунелю буде найбільшою? (Число π округліть до одиниць).

2) Купили 40 птахів за 40 монет. За кожних трьох горобців заплатили 1 монету, за кожних двох горлиць — 1 монету, а за кожного голуба — 2 монети. Скільки купили птахів кожного виду?

23. Відсоткові розрахунки

Починаючи з п'ятого класу, вам доводилося розв'язувати багато прикладних задач, задач на відсотки (проценти).

Ви знайомі з такими типами задач на відсотки:

- знаходження відсотка від числа;
- знаходження числа за його відсотком;
- знаходження відсоткового відношення двох чисел.

Ви вмієте конструювати математичні моделі цих задач за допомогою таких виразів:

1) знаходження p % від числа a: $\frac{a \cdot p}{100}$;

2) знаходження числа, p % якого дорівнює a: $\frac{a \cdot 100}{p}$;

3) знаходження відсоткового відношення числа a до числа b: $\frac{a}{b} \cdot 100\,\%$.

Розглянемо прикладну задачу, яку часто доводиться розв'язувати банківським працівникам, а також тим, хто зберігає гроші в банку під відсотки.

Задача. Нехай вкладник поклав у банк 100 000 грн. під 10 % річних. Яка сума буде на його рахунку через 7 років за умови, що вкладник протягом цього терміну не знімає гроші з рахунку?

Розв'язання. Нехай a_0 — початковий капітал вкладника, тобто
$$a_0 = 100\,000 \text{ грн.}$$

Позначимо через a_1, a_2, ..., a_7 кількість грошей на рахунку відповідно в кінці першого, другого, ..., сьомого років.

У кінці першого року початковий капітал a_0 зріс на 10 %. Отже, число a_1 становить 110 % від початкового капіталу a_0. Тоді
$$a_1 = a_0 \cdot 1{,}1 = 100\,000 \cdot 1{,}1 = 110\,000 \text{ (грн.)}.$$

У кінці другого року число a_1, у свою чергу, збільшилося на 10 %. Отже, число a_2 становить 110 % від числа a_1. Тоді
$$a_2 = a_1 \cdot 1{,}1 = a_0 \cdot 1{,}1^2 = 100\,000 \cdot 1{,}1^2 = 121\,000 \text{ (грн.)}.$$

У кінці третього року число a_2 збільшилося на 10 %. Отже, число a_3 становить 110 % від числа a_2. Тоді

$$a_3 = a_2 \cdot 1{,}1 = a_0 \cdot 1{,}1^3 = 100\,000 \cdot 1{,}1^3 = 133\,100 \text{ (грн.)}.$$

Тепер стає зрозумілим, що

$$a_7 = a_0 \cdot 1{,}1^7 = 100\,000 \cdot 1{,}1^7 = 194\,871{,}71 \text{ (грн.)}.$$

Відповідь: 194 871,71 грн.

Аналогічно розв'язують цю задачу в загальному вигляді, коли початковий капітал, який дорівнює a_0, поклали в банк під p % річних.

Справді, у кінці першого року початковий капітал збільшиться на $\frac{a_0 \cdot p}{100}$ і дорівнюватиме

$$a_1 = a_0 + \frac{a_0 \cdot p}{100} = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

тобто збільшиться в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ разів.

До речі, у розглянутому вище прикладі це число становило $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$.

Зрозуміло, що в кінці другого року сума знову зросте в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ разів і дорівнюватиме

$$a_2 = a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Отже, у кінці n-го року матимемо:

$$\boxed{a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Отриману формулу називають **формулою складних відсотків**.

23.1.° Ціну на товар було підвищено на 25 %. На скільки відсотків тепер потрібно її знизити, щоб отримати початкову ціну товару?

23.2.° Вкладник поклав до банку 5000 грн. під 8 % річних. Скільки грошей буде на його рахунку через три роки?

23.3.° Чотири роки тому завод виготовляв 10 000 одиниць певного виробу за рік. Завдяки модернізації виробництва і підвищенню продуктивності праці досягли щорічного приросту обсягів виробництва на 20 %. Скільки одиниць указаного виробу буде виготовлено цього року?

23.4.° Після двох послідовних знижень ціни на 10 % канцелярський стіл став коштувати 1944 грн. Знайдіть початкову ціну стола.

23.5.° Після двох послідовних підвищень ціни на 25 % люстра стала коштувати 937 грн. 50 к. Знайдіть початкову ціну люстри.

23.6.° Населення міста за два роки збільшилося із 40 000 мешканців до 44 100. Знайдіть середній щорічний відсоток приросту населення в цьому місті.

23.7.° Унаслідок двох послідовних знижень ціни на одне й те ж число відсотків ціна крісла знизилася з 800 грн. до 578 грн. На скільки відсотків відбувалося кожного разу зниження ціни?

23.8.° Було 300 г 6-відсоткового розчину солі. Через деякий час 50 г води випарували. Яким став відсотковий вміст солі в розчині?

23.9.° До сплаву масою 600 г, що містить 12 % срібла, додали 60 г срібла. Яким став відсотковий вміст срібла в новому сплаві?

23.10.° Морська вода містить 5 % солі. Скільки прісної води треба додати до 40 кг морської води, щоб концентрація солі становила 2 %?

23.11.° Скільки кілограмів води слід випарити з 0,5 т целюлозної маси, яка містить 85 % води, щоб отримати масу з вмістом 75 % води?

23.12.° Сплав міді і цинку масою 36 кг містить 45 % міді. Яку масу міді потрібно додати до цього сплаву, щоб отриманий новий сплав містив 60 % міді?

23.13.° У саду росли яблуні і вишні, причому яблуні становили 42 % всіх дерев. Вишень було на 48 дерев більше, ніж яблунь. Скільки дерев росло в саду?

23.14.° За два дні було прокладено кабель. За перший день проклали 56 % кабелю, а за другий — на 132 м менше, ніж за перший. Скільки всього метрів кабелю було прокладено за два дні?

23.15.° За перший день хлопчик прочитав 25 % усієї книжки, за другий — 72 % від кількості сторінок, що залишилися, а за третій — решту 84 сторінки. Скільки сторінок у книжці?

23.16.° У магазин завезли три види морозива: шоколадне, суничне і ванільне. Шоколадне становило 45 % всього морозива, суничне — 40 % від кількості шоколадного, а ванільне — решту 111 кг. Скільки всього кілограмів морозива завезли у магазин?

23.17.* (*Задача Безу*[1].) Дехто купив коня і через деякий час продав його за 24 пістолі. При продажу він втратив стільки відсотків, скільки коштував йому кінь. Питання: за яку суму він купив коня?

23.18.* Фірма купує у виробника товар за оптовою ціною, а продає вроздріб за 11 грн., при цьому прибуток від продажу у відсотках дорівнює оптовій ціні товару у гривнях. Яка оптова ціна товару?

23.19.* На старому верстаті робітник виготовляв одну деталь за 20 хв, а на новому — за 8 хв. На скільки відсотків зросла продуктивність праці робітника?

23.20.* Упровадження нових технологій дозволило зменшити норму часу на виготовлення однієї деталі з 12 хв до 10 хв. На скільки відсотків буде виконуватися при цьому план, якщо норма праці не буде змінена?

23.21.* Один робітник може викопати траншею за 6 год, а другий — за 4 год. Якщо ж вони працюватимуть разом, то продуктивність праці кожного з них підвищиться на 20 %. За який час вони вириють траншею працюючи разом?

23.22.* Один муляр може скласти цегляну стіну за 15 год, а другий — за 10 год. Якщо ж вони працюватимуть разом, то продуктивність праці кожного з них зросте на одну й ту ж кількість відсотків і вони складуть стіну за 4 год. На скільки відсотків зростає продуктивність праці кожного муляра при їх спільній роботі?

23.23.* Змішали 30-відсотковий розчин соляної кислоти з 10-відсотковим розчином і отримали 800 г 15-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину взяли для цього?

23.24.* Два розчини, перший з яких містить 0,8 кг, а другий 0,6 кг безводної сірчаної кислоти, з'єднали разом і отримали 10 кг нового розчину сірчаної кислоти. Обчисліть масу першого і другого розчинів, якщо відомо, що безводної сірчаної кислоти містилось у першому розчині на 10 % більше, ніж у другому.

23.25.* У першому бідоні є молоко, у якому масова частка жиру становить 2 %, а в другому — молоко з масовою часткою жиру 5 %. Скільки треба взяти молока з кожного бідона, щоб отримати 18 л молока, масова частка жиру в якому дорівнює 3 %?

---

[1] Безу Етьєн (1730—1783) — французький математик, основні роботи якого стосуються вищої алгебри. Викладав математику в училищі гардемаринів, Королівському артилерійському корпусі. Автор шеститомної праці «Курс математики».

23.26.° Костюм коштував 600 грн. Після того як ціну було знижено двічі, він став коштувати 432 грн., причому відсоток зниження вдруге був у 2 рази більшим, ніж першого разу. На скільки відсотків кожного разу знижувалась ціна?

23.27.° Певний товар коштував 200 грн. Спочатку його ціну підвищили на кілька відсотків, а потім знизили на стільки ж відсотків, після чого вартість його стала 192 грн. На скільки відсотків кожного разу відбувалася зміна ціни товару?

23.28.° У банк поклали 1200 грн. Через рік вкладник зняв 240 грн., а ще через рік на цьому рахунку виявилося 1071 грн. Скільки відсотків річних нараховує банк?

23.29.° Банк через рік нарахував у вигляді відсотків 60 грн., а вкладник поклав у банк ще 240 грн. Ще через рік вкладник отримав 2369 грн. Скільки грошей спочатку було покладено в банк?

23.30.° Вкладник поклав у банк 4000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було збільшено на 4 %. На кінець другого року на рахунку стало 4664 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

23.31.° Вкладник поклав у банк 10 000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було зменшено на 2 %. На кінець другого року на рахунку стало 11 880 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

23.32.° До сплаву міді і цинку, який містив міді на 12 кг більше ніж цинку, додали 6 кг міді. Внаслідок цього відсотковий вміст цинку в сплаві знизився на 5 %. Скільки цинку і скільки міді містив сплав спочатку?

23.33.° До розчину, який містить 40 г солі, додали 200 г води, після чого його концентрація зменшилась на 10 %. Скільки води містив розчин і якою була його концентрація?

23.34.° До сплаву магнію й алюмінію, який містив 12 кг алюмінію, додали 5 кг магнію, після чого відсотковий вміст магнію у сплаві збільшився на 20 %. Скільки кілограмів магнію було в сплаві спочатку?

23.35.° Сплавили чавун двох сортів з різним відсотковим вмістом хрому. Якщо чавуну одного сорту взяти в 5 разів більше, ніж другого, то відсотковий вміст хрому в сплаві вдвічі перевищить відсотковий вміст хрому в меншій з частин, які сплавляють. Якщо ж взяти однакову кількість чавуну обох сортів, то сплав міститиме 8 % хрому. Визначте відсотковий вміст хрому в чавуні кожного сорту.

23.36.° Для приготування оцту певної міцності в посудину, яка містила 12 л оцтової есенції, додали 20 л води. В іншій посудині містилося 13 л більш міцного оцту: на 9 л оцтової есенції приходилося тільки 4 л води. Скільки літрів оцту слід перелити з першої посудини в другу, щоб зрівняти в другій посудині вміст оцтової есенції та води?

23.37.° У цистерні знаходилася концентрована сірчана кислота, яка містила 2 т води. Після того, як цю кислоту змішали з 4 т води, концентрація її знизилась на 15 %. Скільки кислоти було в цистерні спочатку?

23.38.° Щоб отримати соляну кислоту, 2 кг хлористого водню розчинили у певному об'ємі води. Потім, щоб підвищити концентрацію отриманої кислоти на 25 %, додали ще 9 кг хлористого водню. Скільки соляної кислоти було отримано?

23.39.°° У посудині було 12 кг кислоти. Частину кислоти відлили і долили до попереднього рівня водою. Потім знову відлили стільки ж, як і першого разу, і долили водою до попереднього рівня. Скільки літрів рідини відливали щоразу, якщо в результаті отримали 25-відсотковий розчин кислоти?

23.40.°° З банки, наповненої 12-відсотковим розчином солі, відлили 1 л і долили банку водою до попереднього рівня, потім відлили ще 1 л і знову долили водою. Виявилося, що в банці 3-відсотковий розчин солі. Яка місткість банки?

24 Метод математичної індукції

Вивчаючи навколишній світ, нам часто доводиться на підставі результатів спостережень і дослідів робити висновки.

Загальні висновки, отримані на підставі окремих випадків, називають **індуктивними**, а сам метод таких міркувань — **індуктивним методом** або **індукцією** (від лат. *inductio* – наведення).

Наприклад, задовго до відкриття законів руху Землі люди зробили висновок, що Сонце вранці встає на сході, а ввечері зникає за обрієм на заході. Цей висновок є індуктивним: адже він базувався лише на спостереженнях.

Звісно, за допомогою індукції не завжди можна отримати правильні висновки. Так, якщо у вашій і сусідній школах серед учителів початкових класів немає чоловіків, то це не означає, що всі вчителі початкових класів — жінки.

Незважаючи на необхідність ставитися до індуктивних висновків з певним ступенем недовіри, індуктивний метод знаходить широке застосування в математиці.

Розглянемо два приклади.

- Будемо спостерігати, як «поводяться» суми n перших непарних натуральних чисел. Маємо:

$S_1 = 1 = 1;$
$S_2 = 1 + 3 = 4;$
$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9;$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16;$
$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$

Числа 1, 4, 9, 16, 25 є квадратами послідовних натуральних чисел.

Тепер можна зробити таке припущення: для будь-якого натурального n

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \qquad (1)$$

- Розглянемо значення многочлена $f(n) = n^2 - n + 41$ при значеннях n, які дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5. Маємо:

$f(1) = 41$ — просте число;
$f(2) = 43$ — просте число;
$f(3) = 47$ — просте число;
$f(4) = 53$ — просте число;
$f(5) = 61$ — просте число.

Припущення: для будь-якого натурального n значення виразу $f(n)$ є простим числом.

Два наведених припущення є лише гіпотезами, які належить або довести, або спростувати.

Спростувати гіпотезу можна контрприкладом. Для другого припущення такий контрприклад легко знайти. Маємо: $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ — складене число.

Спроба знайти контрприклад для першого індуктивного висновку може привести до таких рівностей:

$S_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2;$
$S_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2;$
$S_8 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2.$

Отримані рівності лише підкріплюють упевненість у тому, що висунута гіпотеза є правильною.

Зрозуміло, що приєднання до суми чергового непарного доданка не призведе до доведення гіпотези: скільки б сум ми не обчислили, неможливо гарантувати того, що серед нескінченної кількості сум, що залишаються, не трапиться така, для якої рівність (1) не виконується.

Щоб довести справедливість висловленої гіпотези, потрібно провести деякі загальні міркування.

Нехай рівність (1) є справедливою для k доданків, тобто

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Розглянемо суму, яка містить $k + 1$ доданок:

$$S_{k+1} = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1)}_{S_k} + (2k+1) = S_k + (2k+1).$$

З урахуванням припущення маємо: $S_{k+1} = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$.

Наведені міркування гарантують, що *коли рівність* (1) *є правильною для $n = k$, то вона залишається правильною і для $n = k + 1$.*

Тепер можна стверджувати, що рівність (1) доведено для будь-якого натурального значення n. Пояснимо це.

Ми показали, що рівність (1) є правильною для $n = 1$. Отже, вона є правильною для $n = 1 + 1 = 2$, а тоді вона є правильною при $n = 2 + 1 = 3$, при $n = 3 + 1 = 4$, при $n = 4 + 1 = 5$ і взагалі, цей ланцюжок можна протягнути до будь-якого натурального значення n. Отже, рівність (1) є правильною при всіх натуральних значеннях n.

Описаний метод доведення називають **методом математичної індукції**. У загальному вигляді його можна описати так.

Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого натурального значення n.

Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин (теорем):

1) доводять (перевіряють) справедливість твердження для $n = 1$;

2) роблять припущення, що твердження є правильним для $n = k$, і на підставі цього доводять, що воно є правильним для $n = k + 1$.

Теорему, яку доводять у першій частині, називають **базою індукції**.

Наприклад, при доведенні рівності (1) базою індукції було твердження, що рівність (1) виконується при $n = 1$.

Теорему, яку доводять у другій частині методу, називають **індуктивним переходом**.

Кожний з цих двох етапів важливий. Вище ми переконалися, що твердження може бути правильним у цілій низці окремих випадків, але неправильним узагалі. Це переконує нас в тому, наскільки важливим є довести теорему «індуктивний перехід». Але було б помилково вважати, що доведення теореми «база індукції» є менш суттєвим.

Покажемо, як, користуючись лише теоремою «індуктивний перехід», можна, наприклад, «довести», що при будь-якому натуральному n число $2n + 1$ є парним.

Нехай це твердження є правильним при $n = k$, тобто $2k + 1$ є парним числом. Доведемо, що тоді воно буде правильним для $n = k + 1$, тобто число $2(k + 1) + 1$ також буде парним.

Маємо: $2(k + 1) + 1 = (2k + 1) + 2$.

За припущенням число $2k + 1$ є парним. Сума двох парних чисел — число парне. Отже, число $(2k + 1) + 2$ також є парним.

Ми коректно довели теорему «індуктивний перехід». Але при цьому не виявили, що теорема «база індукції» є неправильною (при $n = 1$ число $2n + 1$ є непарним). У цьому й полягає причина того, що нам удалося «довести» настільки безглузде твердження.

ПРИКЛАД 1 Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)},\text{ де } n\in\mathbb{N}.$$

Розв'язання. Для $n = 1$: $S_1=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$.

Для $n = 2$: $S_2=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}=\frac{4}{5}$.

Для $n = 3$: $S_3=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}=\frac{9}{7}$.

Для $n = 4$: $S_4=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\frac{31}{7\cdot 9}=\frac{16}{9}$.

Бачимо, що тепер можна зробити таке припущення:

$$S_n=\frac{n^2}{2n+1}. \qquad (2)$$

Доведемо цю гіпотезу методом математичної індукції.

Вище ми перевірили справедливість формули (2) для $n = 1$, тим самим ми довели теорему «база індукції».

Тепер доведемо теорему «індуктивний перехід».

Нехай формула (2) є правильною при $n = k$, тобто $S_k=\frac{k^2}{2k+1}$. Маємо:

$$S_{k+1}=\underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2k^2-1}{(2k-1)(2k+1)}}_{S_k}+\frac{2(k+1)^2-1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$= S_k + \frac{2(k+1)^2 - 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k^2}{2k+1} + \frac{2k^2+4k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^3+5k^2+4k+1}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{2k^3+2k^2+3k^2+3k+k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2(k+1)+3k(k+1)+k+1}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+3k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)^2}{2k+3}.$$

Отже, припустивши, що формула (2) є правильною при $n = k$, ми довели, що вона є правильною і при $n = k + 1$. А з урахуванням теореми «база індукції» можна зробити висновок, що гіпотеза є правильною.

Задача 1. Доведіть, що $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, де $n \in \mathbb{N}$.

Користуючись методом математичної індукції, доведіть цю рівність самостійно.

ПРИКЛАД 2 Виведіть формулу для обчислення суми $1^3 + 2^3 + 3^3 + {} + \ldots + n^3$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Для $n = 1$: $S_1 = 1^3 = 1$.

Для $n = 2$: $S_2 = 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$.

Для $n = 3$: $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$.

Для $n = 4$: $S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$.

Тепер можна зробити таке припущення:

$$S_n = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Ураховуючи ключову задачу 1, гіпотезу можна записати в такій формі:

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

Справедливість цієї формули при $n = 1$ було встановлено вище.

Нехай формула (3) є правильною при $n = k$, тобто

$$S_k = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Маємо:

$$S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Методом математичної індукції формулу (3) доведено.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ значення виразу $5^n - 3^n + 2n$ кратне 4.

Розв'язання. При $n = 1$ отримуємо $5^1 - 3^1 + 2 \cdot 1 = 4 \vdots 4$, тобто теорему «база індукції» доведено.

Нехай при $n = k$ є правильним твердження

$$(5^k - 3^k + 2k) \vdots 4.$$

Доведемо, що тоді це твердження є правильним при $n = k + 1$, тобто

$$(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2(k + 1)) \vdots 4.$$

Для доведення достатньо показати, що різниця $(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2k + 2) - (5^k - 3^k + 2k)$ кратна 4.

Перепишемо цю різницю так:

$$5^k(5 - 1) - 3^k(3 - 1) + 2 = 4 \cdot 5^k - 2(3^k - 1).$$

Оскільки $(3^k - 1) \vdots 2$, то значення отриманого виразу кратне 4.

Отже, твердження, що доводиться, є правильним, у чому ми переконалися за допомогою методу математичної індукції.

Задача 2. Доведіть нерівність (нерівність Бернуллі[1]):

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx, \text{ де } n \in \mathbb{N},\ x > -1.$$

Розв'язання. При $n = 1$ маємо правильну нерівність $1 + x \geqslant 1 + x$.

Нехай $(1 + x)^k \geqslant 1 + kx$, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки $1 + x > 0$, то $(1 + x)^{k+1} \geqslant (1 + kx)(1 + x)$.

Маємо: $(1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geqslant 1 + (k + 1)x$. Звідси $(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)x$.

Отже, теореми «база індукції» і «індуктивний перехід» доведено.

Таким чином, нерівність, що доводиться, є правильною.

Методом математичної індукції можна скористатися і в тих випадках, коли потрібно довести твердження, правильне для всіх натуральних n таких, що $n \geqslant n_0$, де $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$. У цьому разі теорему «база індукції» доводять (перевіряють) для $n = n_0$.

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і $n > 4$ виконується нерівність $2^n > n^2$.

Розв'язання. При $n = 5$ маємо правильну нерівність $2^5 > 5^2$.

Нехай $2^k > k^2$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 4$. Маємо:

$2 \cdot 2^k > 2k^2$;

$2^{k+1} > 2k^2$.

Легко показати (переконайтеся в цьому самостійно), що при $k > 1 + \sqrt{2}$, а тим більше при $k > 4$, виконується нерівність $2k^2 > (k + 1)^2$. Звідси

$$2^{k+1} > (k + 1)^2.$$

---

[1] Йоганн Бернуллі (1667–1748) — швейцарський математик.

Ми показали, що при $n = 5$ виконується теорема «база індукції», і довели теорему «індуктивний перехід». Отже, нерівність, що розглядається, є правильною при будь-яких натуральних n таких, що $n > 4$.

Широкі можливості методу математичної індукції демонструє така задача.

ПРИКЛАД 5 Площину поділено на області кількома прямими. Дві області називають сусідніми, якщо їх межею є або відрізок, або промінь, або пряма. Доведіть, що ці області можна розфарбувати в два кольори так, щоб сусідні області мали різний колір.

Розв'язання. Нехай на площині проведено n прямих. Індуктивні міркування проводитимемо за кількістю прямих.

Очевидно, що при $n = 1$ твердження задачі є правильним (рис. 24.1).

Припустимо, що твердження є правильним при $n = k$, тобто області, утворені k прямими, можна розфарбувати належним чином.

Рис. 24.1

Рис. 24.2

Нехай на площині проведено $k + 1$ пряму. Подумки вилучимо одну з цих прямих (на рисунку 24.2 це червона пряма). Тоді на площині залишиться k прямих, і за припущенням вони задають області, які можна розфарбувати потрібним чином (рис. 24.3).

Кольори всіх областей, які лежать у нижній півплощині відносно червоної прямої, поміняємо на протилежні, а кольори областей, які лежать у верхній півплощині, залишимо без змін (рис. 24.4). Отриманий рисунок задовольняє умову задачі.

Рис. 24.3

Рис. 24.4

24.1.° Числа 24, 44, 64, 84 кратні 4. Чи можна звідси зробити висновок, що число, яке закінчується цифрою 4, кратне 4?

24.2.° Розгляньте значення многочлена $f(n) = n^2 + n + 17$ при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$. Зробіть припущення. Установіть, чи є висунута гіпотеза правильною.

24.3.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$;

3) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \ldots + n(2n+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$;

4) $\frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)}{n+2}$;

5) $\left(1 - \frac{4}{1}\right)\left(1 - \frac{4}{9}\right)\left(1 - \frac{4}{25}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}$.

24.4.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

2) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

3) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

4) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

24.5.° Доведіть, що при будь-якому натуральному $n \geqslant 2$ виконується рівність

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

24.6.° Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

24.7.° Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$-1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \ldots + (-1)^n \cdot (2n-1), \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

24.8.° Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

24.9.° Доведіть нерівність $2^n > 2n + 1$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

24.10.° Доведіть нерівність $3^n > 4n + 1$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

24.11.° Доведіть нерівність $4^n > 3n^2 + 1$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

24.12.• Доведіть нерівність

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n},$$

де y_1, y_2, ..., y_n — додатні числа.

24.13.• Доведіть нерівність

$$|a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|.$$

24.14.•• Доведіть, що для будь-якого натурального n:

1) $(3^{2n+1}+2^{n+2})\ \vdots\ 7$;
2) $(6^{2n}+19^n-2^{n+1})\ \vdots\ 17$;
3) $(4^n+15n-1)\ \vdots\ 9$;
4) $(5^n-3^n+2n)\ \vdots\ 4$.

24.15.•• Доведіть, що для будь-якого натурального n:

1) $(7^{n+1}+8^{2n-1})\ \vdots\ 19$;
2) $(7\cdot24^n-5\cdot13^n-2^{n+1})\ \vdots\ 11$;
3) $(3^{2n+2}-8n-9)\ \vdots\ 64$.

24.16.•• Доведіть, що коли $a\geqslant0$, $b\geqslant0$, $n\in\mathbb{N}$, то $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leqslant\frac{a^n+b^n}{2}$.

24.17.•• Доведіть, що $\frac{a^{n+1}}{b^n}\geqslant(n+1)a-nb$, де $a>0$, $b>0$, $n\in\mathbb{N}$.

24.18.•• Доведіть нерівність $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{ радикалів}}<2$.

24.19.•• Доведіть нерівність $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}}_{n\text{ радикалів}}<3$.

24.20.•• (4.21) Доведіть нерівність

$$\frac{1}{\sqrt1}+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt3}+\ldots+\frac{1}{\sqrt n}>2\sqrt{n+1}-2,\text{ де } n\in\mathbb{N}.$$

24.21.•• (4.20) Доведіть нерівність $\frac{1}{\sqrt1}+\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt3}+\ldots+\frac{1}{\sqrt n}<2\sqrt n$, де $n\in\mathbb{N}$.

24.22.•• Доведіть нерівність[1] $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$, де $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant2$.

24.23.•• Доведіть нерівність[2] $\frac12\cdot\frac34\cdot\frac56\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, де $n\in\mathbb{N}$.

---

[1] У п. 2 ми довели більш слабку нерівність (див. приклад 7).
[2] У п. 2 ми довели більш слабку нерівність (див. задачу 2.66).

24.24.** Доведіть, що розклад на прості множники числа

$$a_n = (n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot 2n$$

містить рівно n множників, кожний з яких дорівнює 2.

24.25.** Доведіть, що кількість усіх підмножин даної n-елементної множини дорівнює 2^n.

24.26.* Доведіть, що для будь-якого натурального n, $n \geq 4$, існує опуклий n-кутник, який має рівно три гострі кути.

24.27.* На площині проведено n прямих, жодні дві з яких не паралельні і жодні три не проходять через одну точку. На скільки частин розбивають площину ці прямі?

24.28.* У шаховому турнірі взяли участь n шахістів. Кожний зустрівся з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилася внічию. Доведіть, що за результатами турніру всіх шахістів можна пронумерувати в такому порядку, щоб кожний попередній був переможцем наступного.

Різні схеми застосування методу математичної індукції

ПРИКЛАД 1 Знайдіть усі натуральні значення n, при яких $(1 + 2^n + 4^n) \vdots 7$.

Розв'язання. Введемо позначення $a_n = 1 + 2^n + 4^n$. У пошуках гіпотези природно знайти значення a_n для кількох значень n.

Маємо:

при $n = 1$: $a_n = 7 \vdots 7$;

при $n = 2$: $a_n = 21 \vdots 7$;

при $n = 3$: $a_n = 73 \not\vdots 7$;

при $n = 4$: $a_n = 273 \vdots 7$;

при $n = 5$: $a_n = 1057 \vdots 7$;

при $n = 6$: $a_n = 4161 \not\vdots 7$.

Тепер можна зробити таке припущення:

$a_n \vdots 7$ при $n = 3k - 2$ і $n = 3k - 1$, $k \in \mathbb{N}$;

$a_n \not\vdots 7$ при $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$.

Методом математичної індукції нескладно довести такі три твердження:

$1 + 2^{3k-2} + 4^{3k-2} \vdots 7$, $k \in \mathbb{N}$;

$1 + 2^{3k-1} + 4^{3k-1} \vdots 7$, $k \in \mathbb{N}$;

$1 + 2^{3k} + 4^{3k} \not\vdots 7$, $k \in \mathbb{N}$.

Проте для розв'язування цієї задачі можна застосувати й іншу схему індуктивних міркувань.

Метод математичної індукції, який розглянуто в п. 24, образно можна порівняти з рухом сходами: якщо ви стали на першу сходинку і впевнені, що, ставши на k-ту сходинку, зможете перейти на $(k + 1)$-шу сходинку, то ви зможете потрапити на будь-яку сходинку.

Але досягти будь-якої сходинки можна й іншим способом. Наприклад, якщо ви стали на першу сходинку, а потім рухаєтеся з кроком 2, тобто переступаючи через сходинку, то ви побуваєте на всіх сходинках з непарними номерами. Зрозуміло, що коли почати рух з другої сходинки, то ви таким чином пройдете всі сходинки з парними номерами, а отже, за два проходи побуваєте на всіх сходинках.

Цей приклад показує, що можлива така схема індуктивних міркувань. У теоремі «база індукції» доводиться (перевіряється) справедливість твердження при $n = 1$ і $n = 2$. Теорема «індуктивний перехід» має таку структуру: роблять припущення, що твердження є правильним для $n = k$, а далі доводять, що воно є правильним для $n = k + 2$.

Таку схему міркувань називають індукцією з кроком 2.

Зрозуміло, що індуктивні міркування можна проводити з кроком будь-якої довжини.

Наприклад, розв'яжемо задачу з прикладу 1, використовуючи індукцію з кроком 3.

Теорема «база індукції»: $a_1 \vdots 7$, $a_2 \vdots 7$, $a_3 \not\vdots 7$.

Теорема «індуктивний перехід»: нехай a_k ділиться (не ділиться) націло на 7, доведемо, що a_{k+3} так само ділиться (не ділиться) націло на 7.

Для доведення достатньо показати, що $(a_{k+3} - a_k) \vdots 7$. У цьому ви можете переконатися самостійно.

ПРИКЛАД 2 Число a таке, що число $a + \frac{1}{a}$ — ціле. Доведіть, що для будь-якого натурального n число $a^n + \frac{1}{a^n}$ — також ціле.

Розв'язання. При $n = 1$ твердження є правильним. Припустимо, що при $n = k$ число $a^k + \frac{1}{a^k}$ є цілим.

Справедливою є така рівність:

$$a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}} = \left(a^k + \frac{1}{a^k}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}\right). \qquad (1)$$

З неї випливає, що число $a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}$ є цілим, якщо цілим є не тільки число $a^k+\frac{1}{a^k}$, але й число $a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}$. Але в теоремі «індуктивний перехід» такої умови немає.

Бачимо, що для розв'язання цієї задачі схему доведення методом математичної індукції слід відкоригувати таким чином: у теоремі «індуктивний перехід» зробити припущення, що твердження, яке доводиться, справедливе при $n = k - 1$ і $n = k$, а далі довести, що воно справедливе для $n = k + 1$.

Ця зміна, у свою чергу, потребує, щоб в теоремі «база індукції» твердження було перевірене не тільки для $n = 1$, але й для $n = 2$.

Маємо: $a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$. Отже, число $a^2+\frac{1}{a^2}$ є цілим, оскільки цілим є число $a+\frac{1}{a}$.

З рівності (1) випливає справедливість «оновленої» теореми «індуктивний перехід», що завершує розв'язування задачі.

Для розв'язування цієї задачі нам довелося посилити умову теореми «індуктивний перехід», при цьому крок індукції залишився рівним 1.

Якщо посилити умову теореми «індуктивний перехід», то можна користуватися й такою схемою індуктивного доведення:

1) установити справедливість гіпотези при $n = 1$;
2) з припущення, що гіпотеза є правильною для всіх $n \leqslant k$, довести її справедливість для $n = k + 1$.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що будь-яке натуральне число n можна подати у вигляді суми кількох різних степенів числа 2, можливо, включаючи нульовий (якщо натуральне число є степенем числа 2, то будемо вважати, що воно подане у вигляді суми, яка складається з одного доданка).

Розв'язання. При $n = 1$ маємо $1 = 2^0$.

Нехай твердження є справедливим для всіх натуральних n таких, що $n \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$. Розглянемо натуральне число $k + 1$.

Якщо це число є степенем числа 2, то теорему «індуктивний перехід» доведено. Якщо число $k + 1$ не є степенем числа 2, то існує натуральне число m таке, що $2^m < k + 1 < 2^{m+1}$. Звідси $k + 1 = 2^m + p$, де $p \in \mathbb{N}$.

Якщо припустити, що $p \geqslant 2^m$, то $k + 1 \geqslant 2^m + 2^m = 2^{m+1}$, що суперечить нерівності $k + 1 < 2^{m+1}$. Отже, $p < 2^m$. Але $2^m < k + 1$, отже, $p < 2^m \leqslant k$.

Маємо: $k + 1 = 2^m + p$, де $p \in \mathbb{N}$, $p < 2^m \leqslant k$. Тоді за індуктивним припущенням число p можна подати у вигляді суми різних степенів числа 2, причому серед цих доданків немає числа 2^m. Додавши до цієї суми число 2^m, отримаємо шукане подання числа $k + 1$.

Наведені вище приклади далеко не вичерпують усіх різновидів доведень методом математичної індукції. Відчути багатоманітність схем індуктивних міркувань можна, якщо знов звернутися до наочної моделі.

Описуючи різні способи руху сходинками, ми тим самим конструюємо різні схеми доведення методом математичної індукції.

Припустимо, що ми можемо ставати на сходинки, номери n яких визначаються за заздалегідь визначеним правилом. Наприклад, $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. При цьому є можливість з будь-якого досягнутого місця спуститися на одну сходинку вниз. Зрозуміло, що описана схема руху дозволяє побувати на будь-якій сходинці.

Покажемо, як за допомогою цієї схеми можна проводити продуктивні індуктивні доведення.

ПРИКЛАД 4 Для невід'ємних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, доведіть нерівність[1]

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n \geqslant x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n. \qquad (*)$$

Розв'язання. Якщо $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, то нерівність (*) є правильною. Подальші міркування проводитимуться для випадку, коли $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 0$.

При $n = 2$ маємо: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geqslant x_1 x_2$. Справедливість цієї нерівності випливає з нерівності Коші для двох чисел.

Нехай нерівність (*) є правильною при $n = k$, тобто

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\right)^k \geqslant x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_k.$$

Доведемо, що вона є правильною при $n = 2k$.

Маємо: $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{2k-1} + x_{2k}}{2k}\right)^{2k} =$

---

[1] Як правило, цю нерівність записують у такій формі $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ і називають нерівністю Коші для n чисел. Ми будемо використовувати такий запис після вивчення поняття «корінь n-го степеня».

$$= \left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \ldots + \frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}}{k} \right)^{2k} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\left(\frac{\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4} + \ldots + \sqrt{x_{2k-1}x_{2k}}}{k} \right)^k \right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sqrt{x_1x_2} \cdot \sqrt{x_3x_4} \cdot \ldots \cdot \sqrt{x_{2k-1}x_{2k}} \right)^2 = x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2k-1} \cdot x_{2k}.$$

Ми показали, що нерівність (*) є правильною для $n = 2$. Отже, вона є правильною для $n = 2 \cdot 2 = 4$, а тоді вона є правильною при $n = 2 \cdot 4 = 8$, при $n = 2 \cdot 8 = 16$, при $n = 2 \cdot 16 = 32$ і взагалі, при всіх натуральних значеннях n таких, що $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Таким чином, «хвиля доведених тверджень» розповсюджується за такою схемою:

$$2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to \ldots .$$

Залишилось показати, що ця «хвиля» може розповсюджуватись у зворотному порядку з кроком 1:

$$2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow 8 \leftarrow \ldots .$$

Для цього слід припустити, що нерівність (*) є правильною для $n = p$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, і довести, що вона є правильною для $n = p - 1$.

Коли нерівність є правильною для будь-яких невід'ємних $x_1, \ldots, x_p$, то вона є правильною і для випадку, коли $x_p = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1}$.

Запишемо цей випадок:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} + x_p}{p} \right)^p \geqslant x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{p-1}x_p.$$

Маємо: $$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} + \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1}}{p} \right)^p \geqslant$$

$$\geqslant x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{p-1} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1};$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1} \right)^p \geqslant x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{p-1} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1}.$$

Поділивши обидві частини цієї нерівності на додатне число $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1}$, отримаємо $\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1} \right)^{p-1} \geqslant x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{p-1}$.

Цим завершено доведення нерівності (*).

25 Основні правила комбінаторики. Перестановки

Скількома способами учні вашого класу можуть стати один за одним у черзі до буфету? Скількома способами можна обрати у вашому класі старосту та його заступника? Скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі на чемпіонаті світу з футболу?

Відповідаючи на ці запитання, потрібно підрахувати, скільки різних комбінацій, утворених за певним правилом, можна скласти з елементів заданої скінченної множини. Область математики, яка займається розв'язуванням подібних задач, називають **комбінаторикою**.

В основі розв'язування більшості комбінаторних задач лежать два правила: правило суми і правило добутку.

Розглянемо такий приклад. Туриста зацікавили 5 маршрутів у Криму і 7 маршрутів у Карпатах. З'ясуємо, скількома способами він може організувати свою відпустку, маючи час лише на один маршрут.

Оскільки всього є $5 + 7 = 12$ різних маршрутів, то один з них можна вибрати 12 способами.

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

Правило суми. **Якщо множини A і B такі, що $n(A) = m$, $n(B) = k$, $A \cap B = \varnothing$, то вибір «a або b», де $a \in A$, $b \in B$, можна здійснити $m + k$ способами.**

Це правило можна проілюструвати за допомогою відомої властивості[1]: якщо множини A і B є скінченними, причому $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Правило суми можна узагальнити. Якщо множини A_1, A_2, ..., A_k попарно не перетинаються і такі, що $n(A_1) = k_1$, $n(A_2) = k_2$, ..., $n(A_m) = k_m$, то вибір «a_1, або a_2, або ..., або a_m», де $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_m \in A_m$, можна здійснити $k_1 + k_2 + ... + k_m$ способами. Використовуючи метод математичної індукції, доведіть цей факт самостійно.

Знову звернемося до прикладу з вибором маршрутів. Якщо турист має час на два маршрути і хоче побувати спочатку в Криму, а потім у Карпатах, то він може організувати свій відпочинок 35 способами. Справді, якщо обрати один маршрут у Кри-

[1] Нагадаємо, що для скінченної множини A через $n(A)$ позначають кількість її елементів.

му, то парою до нього може бути будь-який із 7 карпатських маршрутів. Оскільки маршрутів у Криму 5, то кількість пар (маршрут у Криму; маршрут у Карпатах) дорівнює $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 5 = 35$.

Ці міркування ілюструє така таблиця:

		Карпатські маршрути						
		1	2	3	4	5	6	7
Кримські маршрути	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

Правило добутку. **Якщо елемент a можна обрати m способами і після кожного такого вибору елемент b можна вибрати k способами[1], то вибір «a і b» в указаному порядку, тобто вибір упорядкованої пари (a; b), можна зробити mk способами.**

Правило добутку також можна узагальнити. Якщо елемент a_1 можна вибрати k_1 способами, елемент a_2 — k_2 способами і т. д., елемент a_m — k_m способами за умови дотримання принципу незалежності кількості виборів, то вибір «a_1 і a_2 і ... і a_m», тобто вибір упорядкованого набору $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, можна зробити $k_1 k_2 \cdot \ldots \cdot k_m$ способами. Використовуючи метод математичної індукції, доведіть цей факт самостійно.

ПРИКЛАД 1 Скільки натуральних дільників має число $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6$?

Розв'язання. Будь-який дільник даного числа має вигляд $2^{k_1} \cdot 5^{k_2} \cdot 7^{k_3}$, де k_1, k_2, k_3 — цілі числа, які задовольняють умови $0 \leqslant k_1 \leqslant 4$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 3$, $0 \leqslant k_3 \leqslant 6$. Кількість дільників даного

[1] Називатимемо цю властивість «принципом незалежності кількості виборів».

числа дорівнює кількості наборів, які можна скласти з чисел k_1, k_2, k_3 (при цьому набори, які відрізняються один від одного порядком елементів, вважаються різними). Число k_1 можна вибрати 5 способами, число k_2 — 4 способами, число k_3 — 7 способами. Отже, за узагальненим правилом добутку зазначений набір можна вибрати $5 \cdot 4 \cdot 7 = 140$ способами. Тому дане число має 140 дільників.

Кількість натуральних дільників числа n, $n \in \mathbb{N}$, прийнято позначати так: $\tau(n)$.

Якщо $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ — канонічний розклад натурального числа n на прості множники, то, міркуючи аналогічно, можна встановити, що $\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_m + 1)$.

Задача. Доведіть, що кількість підмножин даної n-елементної множини M дорівнює 2^n.

Розв'язання. Пронумеруємо всі елементи множини M. Маємо:

$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Розглянемо скінченні послідовності[1], які містять n членів і складаються з нулів і одиниць.

Кожній підмножині A множини M поставимо у відповідність одну з таких послідовностей, що обирається за правилом:

- якщо $a_k \in A$, то на k-му місці в послідовності стоїть число 1;
- якщо $a_k \notin A$, то на k-му місці в послідовності стоїть число 0.

Наприклад,

$A = \{a_2, a_4\} \to 0, 1, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0$

$B = \{a_3\} \to 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0$

$C = \{a_n\} \to 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1$

$M \to 1, 1, 1, \ldots, 1$

$\varnothing \to 0, 0, 0, \ldots, 0$

Зрозуміло, що кожній підмножині множини M відповідає єдина послідовність, і навпаки, кожна послідовність є відповідною єдиній підмножині множини M. Отже, кількість підмножин множини M дорівнює кількості послідовностей, що розглядаються.

При конструюванні послідовностей будь-який член можна вибрати тільки двома способами: записати 0 або записати 1. Отже, за узагальненим правилом добутку можна сконструювати $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ множників}} = 2^n$ різних послідовностей.

[1] Більш докладно з поняттям «послідовність» ви ознайомитесь у п. 32.

Означення. **Множину M, яка складається з n елементів ($n \in \mathbb{N}$), називають *упорядкованою*, якщо між нею і множиною, яка складається з перших n натуральних чисел, установлено взаємно однозначну відповідність.**

Очевидно, що коли скінченна множина складається більше ніж з одного елемента, то встановити порядок її елементів, тобто пронумерувати її елементи, можна не одним способом.

Означення. ***Перестановкою*** **скінченної множини M називають будь-яку упорядковану множину, утворену з усіх елементів множини M.**

Наприклад, існує 6 перестановок множини $M = \{a, b, c\}$. Випишемо їх[1]:

(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Перестановки заданої скінченної множини різняться лише порядком слідування елементів.

Тепер задачу про кількість способів, якими учні вашого класу можуть стати один за одним у черзі до буфету, можна сформулювати так: «Скільки існує перестановок множини учнів вашого класу?»

Кількість перестановок n-елементної множини M позначають символом P_n, використовуючи першу літеру французького слова *permutation* — перестановка. Наприклад, розглядаючи множину $M = \{a, b, c\}$, ми встановили, що $P_3 = 6$.

Якщо $M = \{a\}$, то існує лише один спосіб упорядкування цієї множини: a — це перший елемент. Тому $P_1 = 1$.

Доведемо, що для будь-якого натурального n справедлива формула[2]

$$\boxed{P_n = n!}$$

Цю формулу можна довести за допомогою методу математичної індукції (переконайтеся в цьому самостійно). Ми розглянемо комбінаторне доведення.

Нехай множина M складається з n елементів. Записати будь-яку перестановку множини M — це фактично надати кожному елементу цієї множини певний номер від 1 до n. Тому кількість

---

[1] Тут запис (a, b, c) означає, що елементу a присвоєно номер 1, елементу b — номер 2, елементу c — номер 3.

[2] Нагадаємо, що добуток перших n натуральних чисел позначають так: $n!$ (читають: «n факторіал»), тобто $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. За означенням вважають, що $1! = 1$.

перестановок множини M дорівнює кількості способів нумерування її елементів.

Виберемо певний елемент a з цієї множини. Існує n способів присвоїти цьому елементу номер. Далі виберемо певний елемент b з множини M. Оскільки елементу a номер вже присвоєно, то існує $n - 1$ спосіб присвоїти номер елементу b. Зрозуміло, що наступний елемент можна пронумерувати $n - 2$ способами і т. д. Для останнього невибраного елемента множини M існує лише один спосіб присвоїти йому номер, оскільки до цього моменту $n - 1$ елемент уже отримали свої номери.

Отже, за узагальненим правилом добутку можна записати:

$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, тобто

$$P_n = n!$$

ПРИКЛАД 2 Скількома способами можна розташувати на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не били одна одну?

Розв'язання. Для того щоб тури не могли бити одна одну, на кожній горизонталі і на кожній вертикалі має стояти тільки одна тура (рис. 25.1).

Рис. 25.1

Нехай a_1 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з першої горизонталі, a_2 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з другої горизонталі, ..., a_8 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з восьмої горизонталі.

Зрозуміло, що $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — якась перестановка множини $\{1, 2, \ldots, 8\}$. Кожній такій перестановці відповідає деяке розташування тур, яке задовольняє умову задачі, і навпаки, кожному припустимому розташуванню тур відповідає певна перестановка цієї множини.

Отже, шукана кількість способів дорівнює P_8, тобто $8!$.

25.1.° З міста A до міста B ведуть 4 дороги, а з міста B до міста C ведуть 3 дороги (рис. 25.2). Скількома способами можна проїхати з міста A до міста C?

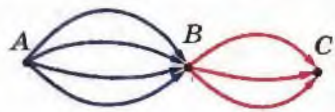


Рис. 25.2

25.2.° Кафе пропонує в меню 3 перші страви, 6 других страв і 5 третіх страв. Скільки існує способів вибрати обід з трьох страв (по одній страві кожного виду)?

25.3.° Скількома способами можна розставити на полиці 7 різних книг?

25.4.° Скількома способами можуть сісти в автомобіль 5 чоловік, якщо кожний з них може бути водієм?

25.5.° У школі 20 класів і 20 класних керівників. Скількома способами можна розподілити класне керівництво між учителями?

25.6.° Розглядатимемо склади з двох букв, перша з яких є приголосною, а друга — голосною. Скільки таких різних складів можна утворити з букв слова:

1) шабля; 2) шаровари?

25.7.° У корзині лежать 10 яблук і 7 груш. Антон вибирає яблуко або грушу. Після цього Максим вибирає яблуко і грушу. У якому випадку Максим має більше можливостей для вибору: коли Антон узяв яблуко чи коли Антон узяв грушу?

25.8.° На рисунку 25.3 показана схема доріг, які ведуть з міста A до міста B. Скількома способами можна проїхати з міста A до міста B?

Рис. 25.3

25.9.° Кафе пропонує в меню 3 різні салати, 6 різних м'ясних страв і 5 різних десертів. Скільки існує способів вибрати обід з двох страв різного виду?

25.10.° На вершину гори веде 5 маршрутів. Скількома способами альпініст може піднятися на гору і спуститися з неї? Дайте відповідь на це питання також за умови, коли підйом і спуск мають відбуватися за різними маршрутами.

25.11.° Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

25.12.° Скільки п'ятицифрових чисел, усі цифри в яких різні, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо ці числа мають починатися:

1) з цифри 1; 2) із запису «34»?

25.13.° Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

25.14.° Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких непарні?

25.15.° Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

25.16.° Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких парні?

25.17.° Скільки існує семицифрових телефонних номерів, які не починаються з цифри 0?

25.18.° Автомобільний номер має таку структуру: дві букви українського алфавіту, чотири цифри, дві букви (букви Ґ, Ї, Й, Щ, Ь не використовують), наприклад AA9780BT. Скільки можна утворити таких номерів?

25.19.° Монету кидають 4 рази. Скільки різних послідовностей гербів і цифр можна отримати?

25.20.° Гральний кубик кидають 3 рази. Скільки різних послідовностей очок можна отримати?

25.21.° Скільки трицифрових парних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

25.22.° Скільки трицифрових непарних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

25.23.° Скільки п'ятицифрових чисел, усі цифри яких мають бути різними, можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4?

25.24.° Скільки парних п'ятицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб у кожному числі цифри були різними?

25.25.° Скільки існує п'ятицифрових чисел, які діляться на 5?

25.26.° Скільки існує семицифрових чисел, які діляться на 25?

25.27.° У селі мешкає 1100 жителів. Доведіть, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали.

25.28.° Скількома способами можна поставити на шахову дошку дві тури так, щоб вони не били одна одну?

25.29.° У книжковому магазині є 4 різні видання поеми «Енеїда», 3 різні видання п'єси «Наталка Полтавка» і 2 різні видання п'єси «Москаль-чарівник». Крім того, є 5 різних книг, у яких містяться поема «Енеїда» і п'єса «Наталка Полтавка», і 6 різних книг, у яких містяться п'єси «Наталка Полтавка» і «Москаль-чарівник». Скількома способами можна зробити покупку, яка б містила по одному екземпляру кожного з цих творів?

25.30.° Скільки існує семицифрових чисел, усі цифри яких мають однакову парність?

25.31.° Для шифрування повідомлень використовують цифри 0, 1, 2, 3. Слово в повідомленні містить від 1 до 5 цифр. Яку найбільшу кількість різних слів може містити повідомлення?

25.32.° Скількома способами можна розподілити замовлення на друкування 10 різних підручників між двома книжковими фабриками?

25.33.° В учня є 7 книг з математики, 4 книги з фізики і 2 книги з астрономії. Скількома способами він може розставити ці книги на полиці так, щоб книги з одного предмета стояли поруч?

25.34.° П'ять хлопців і п'ять дівчат сідають у ряд на 10 стільцях. Скількома способами вони можуть розміститися так, щоб хлопці сиділи на стільцях з парними номерами, а дівчата — на стільцях з непарними номерами?

25.35.°° Скільки існує п'ятицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна непарна цифра?

25.36.°° Скільки існує п'ятицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна парна цифра?

25.37.°° Скільки існує п'ятицифрових чисел, які містять хоча б дві однакові цифри?

25.38.°° Гральний кубик кидають три рази. Скільки різних послідовностей очок, серед яких є хоча б одна шістка, можна отримати?

25.39." Серед 10 людей є двоє знайомих. Скількома способами можна посадити цих людей на 10 стільців так, щоб знайомі сиділи поруч?

25.40." Скільки п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб цифри в числі не повторювалися і парні цифри не стояли поруч?

25.41." Будемо вважати словом будь-яку скінченну послідовність букв українського алфавіту. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви слова: 1) молоко; 2) математика; 3) комбінаторика?

25.42.* З першого поверху 9-поверхового будинку відправився вгору ліфт з 5 пасажирами. Скількома способами ці люди можуть вийти з ліфту?

26. Розміщення

За правилами *FIFA*[1] у фінальній частині чемпіонату світу з футболу беруть участь 32 команди. З'ясуємо, скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі (три призові місця) між командами.

На перше місце може потрапити будь-яка з 32 команд, на друге місце — будь-яка з решти 31 команди, на третє — будь-яка з 30 команд, що залишилися. За узагальненим правилом добутку кількість можливих варіантів розподілу місць дорівнює $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\ 760$.

Розв'язавши цю задачу, ми з'ясували, скільки існує 3-елементних упорядкованих підмножин заданої 32-елементної множини. Кожну з таких упорядкованих підмножин називають **розміщенням з 32 елементів по 3 елементи.**

Означення. **Будь-яку k-елементну упорядковану підмножину даної n-елементної множини називають розміщенням з n елементів по k елементів.**

Кількість усіх можливих розміщень з n елементів по k елементів позначають символом A_n^k, використовуючи першу літеру французького слова *arrangement* — розміщення.

Результат, отриманий у задачі про розподіл призових місць, дозволяє зробити висновок, що $A_{32}^3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\ 760$.

---

[1] Міжнародна федерація футбольних асоціацій.

Доведемо, що при будь-яких натуральних n і k таких, що $k \leqslant n$, справедливою є формула

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)} \qquad (1)$$

Розглянемо n-елементну множину і сформуємо її k-елементну упорядковану підмножину.

Існує n способів вибору першого елемента підмножини. Другий елемент підмножини можна вибрати вже тільки $n - 1$ способами. Після вибору першого і другого елементів залишається $n - 2$ способи для вибору третього елемента підмножини. Узагалі, вибір k-го елемента можна здійснити $n - k + 1$ способами.

Отже, за узагальненим правилом добутку можна записати:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Оскільки існує лише одна n-елементна підмножина даної n-елементної множини, то число A_n^n — це кількість перестановок n-елементної множини, тобто

$$\boxed{A_n^n = P_n}$$

Цей факт підтверджує формула (1). Справді, при $k = n$ отримаємо:

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1) = n!$$

За означенням прийнято вважати, що $0! = 1$. Ця домовленість дозволяє формулу (1) записати більш компактно.

Помножимо і поділимо вираз, який стоїть у правій частині формули (1), на $(n - k)!$ (це можливо, оскільки $(n - k)! \neq 0$). Маємо: $A_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Отримуємо формулу

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

ПРИКЛАД Скільки існує правильних дробів, чисельник і знаменник яких — прості числа, які менші від 30?

Розв'язання. Множина $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ складається з усіх простих чисел, які менші від 30. Кількість 2-елементних упорядкованих підмножин цієї множини дорівнює кількості звичайних дробів, відмінних від одиниці, чисельник і знаменник яких — зазначені прості числа. Половина з цих дробів є правильними. Отже, шукане число дорівнює $\frac{1}{2}A_{10}^2 = 45$.

26.1.° У футбольній команді (11 чоловік) потрібно обрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?

26.2.° Комісія, яка складається з 15 осіб, має вибрати голову, його заступника і секретаря. Скількома способами це можна зробити?

26.3.° У 9 класі вивчають 12 предметів. Денний розклад містить 6 уроків. Скількома способами можна скласти денний розклад так, щоб усі 6 уроків були різними?

26.4.° У фінальній частині чемпіонату Європи з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть розподілитися золоті та срібні нагороди?

26.5.° Наукова група, яка складається з 9 осіб, має делегувати на конференції трьох представників: одного до Великої Британії, другого до Франції, третього до Німеччини. Скількома способами можна це зробити?

26.6.° Через залізничну станцію повинні одночасно пройти три поїзди. Скількома способами диспетчер може організувати проходження потягів, якщо в його розпорядженні є п'ять вільних колій?

26.7.° Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких непарні і різні?

26.8.° Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких парні і різні?

26.9.° Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{A_{10}^{6} - A_{10}^{5}}{A_{9}^{5} - A_{9}^{4}}$;

2) $\dfrac{A_{12}^{4} \cdot P_{7}}{A_{11}^{9}}$;

3) $\dfrac{A_{m-1}^{n-1} \cdot P_{m-n}}{P_{m-1}}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant m$.

26.10.° Доведіть, що $A_{n}^{n-1} = P_{n}$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

26.11.° Розв'яжіть у натуральних числах рівняння:

1) $A_{x+1}^{2} = 156$;

2) $A_{x}^{x-3} = xP_{x-2}$;

3) $\dfrac{P_{x+3}}{A_{x}^{5} \cdot P_{x-5}} = 720$;

4) $\dfrac{P_{x+1}}{A_{x-1}^{x-4} \cdot P_{3}} = 210$.

26.12.° Розв'яжіть у натуральних числах рівняння:

1) $A_{x}^{2} = 20$;

2) $A_{x}^{5} = 18 \cdot A_{x-2}^{4}$;

3) $\dfrac{A_{x}^{3} + 3A_{x}^{2}}{P_{x+1}} = \dfrac{1}{2}$.

26.13.° У дев'ятому класі 32 учні. Кожні двоє учнів обмінялись один з одним фотокартками. Скільки всього було роздано фотокарток?

26.14.° Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, щоб цифри не повторювалися і крайні цифри були парними?

26.15.° В охоронній фірмі працюють 15 чоловік. Потрібно організувати чергування в двох будівлях на трьох і чотирьох поверхах відповідно (по одному черговому на поверсі). Скільки існує способів здійснити таке чергування?

26.16.°° Скільки різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, щоб усі цифри були різними і серед них містилася цифра 6?

27. Сполуки (комбінації)

Розглянемо такі дві задачі. Скількома способами в класі, у якому 30 учнів, можна вибрати старосту і його заступника? Скількома способами в цьому класі можна призначити двох чергових?

Відповідь на перше питання вам відома: це кількість 2-елементних упорядкованих підмножин 30-елементної множини, тобто A_{30}^2. Щоб відповісти на друге питання, потрібно встановити кількість 2-елементних підмножин 30-елементної множини (саме підмножин, а не упорядкованих підмножин). Кожну з таких підмножин називають **сполукою (комбінацією)** з 30 елементів по 2 елементи.

Означення. Будь-яку k-елементну підмножину заданої n-елементної множини називають сполукою (комбінацією) з n елементів по k елементів.

Кількість усіх можливих комбінацій з n елементів по k елементів позначають символом C_n^k, використовуючи першу літеру французького слова *combinaison* — комбінація.

Так, задачу про кількість способів призначення чергових можна сформулювати так: чому дорівнює C_{30}^2?

Обчислимо значення C_n^k для кількох очевидних випадків. Наприклад, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$. Справді, існує n 1-елементних підмножин і одна n-елементна підмножина заданої n-елементної множини.

Оскільки задана n-елементна підмножина має лише одну підмножину, яка не містить жодного елемента, то

$$C_n^0 = 1.$$

Також зрозуміло, що

$$C_0^0 = 1.$$

Справді, порожня множина містить лише одну підмножину — це $\varnothing$.

Доведемо, що при будь-яких натуральних n і k таких, що $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{A_n^k = C_n^k \cdot P_k} \qquad (1)$$

Розглянемо деяку n-елементну множину. Кількість її k-елементних підмножин дорівнює C_n^k. З кожної такої підмножини можна утворити $k!$ упорядкованих k-елементних підмножин. Отже, кількість усіх k-елементних упорядкованих підмножин заданої n-елементної множини дорівнює $C_n^k \cdot k!$, тобто $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$.

З формули (1) отримуємо, що $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$.

Звідси

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}} \qquad (2)$$

Зазначимо, що ця формула залишається справедливою і для випадків, коли $k = 0$ або $n = 0$. Справді,

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1,$$

$$C_0^0 = \frac{0!}{(0-0)!\,0!} = 1.$$

ЗАДАЧА 1 Доведіть, що

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}} \qquad (3)$$

Розв'язання. Цю формулу можна довести за допомогою формули (2). Переконайтеся в цьому самостійно.

Формула (3) має й інше, комбінаторне, доведення. Вибираючи k-елементну підмножину A n-елементної множини M, ми тим самим однозначно задаємо $(n-k)$-елементну підмножину $M \setminus A$. Отже, кількість способів вибору k-елементної підмножини дорівнює кількості способів вибору $(n-k)$-елементної підмножини, тобто справедлива формула (3).

Формулу (3) при $n > k > 0$ можна довести геометрично. Розглянемо прямокутник розміром $m \times k$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, розбитий на mk однакових квадратів. Нехай це схема вулиць деякого міста (рис. 27.1). З'ясуємо, яка кількість різних найкоротших маршрутів веде з пункту A до пункту B.

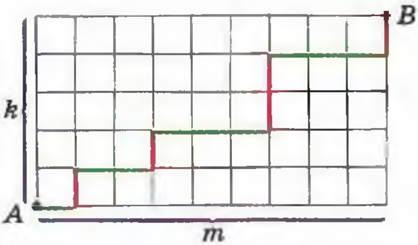


Рис. 27.1

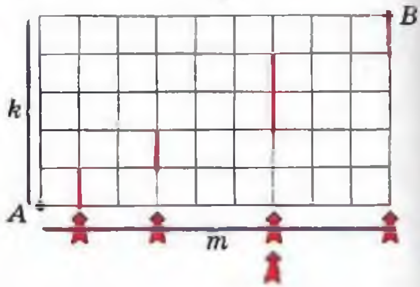


Рис. 27.2

Оскільки маршрути мають бути найкоротшими, то треба рухатися по сітці тільки вправо або вгору.

Будь-який маршрут складається з $m + k$ відрізків (тут відрізок — це сторона квадрата розбиття), з яких k вертикальних і m горизонтальних. Різні маршрути відрізняються лише порядком чергування вертикальних і горизонтальних відрізків. Тому вибір, наприклад, вертикальних відрізків повністю визначає маршрут (рис. 27.2).

Отже, загальна кількість маршрутів дорівнює кількості способів, якими з $m + k$ відрізків можна вибрати k відрізків, тобто C_{m+k}^{k}.

Оскільки вибір горизонтальних відрізків так само визначає маршрут, то загальна кількість маршрутів також дорівнює C_{m+k}^{m}.

Таким чином, $C_{m+k}^{k} = C_{m+k}^{m}$.

Якщо позначити $m + k = n$, то отримаємо формулу (3).

ЗАДАЧА 2 Доведіть, що

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n} \qquad (4)$$

Розв'язання. Ліва частина даної рівності — це кількість підмножин n-елементної множини. У пункті 25 ми показали, що ця кількість дорівнює 2^n.

ЗАДАЧА 3 Доведіть, що

$$\boxed{C_{n+1}^{k} = C_n^{k-1} + C_n^{k}} \qquad (5)$$

Розв'язання. Цю формулу можна довести за допомогою формули (2). Зробіть це самостійно.

Наведемо комбінаторне доведення формули (5).

Розглянемо $(n + 1)$-елементну множину. Зафіксуємо в ній деякий елемент a. Усі k-елементні підмножини розіб'ємо на два типи: які містять елемент a і які його не містять. Підмножини першого типу формуються в результаті вибору $k - 1$ елемента з n елементів (адже один елемент їм обов'язково належить — це a). Тому кількість підмножин першого типу дорівнює C_n^{k-1}.

Підмножини другого типу формуються в результаті вибору з n елементів (адже елемент a їм не належить) k елементів. Їх кількість дорівнює C_n^k.

Отримали, що кількість k-елементних підмножин заданої $(n + 1)$-елементної множини дорівнює $C_n^{k-1} + C_n^k$. Тому $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$.

Формулу (5) при $n \geqslant k > 0$ можна довести геометрично, використовуючи схему маршрутів, зображену на рисунку 27.1. Усі найкоротші маршрути, які ведуть з пункту A до пункту B, діляться на два типи: які проходять через точку A_1 і які проходять через точку A_2 (рис. 27.3). Кількість маршрутів першого типу дорівнює C_{m-1+k}^k, а другого — C_{m+k-1}^{k-1}. Отже, $C_{m+k}^k = C_{m-1+k}^k + C_{m+k-1}^{k-1}$.

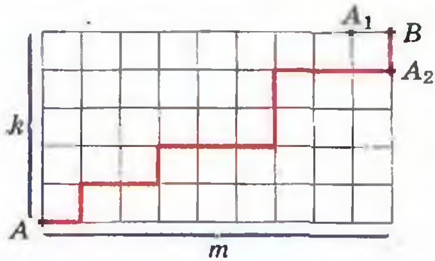


Рис. 27.3

Якщо зробити заміну $m + k = n + 1$, то отримаємо

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

27.1.° Обчисліть:

1) C_7^2; 2) C_4^3; 3) C_{100}^{99}; 4) $C_5^0 + C_7^7 + C_{11}^1$.

27.2.° Обчисліть:

1) C_8^3; 2) C_5^4; 3) C_{1000}^{999}; 4) $C_9^1 + C_8^0 + C_{17}^1$.

27.3.° Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{n} C_{n+1}^{n-1}$; 2) $\frac{3}{n} C_{2n}^{2n-1}$.

27.4.° Спростіть вираз:

1) $\frac{6}{n+2} C_{n-2}^{n}$; 2) $\frac{1}{2n-1} C_{2n+1}^{2n-2}$.

27.5.° Розв'яжіть у натуральних числах рівняння:

1) $C_x^2 = 153$;
2) $C_{x+2}^3 = 8(x+1)$;
3) $C_x^{x-2} = 45$;
4) $3C_{2x}^{x+1} = 2C_{2x+1}^{x-1}$;
5) $17C_{2x-1}^x = 9C_{2x}^{x-1}$.

27.6.° Розв'яжіть у натуральних числах рівняння:

1) $C_x^2 = 120$;
2) $C_{x+2}^3 = 7(x+2)$;
3) $C_x^{x-2} = 66$;
4) $11C_{2x}^x = 6C_{2x+1}^{x+1}$.

27.7.° У класі 29 учнів. Скількома способами можна сформувати команду з 5 учнів для участі в математичній олімпіаді?

27.8.° На площині позначено 10 точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників з вершинами у цих точках?

27.9.° Дано опуклий n-кутник. Скільки існує чотирикутників з вершинами, які містяться серед вершин даного n-кутника?

27.10.° Зустрівшись, 7 знайомих потиснули один одному руки. Скільки рукостискань було зроблено?

27.11.° У класі 25 учнів. Для вивчення іноземної мови їх потрібно розбити на дві групи по 13 і 12 осіб. Скількома способами це можна зробити?

27.12.° У шаховій секції займаються 5 дівчат і 12 хлопчиків. Скількома способами можна сформувати команду з 2 дівчат і 5 хлопчиків для участі в змаганнях?

27.13.° В одного хлопчика є 11 марок, а в іншого — 20 марок (усі марки різні). Скількома способами вони можуть обміняти три марки одного на три марки другого?

27.14.° На площині задано n паралельних прямих. Їх перетинають m паралельних прямих. Яка кількість паралелограмів при цьому утворилася?

27.15.° На прямій позначено 12 точок, а на паралельній їй прямій — 7 точок. Скільки існує чотирикутників з вершинами у цих точках?

27.16.° Серед 20 робітників є 7 мулярів. Скількома способами можна скласти бригаду з 5 робітників так, щоб до неї входило рівно 2 муляри?

27.17.° Для шкільної лотереї підготовлено 100 білетів, з яких 12 є виграшними. Перший учень навмання вибирає 10 білетів. Скільки існує варіантів вибору, при яких він вибере рівно 3 виграшні білети?

27.18.$^{\bullet}$ У класі вчаться 35 учнів. Для участі в турнірі математичних боїв формується команда, яка складається з капітана, його заступника і чотирьох членів команди. Скількома способами можна сформувати таку команду?

27.19.$^{\bullet}$ На прямій позначено 12 точок, а на паралельній їй прямій — 7 точок. Скільки існує трикутників з вершинами у цих точках?

27.20.$^{\bullet}$ Скільки існує способів з 8 різних квітів скласти букет з непарною кількістю квітів?

27.21.$^{\bullet}$ Комісія, яка складається з 15 осіб, може розпочати роботу, якщо на засіданні є кворум, тобто присутні не менше 10 її членів. Скільки існує способів досягти кворуму?

27.22.$^{\bullet}$ Серед 20 робітників є 7 мулярів. Скількома способами можна скласти бригаду з 5 робітників так, щоб до неї входило не менше 2 мулярів?

27.23.$^{\bullet}$ Для шкільної лотереї підготовлено 100 білетів, з яких 12 виграшних. Перший учень навмання вибирає 10 білетів. Скільки існує варіантів вибору, при яких він вибере не менше 2 виграшних білетів?

27.24.$^{\bullet}$ З 20 осіб потрібно сформувати комісію із 7 осіб, причому Петро Іванович і Іван Петрович не повинні входити до комісії одночасно. Скількома способами це можна зробити?

27.25.$^{\bullet}$ У перші три вагони потяга сідають 12 пасажирів, по 4 в кожний вагон. Скількома способами це можна зробити?

27.26.$^{\bullet}$ Скількома способами можна розбити 12 спортсменів на 3 команди по 4 спортсмени в кожній?

27.27.$^{\bullet}$ У матері є 9 різних цукерок. Скількома способами вона може пригостити своїх трьох дітей так, щоб кожному дісталося по 3 цукерки?

27.28.$^{\bullet}$ На шкільному вечорі присутні 12 дівчат і 15 юнаків. Скількома способами з них можна вибрати чотири пари для танцю?

27.29.$^{\bullet\bullet}$ Скількома способами можна m білих і n чорних куль ($m > n$) розкласти в ряд так, щоб жодні дві чорні кулі не лежали поруч?

27.30.$^{\bullet\bullet}$ П'ять ящиків пронумеровані числами від 1 до 5. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 17 однакових куль так, щоб жодний ящик не виявився порожнім?

27.31.$^{\bullet\bullet}$ Скількома способами натуральне число n можна подати у вигляді суми k натуральних доданків (суми, які відрізняються порядком доданків, вважатимемо різними)?

28. Частота та ймовірність випадкової події

Нам нерідко доводиться проводити спостереження, досліди, брати участь в експериментах або випробуваннях. Часто подібні дослідження завершуються деяким результатом, який заздалегідь передбачити неможливо.

Розглянемо кілька характерних прикладів.

- Якщо відкрити книгу навмання, то неможливо знати заздалегідь, який номер сторінки ви побачите.
- Неможливо до початку футбольного матчу визначити, з яким рахунком закінчиться гра.
- Ви не можете бути впевненим, що коли натиснете на кнопку вимикача, то засвітиться настільна лампа.
- Немає гарантії, що з курячого яйця, покладеного до інкубатору, виведеться курча.

Як правило, спостереження або експеримент визначається якимось комплексом умов. Наприклад, футбольний матч повинен проходити за правилами; курячі яйця мають знаходитися в інкубаторі не менше ніж 21 день з дотриманням визначеної методики зміни температури і вологості повітря.

Результат спостереження, досліду, експерименту називатимемо **подією**.

Випадковою подією називають такий результат спостереження або експерименту, який при дотриманні певного комплексу умов може відбутися, а може й не відбутися.

Наприклад, якщо кидати однорідну монету, то випадковою подією є випадіння цифри. Виявлення листа при перевірці поштової скриньки також є випадковою подією.

Уявімо, що випущено 1 000 000 лотерейних білетів і розігрується один автомобіль. Чи можна, придбавши один лотерейний білет, виграти цей приз? Звісно, можна, хоча ця подія *малоймовірна*. А якщо розігруватимуться 10 автомобілів? Зрозуміло, що ймовірність виграшу збільшиться. Якщо ж уявити, що розігруються 999 999 автомобілів, то ймовірність виграшу стає набагато більшою.

Отже, **ймовірності випадкових подій** можна порівнювати. Однак для цього слід домовитися, яким чином кількісно оцінювати можливість появи тієї чи іншої події.

Підставою для такої числової оцінки можуть бути результати численних спостережень або експериментів. Так, люди давно помітили, що багато подій відбувається з тією чи іншою, на подив постійною, **частотою**.

Демографам[1] добре відоме число 0,514. Статистичні дані, отримані в різні часи і в різних країнах, свідчать про те, що на 1000 новонароджених припадає в середньому 514 хлопчиків. Число 0,514 називають **частотою випадкової події** «народження хлопчика». Воно визначається формулою

$$\text{частота} = \frac{\text{кількість новонароджених хлопчиків}}{\text{кількість усіх новонароджених}}.$$

Наголосимо, що це число отримано в результаті аналізу багатьох спостережень. У таких випадках кажуть, що ймовірність події «народження хлопчика» приблизно дорівнює 0,514.

Ви знаєте, що куріння шкідливе для здоров'я. За даними Всесвітньої організації охорони здоров'я (ВООЗ) курці становлять приблизно 97 % від усіх хворих на рак легенів. Число 0,97 — це частота випадкової події «той, хто захворів на рак легенів, — курив», яка визначається таким відношенням:

$$\text{частота} = \frac{\text{кількість курців серед захворілих на рак легенів}}{\text{кількість усіх людей, які захворіли на рак легенів}}.$$

Це вражаюче число 97 % може у когось викликати сумніви. Проте ми хочемо підкреслити, що частота випадкової події тим краще характеризує явище, чим більше спостережень проведено. А висновок ВООЗ базується на аналізі багатьох спостережень, проведених у різних країнах, отже, стосується всіх людей.

У таких випадках кажуть, що ймовірність натрапити на курця серед тих, хто захворів на рак легенів, приблизно дорівнює 0,97 (або 97 %).

Щоб детальніше ознайомитися з поняттям імовірності випадкової події, звернемося до класичного прикладу з киданням монети.

---

[1] Демографія — наука про народонаселення.

Розглянемо випробування, яке полягає в тому, що кидають монету.

Припустимо, що в результаті двох кидків монети двічі випав герб. Тоді у даній серії, яка складається з двох випробувань, частота випадіння герба дорівнює:

$$\text{частота} = \frac{\text{кількість випадінь герба}}{\text{кількість кидків}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Чи це означає, що ймовірність випадіння герба дорівнює 1? Звісно, ні.

Для того щоб за частотою випадкової події можна було оцінювати її ймовірність, кількість випробувань має бути достатньо великою.

Починаючи з XVIII ст. багато дослідників проводили серії випробувань з киданням монети.

У таблиці наведено результати деяких таких випробувань.

Дослідник	Кількість кидків монети	Кількість випадінь герба	Частота випадіння герба
Жорж Бюффон (1707–1788)	4040	2048	0,5069
Огастес Де Морган (1806–1871)	4092	2048	0,5005
Вільям Джевонс (1835–1882)	20 480	10 379	0,5068
Всеволод Романовський (1879–1954)	80 640	39 699	0,4923
Карл Пірсон (1857–1936)	24 000	12 012	0,5005
Вільям Феллер (1906–1970)	10 000	4979	0,4979

За наведеними даними простежується чітка закономірність: при багаторазовому киданні монети частота появи герба незначно відхиляється від числа 0,5.

Отже, можна вважати, що ймовірність події «випадіння герба» приблизно дорівнює 0,5.

У кожному з розглянутих прикладів використовувалось поняття **частота випадкової події**. Цю величину ми обчислювали за формулою:

$$\text{частота} = \frac{\text{кількість появ події, яка цікавить}}{\text{кількість випробувань (спостережень)}}.$$

Далі за частотою ми оцінювали ймовірність події, а саме: ***ймовірність випадкової події наближено дорівнює частоті цієї події, знайденій при проведенні великої кількості випробувань (спостережень).***

Таку оцінку ймовірності випадкової події називають **статистичною**. Її використовують у різних галузях діяльності людини: фізиці, хімії, біології, страховому бізнесі, соціології, економіці, охороні здоров'я, спорті тощо.

Імовірність події позначають буквою P (першою буквою французького слова *probabilité* — імовірність).

Якщо у першому прикладі подію «народження хлопчика» позначити буквою A, то отриманий результат записують так:

$$P(A) \approx 0{,}514.$$

Якщо подію «випадіння герба» позначити буквою B, то

$$P(B) \approx 0{,}5.$$

28.1.° Наведіть приклади випробувань, результатом яких, на вашу думку, є: 1) малоймовірна подія; 2) дуже ймовірна подія.

Рис. 28.1

28.2.° Експеримент полягає у киданні кнопки. Кнопка може впасти як вістрям донизу, так і на шляпку (рис. 28.1). Підкиньте кнопку: 1) 10 разів; 2) 20 разів; 3) 50 разів; 4) 100 разів; 5) 200 разів. Результати, отримані в п'яти серіях експериментів, занесіть у таблицю.

Номер серії	1	2	3	4	5
Кількість експериментів (кидків) у серії	10	20	50	100	200
Кількість випадінь кнопки вістрям униз					
Кількість випадінь кнопки вістрям догори					

У кожній з п'яти серій експериментів підрахуйте частоту випадіння кнопки вістрям догори й оцініть імовірність настання цієї події. Яка подія більш імовірна: «кнопка впаде вістрям униз» або «кнопка впаде вістрям догори»?

28.3.° Проведіть серію, яка складається зі 100 експериментів, у яких підкидають ґудзик з петлею (рис. 28.2). Знайдіть частоту події «ґудзик упаде петлею вниз». Оцініть імовірність події «ґудзик упаде петлею догори» у проведеній серії експериментів.

Рис. 28.2

28.4.° У таблиці наведено дані про народження дітей у місті Києві за 2007 рік.

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень	Липень	Серпень	Вересень	Жовтень	Листопад	Грудень
Кількість народжень хлопчиків	1198	1053	1220	1151	1151	1279	1338	1347	1329	1287	1196	1243
Кількість народжень дівчаток	1193	1065	1137	1063	1163	1228	1258	1335	1218	1239	1066	1120

Підрахуйте частоту народжень хлопчиків у кожному місяці і за весь 2007 рік. Оцініть імовірність народження дівчинки у 2007 році.

28.5.° У деякому місті N зареєстровано m автомобілів, з них автомобілів «Таврія» було n. Оцініть імовірність зустріти на вулиці автомобіль «Таврія».

28.6.° Оператор довідкової служби протягом робочого дня (9:00–17:00) у середньому розмовляє по телефону 6 год. Оцініть імовірність того, що коли зателефонувати до довідкової у цей період, телефон виявиться вільним.

28.7.° За статистикою у місті Одеса протягом літа кількість сонячних днів у середньому дорівнює 70. Оцініть імовірність того, що, приїхавши влітку в Одесу на один день, гість натрапить на похмуру погоду.

28.8.° З великої партії лампочок вибрали 1000, серед яких виявилося 5 бракованих. Оцініть імовірність купити браковану лампочку.

28.9.° Під час епідемії грипу серед обстежених 40 000 жителів виявили 7900 хворих. Оцініть імовірність події «навмання обрана людина хвора на грип».

28.10.° Імовірність купити браковану батарейку дорівнює 0,02. Чи правильно, що в будь-якій партії зі 100 батарейок є дві браковані?

28.11.° Наведену таблицю називають «Навчальний план 9 класу загальноосвітньої школи»:

Предмет	Кількість годин на тиждень
Українська мова	2
Українська література	2
Іноземна мова	2
Зарубіжна література	2
Історія України	2
Всесвітня історія	1
Правознавство	1
Художня культура	1
Алгебра	2
Геометрія	2
Біологія	3
Географія	2
Фізика	2
Хімія	2
Трудове навчання	1
Інформатика	1
Основи здоров'я	1
Фізкультура	3

Оцініть імовірність того, що обраний навмання урок у тижневому розкладі 9 класу виявиться: 1) алгеброю; 2) геометрією; 3) математикою; 4) фізкультурою; 5) іноземною мовою.

28.12.* Оберіть навмання одну сторінку з повісті Марка Вовчка «Інститутка». Підрахуйте, скільки разів на цій сторінці зустрінуться букви «н», «о», «я», «ю», а також скільки всього на ній букв. Оцініть імовірність появи цих букв у вибраному тексті. Ця оцінка дозволить зрозуміти, чому на клавіатурах друкарської машинки та комп'ютера (рис. 28.3) букви «н» і «о» розміщено ближче до центру, а букви «я» і «ю» — ближче до краю.

Рис. 28.3

29. Класичне означення ймовірності

Для знаходження ймовірності деяких подій не обов'язково проводити випробування або спостереження. Достатньо керуватися життєвим досвідом і здоровим глуздом.

ПРИКЛАД 1 Нехай у коробці лежать 10 червоних кульок. Яка ймовірність того, що взята навмання кулька буде червоного кольору? жовтого кольору?

Очевидно, що при випробуванні за даних умов будь-яка взята навмання кулька буде червоного кольору.

Подію, яка за певним комплексом умов обов'язково відбудеться у будь-якому випробуванні, називають **достовірною (вірогідною)**. Імовірність такої події вважають рівною 1, тобто:

якщо A — достовірна подія, то

$$P(A) = 1.$$

Також очевидно, що при будь-якому випробуванні кулька не може бути жовтого кольору, адже в коробці їх немає.

Подію, яка за певним комплексом умов не може відбутися в жодному випробуванні, називають **неможливою**. Імовірність такої події вважають рівною 0, тобто:

якщо A — неможлива подія, то

$$P(A) = 0.$$

Зауважимо, що для будь-якої події A виконується нерівність

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

ПРИКЛАД 2 Розглянемо експеримент, який полягає в тому, що однорідну монету підкидають один раз.

Зрозуміло, що можна отримати тільки один з двох результатів: випадіння цифри або випадіння герба. Причому жоден з них не має переваг. Такі результати називають **рівноможливими**, а відповідні випадкові події **рівноймовірними**. Тоді природно вважати, що ймовірність кожної з подій «випадіння герба» і «випадіння цифри» дорівнює $\frac{1}{2}$.

Підкреслимо: це зовсім не означає, що в будь-якій серії експериментів з киданням монети половиною результатів буде випадіння герба. Ми можемо лише прогнозувати, що при великій кількості випробувань частота випадіння герба приблизно дорівнюватиме $\frac{1}{2}$.

Розглянемо ще кілька прикладів, у яких ключову роль відіграватимуть рівноможливі результати.

ПРИКЛАД 3 При киданні грального кубика (рис. 29.1) можна отримати один із шести результатів: випаде 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок. Усі ці результати рівноможливі. Тому природно вважати, що, наприклад, імовірність події «випадіння 5 очок» дорівнює $\frac{1}{6}$.

Рис. 29.1

ПРИКЛАД 4 Нехай випущено 1 000 000 лотерейних білетів, 10 з яких є виграшними. Випробування полягає в тому, що купляють один білет. Цей експеримент призводить до 1 000 000 рівноможливих результатів: купили перший білет, купили другий білет і т. д. Тоді ймовірність виграшу при купівлі одного білета дорівнює $\frac{10}{1\,000\,000} = \frac{1}{100\,000}$.

ПРИКЛАД 5 Нехай у коробці лежать 15 більярдних куль, пронумерованих числами від 1 до 15. Яка ймовірність того, що вийнята навмання куля матиме номер, кратний 3?

Зрозуміло, що в цьому випробуванні є 15 рівноможливих результатів. З них є 5, які нас задовольняють: коли витягують кулі з номерами 3, 6, 9, 12, 15. Тому природно вважати, що ймовірність події «витягнули кулю з номером, кратним 3» дорівнює $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

Попри те що в прикладах 1–5 розглядалися різні ситуації, разом з тим їх описує одна математична модель. Пояснимо це.

- У кожному прикладі при випробуванні можна отримати один з n *рівноможливих* результатів.

Приклад 1: $n = 10$.

Приклад 2: $n = 2$.

Приклад 3: $n = 6$.

Приклад 4: $n = 1\ 000\ 000$.

Приклад 5: $n = 15$.

- У кожному прикладі розглядається деяка подія A, яку спричиняють m результатів. Називатимемо їх **сприятливими**.

Приклад 1: A — витягли червону кульку, $m = 10$, або A — витягли жовту кульку, $m = 0$.

Приклад 2: A — випав герб, $m = 1$.

Приклад 3: A — випала наперед задана кількість очок на грані кубика, $m = 1$.

Приклад 4: A — виграш призу, $m = 10$.

Приклад 5: A — витягли кулю, номер якої кратний 3, $m = 5$.

У кожному прикладі ймовірність події A можна обчислити за формулою:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Означення. **Якщо випробування закінчується одним з n рівноможливих результатів, з яких m призводять до настання події A, то ймовірністю події A називають відношення $\frac{m}{n}$.**

Таке означення ймовірності називають класичним.

Підкреслимо, що *коли результати випробування не є рівноможливими, то класичне означення ймовірності до такої ситуації застосувати не можна.*

Рис. 29.2

Наприклад, якщо монету замінити на ґудзик (рис. 29.2), то події «ґудзик упаде петлею донизу» і «ґудзик упаде петлею догори» нерівноймовірні. Оцінити ймовірність кожної з них можна в результаті експерименту за допомогою частот цих подій, знайдених при проведенні великої кількості випробувань.

ПРИКЛАД 6 Кидають одночасно два гральні кубики: синій і жовтий. Яка ймовірність того, що випадуть дві шістки?

За допомогою таблиці, зображеної на рисунку 29.3, ми можемо встановити, що в цьому експерименті можна отримати 36 рівноможливих результатів, з яких сприятливим є тільки один. Тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{1}{36}$.

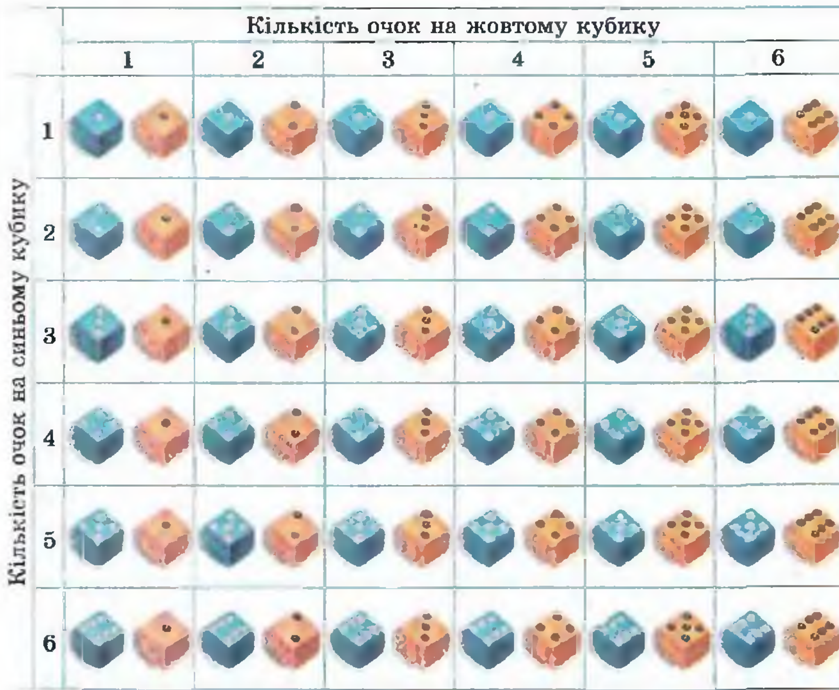


Рис. 29.3

ПРИКЛАД 7 **(задача Д'Аламбера)** Кидають одночасно дві однакові монети. Яка ймовірність того, що хоча б один раз випаде герб?

Ця задача схожа на задачу з прикладу 6. Різниця лише в тому, що кубики відрізнялися за кольором, а монети є нерозрізнимими. Щоб у цьому експерименті визначити всі рівноможливі результати, будемо розрізняти монети, попередньо їх пронумерувавши. Тоді можна отримати чотири рівноможливі результати (рис. 29.4).

У перших трьох з цих результатів хоча б один раз випав герб. Ці результати є сприятливими. Тому ймовірність того, що при

Рис. 29.4

одночасному киданні двох монет хоча б один раз випаде герб, дорівнює $\frac{3}{4}$.

ПРИКЛАД 8 Кидають одночасно два однакові гральні кубики. Яка ймовірність того, що випадуть числа, сума яких дорівнюватиме 11?

Даний дослід має 11 результатів. Сума чисел, які випали, може *дорівнювати* 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Тут помилкою було б вважати, що ймовірність події «сума чисел, які випали, дорівнює 11» становить $\frac{1}{11}$. Справа в тому, що перелічені 11 результатів досліду не є рівноможливими. Наприклад, результат «сума чисел дорівнює 2» може бути отриманий тільки одним способом, а результат «сума чисел дорівнює 6» — п'ятьма способами (переконайтеся в цьому самостійно).

Щоб мати змогу скористатися класичним означенням імовірності, слід інтерпретувати дослід так, щоби будь-яке випробування закінчувалося одним з рівноможливих результатів.

Для цього будемо умовно розрізняти кубики, наприклад за кольором. Тоді можна отримати 36 рівноможливих результатів (рис. 29.3). З них тільки два є сприятливими. Тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

Наступний приклад ще раз підкреслює, наскільки важливо в досліді визначити всі рівноможливі результати.

ПРИКЛАД 9 Розглядаються всі сім'ї з двома дітьми, у яких щонайменше одна дитина — хлопчик. Яка ймовірність того, що в обраній навмання такій сім'ї є два хлопчики? (Вважатимемо, що народження хлопчика і народження дівчинки рівноймовірні.)

Здавалося б, у цій задачі відповіддю є число $\frac{1}{2}$. Адже один хлопчик у сім'ї вже є, а отже, другою дитиною з рівною ймовірністю буде або хлопчик, або дівчинка.

Насправді наведені міркування — це розв'язання іншої задачі: *розглядаються всі сім'ї з двома дітьми, у яких старша дитина* — хлопчик. Яка ймовірність того, що у вибраній навмання такій сім'ї є два хлопчики?

Комплекс умов нашого експерименту дає такі три рівноможливі результати:

старша дитина — хлопчик, молодша дитина — хлопчик;
старша дитина — хлопчик, молодша дитина — дівчинка;
старша дитина — дівчинка, молодша дитина — хлопчик.

Отже, шукана ймовірність дорівнює $\frac{1}{3}$.

На завершення цього пункту зазначимо таке.

На перший погляд здається, що багатьма явищами, які відбуваються навколо нас, керує «його величність випадок». Проте при більш ґрунтовному аналізі з'ясовується, що через хаос випадковостей прокладає собі дорогу закономірність, яку можна кількісно оцінити. Науку, яка займається такими оцінками, називають **теорією ймовірностей.**

29.1.° Наведіть приклади достовірних подій.

29.2.° Наведіть приклади неможливих подій.

29.3.° У кошику лежать 10 червоних і 15 зелених яблук. Яка ймовірність взяти навмання з кошика грушу? яблуко?

29.4.° Навмання вибирають три парні цифри. Яка ймовірність того, що число, записане цими цифрами, буде непарним?

29.5.° Навмання вибирають три непарні цифри. Яка ймовірність того, що число, записане цими цифрами, буде непарним?

29.6.° Яка ймовірність того, що, переставивши букви в слові «алгебра», ми отримаємо слово «геометрія»?

29.7.° Наведіть приклади подій з рівноможливими результатами.

29.8.° Наведіть приклади подій з нерівноможливими результатами.

29.9.° Чи рівноймовірні події *A* і *B*:

1) подія *A*: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з номером 1;
подія *B*: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з номером 7;
2) подія *A*: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з парним номером;
подія *B*: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з непарним номером?

29.10.° Яка ймовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде кількість очок, що дорівнює:

1) одному;
2) трьом;
3) парному числу;
4) числу, яке кратне 5;
5) числу, яке не ділиться націло на 3;
6) числу, яке кратне 7?

29.11.° Уяви собі, що в класі, у якому ти навчаєшся, розігрується одна безкоштовна туристична поїздка до Лондона. Яка ймовірність того, що до Лондона поїдеш ти?

29.12.° Щоб скласти іспит з математики, потрібно вивчити 35 білетів. Учень вивчив бездоганно 30 білетів. Яка ймовірність того, що, відповідаючи на один навмання витягнутий білет, він отримає оцінку 12 балів?

29.13.° Щоб скласти іспит з математики, треба вивчити 30 білетів. Учень не вивчив тільки один білет. Яка ймовірність того, що він не складе іспит, відповідаючи на один білет?

29.14.° Яка ймовірність того, що ученицю вашого класу, яку викличуть до дошки на уроці математики, зватимуть Катериною?

29.15.° У класі вчиться 12 дівчаток і 17 хлопчиків. Один учень спізнився до школи. Яка ймовірність того, що це: 1) був хлопчик; 2) була дівчинка?

29.16.° У лотереї 20 виграшних білетів і 280 білетів без виграшу. Яка ймовірність виграти, купивши один білет?

29.17.° У коробці лежать 7 синіх і 5 жовтих кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться: 1) жовтою; 2) синьою?

29.18.° У коробці було 23 картки, пронумерованих від 1 до 23. З коробки навмання взяли одну картку. Яка ймовірність того, що на ній записано число:

1) 12;
2) 24;
3) парне;
4) непарне;
5) кратне 3;
6) кратне 7;
7) двоцифрове;
8) просте;
9) у записі якого є цифра 9;
10) у записі якого є цифра 1;
11) у записі якого відсутня цифра 5;
12) сума цифр якого ділиться націло на 5;
13) при діленні якого на 7 отримують остачу 5;
14) у записі якого відсутня цифра 1 ?

29.19.° З натуральних чисел від 1 до 30 навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число буде:

1) простим;
2) дільником числа 18;
3) квадратом натурального числа?

29.20.° Набираючи номер телефону свого товариша, Микола забув: 1) останню цифру; 2) першу цифру. Яка ймовірність того, що він з першої спроби набере правильний номер?

29.21. Абонент забув дві останні цифри номера телефону і набирає їх навмання. Яка ймовірність правильно набрати номер, якщо абонент тільки пам'ятає, що дві останні цифри: 1) непарні; 2) різні і парні?

29.22. Яка ймовірність того, що твій найщасливіший день у наступному році припаде на: 1) 7 число: 2) 31 число; 3) 29 число?

29.23. Грані кубика пофарбовано в червоний або білий колір (кожну грань в один колір). Імовірність випадіння червоної грані дорівнює $\frac{5}{6}$, а ймовірність випадіння білої грані — $\frac{1}{6}$. Скільки червоних і скільки білих граней у кубика?

29.24. Грані кубика пофарбовано в два кольори — синій і жовтий (кожну грань в один колір). Імовірність того, що випаде синя грань, дорівнює $\frac{2}{3}$, а що жовта — $\frac{1}{3}$. Скільки синіх і скільки жовтих граней у кубика?

29.25. У коробці лежать 2 сині кульки і кілька червоних. Скільки червоних кульок у коробці, якщо ймовірність того, що вибрана навмання кулька:

1) виявиться синьою, дорівнює $\frac{2}{5}$;

2) виявиться червоною, дорівнює $\frac{4}{5}$?

29.26. Серед двоцифрових чисел навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що:
1) його цифра десятків більша, ніж цифра одиниць;
2) його цифри десятків і одиниць рівні;
3) це число ділиться націло на 9?

29.27. Картки з номерами 1, 2, 3 довільним чином поклали в ряд. Яка ймовірність того, що картки з непарними номерами опиняться поруч?

29.28. На лавочку довільним чином сідають два хлопчики й одна дівчинка. Яка ймовірність того, що хлопчики опиняться поруч?

29.29. У коробці лежать 5 зелених і 7 синіх олівців. Яку найменшу кількість олівців треба вийняти навмання, щоб імовірність того, що серед вийнятих олівців хоча б один буде зеленого кольору, дорівнювала 1?

29.30. У коробці лежать 3 червоних, 7 жовтих і 11 синіх олівців. Яку найменшу кількість олівців треба вийняти навмання, щоб імовірність того, що серед вийнятих олівців хоча б один буде червоного кольору, дорівнювала 1?

29.31.** Кидають одночасно два гральні кубики. За допомогою рисунка 29.3 установіть, яка ймовірність того, що випадуть:
1) дві одиниці;
2) два однакових числа;
3) числа, сума яких дорівнює 7;
4) числа, сума яких більша за 10;
5) числа, добуток яких дорівнює 6.

29.32.** Гральний кубик кидають 2 рази. Яка ймовірність того, що:
1) першого разу випало менше 4 очок, а другого — більше 4;
2) першого разу випало менше очок, ніж другого;
3) у сумі за два кидки випало 5 очок?

29.33.** Яка ймовірність того, що при двох кидках грального кубика:
1) першого разу випаде число, менше від 5, а другого — більше за 4;
2) шістка випаде тільки другого разу;
3) першого разу випаде більше очок, ніж другого?

29.34.** Дмитро і Петро одночасно кидають по одному гральному кубику. Якщо сума очок, що випали, дорівнює 6, то виграє Дмитро, а якщо в сумі випадає 7 очок, то виграє Петро. У кого з гравців більше шансів виграти у цій грі?

29.35.** Двічі кидають монету. Яка ймовірність того, що випадуть: 1) два герби; 2) герб і цифра?

29.36.** З п'яти пронумерованих карток обирають навмання одну, запам'ятовують її номер і повертають до інших карток. Потім знову вибирають навмання з цих п'яти карток одну. Яка ймовірність того, що обидва рази витягували картку з одним і тим самим номером?

29.37.** Яка ймовірність того, що при трьох кидках монети: 1) тричі випаде герб; 2) двічі випаде герб; 3) один раз випаде герб; 4) хоча б один раз випаде герб?

29.38.** За круглий стіл випадковим чином сіли n людей ($n > 2$). З них тільки двоє знайомі один з одним. Яка ймовірність того, що двоє знайомих сядуть поруч?

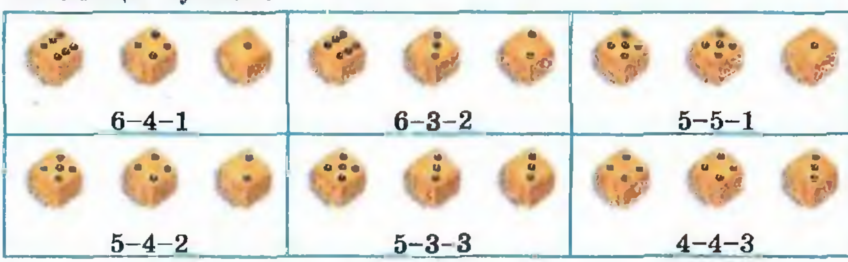
29.39.** У чергу випадковим чином стають четверо людей: A, B, C, D. Вважаючи всі варіанти їх розміщення рівноможливими, визначте ймовірність того, що A буде стояти попереду B.

Спочатку була гра

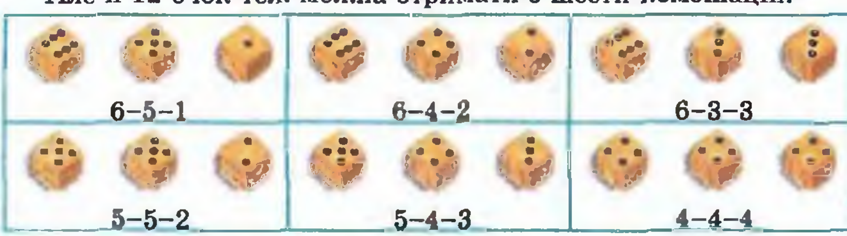
Ви знаєте багато ігор, у яких результат залежить від майстерності учасників. Проте є й такі ігри, у яких від уміння гравців нічого не залежить. Усе вирішує випадок. До останніх належить гра в кості. Вважають, що саме з неї розпочалася наука про випадкове.

Придворний французького короля Людовіка XIV, азартний гравець, філософ і літератор кавалер де Мере звернувся до видатного вченого Блеза Паскаля (1623–1662) з проханням роз'яснити такий парадокс. З одного боку, багатий ігровий досвід де Мере свідчив, що при киданні трьох гральних костей сума в 11 очок випадає частіше, ніж у 12 очок.

З іншого боку, цей факт вступав у суперечність з такими міркуваннями. Суму в 11 очок можна отримати із шести різних комбінацій кубиків:



Але й 12 очок теж можна отримати з шести комбінацій:



Отже, до появи в сумі 11 і 12 очок призводить однакова кількість сприятливих результатів. Таким чином, ці події мають однакові шанси, що суперечить практиці.

Паскаль зрозумів: помилка полягала в тому, що події, які розглядав де Мере, не є рівноймовірними. Наприклад, суму в 11 очок за допомогою комбінації 6-4-1 можна отримати при шести різних результатах кидання кубиків: (6; 4; 1); (6; 1; 4); (4; 6; 1); (4; 1; 6); (1; 6; 4); (1; 4; 6).

Блез Паскаль
(1623–1662)

Французький релігійний філософ, письменник, математик і фізик. У ранньому віці виявив математичні здібності, увійшов в історію науки як класичний приклад підліткової геніальності. Коло його математичних інтересів було надзвичайно широким. Зокрема, він винайшов загальний алгоритм для знаходження ознак подільності будь-яких цілих чисел, сформулював ряд основних положень теорії ймовірностей, методи обчислення площ фігур, площ поверхонь і об'ємів тіл. Сконструював першу обчислювальну машину — суматор.

Якщо підрахувати для кожної комбінації кількість способів її виникнення, то будемо мати: для суми 11 кількість сприятливих результатів дорівнює 27, а для суми 12 — 25. Причому всі такі результати є рівноможливими.

Цю та інші задачі, пов'язані з азартними іграми, Б.Паскаль обговорював у листуванні з П'єром Ферма (1601–1665). Вважають, що в цьому листуванні було закладено основи теорії ймовірностей.

Цікаво, що помилку, подібну до тієї, якої припустився де Мере, зробив видатний французький математик Жан Лерон Д'Аламбер (1717–1783), розв'язуючи таку задачу: «Монету кидають двічі. Яка ймовірність того, що хоча б раз випаде герб?» Він міркував приблизно так.

Можливі три результати: герб випав першого разу, герб випав другого разу, герб взагалі не випав. Тоді з трьох імовірних результатів сприятливими є тільки два, тобто ймовірність дорівнює $\frac{2}{3}$.

Становлення і розвиток теорії ймовірностей пов'язані з працями таких видатних вчених, як Якоб Бернуллі (1654–1705), П'єр Лаплас (1749–1827), Ріхард Мізес (1883–1953). У XX ст. особливого значення набули праці видатного радянського математика Андрія Миколайовича Колмогорова (1903–1987).

А. М. Колмогоров

М. Й. Ядренко

Українська математична наука подарувала світові плеяду видатних фахівців у галузі теорії ймовірностей. Імена Й. І. Гіхмана, Б. В. Гнеденка, А. В. Скорохода, М. Й. Ядренка відомі математикам у всьому світі.

Михайло Йосипович Ядренко значну частину своїх творчих сил віддавав також педагогічній діяльності. Він багато працював з обдарованою молоддю, був фундатором Всеукраїнських олімпіад юних математиків. Михайло Йосипович проводив значну просвітницьку діяльність. Зокрема, за його ініціативою в 1968 р. було створено першу в Україні науково-популярну збірку «У світі математики».

30. Обчислення ймовірностей за допомогою правил комбінаторики

У попередньому пункті для обчислення ймовірності події нам доводилося рахувати кількість рівноможливих результатів у заданому експерименті і кількість сприятливих результатів.

Часто ці підрахунки пов'язані з визначенням кількості різних комбінацій, які за певним правилом можна скласти з елементів заданої скінченної множини. Тому застосування правил комбінаторики — ефективний прийом для розв'язування багатьох задач з теорії ймовірностей. Частково ви в цьому могли переконатися, розв'язуючи задачі 29.20, 29.21, 29.27, 29.28, 29.31.

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1 У двох урнах лежать кулі, які відрізняються тільки кольором. У першій урні лежать дві білі і три чорні кулі, а в другій — три білі і дві чорні кулі. З кожної урни навмання дістають по одній кулі. Яка ймовірність того, що хоча б одна з двох куль виявиться білою?

Розв'язання. Цей дослід має три результати: кулі, які витягли, обидві білі, або обидві чорні, або одна куля біла, а друга — чорна. Проте ці результати не є рівноможливими (подумайте чому). Для того, щоб мати змогу в даному досліді розглядати рівноможливі результати, пронумеруємо всі 10 куль.

Оскільки в кожній урні лежить по 5 куль, то з них можна утворити $5 \cdot 5 = 25$ таких пар, що кулі в парах взяті з різних урн. Оскільки кулі пронумеровані, то ми можемо вважати, що всі 25 пар куль різні. Кулі з урн беруть навмання. Тому в даному експерименті є 25 рівноможливих результатів.

Оскільки в першій урні лежить 3 чорні кулі, а в другій — 2 чорні, то існує $3 \cdot 2 = 6$ пар куль чорного кольору. Тому кількість пар куль, серед яких є щонайменше одна біла, дорівнює $25 - 6 = 19$. Отже, кількість результатів, сприятливих для події «хоча б одна з куль виявиться білою» (подія A), дорівнює 19.

Отже, $P(A) = \frac{19}{25}$.

ПРИКЛАД 2 Дослід полягає в одночасному киданні чотирьох гральних кубиків. Знайдіть імовірність того, що:

1) випаде рівно одна шістка (подія A);
2) випадуть чотири різні цифри (подія B);
3) не випаде жодної шістки (подія C);
4) випаде хоча б одна шістка (подія D).

Розв'язання. Пронумеруємо кубики числами від 1 до 4. Будь-який результат експерименту записуватимемо у вигляді (a, b, c, d), де a, b, c і d — кількість очок, які випали відповідно на першому, другому, третьому і четвертому кубиках.

Разом може утворитися $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ таких четвірок. Жодний з результатів не має переваги. Тому в даному досліді є 6^4 рівноможливих результатів.

1) Єдина шістка, яка випала, може стояти на будь-якому з чотирьох місць. Нехай, наприклад, вона стоїть на першому місці. На інших трьох місцях стоять будь-які цифри від 1 до 5. Тоді кількість четвірок виду (6, b, c, d) дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Загальна кількість сприятливих варіантів дорівнює $4 \cdot 5^3$. Отже, $P(A) = \frac{4 \cdot 5^3}{6^4}$.

2) У цьому випадку будь-які чотири різні цифри, що випали, — це 4-елементна упорядкована підмножина множини {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Отже, кількість результатів, сприятливих для настання події B, дорівнює A_6^4. Звідси

$$P(B) = \frac{A_6^4}{6^4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}.$$

3) На кожному з чотирьох місць може стояти будь-яка з цифр від 1 до 5. Звідси кількість результатів, сприятливих для настання події C, дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$. Отримуємо $P(C) = \frac{5^4}{6^4}$.

4) Кількість усіх результатів дорівнює 6^4. Кількість усіх результатів, де немає жодної шістки, дорівнює 5^4. Тоді $6^4 - 5^4$ — це кількість усіх результатів, які містять хоча б одну шістку. Звідси $P(D) = \frac{6^4 - 5^4}{6^4}$.

ПРИКЛАД 3 Контролер у партії з 20 деталей навмання вибирає 5 деталей для перевірки. Якщо серед вибраних деталей немає жодної бракованої, то він приймає всю партію. Яка ймовірність того, що контролер прийме партію деталей, яка містить 7 бракованих?

Розв'язання. Оскільки контролер вибирає з 20 деталей 5 деталей навмання, то даний експеримент має C_{20}^5 рівноможливих результатів.

Нехай у партії з 20 деталей є 7 бракованих. Тоді якісних виробів є 13. Контролер пропускає партію з 20 деталей (подія A), якщо 5 деталей будуть вибрані з 13 якісних деталей. Отже, кількість результатів, сприятливих для настання події A, дорівнює C_{13}^5. Звідси $P(A) = \frac{C_{13}^5}{C_{20}^5} \approx 8\%$.

ПРИКЛАД 4 У змаганнях з баскетболу беруть участь 18 команд, з яких 5 команд вважаються фаворитами. Шляхом жеребкування команди ділять на дві групи A і B, по 9 команд у кожній. Яка ймовірність потрапляння до однієї групи:

1) п'яти команд-фаворитів (подія M);
2) рівно двох команд-фаворитів (подія K)?

Розв'язання. Кожну з груп можна утворити C_{18}^9 способами.

1) Нехай 5 команд-фаворитів потрапили до групи A. Тоді для доформування цієї групи до 9 команд потрібно вибрати 4 команди з 13 команд, що залишилися. Це можна зробити

C_{13}^4 способами. Оскільки п'ять команд-фаворитів можуть потрапити як у групу A, так і в групу B, то кількість результатів, сприятливих для події M, дорівнює $2 \cdot C_{13}^4$.

Отже, $P(M) = \frac{2C_{13}^4}{C_{18}^9} = \frac{1}{34}$.

2) Зрозуміло, що кожну з груп, яка містить дві команди-фаворити, можна утворити $C_5^2 \cdot C_{13}^7$ способами. Звідси $P(K) = \frac{2 \cdot C_5^2 \cdot C_{13}^7}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}$.

30.1.° Навмання вибирають 4 букви зі слова «ЗАКОН». Яка ймовірність того, що з вибраних чотирьох букв можна скласти слово «КОЗА»?

30.2.° Навмання вибирають 4 букви зі слова «ЛАСОЩІ». Яка ймовірність того, що з вибраних чотирьох букв можна скласти слово «САЛО»?

30.3.° Навмання вибирають чотири букви зі слова «ОКУЛЯРИ». Яка ймовірність того, що вибрані букви в послідовності вибору утворять слово «КУЛЯ»?

30.4.° Навмання вибирають 6 букв зі слова «ПІВДЕНЬ». Яка ймовірність того, що вибрані букви в послідовності вибору утворять слово «ВІДЕНЬ»?

30.5.° У ящику лежать 10 кульок, 4 з яких білі. Яка ймовірність того, що вибрані навмання 2 кульки будуть білими?

30.6.° Для шкільної лотереї підготовлено 50 білетів, з яких 10 призових. Учень вибрав навмання 3 білети. Яка ймовірність того, що всі ці білети будуть призовими?

30.7.° У партії зі 100 лампочок є 7 бракованих. Яка ймовірність вибрати навмання з цієї партії 4 небраковані лампочки?

30.8.° На екзамен з математики виносять 50 питань. Учень підготував тільки 30 питань. Білет складається з 5 питань, вибраних випадковим чином. Яка ймовірність того, що учень знатиме всі питання білета?

30.9.° Десять карток пронумеровано натуральними числами від 1 до 10. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що добуток номерів вибраних карток буде непарним числом?

30.10.° Десять карток пронумеровано натуральними числами від 1 до 10. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що сума номерів вибраних карток буде непарним числом?

30.11.° У партії зі 100 деталей є 7 бракованих. З цієї партії навмання вибирають 6 деталей. Яка ймовірність того, що серед вибраних 6 деталей 2 деталі виявляться бракованими?

30.12.° У ящику лежать 10 білих і 7 чорних кульок. Яка ймовірність того, що з п'яти вибраних навмання кульок три будуть білими?

30.13.° Знайдіть ймовірність того, що дні народження 7 навмання вибраних людей випадають на різні дні тижня.

30.14.° Дослід полягає в одночасному киданні чотирьох гральних кубиків. Знайдіть імовірність того, що випадуть:
1) три шістки й одна п'ятірка;
2) чотири однакові цифри;
3) щонайбільше одна шістка;
4) дві шістки.

30.15.° У чергу випадковим чином стають четверо людей: A, B, C, D. Вважаючи всі варіанти їх розташування рівноможливими, визначте ймовірність таких подій:
1) A буде першим у черзі;
2) B не буде останнім у черзі.

30.16.° У ящику лежать 15 синіх, 6 жовтих і 4 зелені кулі. Навмання вибирають 7 куль. Яка ймовірність того, що серед вибраних куль є 3 сині, 2 жовті і 2 зелені кулі?

30.17.•• У ящику лежать 10 білих і 7 чорних кульок. Яка ймовірність того, що з п'яти вибраних навмання кульок буде не більше двох білих?

30.18.•• На екзамен з математики виносять 50 питань. Учень підготував тільки 40 питань. Білет складається з 6 питань, вибраних випадковим чином. Щоб скласти екзамен, досить відповісти на 4 питання білета. Яка ймовірність того, що учень складе екзамен?

30.19.•• У партії зі 100 деталей є 7 бракованих. З цієї партії навмання вибирають 6 деталей. Яка ймовірність того, що серед вибраних деталей буде не більше двох бракованих?

30.20.•• У ліфт дев'ятиповерхового будинку на першому поверсі ввійшли 5 пасажирів. Кожний з них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайдіть імовірність події:
1) усі пасажири вийдуть на 9 поверсі;
2) усі пасажири вийдуть на одному поверсі;
3) усі пасажири вийдуть на різних поверхах;
4) усі пасажири вийдуть до п'ятого поверху.

30.21.** У колоді карт 4 масті по 9 карт у кожній. Яка ймовірність того, що при здачі 36 карт порівну чотирьом гравцям кожний гравець отримає всі карти однієї масті?

31. Початкові відомості про статистику

Яким тиражем слід випустити підручник з алгебри для 9 класу?

Чи варто певному політику висувати свою кандидатуру на чергових виборах мера?

Скільки кілограмів риби і морепродуктів вживає в середньому за рік один житель України?

Чи вигідно для концерту певного артиста орендувати стадіон?

На ці та багато інших запитань допомагає відповідати статистика.

Означення. Статистика (від латинського *status* — стан) — це наука про отримання, оброблення й аналіз кількісних даних, які характеризують масові явища.

Статистичне дослідження складається з кількох етапів:

Зупинимося окремо на кожному етапі.

Збирання даних

Ви знаєте, що шкідливі звички, неправильне харчування, малорухомий спосіб життя призводять до серцево-судинних захворювань. Такого висновку лікарі дійшли, дослідивши, звісно, не всіх людей планети.

Зрозуміло, що дослідження носило *вибірковий*, але *масовий* характер.

У статистиці сукупність об'єктів, на основі яких проводять дослідження, називають **вибіркою**.

У даному прикладі вибірка складалася з кількох мільйонів людей.

Слід зазначити, що статистичний висновок, заснований лише на чисельності вибірки, не завжди є достовірним. Наприклад, якщо ми, досліджуючи популярність артиста, обмежимося опитуванням людей, які прийшли на його концерт, то отримані висновки не будуть об'єктивними, адже вони прийшли на концерт саме тому, що цей артист їм подобається. Статистики кажуть, що вибірка має бути **репрезентативною** (від французького *représentatif* – показовий).

Так, лікарі, вивчаючи фактори ризику виникнення серцево-судинних захворювань, досліджували людей різного віку, професій, національностей тощо.

Отже, *збирання даних має ґрунтуватися на масовості та репрезентативності вибірки*. Інколи вибірка може збігатися з множиною всіх об'єктів, щодо яких проводиться дослідження. Прикладом такого дослідження є проведення державної підсумкової атестації з математики в 9 класі.

Способи подання даних

Зібрану інформацію (сукупність даних) зручно подавати у вигляді таблиць, графіків, діаграм.

Розглянемо кілька прикладів.

ПРИКЛАД 1 У таблиці подано результати виступів українських школярів на Міжнародних математичних олімпіадах протягом 1993–2008 рр. (Команда учасників на Міжнародних математичних олімпіадах складається не більше ніж із 6 осіб.)

Рік	Місце проведення	Кількість медалей				Без медалей
		Золоті	Срібні	Бронзові	Разом медалей	
1993	Туреччина	0	2	3	5	1
1994	Гонконг	1	1	2	4	2
1995	Канада	1	1	1	3	3
1996	Індія	1	0	5	6	0
1997	Аргентина	3	3	0	6	0
1998	Тайвань	1	3	2	6	0
1999	Румунія	2	2	1	5	1
2000	Південна Корея	2	2	0	4	2
2001	США	1	5	0	6	0
2002	Велика Британія	1	3	0	4	2
2003	Японія	1	2	3	6	0
2004	Греція	1	5	0	6	0
2005	Мексика	2	2	2	6	0
2006	Словенія	1	2	2	5	1
2007	В'єтнам	3	1	2	6	0
2008	Іспанія	2	2	2	6	0

У багатьох випадках дані зручно подавати у вигляді **стовпчастої діаграми**, яку ще називають **гістограмою** (від грецьких *histos* — стовп і *gramma* — написання). Така інформація легко сприймається і добре запам'ятовується.

ПРИКЛАД 2 На рисунку 31.1 подано інформацію про природно-заповідний фонд України.

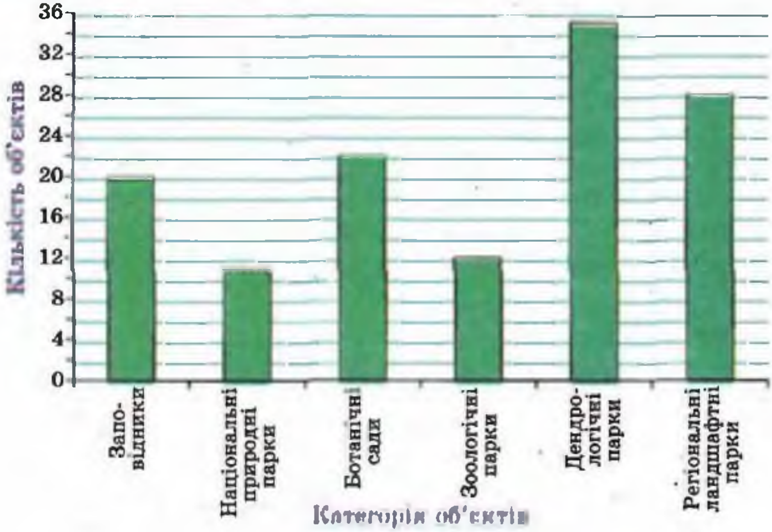


Рис. 31.1

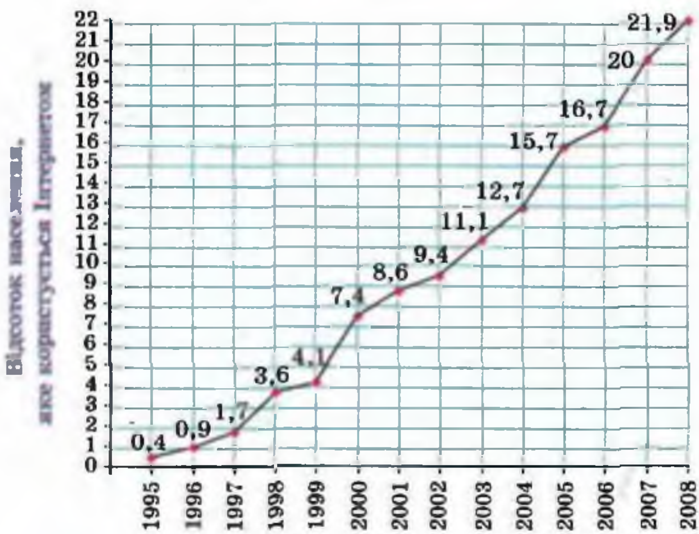


Рис. 31.2

ПРИКЛАД 3 Інформацію також можна подавати у вигляді графіків. Так, на рисунку 31.2 зображено графік щорічного відсоткового зростання кількості користувачів Інтернету у світі протягом 1995–2008 рр.

Стовпчасті діаграми і графіки зазвичай використовують тоді, коли хочуть продемонструвати, як з плином часу змінюється деяка величина.

ПРИКЛАД 4 На рисунку 31.3 наведено розподіл медалей, отриманих українськими школярами на міжнародних олімпіадах у 2008 р. Для цього використано **кругову діаграму**: круг зображує загальну кількість медалей, а кожному предмету відповідає певний сектор круга.

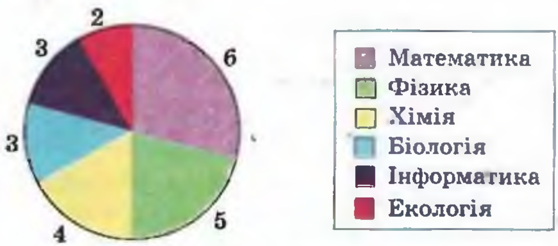


Рис. 31.3

Аналіз даних, висновки і рекомендації

Статистичні відомості надходять з різних галузей знань і діяльності людини: економіки, медицини, соціології, демографії, сільського господарства, метеорології, спорту тощо. Проте статистичні методи оброблення (аналізу) даних багато в чому схожі. Ознайомимося з деякими з них.

Звернемося до прикладу 1. Наведена таблиця дозволяє дізнатися, скільки в середньому медалей за рік виборювали школярі України на Міжнародних математичних олімпіадах. Для цього потрібно кількість усіх медалей, отриманих протягом періоду, що розглядається, поділити на кількість років. Наприклад, за період 1993–2008 рр. маємо:

$$\frac{5+4+3+6+6+6+5+4+6+4+6+6+6+5+6+6}{16}=\frac{84}{16}=5,25.$$

Оскільки за рік можна вибороти не більше 6 медалей, то **середнє значення** 5,25 свідчить про те, що команда України гідно виступає на цьому престижному форумі.

У статистичній інформації середні значення отриманих сукупностей даних трапляються досить часто. Наприклад, наведемо таблицю реалізації основних продуктів харчування через мережі великих магазинів у деяких країнах (у кілограмах на людину за рік).

Країна	М'ясо	Риба і море-продукти	Зернові	Овочі	Фрукти
Австралія	118,1	22,1	86,6	93,8	103,5
Данія	111,9	24,3	139,5	102,2	146,5
Іспанія	122,0	27,4	98,9	143,3	105,4
Італія	91,0	26,2	162,6	178,3	131,0
Канада	99,0	25,6	119,3	120,3	119,2
США	123,4	21,1	110,8	123,5	113,5
Україна	33,9	15,6	158,4	116,0	36,4
Франція	98,3	31,2	117,2	142,9	95,5

Таку таблицю можуть використовувати, наприклад, економісти у дослідженнях, висновках і рекомендаціях, власники магазинів і виробники продукції при плануванні своєї діяльності.

Проте середнє значення не завжди точно (адекватно) відображає ситуацію. Наприклад, якщо в країні доходи різних верств населення дуже різняться, то середній дохід на одну людину для більшості жителів може не відображати їх матеріального стану.

Наприклад, у якійсь країні 100 жителів — дуже багаті, а решта 5 мільйонів — дуже бідні. Тоді показник середнього доходу може виявитися не низьким, а отже, неадекватно відображатиме загальну бідність населення.

У подібних випадках для аналізу даних використовують інші характеристики.

За допомогою прикладу 1 складемо таблицю, яка відображає кількість медалей кожного виду:

Золоті медалі	Срібні медалі	Бронзові медалі	Без медалей
23	36	25	12

Таку таблицю називають **частотною**, а числа, записані в другому рядку, — **частотами**.

Частота 36 показує, що українські школярі найчастіше завойовували срібні медалі. Показник «срібні медалі» називають **модою отриманих даних**.

Це слово всім добре знайоме. Ми часто кажемо «увійти в моду», «вийти з моди», «данина моді». У повсякденному житті мода означає сукупність поглядів і уподобань, яким більшість віддає перевагу в певний момент часу.

Саме мода є найважливішою характеристикою тоді, коли отримана сукупність даних не є числовою множиною. Продемонструємо це на такому прикладі.

Одна відома фірма, яка планує постачати джинси в Україну, провела опитування репрезентативної вибірки, яка складалася з 500 осіб. У результаті була отримана така частотна таблиця:

Розмір джинсів	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL
Частота	52	71	145	126	59	40	7
Відносна частота (у %)	10,4	14,2	29	25,2	11,8	8	1,4

У третьому рядку цієї таблиці записано відношення відповідної частоти до величини вибірки. Це відношення, записане у відсотках, називають **відносною частотою**. Наприклад, для розміру XS маємо: $\frac{52}{500} \cdot 100 = 10{,}4$ (%).

Мода даної вибірки — це розмір M, і їй відповідає відносна частота 29 %.

Тим самим фірма отримала інформацію, що найбільшу частину обсягів постачання (приблизно 29 %) мають становити джинси розміру M.

Зауважимо, що якби в таблиці дві частоти були б рівні і набували найбільших значень, то модою були б два відповідні розміри.

Вище ми навели приклад, коли середнє значення не точно відображає матеріальний стан людей в країні. Більш повну характеристику можна отримати, якщо середнє значення доповнити результатом такого дослідження.

Утворюють репрезентативну вибірку, яка складається з людей певної країни, і отримують сукупність даних, яка складається з доходів. Далі відповідно до шкали, яка визначає рівень доходів (низький, середній, високий), розбивають отриманий ряд даних на три групи. Складають таблицю, до якої вносять значення частот і відносних частот:

Рівень доходів	Низький	Середній	Високий
Частота	m	n	k
Відносна частота	p %	q %	r %

Мода такої сукупності даних може характеризувати рівень доходів у країні.

Дослідження сукупності даних можна порівняти з роботою лікаря, який ставить діагноз. Залежно від скарг пацієнта або симптомів, що спостерігаються, лікар обирає певну методику пошуку причини хвороби. Зрозуміло, що ця методика визначає точність діагнозу. Так само й у статистиці: залежно від зібраної інформації і способу її отримання застосовують різні методи її оброблення. Ці методи можуть доповнювати один одного, якийсь з них може точніше (адекватніше), ніж інші, відображати конкретну ситуацію. Так, аналізуючи виступи українських школярів на Міжнародних математичних олімпіадах, можна встановити, що статистичні характеристики середнє значення і мода вдало узгоджуються. А в прикладі, який визначає ходовий розмір джинсів, найбільш прийнятним є пошук моди.

Чим більшим є арсенал методик оброблення даних, тим об'єктивніший висновок можна отримати.

Ознайомимося ще з однією важливою статистичною характеристикою.

Сім'я прийняла рішення зробити ремонт кухні і цікавиться, скільки коштує покласти один квадратний метр кахляної плитки. Вивчивши прейскурант 11 будівельних фірм, вони отримали таку інформацію (ціни записано в гривнях у порядку зростання):

40, 40, 45, 45, 50, 65, 90, 100, 150, 225, 250.

Сім'я хоче вибрати фірму із середніми цінами.

Середнє значення отриманої сукупності даних дорівнює 100.

Проте отримані дані показують, що ціну 100 грн. скоріше можна віднести до високих, ніж до середніх.

Зазначимо, що число 65 стоїть посередині упорядкованої сукупності даних. Його називають **медіаною** цієї вибірки. У цій ситуації саме медіана допомагає вибрати фірму із середніми цінами. Справді, у послідовності з 11 чисел є п'ять менших від 65 і п'ять більших за 65.

Тепер розглянемо упорядковану сукупність даних, яка складається з парної кількості чисел, наприклад з восьми:

1, 4, 4, 7, 8, 15, 24, 24.

Тут «серединою» вибірки є одразу два числа: 7 і 8. Вважають, що медіана такої вибірки дорівнює їх середньому арифметичному $\frac{7+8}{2} = 7,5$.

Середнє значення, моду і медіану називають **мірами центральної тенденції** отриманої сукупності даних.

31.1.° Користуючись таблицею середніх річних температур повітря в окремих містах України, побудуйте відповідну стовпчасту діаграму.

Місто	Температура, °C	Місто	Температура, °C
Львів	7,5	Черкаси	7,3
Ужгород	9,3	Полтава	6,8
Київ	6,9	Донецьк	7,5
Суми	6,0	Луганськ	9,2
Одеса	9,4	Ялта	13,1

31.2.° Користуючись таблицею розвитку Київського метрополітену, побудуйте графік зростання довжини його ліній.

Рік	Кількість станцій	Довжина ліній, км	Рік	Кількість станцій	Довжина ліній, км
1960	5	5,2	1987	28	32,8
1965	10	12,7	1992	35	43,3
1971	14	18,2	2000	39	51,7
1976	17	20,5	2004	42	56,6
1981	23	28,2	2008	46	59,7

31.3.° Користуючись таблицею розвитку Київського метрополітену, побудуйте графік збільшення кількості його станцій.

31.4.° Визначте, чи є репрезентативною вибірка:

1) щоб дізнатись, як часто жителі міста у вихідні дні бувають на природі, були опитані члени трьох садових кооперативів;
2) з метою виявлення знання дев'ятикласниками напам'ять віршів Лесі Українки, випадковим чином було опитано 4 тисячі дев'ятикласників у різних регіонах країни;

3) для визначення відсотка користувачів Інтернету в Україні випадковим чином опитали 500 киян;
4) для з'ясування рейтингу молодіжної телепрограми випадковим чином були опитані 10 тисяч юнаків і дівчат у віці від 15 до 20 років.

31.5.° Знайдіть міри центральної тенденції сукупності даних:
1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;
2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

31.6.° Дівчата 9 класу на уроці фізкультури здавали залік зі стрибків у висоту. Учитель записав таку послідовність результатів:
105 см, 65 см, 115 см, 100 см, 105 см, 110 см, 110 см, 115 см, 110 см, 100 см, 115 см.
Знайдіть середнє значення і медіану отриманих даних.

31.7.° Класний керівник 9 класу веде облік відвідування учнями занять. Наприкінці тижня його записи мали такий вигляд:

День тижня	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця
Кількість відсутніх	3	2	5	4	8

1) Знайдіть, скільки учнів були відсутніми у середньому в день протягом цього тижня.
2) Знайдіть моду отриманих даних.

31.8.° У 9 класі, у якому навчається 23 учні, провели опитування: скільки приблизно годин на день витрачає дев'ятикласник на виконання домашніх завдань. Відповіді учнів подано у вигляді гістограми (рис. 31.4).
1) Заповніть частотну таблицю:

Час, витрачений на виконання домашніх завдань, год	0	1	2	3	4
Частота					
Відносна частота					

2) Скільки часу на день у середньому витрачає учень цього класу на виконання домашнього завдання? (Знайдіть середнє значення ряду даних.)
3) Скільки часу витрачає більшість дев'ятикласників цього класу? (Знайдіть моду ряду даних.)

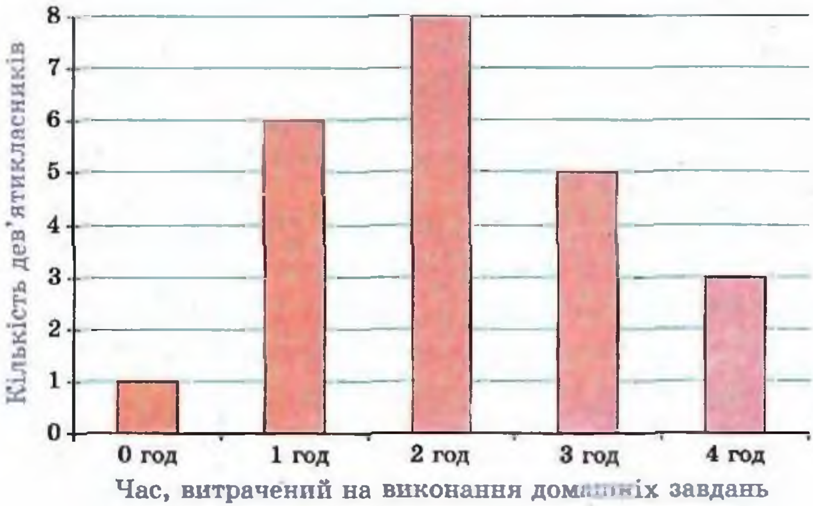


Рис. 31.4

31.9.* На рисунку 31.5 зображено стовпчасту діаграму результатів письмової роботи з алгебри у трьох дев'ятих класах.

1) Заповніть частотну таблицю:

Кількість балів	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Частота												
Відносна частота												

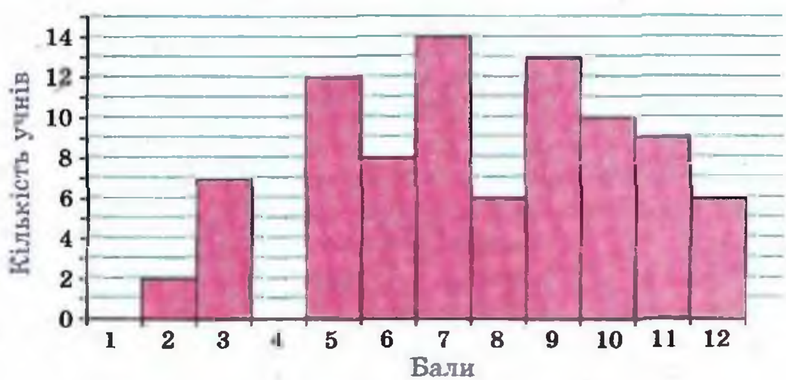


Рис. 31.5

2) Знайдіть середній бал, отриманий учнями за цю письмову роботу.
3) Знайдіть моду отриманих даних.

31.10.° За результатами останньої контрольної роботи з алгебри, яка була проведена у вашому класі, заповніть частотну таблицю, наведену в задачі 31.9.
1) Знайдіть середній бал, отриманий учнями за цю контрольну роботу.
2) Знайдіть моду отриманих даних.

31.11.° Учнів однієї херсонської школи опитали: скільки разів у житті вони літали на літаку. Отримані дані наведено в таблиці:

Кількість здійснених польотів	0	1	2	3	4	5
Кількість учнів	530	92	46	30	8	4
Відносна частота (%)						

1) Заповніть третій рядок таблиці.
2) Подайте отримані дані у вигляді стовпчастої діаграми.
3) Знайдіть моду і середнє значення отриманих даних.
4) Поясніть, чи можна вважати вибірку, що розглядається, репрезентативною для висновків щодо всіх школярів м. Херсона.

31.12.° Випишіть усі ваші оцінки з алгебри, отримані протягом року. Знайдіть середнє значення, моду і медіану отриманого ряду даних.

31.13.° Директор фірми отримує 20 000 грн. на місяць, два його заступники по 10 000 грн., а решта 17 робітників фірми — по 1500 грн. на місяць. Знайдіть середнє значення, моду, медіану заробітних плат у цій фірмі.

31.14.° Прочитайте один з найвідоміших віршів Т. Г. Шевченка:

Садок вишневий коло хати,
Хрущі над вишнями гудуть,
Плугатарі з плугами йдуть,
Співають ідучи дівчата,
А матері вечерять ждуть.

Сем'я вечеря коло хати,
Вечірня зіронька встає.
Дочка вечерять подає,
А мати хоче научати,
Так соловейко не дає.

Поклала мати коло хати
Маленьких діточок своїх;
Сама заснула коло їх.
Затихло все, тільки дівчата
Та соловейко не затих.[1]

Для букв «а», «е», «і», «ї», «н», «о», «р», «у», «ф», «я» складіть частотну таблицю їх наявності у поданому вірші. Визначте моду отриманих даних.

31.15.° Протягом травня 2007 р. ранкова температура повітря в Києві становила:

Дата	Температура, °C	Дата	Температура, °C	Дата	Температура, °C
01.05.2007	5	11.05.2007	20	21.05.2007	30
02.05.2007	4	12.05.2007	21	22.05.2007	29
03.05.2007	6	13.05.2007	19	23.05.2007	31
04.05.2007	11	14.05.2007	20	24.05.2007	29
05.05.2007	19	15.05.2007	26	25.05.2007	28
06.05.2007	15	16.05.2007	25	26.05.2007	29
07.05.2007	16	17.05.2007	25	27.05.2007	30
08.05.2007	19	18.05.2007	26	28.05.2007	27
09.05.2007	14	19.05.2007	28	29.05.2007	26
10.05.2007	10	20.05.2007	28	30.05.2007	26
				31.05.2007	25

Знайдіть міри центральної тенденції отриманих даних.

31.16.° Побудуйте ряд: 1) з п'яти чисел; 2) з шести чисел, у якого:

а) середнє значення дорівнює медіані;

б) середнє значення більше за медіану.

[1] Т. Г. Шевченко. Твори у 12 т. / Ін-т літератури ім. Т. Г. Шевченка Академії наук України.— К.: «Наукова думка», 2003.— Т. 2.— С. 17.

§ 6. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

32. Числові послідовності

Часто у повсякденному житті нам трапляються об'єкти, з якими зручно мати справу, якщо їх попередньо пронумерувати. Наприклад, номери мають місяці і квартали року, дні тижня, під'їзди і квартири будинку, вагони поїзда, і навіть кожен учень вашого класу має свій порядковий номер у класному журналі.

Об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами 1, 2, 3, ..., n, ..., утворюють **послідовності**.

Так, можна казати про послідовність сторінок у книзі, букв у слові, поверхів у будинку тощо.

Об'єкти, які утворюють послідовність, називають **членами послідовності**. Зрозуміло, що кожний член послідовності має свій номер. Наприклад, січень — це **перший член** у послідовності місяців року, число 3 — **другий член** послідовності простих чисел. Узагалі, якщо член послідовності має номер n, то його називають **n-м членом послідовності.**

Якщо членами послідовності є числа, то таку послідовність називають **числовою**.

Наведемо приклади числових послідовностей.

1, 2, 3, 4, 5, ... — послідовність натуральних чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... — послідовність парних чисел;

0,3; 0,33; 0,333; ... — послідовність десяткових наближень дробу $\frac{1}{3}$;

19, 38, 57, 76, 95 — послідовність двоцифрових чисел, кратних 19;

−1, −2, −3, −4, −5, ... — послідовність від'ємних цілих чисел.

Надалі ми розглядатимемо тільки числові послідовності.

Наведені вище приклади показують, що послідовності бувають **скінченними** і **нескінченними**. Наприклад, послідовність парних натуральних чисел — це нескінченна послідовність, а послідовність двоцифрових чисел, кратних 19, — це скінченна послідовність.

Для позначення членів послідовності використовують букви з індексами:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Індекс указує порядковий номер члена послідовності. Для позначення самої послідовності використовують запис (a_n). Наприклад, нехай (p_n) — послідовність простих чисел. Тоді $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ і т. д.

Послідовність вважають заданою, якщо кожний її член можна визначити за його номером.

Ознайомимося з основними способами задання послідовності.

Розглянемо послідовність, у якої перший член дорівнює 1, а кожний наступний член на 3 більший за попередній. Такий спосіб задання послідовності називають **описовим**. Його можна проілюструвати за допомогою запису з трьома крапками, виписавши кілька перших членів послідовності у порядку зростання номерів:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots .$$

Цей запис доцільно застосовувати тоді, коли зрозуміло, які числа мають бути записані замість трьох крапок.

Наприклад, у послідовності, яку ми розглядаємо, зрозуміло, що після числа 19 має бути записане число 22.

Якщо послідовність є скінченною, то її можна задати за допомогою таблиці. Наприклад, наведена таблиця задає послідовність кубів одноцифрових натуральних чисел:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Послідовності можна задавати за допомогою формул. Наприклад, рівність $x_n = 2^n$, де змінна n набуває всіх натуральних значень, задає послідовність (x_n) натуральних степенів числа два: 2, 4, 8, 16, 32, ... У таких випадках кажуть, що послідовність задано за допомогою **формули n-го члена послідовності**.

Розглянемо кілька прикладів.

Формула $a_n = 2n - 1$ задає послідовність натуральних непарних чисел:

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots .$$

Формула $y_n = (-1)^n$ задає послідовність (y_n), у якій усі члени з непарними номерами дорівнюють -1, а з парними номерами дорівнюють 1:

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots .$$

Формула $c_n = 7$ задає послідовність (c_n), усі члени якої дорівнюють числу 7:

$$7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \ldots\ .$$

Послідовність, усі члени якої рівні, називають **стаціонарною**.

Наведені способи задання послідовностей допомагають простежити зв'язок між поняттями «функція» і «послідовність».

Розглянемо функцію $y = f\ (x)$, областю визначення якої є множина натуральних чисел або множина n перших натуральних чисел. Тоді функція f задає нескінченну послідовність $f\ (1)$, $f\ (2)$, ..., $f\ (n)$, ... або скінченну послідовність $f\ (1)$, $f\ (2)$, ..., $f\ (n)$. Іншими словами, нескінченна послідовність являє собою функцію, областю визначення якої є множина $\mathbb{N}$, а скінченна послідовність — це функція, область визначення якої — множина перших n натуральних чисел.

Наприклад, функцію $y = x^2$, $D\ (y) = \mathbb{N}$, можна розглядати як послідовність квадратів натуральних чисел:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots\ .$$

Також можна сказати, що, наприклад, стаціонарна послідовність 7, 7, 7, 7, ... — це відображення множини $\mathbb{N}$ на множину $\{7\}$.

Нерідко послідовність задають правилом, яке дозволяє знайти наступний член, знаючи попередній.

Розглянемо послідовність (a_n), перший член якої дорівнює 1, а кожний наступний член послідовності у 3 рази більший за попередній. Маємо:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots\ .$$

Цю послідовність, задану описом, також визначають такі умови:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n.$$

Ці рівності вказують перший член послідовності і правило, користуючись яким, за кожним членом послідовності можна знайти наступний член:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 3a_1 = 3,$$
$$a_3 = 3a_2 = 9,$$
$$a_4 = 3a_3 = 27$$

і т. д.

Формулу, яка виражає член послідовності через один або кілька попередніх членів, називають **рекурентною формулою** (від латин. *recurro* — повертатися). У наведеному прикладі це формула $a_{n+1} = 3a_n$. Умови, які визначають перший або кілька перших членів, називають **початковими умовами**. У розглядуваному прикладі початкова умова — це $a_1 = 1$.

Зауважимо, що знання лише однієї рекурентної формули не дозволяє задати послідовність. Мають бути ще вказані початкові умови.

При **рекурентному способі** задання послідовності перший або кілька перших членів послідовності є заданими, а всі інші обчислюють один за одним. З цієї точки зору спосіб задання послідовності формулою n-го члена видається більш зручним: за його допомогою можна знайти потрібний член послідовності, знаючи лише його номер.

ПРИКЛАД 1 Послідовність (c_n) задана формулою n-го члена $c_n = 37 - 3n$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 19; 2) -7? У разі позитивної відповіді вкажіть номер цього члена.

Розв'язання

1) Якщо число 19 є членом даної послідовності, то існує таке натуральне значення n, що $37 - 3n = 19$. Звідси $3n = 18$; $n = 6$. Отже, число 19 є шостим членом послідовності (c_n).

2) Маємо: $37 - 3n = -7$; $3n = 44$; $n = 14\frac{2}{3}$. Оскільки число $14\frac{2}{3}$ не є натуральним, то число -7 не є членом даної послідовності.

ПРИКЛАД 2 Послідовність (a_n) задана рекурентно: $a_1 = 15$, $a_{n+1} = 7a_n + 1$. Чи може число 2009 бути членом цієї послідовності?

Розв'язання. Очевидно, що кожний член послідовності (a_n) є цілим числом і при діленні на 7 дає в остачі 1. Оскільки число 2009 ділиться націло на 7, то воно не може бути членом цієї послідовності.

ПРИКЛАД 3 Послідовність (a_n) задана формулою n-го члена $a_n = \frac{n+1}{n}$. Задайте її рекурентно.

Розв'язання. Маємо: $a_1 = 2$. У формулі n-го члена виразимо n через a_n. Маємо: $na_n = n + 1$; $n(a_n - 1) = 1$. Оскільки $a_n > 1$ при будь-якому $n \in \mathbb{N}$, то можна записати $n = \frac{1}{a_n - 1}$.

Маємо: $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{\frac{1}{a_n - 1} + 2}{\frac{1}{a_n - 1} + 1} = \dfrac{2a_n - 1}{a_n}$.

Відповідь: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n - 1}{a_n}$.

ПРИКЛАД 4 Послідовність (a_n) задана рекурентно: $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Доведіть, що цю послідовність можна задати формулою n-го члена $a_n = 2^n + 3^n$.

Розв'язання. Доведення проведемо методом математичної індукції.

При $n = 1$ $a_1 = 5 = 2^1 + 3^1$, при $n = 2$ $a_2 = 13 = 2^2 + 3^2$, тобто теорема «база індукції» є правильною.

Нехай $a_k = 2^k + 3^k$ і $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}$. Маємо:

$a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k = 5 \cdot 2^{k+1} + 5 \cdot 3^{k+1} - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = 5 \cdot 2^k \cdot 2 + 5 \cdot 3^k \cdot 3 - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = 4 \cdot 2^k + 9 \cdot 3^k = 2^{k+2} + 3^{k+2}$. Тим самим доведено теорему «індуктивний перехід».

Отже, $a_n = 2^n + 3^n$ для будь-якого натурального n.

ПРИКЛАД 5 Послідовність (a_n) задана рекурентно: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}$. Знайдіть a_{2010}.

Розв'язання. Запишемо кілька перших членів послідовності:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 2,\ a_5 = 1,\ a_6 = 1,\ a_7 = 2.$$

У даній послідовності кожний член, починаючи з третього, однозначно визначається двома попередніми членами. Ми бачимо, що $a_6 = a_1$ і $a_7 = a_2$. Отже, не проводячи подальших обчислень, можна зробити висновок, що $a_8 = a_3$, $a_9 = a_4$, $a_{10} = a_5$ і взагалі, $a_{n+5} = a_n$ для будь-якого натурального n. Про таку послідовність кажуть, що вона є **періодичною** з періодом, який дорівнює 5. У цій послідовності члени, номери яких конгруентні за модулем 5, рівні. Звідси $a_{2010} = a_5 = 1$.

32.1.° Запишіть у порядку зростання п'ять перших членів послідовності:

1) двоцифрових чисел, кратних числу 4;
2) неправильних звичайних дробів з чисельником 11;
3) натуральних чисел, що дають при діленні на 8 остачу 5.

Укажіть, скінченними чи нескінченними є ці послідовності.

32.2.° Знайдіть чотири перші члени послідовності (a_n), заданої формулою n-го члена:

1) $a_n = 4n - 3$; 2) $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$; 3) $a_n = \frac{2^n}{n}$; 4) $a_n = \left\{n + \frac{1}{2}\right\}$.

32.3.° Знайдіть другий, сьомий і сотий члени послідовності (b_n), заданої формулою n-го члена:

1) $b_n = n^2 + 2n$; 2) $b_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$; 3) $b_n = \left[n + \frac{1}{2}\right]$.

32.4.° Послідовність (c_n) задана формулою n-го члена $c_n = (-1)^n \cdot 5$. Знайдіть: 1) c_1; 2) c_8; 3) c_{2k}; 4) c_{2k-1}.

32.5.° Знайдіть п'ять перших членів послідовності (a_n), якщо:

1) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$;

2) $a_1 = -2$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$;

3) $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

32.6.° Знайдіть п'ять перших членів послідовності (b_n), якщо:

1) $b_1 = 18$, $b_{n+1} = -\frac{b_n}{3}$;

2) $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n^2 + 2b_{n+1}$;

3) $b_1 = -1$, $b_{n+1} = \frac{1}{b_n}$.

32.7.° Послідовність (a_n) задана формулою n-го члена $a_n = 7n + 2$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 149; 2) 47? У разі позитивної відповіді вкажіть номер цього члена.

32.8.° Послідовність (b_n) задана формулою n-го члена $b_n = n^2 - 4$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 16; 2) 77? У разі позитивної відповіді вкажіть номер цього члена.

32.9.° Послідовність (a_n) задана рекурентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$. Чи є членом цієї послідовності число 2010?

32.10.° Послідовність (b_n) задана рекурентно: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n$. Чи є членом цієї послідовності число 1024?

32.11.° Скільки від'ємних членів містить послідовність (x_n), задана формулою n-го члена $x_n = 6n - 50$?

32.12.° Знайдіть номер першого від'ємного члена послідовності (y_n), заданої формулою n-го члена $y_n = 38 - 3n$.

32.13.° Послідовність (a_n) задана формулою n-го члена $a_n = n^2 - 3n - 8$. Знайдіть номери членів цієї послідовності, які менші від 10.

32.14.° Послідовність (b_n) задана формулою n-го члена $b_n = -n^2 + 15n - 20$. Скільки членів цієї послідовності більші за 16?

32.15.° Підберіть одну з можливих формул n-го члена послідовності, першими членами якої є числа:

1) 1, 4, 9, 25, ...;

2) 5, 8, 11, 14, 17, ...;

3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;

4) 0, 2, 0, 2, 0, ...;

5) $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$;

6) $2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{7}, 0, \ldots$.

32.16.° Підберіть одну з можливих формул n-го члена послідовності, першими членами якої є числа:

1) 2, 9, 28, 65, 126, ...;

2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots$;

3) $-2, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{6}{5}, -\frac{5}{6}, \ldots$;

4) $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, \ldots$;

5) −1, 1, 3, 3, 3, ...

32.17.° Послідовність (a_n) задана рекурентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \left[\sqrt{a_n}\right]$. Знайдіть a_{2010}.

32.18.° Послідовність (a_n) задана формулою n-го члена. Задайте її рекурентно:

1) $a_n = 2n - 3$; 2) $a_n = \frac{n}{n+2}$; 3) $a_n = n^2$.

32.19.° Послідовність (a_n) задана формулою n-го члена. Задайте її рекурентно:

1) $a_n = n$; 2) $a_n = \frac{1}{n+1}$; 3) $a_n = \sqrt{n}$.

32.20.°° Чи існують такі значення a, при яких послідовність є стаціонарною:

1) $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6$; 2) $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 5$?

32.21.°° Знайдіть сто перший член послідовності (a_n), якщо $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

32.22.°° Знайдіть сто перший член послідовності (a_n), якщо $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.

32.23.°° Послідовність задана рекурентно: $a_1 = 7$, $a_2 = 25$, $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності при діленні на 3 дають в остачі 1.

32.24.°° Послідовність задана рекурентно: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 4a_n - 3$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності з непарними номерами діляться націло на 5.

32.25.°° Послідовність задана рекурентно: $a_1 = 8$, $a_{n+1} = 7a_n - 6$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності при діленні на 3 дають в остачі 2.

32.26.°° Послідовність задана рекурентно: $a_1 = 7$, $a_2 = 29$, $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$. Доведіть, що $a_n = 2^n + 5^n$.

32.27.°° Послідовність задана рекурентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$. Доведіть, що $a_n = 2^{n-1} + 3$.

32.28.** Знайдіть формулу n-го члена послідовності, заданої рекурентно:

1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$;

2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$;

3) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$.

32.29.** Послідовність задана рекурентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 8n$. Доведіть, що будь-який член цієї послідовності є квадратом натурального числа.

32.30.* Послідовність задана рекурентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + n$. Доведіть, що в цій послідовності всі члени, крім першого, не є квадратами натуральних чисел.

32.31.* Для послідовності (x_n) справедлива така рекурентна формула: $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$. Знайдіть усі значення x_1, при яких виконується рівність $x_1 = x_{1000}$.

Про кролів, соняшники, соснові шишки і золотий переріз

Розглянемо послідовність (u_n), яка задана рекурентно такими співвідношеннями:

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Запишемо кілька її перших членів:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots\ .$$

Члени цієї послідовності називають **числами Фібоначчі**. Це пов'язано з тим, що італійський математик і купець Леонардо Пізанський (Фібоначчі) установив зв'язок між цією послідовністю і задачею про розплодження кролів. У цій задачі досліджується чисельність потомства однієї пари кролів, яка щомісяця виводить пару кроленят, а ті через місяць також дають потомство. На рисунку 32.1 кількість пар кролів відповідає послідовності чисел Фібоначчі.

Числа Фібоначчі трапляються в різних ситуаціях. Наприклад, якщо ви йдете доріжкою, вимощеною квадратними плитками в один ряд, ступаючи кожного разу на наступну плитку або через одну, то кількість способів пройти доріжку з n плиток дорівнює n-му члену послідовності Фібоначчі (перевірте це самостійно, наприклад, для випадку $n = 8$).

Леонардо Пізанський (Фібоначчі)
(1170–1228)

Італійський математик. Подорожуючи країнами Сходу, ознайомився з досягненнями арабських математиків і сприяв поширенню цих знань у Європі. Його основні праці: «Liber Abaci» (1202) — трактат про арифметику і алгебру, «Practica Geometriae» (1220) започаткували застосування алгебраїчних методів у геометрії.

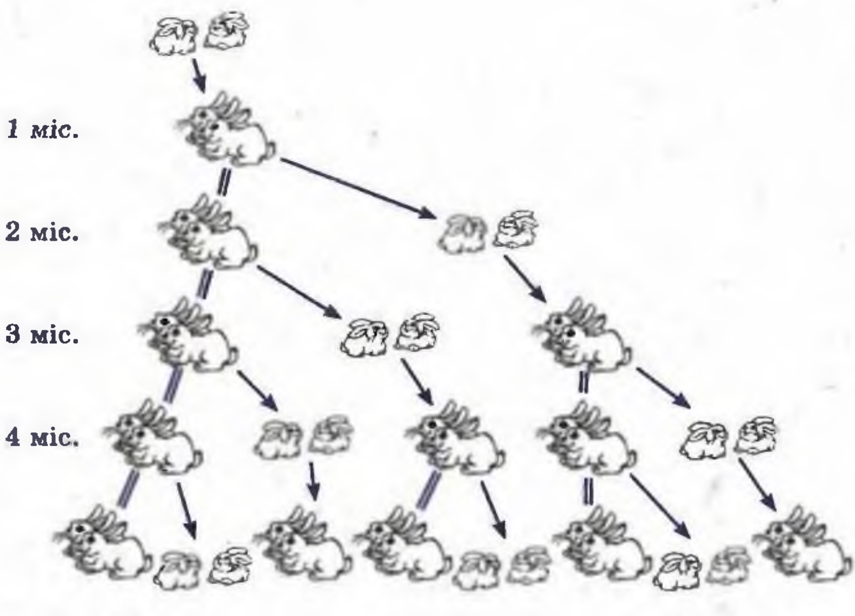


Рис. 32.1

Розглянемо ще один приклад. Запишемо рівності:

$$1=\frac{1}{1};\quad 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1};\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{3}{2};\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{5}{3};$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{8}{5};\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}=\frac{13}{8}\ \text{і т. д.}$$

Зрозуміло, що значення наступного виразу дорівнює

$$1+\cfrac{1}{\cfrac{13}{8}}=1+\frac{8}{13}=\frac{8+13}{13}=\frac{21}{13}.$$

Ми бачимо, що праві частини виписаних рівностей являють собою відношення наступного до попереднього членів послідовності Фібоначчі.

Оскільки справедливими є рівності

$$1+\cfrac{1}{\cfrac{u_k}{u_{k-1}}}=1+\frac{u_{k-1}}{u_k}=\frac{u_k+u_{k-1}}{u_k}=\frac{u_{k+1}}{u_k},$$

то ми фактично методом математичної індукції довели таке:

$$\underbrace{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}_{n\ \text{«червоних» одиниць}}=\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Якщо в послідовності Фібоначчі обчислити відношення $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, то отримаємо послідовність 1; 2; 1,5; 1,666...; 1,6; 1,625; 1,615; ...; 1,619...; 1,618...; ... .

Цій послідовності притаманна така властивість: зі зростанням номерів її члени все менше і менше відрізняються від числа $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1{,}618$. Ще в давнину з цим числом люди пов'язували своє уявлення про красу і гармонію. Грецькі скульптори добре знали про відповідність правильних пропорцій людського тіла цьому магічному числу. І недаремно античні зодчі використовували його у своїх безсмертних творіннях. Так, відношення довжини Парфенона[1] до його висоти приблизно дорівнює 1,618. Геній епохи Відродження Леонардо да Вінчі вважав, що з багатьох відношень, які використовує Творець, існує одне, єдине і неповторне. Саме його він назвав «золотим перерізом».

Виявилося, що числа Фібоначчі зустрічаються й у багатьох явищах природи.

Якщо подивитися на насіння в голівці соняшника або ромашки, то можна побачити, що вони розміщені у вигляді двох сімейств спіралей, які закручуються в протилежних напрямках. Кількості спіралей у цих сімействах є сусідніми членами послідовності Фібоначчі. Зазвичай для соняшника ці числа дорівнюють 34 і 55, проте трапляються й гіганти з 89 і 144 спіралями. Подібну властивість[2] можна виявити в структурі соснових шишок. Те саме спостерігається й на плодах ананаса, де спіралей, як правило, буває 8 і 13.

Числам Фібоначчі притаманна ціла низка цікавих властивостей. Наведемо деякі з них:

1) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1$;

2) $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$;

3) $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;

4) $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$;

5) $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + (-1)^{n+1},\ n > 2$.

6) Будь-яке натуральне число може бути подане у вигляді суми кількох різних чисел Фібоначчі.

Використовуючи метод математичної індукції, доведіть ці властивості самостійно.

[1] Парфенон — храм в Афінах, побудований у V ст. до н. е.

[2] У ботаніці таке сполучення двох сімейств спіралей називають філотаксисом.

Французький учений Жак Біне (1786–1856) знайшов формулу n-го члена послідовності Фібоначчі:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Важко повірити, що ця формула задає натуральні числа. Проте це так.

33. Арифметична прогресія

Розглянемо такі послідовності:

2, 7, 12, 17, 22, 27, ...;

1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; ...;

3, 1, −1, −3, −5, −7, ...

Їм притаманна така характерна властивість: *кожний наступний член послідовності отримано в результаті додавання до попереднього одного й того самого числа.* Для першої послідовності це число дорівнює 5, для другої дорівнює 0,5, для третьої дорівнює −2.

З подібними послідовностями людям доводилося мати справу ще в давні часи, коли вони рахували предмети парами, п'ятірками, десятками, дюжинами тощо. Такі послідовності називають **арифметичними прогресіями** (від латин. *progressio* — рух уперед).

Означення. Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число.

Зрозуміло, що число, про яке йдеться в означенні, дорівнює різниці наступного і попереднього членів послідовності. Його називають **різницею арифметичної прогресії** і позначають буквою d (першою буквою латинського слова *differentia* — різниця).

Отже, якщо (a_n) — арифметична прогресія з різницею d, то

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots,$$

тобто для будь-якого натурального n виконується рівність $a_{n+1} - a_n = d$. Звідси

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Щоб задати арифметичну прогресію, потрібно вказати її перший член і різницю. Таким чином, арифметичну прогресію можна задати рекурентно:

$$\boxed{a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d}$$

Наведемо кілька прикладів.

Якщо $a_1 = 2$ і $d = 5$, то отримаємо арифметичну прогресію, подану на початку пункту:

$$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ \dots .$$

Якщо $a_1 = 1$ і $d = 2$, то отримаємо арифметичну прогресію — послідовність непарних чисел:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \dots .$$

Ми навели приклади арифметичних прогресій, у яких різниця є додатним числом. Проте різниця може бути від'ємним числом і навіть нулем. Так, стаціонарна послідовність 5, 5, 5, 5, ... є арифметичною прогресією, у якої $a_1 = 5$, $d = 0$.

Покажемо, як можна задати арифметичну прогресію за допомогою формули n-го члена.

З означення арифметичної прогресії (a_n) випливає:

$a_2 = a_1 + d;$

$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + d \cdot 2;$

$a_4 = a_3 + d = (a_1 + d \cdot 2) + d = a_1 + d \cdot 3;$

$a_5 = a_4 + d = (a_1 + d \cdot 3) + d = a_1 + d \cdot 4.$

Наведені приклади допомагають зробити такий індуктивний висновок:

$$\boxed{a_n = a_1 + d\,(n - 1)}$$

Цю гіпотезу легко довести методом математичної індукції (зробіть це самостійно).

Записану рівність називають **формулою n-го члена арифметичної прогресії.**

Арифметична прогресія, як і будь-яка інша послідовність, являє собою функцію. Якщо переписати формулу n-го члена так: $a_n = dn + a_1 - d$, то стає зрозумілим, що арифметична прогресія — це лінійна функція $f(n) = dn + b$, де $b = a_1 - d$, областю визначення якої є множина $\mathbb{N}$ або множина $\{1, 2, \dots, n\}$.

Правильним є й таке твердження: лінійна функція $f(x) = kx + b$, у якої $D(f) = \mathbb{N}$ або $D(f) = \{1, 2, \dots, n\}$, є арифметичною прогресією з різницею, яка дорівнює k. Справді, $f(n + 1) - f(n) = k(n + 1) + b - (kn + b) = k$. Це означає, що послідовність $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ — арифметична прогресія з різницею, яка дорівнює k.

Наприклад, кожна з послідовностей, які задаються формулами $a_n = 7n - 2$, $b_n = -3n + 4$, $c_n = \sqrt{2}\,n + 1$, є арифметичною прогресією.

Розглянуті властивості мають просту геометричну інтерпретацію: якщо точки координатної площини лежать на невертикальній прямій і їх абсциси є послідовними натуральними числами, то їх ординати є членами арифметичної прогресії (рис. 33.1).

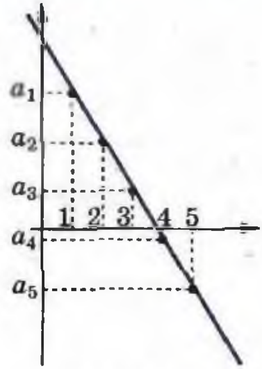


Рис. 33.1

Установимо важливу властивість членів арифметичної прогресії (a_n). З означення арифметичної прогресії випливає, що при $n > 1$ $a_n - a_{n-1} = d$ і $a_{n+1} - a_n = d$. Звідси $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, отже,

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх з ним членів.[1]

Правильним є й обернене твердження: *якщо в послідовності кожний член, крім першого (і останнього, якщо прогресія скінченна), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх з ним членів, то ця послідовність є арифметичною прогресією.*

Справді, з рівності $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ отримуємо $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$; $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, тобто різниця між наступним і попереднім членами даної послідовності є сталою. Це означає, що послідовність (a_n) — арифметична прогресія.

Довівши два взаємно обернені твердження, тим самим ми довели таке:

послідовність є арифметичною прогресією тоді й тільки тоді, коли кожний її член, крім першого (і останнього, якщо послідовність скінченна), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх з ним членів[2].

ПРИКЛАД 1 Члени арифметичної прогресії (a_n) є цілими числами. Відомо, що $a_3 \cdot a_6 = 406$ і при діленні її дев'ятого члена на четвертий член у частці отримуємо 2, а в остачі 6. Знайдіть перший член і різницю прогресії.

---

[1] Якщо арифметична прогресія є скінченною послідовністю, то зрозуміло, що її останній член такої властивості не має.

[2] Зрозуміло, що ця властивість стосується тих послідовностей, у яких більше двох членів.

Розв'язання. Запишемо: $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$, $a_6 = a_1 + 5d$, $a_9 = a_1 + 8d$. Тоді з урахуванням умови можна скласти таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}(a_1 + 2d)(a_1 + 5d) = 406, \\ a_1 + 8d = 2(a_1 + 3d) + 6.\end{cases}$$

Цю систему можна розв'язати методом підстановки. Отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a_1 = 4, \\ d = 5,\end{cases} \\ \begin{cases}a_1 = -\dfrac{79}{7}, \\ d = -\dfrac{37}{14}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Оскільки члени послідовності — цілі числа, то задовольняють $a_1 = 4$, $d = 5$.

ПРИКЛАД 2 З'ясуйте, чи можуть числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ бути членами однієї арифметичної прогресії.

Розв'язання. Припустимо, що числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ є членами арифметичної прогресії (a_n) з різницею d ($d \neq 0$) і відповідно дорівнюють a_n, a_m, a_k. Тоді можна записати:

$$1 = a_1 + d(n - 1),$$
$$\sqrt{2} = a_1 + d(m - 1),$$
$$\sqrt{3} = a_1 + d(k - 1).$$

Звідси $\sqrt{2} - 1 = d(m - n)$,

$$\sqrt{3} - 1 = d(k - n).$$

Оскільки $k \neq n$, то $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{m - n}{k - n}$.

Права частина цієї рівності є раціональним числом. Нескладно показати (зробіть це самостійно), що ліва частина рівності — число ірраціональне. Отже, отримана рівність є неправильною.

Таким чином, числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ не можуть бути членами однієї арифметичної прогресії.

ПРИКЛАД 3 Нескінченна послідовність (x_n) задана рекурентно: $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n$. При яких значеннях a і b ця послідовність є арифметичною прогресією?

Розв'язання. Якщо послідовність (x_n) — арифметична прогресія, то $x_{n+1} = \dfrac{x_{n+2} + x_n}{2}$. Звідси $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$. З урахуванням рекурентної формули можна записати $2x_{n+1} - x_n = x_{n+1}^2 - x_n$. Отримуємо $x_{n+1} = 0$ або $x_{n+1} = 2$. Ці рівності означають, що, починаючи з другого, кожний член послідовності (x_n) дорівнює нулю, або кожен член дорівнює 2. Отже, якщо (x_n) — арифметична прогресія, то її різниця дорівнює нулю. При $b = 0$ отримуємо $a = 0$, при $b = 2$ отримуємо $a = 2$.

Відповідь: $a = b = 0$ або $a = b = 2$.

33.1.° Серед поданих послідовностей укажіть арифметичні прогресії:

1) 3, −6, 12, −24; 3) 5, 10, 5, 10; 5) −5, −3, −1, 1;
2) 4, 8, 12, 16; 4) 42, 39, 36, 33; 6) 1,2; 1,3; 1,5; 1,6.

33.2.° Чи є арифметичною прогресією послідовність (у разі позитивної відповіді вкажіть різницю прогресії):

1) 24, 22, 20, 18; 2) 16, 17, 19, 23; 3) −3, 2, 7, 12?

33.3.° Перший член арифметичної прогресії $a_1 = 4$, а різниця $d = 0{,}4$. Знайдіть: 1) a_3; 2) a_{11}; 3) a_{32}.

33.4.° Перший член арифметичної прогресії $a_1 = 17$, а різниця $d = -2$. Знайдіть: 1) a_4; 2) a_{15}; 3) a_{60}.

33.5.° Знайдіть різницю і двісті перший член арифметичної прогресії 2,6; 2,9; 3,2; ... .

33.6.° Знайдіть різницю арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_1 = 2$, $x_8 = -47$.

33.7.° Знайдіть перший член арифметичної прогресії (y_n), якщо $y_{17} = 22$, а різниця прогресії $d = 0{,}5$.

33.8.° Знайдіть формулу n-го члена арифметичної прогресії:

1) −5, −7, −9, −11, ...; 3) a^2, $2a^2$, $3a^2$, $4a^2$, ...;
2) 2, $2\frac{1}{6}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$, ...; 4) $a + 3$, $a + 1$, $a - 1$, $a - 3$, ...

33.9.° Чи є членом арифметичної прогресії (c_n):

1) число 20,4, якщо $c_1 = 11{,}4$, а різниця прогресії $d = 0{,}6$;
2) число 38, якщо $c_1 = 8$, а різниця прогресії $d = 1{,}4$?

У разі позитивної відповіді вкажіть номер цього члена.

33.10.° Знайдіть номер члена арифметичної прогресії 8,1; 8,5; 8,9; 9,3; ..., який дорівнює 13,7.

33.11.° Знайдіть другий член арифметичної прогресії, якщо перший і третій члени дорівнюють відповідно −6 і 12.

33.12.° Восьмий і десятий члени арифметичної прогресії дорівнюють відповідно 3,5 і 2,7. Чому дорівнює дев'ятий член прогресії?

33.13.° Знайдіть перший член арифметичної прогресії (b_n), якщо $b_5 = 11$, $b_{11} = -7$.

33.14.° Чому дорівнює різниця арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_8 = 58$, $x_{15} = 16$?

33.15.° Чи є послідовність (a_n) арифметичною прогресією, якщо вона задана формулою n-го члена:

1) $a_n = -6n + 3$;
2) $a_n = 2n^2 - n$;
3) $a_n = -2{,}8n$;
4) $a_n = \frac{n}{n+1}$?

У разі позитивної відповіді вкажіть перший член і різницю прогресії.

33.16.° Чи є послідовність (a_n) арифметичною прогресією, якщо вона задана формулою n-го члена:

1) $a_n = 6 + 7n$;
2) $a_n = \frac{2n-1}{5}$;
3) $a_n = \frac{1}{n} + 2$?

У разі позитивної відповіді вкажіть перший член і різницю прогресії.

33.17.° Як зміниться різниця скінченної арифметичної прогресії, якщо переставити її члени у зворотному порядку?

33.18.° Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 5,2; 4,9; 4,6; ...?

33.19.° Який номер має перший додатний член арифметичної прогресії −10,2; −9,5; −8,8; ...?

33.20.° Знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії 7,2; 6,6; 6; ... .

33.21.° Між числами −6 і 3 вставте п'ять таких чисел, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію.

33.22.° Які чотири числа треба вставити між числами 4 і −5, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію?

33.23.° Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_3 + a_7 = 30$ і $a_6 + a_{16} = 60$;
2) $a_4 + a_{10} = 36$ і $a_5 \cdot a_{11} = 340$.

33.24.° Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_5 + a_{12} = 41$ і $a_{10} + a_{14} = 62$;
2) $a_7 + a_{13} = -104$ і $a_2 \cdot a_6 = -240$.

33.25.° У яких випадках для членів арифметичної прогресії виконується рівність $a_1 a_4 = a_2^2$?

33.26.° Доведіть, що значення виразів $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$ є послідовними членами арифметичної прогресії.

33.27.° Дано скінченну арифметичну прогресію $a_1, a_2, ..., a_n$. Доведіть, що $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, $k \leqslant n$.

33.28.° Доведіть, що для арифметичної прогресії (a_n) справедлива рівність $a_n + a_k = a_{n-m} + a_{k+m}$, $n > m$.

33.29.° Чи є правильним твердження: якщо довжини сторін опуклого чотирикутника (рис. 33.2), узяті в послідовності a, b, d і c, утворюють арифметичну прогресію, то в цей чотирикутник можна вписати коло?

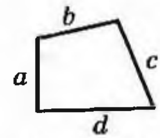


Рис. 33.2

33.30.° Чи можуть утворювати арифметичну прогресію довжини сторін і периметр трикутника?

33.31.° Доведіть, що коли сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію, то її різниця дорівнює радіусу вписаного кола.

33.32.° Величини кутів трикутника утворюють арифметичну прогресію. Яка градусна міра середнього за величиною кута трикутника?

33.33.° З арифметичної прогресії вилучено члени з непарними номерами. Чи будуть члени, що залишилися, утворювати арифметичну прогресію?

33.34.° Дано дві нескінченні арифметичні прогресії. Якщо від кожного члена однієї прогресії відняти відповідний член другої, то чи буде утворена послідовність арифметичною прогресією?

33.35.° Якщо в арифметичній прогресії, різниця якої не дорівнює нулю, вилучити її члени, номери яких кратні 3, то чи буде утворена послідовність арифметичною прогресією?

33.36.° Кожний член арифметичної прогресії помножили на 4. Чи буде утворена послідовність арифметичною прогресією?

33.37.° Доведіть, що числа, які дорівнюють відповідно сумам кутів трикутника, чотирикутника, п'ятикутника і т. д., утворюють арифметичну прогресію.

33.38.° При якому значенні x значення виразів $x^2 - 4$; $5x + 3$ і $3x + 2$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

33.39.° При якому значенні y значення виразів $y^2 + 1$; $y^2 + y$ і $8y - 10$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

33.40.° При якому значенні y значення виразів $y^2 - 2y$; $3y + 5$; $4y + 13$ і $2y^2 - y + 25$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

33.41.° При якому значенні x значення виразів $3x + 4$; $2x + 3$; x^2 і $2x^2 + x$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

33.42.•• Дано арифметичну прогресію (a_n), у якій $a_k = m$, $a_m = k$ $(m \neq k)$. Знайдіть a_{k+m}.

33.43.•• Доведіть, що коли додатні числа a, b і c — три послідовні члени арифметичної прогресії, то $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$.

33.44.•• Доведіть, що коли значення виразів $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ і $\frac{1}{a+b}$ є послідовними членами арифметичної прогресії, то значення виразів a^2, b^2 і c^2 теж є послідовними членами арифметичної прогресії.

33.45.•• Доведіть, що коли числа a, b, c — три послідовні члени арифметичної прогресії, то значення виразів $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ також є послідовними членами арифметичної прогресії.

33.46.•• Знайдіть усі арифметичні прогресії з різницею 10, які складаються з простих чисел і мають не менше трьох членів.

33.47.•• Знайдіть усі арифметичні прогресії з різницею 2, які складаються з простих чисел і мають не менше трьох членів.

33.48.* Відомо, що нескінченна арифметична прогресія, членами якої є натуральні числа, містить квадрат натурального числа. Доведіть, що ця прогресія містить безліч членів, які є квадратами натуральних чисел.

33.49.* Числа a, b, a^2 є членами нескінченної арифметичної прогресії, яка складається з натуральних чисел. Відомо, що $a < b$. Доведіть, що число b^2 є членом цієї прогресії.

33.50.* Доведіть, що в нескінченній арифметичній прогресії, яка складається з натуральних чисел, знайдуться два члени, які мають однакову суму цифр.

33.51.* Доведіть, що арифметична прогресія (a_n), де $a_n = 3n + 2$, містить безліч простих чисел[1].

33.52.* Чи існує нестаціонарна нескінченна арифметична прогресія, яка складається з простих чисел?

---

[1] Ця задача є окремим випадком теореми Діріхле про арифметичну прогресію: *арифметична прогресія, у якій перший член і різниця є взаємно простими натуральними числами, містить безліч простих чисел.*

34. Сума n перших членів арифметичної прогресії

Розглянемо скінченну арифметичну прогресію

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n.$$

Суму членів цієї прогресії позначимо S_n.

Отже,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (*)$$

Виведемо формулу для знаходження цієї суми.

Спочатку розглянемо задачу, розв'язання якої підкаже, як знайти ідею для виведення шуканої формули.

Розглянемо арифметичну прогресію

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 98,\ 99,\ 100$$

і знайдемо суму її членів.

Запишемо шукану суму двома способами і додамо отримані рівності:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} & S_{100} = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ + & S_{100} = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S_{100} = & \multicolumn{13}{c}{\underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + 101 + 101 + 101}_{100 \text{ доданків}}} \end{array}$$

Маємо: $2S_{100} = 101 \cdot 100$, $S_{100} = 5050$.

Розповідають, що видатний німецький математик К. Гаусс (1777–1855) знайшов таке розв'язання у віці 5 років.

Скористаємося описаним прийомом для знаходження суми (*).

Карл Гаусс

Запишемо суму S_n двома способами. Спочатку запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_1, а кожний наступний доданок отримано з попереднього додаванням різниці d. Потім запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_n, а кожний наступний доданок отримано з попереднього відніманням різниці d.

Маємо:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)\,d) + (a_1 + (n-1)\,d),$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-2)\,d) + (a_n - (n-1)\,d).$$

Додавши ці рівності, отримаємо:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$.

Вираз, який записано в правій частині останньої рівності, є сумою n доданків, кожний з яких дорівнює $a_1 + a_n$.

Тоді $2S_n = (a_1 + a_n)\,n$,

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Отриману рівність називають **формулою суми n перших членів арифметичної прогресії.**

Цю формулу також можна отримати, скориставшись задачею 33.27 (зробіть це самостійно).

Підставивши до цієї формули замість a_n вираз $a_1 + d\,(n - 1)$, отримаємо: $S_n = \frac{a_1 + a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n$,

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n}$$

Останньою формулою зручно користуватися тоді, коли задано перший член і різницю прогресії.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які кратні 6.

Розв'язання. Дані числа утворюють арифметичну прогресію, перший член якої $a_1 = 102$, а різниця $d = 6$. Тоді $a_n = 102 + 6\,(n - 1) = 6n + 96$. Знайдемо кількість членів цієї прогресії. Оскільки $a_n < 1000$, то маємо:

$$6n + 96 < 1000;$$
$$6n < 904;$$
$$n < 150\frac{2}{3}.$$

Отже, $n = 150$. Тоді шукана сума

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6 \cdot (150 - 1)}{2} \cdot 150 = 82\,350.$$

Відповідь: 82 350.

ПРИКЛАД 2 Сума сімдесяти п'яти перших членів арифметичної прогресії дорівнює 450. Знайдіть тридцять восьмий член прогресії.

Розв'язання. Нехай перший член прогресії та її різниця дорівнюють a_1 і d відповідно. Тоді сума сімдесяти п'яти перших членів $S_{75} = \frac{2a_1 + 74d}{2} \cdot 75 = 75(a_1 + 37d) = 450$. Звідси $a_{38} = a_1 + 37d = 450 : 75 = 6$.

Відповідь: 6.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що послідовність, суму n перших членів якої можна обчислити за формулою $S_n = an^2 + bn$, де $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, є арифметичною прогресією.

Розв'язання. Маємо: $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = a(n+1)^2 + b(n+1) - an^2 - bn = 2an + a + b$.

Отримана рівність $a_{n+1} = 2an + a + b$ дозволяє зробити висновок, що послідовність $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ є арифметичною прогресією з різницею, яка дорівнює $2a$. Якщо ми покажемо, що послідовність $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ — арифметична прогресія, то задачу буде розв'язано.

Маємо: $a_1 = S_1 = a + b$; $a_2 = 2a + a + b = 3a + b$. Тоді $a_2 - a_1 = 2a$.

Таким чином, ми встановили, що $a_{n+1} - a_n = 2a$ для будь-якого натурального n.

34.1.° Чому дорівнює сума семи перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 9$ і $a_7 = 15$?

34.2.° Чому дорівнює сума шести перших членів арифметичної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 19$ і $b_6 = 14$?

34.3.° Знайдіть суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії, перший член якої $a_1 = -6$, а різниця $d = 4$.

34.4.° Обчисліть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії -8; -6; -4; ... .

34.5.° Місця в цирку розташовано так, що в першому ряду кожного сектора 6 місць, а в кожному наступному на 3 місця більше ніж у попередньому. Скільки місць у секторі, якщо у ньому 16 рядів?

34.6.° Піднімаючись на гору, турист за першу хвилину пройшов 50 м, а за кожну наступну — на 2 м менше, ніж за попередню. На яку висоту піднявся турист за 10 хв?

34.7.° Дмитро взяв у бібліотеці книжку. За перший день він прочитав 40 сторінок, а кожного наступного дня читав на 10 сторінок більше, ніж попереднього. Скільки сторінок у книжці, якщо Дмитро прочитав її за 7 днів?

34.8.° Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n-го члена $a_n = -4n + 1$. Знайдіть суму тридцяти двох перших членів прогресії.

34.9.° Арифметичну прогресію (c_n) задано формулою n-го члена $c_n = 5n - 2$. Знайдіть суму двадцяти шести перших членів прогресії.

34.10.° Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_1 = 6$; $a_9 = 22$; 2) $a_6 = 49$; $a_{20} = 7$.

34.11.° Чому дорівнює сума сорока перших членів арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_8 = -14$, $x_{30} = -3$?

34.12.° Скільки ударів зробить годинник протягом доби, якщо він відбиває тільки кількість цілих годин від 1 до 12?

34.13.° Знайдіть суму двадцяти п'яти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_{10} = 44$, а різниця прогресії $d = 4$.

34.14.° Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_6 + a_8 - a_{14} = -17$ і $a_5 + a_{22} = 101$.

34.15.° Знайдіть суму тридцяти трьох перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_3 + a_5 + a_{13} = 33$ і $a_{15} - a_8 - a_{10} = -1$.

34.16.° Чому дорівнює сума n перших:

1) натуральних чисел;

2) непарних чисел?

34.17.° Чому дорівнює сума n перших парних чисел?

34.18.° При будь-якому n суму n перших членів деякої арифметичної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 3n^2 + 5n$. Знайдіть три перші члени цієї прогресії.

34.19.° При будь-якому n суму n перших членів деякої арифметичної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 9n - 2n^2$. Знайдіть сьомий член цієї прогресії.

34.20.° (*Стародавня єгипетська задача.*) Сто мір хліба треба розділити між п'ятьма людьми так, щоб другий отримав на стільки ж більше за першого, на скільки третій отримав більше за другого, четвертий більше за третього і п'ятий більше за четвертого. Окрім того, двоє перших повинні отримати в 7 разів менше ніж троє останніх. Скільки треба дати кожному?

34.21.° Яке натуральне число дорівнює сумі всіх попередніх йому натуральних чисел?

34.22.° Знайдіть суму всіх від'ємних членів арифметичної прогресії −6,2; −5,9; −5,6; ... .

34.23.° Знайдіть суму всіх додатних членів арифметичної прогресії 8,4; 7,8; 7,2; ... .

34.24.° Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 5 і не більші за 240.

34.25.° Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 4 і менші від 130.

34.26.° Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 12 і менші від 200.

34.27.° Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які кратні 8.

34.28.° Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які кратні 7.

34.29.° Знайдіть різницю арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 8,5, а сума шістнадцяти перших членів становить 172.

34.30.° Знайдіть перший член арифметичної прогресії, різниця якої дорівнює −4, а сума дев'яти перших членів становить −54.

34.31.° Перший член арифметичної прогресії дорівнює −9, а різниця дорівнює 6. Скільки треба взяти перших членів прогресії, щоб їх сума дорівнювала 960?

34.32.° Яку найменшу кількість послідовних непарних натуральних чисел, починаючи з числа 7, треба додати, щоб одержати суму, більшу за 315?

34.33.° Чи може сума яких-небудь п'яти послідовних членів арифметичної прогресії 3, 7, 11, ... дорівнювати 135? У разі позитивної відповіді знайдіть ці члени.

34.34.° Чи може сума яких-небудь чотирьох послідовних членів арифметичної прогресії 2, 8, 14, ... дорівнювати 176? У разі позитивної відповіді знайдіть ці члени.

34.35.° При вільному падінні тіло за першу секунду проходить 4,9 м, а за кожну наступну — на 9,8 м більше, ніж за попередню, якщо не враховувати опір повітря. Знайдіть час падіння тіла з висоти 490 м (не враховуючи опір повітря).

34.36.° Сума непарних номерів сторінок книжки є непарним числом, яке більше за 400 і менше від 500. Скільки сторінок у книжці?

34.37.° Знайдіть суму членів арифметичної прогресії з восьмого по двадцять шостий включно, якщо перший член прогресії дорівнює 24, а різниця прогресії дорівнює −8.

34.38.° Знайдіть суму членів арифметичної прогресії (x_n) з десятого по двадцять п'ятий включно, якщо $x_1 = -3$ і $x_{11} = 12$.

34.39.° Сума перших шести членів арифметичної прогресії дорівнює 39, а сума перших чотирнадцяти членів дорівнює −77. Знайдіть перший член і різницю прогресії.

34.40.° Перший член арифметичної прогресії дорівнює 100, а сума шести перших членів у 5 разів більша за суму наступних шести членів. Чому дорівнює різниця прогресії?

34.41.° Різниця арифметичної прогресії дорівнює 28, а сума п'яти перших членів у 4 рази менша від суми наступних шести членів. Чому дорівнює перший член прогресії?

34.42.° Дванадцятий член арифметичної прогресії дорівнює 30. Знайдіть суму двадцяти трьох перших членів прогресії.

34.43.° Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_5 + a_{10} + a_{12} + a_{15} = 50$.

34.44.° Розв'яжіть рівняння:
1) $7 + 13 + 19 + \ldots + (6n + 1) = 480$, де n — натуральне число;
2) $5 + 8 + 11 + \ldots + x = 124$, де x — натуральне число.

34.45.° Розв'яжіть рівняння:
1) $11 + 19 + 27 + \ldots + (8n + 3) = 470$, де n — натуральне число;
2) $1 + 5 + 9 + \ldots + x = 630$, де x — натуральне число.

34.46.° Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, у якої середнє арифметичне n перших членів при будь-якому n дорівнює їх кількості.

34.47.° (*Задача Гіпсикла Александрійського*[1].) Доведіть, що в арифметичній прогресії з парною кількістю членів, яка складається з цілих чисел, сума другої половини більша за суму першої половини на число, яке кратне квадрату половини кількості членів.

34.48.° Доведіть, що коли суму n перших членів послідовності можна обчислити за формулою $S_n = n^2 - 3n + 4$, то ця послідовність не є арифметичною прогресією.

34.49.° Знайдіть суму всіх двоцифрових чисел, які не діляться націло ні на 3, ні на 5.

34.50.°° В арифметичній прогресії $S_m = S_n$, $m \neq n$. Знайдіть S_{m+n}.

34.51.°° В арифметичній прогресії $S_n = m$, $S_m = n$, $m \neq n$. Знайдіть S_{m+n}.

34.52.°° У скінченній арифметичній прогресії кількість членів є непарною. Сума членів, які стоять на місцях з парними номерами, дорівнює сумі членів, які стоять на місцях з непарними номерами. Знайдіть суму всіх членів цієї прогресії.

---

[1] Гіпсикл Александрійський (II ст. до н. е.) — старогрецький учений, автор XIV книги «Начал» Евкліда.

34.53.* У баскетбольному турнірі, який проходив в одне коло, брали участь n команд. Після закінчення турніру виявилося, що очки, набрані командами, утворюють нестаціонарну арифметичну прогресію. Скільки очок набрала команда, яка посіла останнє місце, якщо за перемогу в кожній зустрічі команда отримувала 2 очки, за поразку очки не нараховувались, а нічиїх у баскетболі немає?

35. Геометрична прогресія

Розглянемо послідовності:

1, 3, 9, 27, 81, 243, ...,

$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots,$

5; −0,5; 0,05; −0,005; 0,0005; ... .

Їм притаманна така характерна властивість: *кожний наступний член послідовності отримано в результаті множення попереднього члена на одне й те саме число.* Для першої послідовності це число дорівнює 3, для другої дорівнює $\frac{1}{2}$, для третьої дорівнює −0,1.

З подібними послідовностями можна зустрітися, підраховуючи щорічно кількість тварин певного виду в заповіднику, при щомісячній оцінці суми грошей на рахунку, що покладені в банк під відсотки. Такі послідовності називають **геометричними прогресіями.**

Означення. Геометричною прогресією називають послідовність з відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

Зрозуміло, що число, про яке йдеться в означенні, дорівнює відношенню наступного і попереднього членів послідовності. Його називають **знаменником геометричної прогресії** і позначають буквою q (першою буквою французького слова *quotient* — частка).

Отже, якщо (b_n) — геометрична прогресія зі знаменником q, то

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \ldots,$$

тобто для будь-якого натурального n виконується рівність $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q.$

Щоб задати геометричну прогресію, потрібно вказати її перший член і знаменник. Таким чином, геометричну прогресію можна задати рекурентно:

$$\boxed{b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n q}$$

Наведемо кілька прикладів.

Якщо $b_1 = 1$ і $q = 3$, то отримаємо геометричну прогресію, подану на початку пункту:

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots .$$

Якщо $b_1 = 2$ і $q = 2$, то отримаємо геометричну прогресію, яка є послідовністю натуральних степенів числа 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots .$$

Зауважимо, що геометрична прогресія зі знаменником, який дорівнює 1, є стаціонарною послідовністю. Так, послідовність 5, 5, 5, 5, ... є геометричною прогресією, у якої $b_1 = 5$, $q = 1$. Разом з цим цю послідовність можна розглядати як арифметичну прогресію, у якої $a_1 = 5$, $d = 0$.

Узагалі, будь-яка стаціонарна послідовність, усі члени якої відмінні від нуля, є одночасно і арифметичною, і геометричною прогресією. Стаціонарна послідовність 0, 0, 0, 0, ... є лише арифметичною прогресією.

Покажемо, як можна задати геометричну прогресію за допомогою формули n-го члена.

Ураховуючи означення геометричної прогресії, маємо:

$b_2 = b_1 \cdot q;$

$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 q) \cdot q = b_1 q^2;$

$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 q^2) \cdot q = b_1 q^3;$

$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3) \cdot q = b_1 q^4.$

Наведені приклади допомагають зробити таке припущення:

$$\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

Цю гіпотезу можна довести методом математичної індукції (зробіть це самостійно).

Записану рівність називають **формулою n-го члена геометричної прогресії.**

Установимо важливу властивість членів геометричної прогресії (b_n).

З означення геометричної прогресії випливає, що при $n > 1$ маємо $b_n = b_{n-1}q$ і $b_{n+1} = b_n q$. Звідси $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тоді при $n > 1$

$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}}$$

Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, крім першого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів[1].

Правильним є і обернене твердження: *якщо послідовність* (b_n) *відмінних від нуля чисел має таку властивість, що* $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$ *при будь-якому* $n \geqslant 2$, *то ця послідовність є геометричною прогресією.*

Справді, з рівності $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$ з урахуванням того, що $b_{n-1} \neq 0$, $b_n \neq 0$, $b_{n+1} \neq 0$, можна записати $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, тобто відношення наступного члена даної послідовності до попереднього є постійним. Це означає, що послідовність (b_n) — геометрична прогресія.

Довівши два взаємно обернені твердження, тим самим ми довели таке[2]: ***послідовність*** (b_n), ***усі члени якої відмінні від нуля, є геометричною прогресією тоді і тільки тоді, коли для будь-якого*** $n \geqslant 2$ ***виконується рівність*** $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$.

Якщо всі члени геометричної прогресії (b_n) є додатними, то рівність $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$ можна переписати так:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}.$$

Отже, кожний член такої послідовності, крім першого (і останнього, якщо послідовність скінченна), є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів.

Розглянемо дві послідовності.

Арифметична прогресія (a_n), у якої $a_1 = 1$, $d = 2$:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots .$$

Геометрична прогресія (b_n), у якої $b_1 = 1$, $q = 2$:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots .$$

У цих прогресій рівні перші члени. Ці послідовності конструюються за допомогою одного й того самого числа 2 ($d = q = 2$). Разом з тим, порівнюючи відповідні члени, ми бачимо, що геометрична прогресія «зростає» набагато швидше, ніж арифметична. Наприклад, у першій послідовності $a_{20} = 1 + 2 \cdot 19 = 39$, у другій $b_{20} = 1 \cdot 2^{19} = 524\ 288$.

Вивчаючи біологію, ви дізналися, що бактерії розмножуються поділом: одна бактерія ділиться на дві. Тепер стає зрозумілим,

---

[1] Якщо геометрична прогресія є скінченною послідовністю, то зрозуміло, що її останній член такої властивості не має.

[2] Зрозуміло, що ця властивість стосується тих послідовностей, у яких більше двох членів.

чому так швидко зростає чисельність бактерій, якщо їх помістити в сприятливе середовище.

Нерідко в повсякденному житті, коли хочуть підкреслити швидке зростання якоїсь величини, кажуть: «зростає в геометричній прогресії».

ПРИКЛАД 1 Знайдіть четвертий член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3 = 36$; $b_5 = 49$.

Розв'язання. За властивістю геометричної прогресії $b_4^2 = b_3 b_5$, звідси $b_4 = \sqrt{b_3 b_5} = \sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$ або $b_4 = -\sqrt{b_3 b_5} = -42$.

Якщо $b_4 = 42$, то знаменник прогресії $q = b_4 : b_3 = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$; якщо $b_4 = -42$, то $q = -\frac{7}{6}$.

Відповідь: $b_4 = 42$, $q = \frac{7}{6}$ або $b_4 = -42$, $q = -\frac{7}{6}$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3 + b_6 = 504$ і $b_4 - b_5 + b_6 = 378$.

Розв'язання. Нехай q — знаменник даної прогресії. Маємо систему двох рівнянь з двома змінними b_1 і q:

$$\begin{cases} b_1 q^2 + b_1 q^5 = 504, \\ b_1 q^3 - b_1 q^4 + b_1 q^5 = 378. \end{cases}$$

Поділимо почленно ліві і праві частини рівнянь системи:

$$\frac{b_1 q^2 (1 + q^3)}{b_1 q^3 (1 - q + q^2)} = \frac{504}{378}.$$

Далі маємо:

$$\frac{b_1 q^2 (1 + q)(1 - q + q^2)}{b_1 q^3 (1 - q + q^2)} = \frac{4}{3};$$

$$\frac{1 + q}{q} = \frac{4}{3};$$

$$4q = 3 + 3q;$$

$$q = 3.$$

Підставивши значення q у перше рівняння системи, отримуємо: $9b_1 + 243b_1 = 504$; $252b_1 = 504$; $b_1 = 2$.

Відповідь: $b_1 = 2$; $q = 3$.

ПРИКЛАД 3 У геометричній прогресії (b_n) відомо, що $b_{10} = 2$. Знайдіть добуток дев'ятнадцяти перших членів цієї прогресії.

Розв'язання. Маємо: $b_1 b_2 b_3 \cdot \ldots \cdot b_{19} = b_1 \cdot b_1 q \cdot b_1 q^2 \cdot \ldots \cdot b_1 q^{18} =$

$= b_1^{19} q^{1+2+\ldots+18} = b_1^{19} \cdot q^{\frac{(1+18)\cdot 18}{2}} = b_1^{19} \cdot q^{19\cdot 9} = (b_1 q^9)^{19} = (b_{10})^{19} = 2^{19}.$

ПРИКЛАД 4 Знайдіть усі трійки чисел, які утворюють геометричну прогресію та мають такі властивості: сума цих чисел дорівнює 63, а коли до цих чисел додати відповідно 7, 18 і 2, то буде отримано арифметичну прогресію.

Розв'язання. Шукані числа запишемо так: a, aq, aq^2. Тоді числа $a + 7$, $aq + 18$, $aq^2 + 2$ утворюють арифметичну прогресію. Звідси $2(aq + 18) = a + 7 + aq^2 + 2$. З урахуванням умови отримуємо систему

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 63, \\ a + 7 + aq^2 + 2 = 2(aq + 18); \end{cases} \quad \begin{cases} a + aq + aq^2 = 63, \\ a - 2aq + aq^2 = 27. \end{cases}$$

Звідси $\dfrac{1 + q + q^2}{1 - 2q + q^2} = \dfrac{7}{3}$; $q = 4$ або $q = \dfrac{1}{4}$.

Якщо $q = 4$, то $a = 3$; якщо $q = \dfrac{1}{4}$, то $a = 48$.

Відповідь: 3, 12, 48 або 48, 12, 3.

35.1.° Серед наведених послідовностей укажіть геометричні прогресії, перший член і знаменник кожної з них:

1) 2, 6, 18, 36; 4) 81, 27, 9, 3; 7) −9, −9, −9, −9;
2) 4, 8, 16, 32; 5) 2, −2, 2, −2; 8) 1, 2, 3, 5;
3) 10, 20, 30, 40; 6) $-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, -1, 2$; 9) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4$.

35.2.° Шостий член геометричної прогресії $b_6 = 8$, а знаменник $q = -4$. Знайдіть сьомий член прогресії.

35.3.° Знайдіть сьомий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_8 = 16$, а знаменник прогресії $q = \dfrac{3}{4}$.

35.4.° Послідовність (b_n) така, що $b_1 = 8$, $b_{n+1} = -b_n$. Чи є ця послідовність геометричною прогресією?

35.5.° У геометричній прогресії (y_n) перший член $y_1 = 64$, а знаменник $q = -\dfrac{1}{2}$. Знайдіть: 1) y_6; 2) y_{10}.

35.6.° У геометричній прогресії (c_n) перший член $c_1 = 9$, а знаменник $q = -1$. Знайдіть: 1) c_{21}; 2) c_{30}.

35.7.° Знайдіть знаменник і п'ятий член геометричної прогресії $\dfrac{1}{216}, \dfrac{1}{36}, \dfrac{1}{6}; \ldots$.

35.8.° Знайдіть знаменник і шостий член геометричної прогресії 18, 12, 8, ...

35.9.° Доведіть, що коли послідовність (x_n) — геометрична прогресія, то $x_3 x_{13} = x_5 x_{11}$.

35.10.° Доведіть, що коли послідовність (y_n) — геометрична прогресія, то $y_4 y_{21} = y_8 y_{17}$.

35.11.° Виразіть члени b_8, b_{13} і b_{60} геометричної прогресії (b_n) через b_7 і знаменник q.

35.12.° Виразіть члени c_{18}, c_{36} і c_{50} геометричної прогресії (c_n) через c_{12} і знаменник q.

35.13.° Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$; $b_8 = 64$; 2) $b_6 = 75$; $b_8 = 27$.

35.14.° Знайдіть перший член геометричної прогресії (c_n), якщо:

1) $c_4 = \frac{1}{98}$, а знаменник $q = \frac{2}{7}$; 2) $c_6 = 100$; $c_9 = 100\ 000$.

35.15.° Число 486 є членом геометричної прогресії 2, 6, 18, ... Знайдіть номер цього члена.

35.16.° Число 96 є членом геометричної прогресії $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, ... Знайдіть номер цього члена.

35.17.° Які два числа треба вставити між числами 6 і 750, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію?

35.18.° Які чотири числа треба вставити між числами 0,5 і 16, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію?

35.19.° Послідовність (b_n) задана формулою n-го члена $b_n = 5 \cdot 4^{n-2}$. Чи є ця послідовність геометричною прогресією? У разі позитивної відповіді вкажіть її перший член і знаменник.

35.20.° Доведіть, що послідовність (x_n), яка задана формулою n-го члена $x_n = 7^{n+1}$, є геометричною прогресією, та вкажіть її перший член і знаменник.

35.21.° Послідовність (b_n) є геометричною прогресією. Знайдіть:

1) b_5, якщо $b_4 = 9$; $b_6 = 25$;
2) b_{20}, якщо $b_{19} = -3$; $b_{21} = -12$;
3) b_{17}, якщо $b_{16} = 2$; $b_{18} = 10$.

35.22.° Другий член геометричної прогресії дорівнює 6. Знайдіть добуток трьох перших членів цієї прогресії.

35.23.° Третій член геометричної прогресії дорівнює 3. Знайдіть добуток п'яти перших членів цієї прогресії.

35.24.° Доведіть, що в скінченній геометричній прогресії добуток членів, рівновіддалених від її кінців, дорівнює добутку крайніх членів.

35.25.° Доведіть, що для геометричної прогресії (b_n) справедлива рівність:

$$b_n \cdot b_k = b_{n+m} \cdot b_{k-m},\ k > m.$$

35.26.° У правильний трикутник зі стороною a послідовно вписано трикутники так, що вершини кожного наступного трикутника є серединами сторін попереднього (рис. 35.1). Доведіть, що периметри цих трикутників утворюють геометричну прогресію, і запишіть формулу n-го члена цієї прогресії.

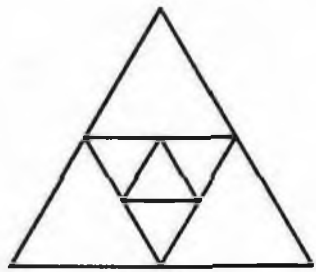


Рис. 35.1

35.27.° Чи є геометричною прогресією послідовність ($n \in \mathbb{N}$):

1) 2^{-n}, 2^{-2n}, 2^{-3n}, 2^{-4n};
2) 2^{n}, 2^{n^2}, 2^{n^3}, 2^{n^4};
3) 2^{n}, 2^{n+1}, 2^{n+2}, 2^{n+3}?

У разі позитивної відповіді вкажіть знаменник прогресії.

35.28.° Послідовність (b_n) є геометричною прогресією зі знаменником q. Чи є геометричною прогресією послідовність:

1) $b_1, b_3, \dots, b_{2n-1}$;
2) $2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n$;
3) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, \dots, b_{n-1} + b_n$;
4) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \dots, \frac{1}{b_n}$?

У разі позитивної відповіді вкажіть знаменник прогресії.

35.29.° Послідовність (b_n) є геометричною прогресією зі знаменником q. Чи є геометричною прогресією послідовність:

1) $b_2, b_4, \dots, b_{2n}$;
2) $b_1b_3, b_2b_4, b_3b_5, \dots, b_{n-2}b_n$?

У разі позитивної відповіді вкажіть знаменник прогресії.

35.30.° Між числами 80 і 5 вставте три такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію. Запишіть отриману прогресію.

35.31.° Між числами 6 і 486 вставте три такі числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію. Запишіть отриману прогресію.

35.32.• Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_5 = 3b_3$ і $b_6 - b_2 = 48$;
2) $b_4 + b_7 = \frac{56}{9}$ і $b_5 - b_6 + b_7 = \frac{14}{9}$;
3) $b_5 - b_4 = 168$ і $b_3 + b_4 = -28$.

35.33.• Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_4 - b_2 = 30$ і $b_4 - b_3 = 24$;
2) $b_2 - b_5 = 78$ і $b_3 + b_4 + b_5 = -117$.

35.34.• При якому значенні x значення виразів $2x + 1$, $x + 5$ і $x + 11$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

35.35.• При якому значенні x значення виразів $x + 6$, $x + 2$ і $3x - 4$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

35.36.• Знайдіть геометричну прогресію, яка містить 6 членів, якщо сума трьох перших її членів дорівнює 168, а сума трьох останніх дорівнює 21.

35.37.• Сума трьох додатних чисел, які утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 21. Якщо до цих чисел додати відповідно 2, 3 і 9, то отримані числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть ці числа.

35.38.• Сума трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 30. Якщо від першого числа відняти 5, від другого відняти 4, а третє залишити без зміни, то отримані числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть дані числа.

35.39.• Сума трьох чисел, які утворюють геометричну прогресію, дорівнює 65. Якщо від першого з цих чисел відняти 1, а від третього відняти 19, то отримані числа утворять арифметичну прогресію. Знайдіть дані числа.

35.40.• Сума трьох чисел, які утворюють геометричну прогресію, дорівнює 26. Якщо до цих чисел додати відповідно 1, 6 і 3, то отримані числа утворять арифметичну прогресію. Знайдіть дані числа.

35.41.•• Знайдіть три числа, які утворюють геометричну прогресію, якщо відомо, що сума їх дорівнює 26, а сума квадратів цих чисел дорівнює 364.

35.42.•• Знайдіть чотири числа, з яких перші три складають геометричну прогресію, а останні три — арифметичну, причому сума крайніх чисел дорівнює 14, а сума середніх дорівнює 12.

35.43.•• Знайдіть чотири числа, які утворюють арифметичну прогресію і мають таку властивість: якщо від другого числа відняти 2, а до четвертого додати 14, то буде отримано геометричну прогресію.

36. Сума n перших членів геометричної прогресії

Розглянемо скінченну геометричну прогресію $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n$.

Суму членів цієї прогресії позначимо S_n.

Отже,

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (*)$$

Виведемо формулу для знаходження цієї суми.

Спочатку розглянемо задачу, розв'язання якої підкаже, як знайти ідею для виведення шуканої формули.

Розглянемо геометричну прогресію $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{62}, 2^{63}$ і знайдемо суму її членів S_{64}:

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Помножимо обидві частини записаної рівності на знаменник прогресії — число 2:

$$2S_{64} = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64}.$$

Знайдемо різницю $2S_{64} - S_{64}$:

$$\begin{array}{rrcccccccccccc} & 2S_{64} = & & & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + \ldots + & 2^{63} & + & 2^{64} \\ - & S_{64} = & 1 & + & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + \ldots + & 2^{63} & & \\ \hline & 2S_{64} - S_{64} = & -1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + \ldots + & 0 & + & 2^{64} \end{array}$$

Звідси $S_{64} = 2^{64} - 1$.

У вас може виникнути природне запитання: чому як приклад ми обрали саме прогресію $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{62}, 2^{63}$?

З цією послідовністю пов'язана старовинна легенда. Індійський мудрець, який придумав гру в шахи, попросив за свій винахід у раджі, на перший погляд, скромну винагороду: за першу клітинку шахової дошки 1 пшеничне зернятко, за другу — 2, за третю — 4 і т. д. — за кожну наступну клітинку вдвічі більше, ніж за попередню.

Зрозуміло, що загальна кількість зерен, яку попросив винахідник, дорівнює $S_{64} = 2^{64} - 1$.

Багатий раджа був приголомшений, коли дізнався, що він не в змозі задовольнити це «скромне» бажання. Справа в тому, що значення виразу $2^{64} - 1$ дорівнює *18 446 744 073 709 551 615*.

Для того щоб зрозуміти, наскільки величезним є це число, уявимо, що зерно зберігають у коморі площею 12 га. Її висота була б більша за відстань від Землі до Сонця.

Скористаємося описаним прийомом для знаходження суми (*). Перепишемо рівність (*) так:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Знайдемо різницю $S_nq - S_n$:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} & S_nq = & & b_1q & + & b_1q^2 & + & b_1q^3 & + & \ldots & + & b_1q^{n-1} & + b_1q^n \\ - & S_n = & b_1 + & b_1q & + & b_1q^2 & + & b_1q^3 & + & \ldots & + & b_1q^{n-1} & \\ \hline & S_nq - S_n = & -b_1 + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + b_1q^n \end{array}$$

Отже, $S_nq - S_n = b_1q^n - b_1$. Звідси $S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1)$.

При $q \neq 1$ отримуємо:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Цю рівність називають **формулою суми n перших членів геометричної прогресії** зі знаменником, відмінним від 1.

Зауважимо, що отриману формулу можна довести інакше, скориставшись формулою розкладу на множники двочлена $a^n - b^n$, $n \in \mathbb{N}$. Зробіть це самостійно.

Якщо $q = 1$, то всі члени прогресії дорівнюють першому члену. Тоді $S_n = nb_1$.

ПРИКЛАД При будь-якому натуральному n сума n перших членів геометричної прогресії $S_n = 10(2^n - 1)$. Знайдіть перший член і знаменник прогресії.

Розв'язання. Нехай b_1 — перший член даної прогресії, q — її знаменник. Тоді $b_1 = S_1 = 10(2 - 1) = 10$; $b_1 + b_2 = S_2 = 10(2^2 - 1) = 30$. Звідси $b_2 = 30 - b_1 = 20$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$.

Відповідь: $b_1 = 10$; $q = 2$.

36.1.° Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, якщо:

1) $b_1 = 0{,}6$; $q = 2$; $n = 5$;
2) $b_1 = -4$; $q = -1$; $n = 10$;
3) $b_1 = -9$; $q = \sqrt{3}$; $n = 6$;
4) $b_1 = 8$; $q = -\frac{1}{2}$; $n = 4$.

36.2.° Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, якщо:

1) $b_1 = 1$; $q = 2$; $n = 9$;
2) $b_1 = 15$; $q = \frac{2}{3}$; $n = 3$;
3) $b_1 = 18$; $q = -\frac{1}{3}$; $n = 5$;
4) $b_1 = 4$; $q = -\sqrt{2}$; $n = 4$.

36.3.° Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії:

1) 12, 72, 432, ...;
2) $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ...

36.4.° Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії:

1) $-0{,}6$; 3; -15; ...;
2) 56; 42; 31,5; ... .

36.5.° Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (c_n), якщо:

1) $c_4 = 216$, а знаменник прогресії $q = -3$;
2) $c_1 = 5\sqrt{5}$; $c_5 = 125\sqrt{5}$, а знаменник прогресії $q > 0$.

36.6.° Знайдіть суму семи перших членів геометричної прогресії (x_n), якщо $x_3 = 24$; $x_8 = 768$.

36.7.° Геометрична прогресія (b_n) задана формулою n-го члена $b_n = 10 \cdot 3^{n-1}$. Знайдіть суму п'яти перших членів прогресії.

36.8.° Геометрична прогресія (y_n) задана формулою n-го члена $y_n = \frac{(-2)^{n+1}}{20}$. Знайдіть суму десяти перших членів прогресії.

36.9.° Знаменник геометричної прогресії дорівнює $\frac{2}{3}$, а сума чотирьох перших членів дорівнює 65. Знайдіть перший член прогресії.

36.10.° Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 516, а перший член дорівнює 12. Знайдіть знаменник прогресії.

36.11.° (*Задача з «Теоретичного і практичного курсу чистої математики» Ю. Войтяховського*[1].) Воякові дано винагороду: за першу рану — 1 копійка, за другу — 2 копійки, за третю — 4 копійки і т. д. Після обрахунку виявилося, що вояк отримав винагороду в сумі 655 рублів 35 копійок. Питання: чому дорівнює кількість його ран?

36.12.• Сума членів скінченної геометричної прогресії дорівнює 605. Знайдіть кількість членів прогресії, якщо її перший член $b_1 = 5$, а знаменник прогресії $q = 3$.

36.13.• При будь-якому n сума перших n членів геометричної прогресії $S_n = 4\,(3^n - 1)$. Знайдіть третій член цієї прогресії.

36.14.• При будь-якому n сума перших n членів геометричної прогресії $S_n = 6\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$. Знайдіть четвертий член цієї прогресії.

36.15.• Знайдіть суму квадратів шести перших членів геометричної прогресії, перший член якої дорівнює $2\sqrt{3}$, а знаменник дорівнює $\sqrt{3}$.

36.16.• Знайдіть суму кубів чотирьох перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 3$ і $b_2 = -6$.

36.17.• Геометрична прогресія містить $2n$ членів. Сума членів, які мають парні номери, дорівнює A, а сума членів, які мають непарні номери, дорівнює B. Знайдіть знаменник прогресії.

36.18.• Доведіть, що для членів геометричної прогресії (b_n) виконується рівність $b_2 + b_4 + b_6 + \ldots + b_{2n} = \frac{q}{1+q} S_{2n}$.

36.19.• Знайдіть суму $\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 + \frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$.

36.20.•• Знайдіть кількість членів скінченної геометричної прогресії, знаменник якої $q = -\frac{1}{2}$, перший член $b_1 = 256$, а сума всіх членів $S_n = 170$.

36.21.•• Знайдіть кількість членів скінченної геометричної прогресії, знаменник якої $q = 3$, останній член $c_n = 162$, а сума всіх членів $S_n = 242$.

---

[1] Войтяховський Юхим (пом. близько 1812) — російський математик-педагог. Його «Теоретичний і практичний курс чистої математики» витримав багато видань і протягом 40 років був одним з найпоширеніших посібників для шкіл того часу.

36.22.** Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — послідовні члени геометричної прогресії, S_n — сума її n перших членів. Доведіть, що

$$S_n = a_1 a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right).$$

36.23.* Знайдіть добуток 100 перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 + b_2 + \ldots + b_{100} = A$, $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_{100}} = B$.

37. Уявлення про границю послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії, у якої $|q| < 1$

Розглянемо послідовність (a_n), задану формулою n-го члена $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \ldots .$$

Можна помітити, що зі збільшенням номера n члени послідовності **прямують** до числа 1.

Якщо члени цієї послідовності зображати точками на координатній прямій, то ці точки будуть розміщуватися все ближче і ближче до точки з координатою 1 (рис. 37.1).

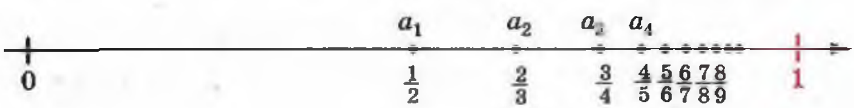


Рис. 37.1

Інакше кажучи, різниця $|a_n - 1|$ зі збільшенням номера n стає все меншою і меншою. Наприклад, $|a_n - 1| < 0{,}1$ при $n \geqslant 10$, $|a_n - 1| < 0{,}0001$ при $n \geqslant 10\,000$ і т. д. Узагалі, починаючи з деякого номера n різниця $|a_n - 1|$ стає *меншою від будь-якого наперед заданого додатного числа*.

У цьому разі говорять, що число 1 є **границею послідовності** a_n, і записують $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$ (тут *lim* — це початкові літери французького слова *limite* — границя). Також можна записати, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Інколи використовують і таке позначення: $\frac{n}{n+1} \to 1$.

Послідовність, яка має границю, називають **збіжною**. Послідовність з n-м членом $a_n = \frac{1}{2^n}$ є ще одним прикладом збіжної послідовності: зі збільшенням номера n члени послідовності прямують до числа 0, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Не будь-яка послідовність є збіжною. Наприклад, послідовність натуральних чисел не є збіжною. Також не є збіжною послідовність (a_n), де $a_n = (-1)^n$.

Досі ми розглядали суми, які складаються зі скінченної кількості доданків. Проте при розв'язуванні деяких задач доводиться розглядати суми нескінченної кількості доданків.

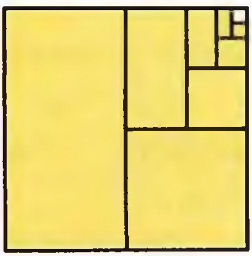


Рис. 37.2

Навіть саме словосполучення «сума нескінченної кількості доданків» може викликати здивування: адже не можна додати нескінченно багато чисел — такий процес ніколи не завершиться.

Проілюструємо на прикладі, як у математиці розв'язують таку проблему.

Розглянемо квадрат зі стороною 1 і поділимо його на 2 рівні частини (рис. 37.2). Одну з частин зафарбуємо, а незафарбовану знову поділимо на дві рівні частини. Знову ж таки одну з них зафарбуємо, а другу поділимо на дві рівні частини і т. д.

Після першого кроку площа зафарбованої фігури дорівнюватиме $S_1 = \frac{1}{2}$.

Після другого кроку: $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Після третього кроку: $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

. . .

Після n-го кроку: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

Отримуємо послідовність $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$.

Використовуючи формулу суми n перших членів геометричної прогресії, можна встановити, що після n-го кроку площа зафарбованої фігури дорівнюватиме

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Оскільки площа квадрата дорівнює 1, то з цієї формули випливає, що площа незафарбованої частини дорівнює $\frac{1}{2^n}$.

Зрозуміло, що, діючи за зазначеним алгоритмом, ми ніколи не зможемо повністю зафарбувати квадрат. Але чим більше таких кроків буде зроблено, тим менше площа зафарбованої частини відрізнятиметься від площі даного квадрата, а площа незафарбованої частини все менше відрізнятиметься від нуля.

Цей факт підтверджується тим, що для послідовності (S_n), *яка задається формулою* $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, *справджується властивість* $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 1$.

Дійсно, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Звідси $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, тобто $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1$.

Це означає, що сума n перших членів геометричної прогресії $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... при необмеженому збільшенні n прямує до числа 1. Тому природно домовитися вважати число 1 **сумою нескінченної геометричної прогресії** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... Записують

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1.$$

Узагальнимо розглянутий приклад.

Розглянемо довільну нескінченну геометричну прогресію b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ..., у якої $|q| < 1$.

Сума n перших її членів обчислюється за такою формулою: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Запишемо:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

Зрозуміло, що при $|q| < 1$ $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$. Цей факт буде доведено в курсі математики 11 класу. Тоді добуток $\frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n \to 0$. Звідси

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} q^n\right) = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Число $\frac{b_1}{1 - q}$ називають **сумою нескінченної геометричної прогресії** (b_n), у якої $|q| < 1$, і записують:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots = \frac{b_1}{1-q}.$$

Якщо суму нескінченної геометричної прогресії позначити буквою S, то можна записати таку формулу:

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1-q}}$$

Розглянемо геометричну прогресію 1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^n, ..., у якої $q = 2$, тобто $|q| > 1$.

У попередньому пункті ми переконалися, що вже сума її перших 64 членів — величезне число. Зрозуміло, що при необмеженому збільшенні n сума n перших членів цієї прогресії не прямує до жодного числа. Взагалі, про суму нескінченної геометричної прогресії можна говорити лише тоді, коли $|q| < 1$.

Ви знаєте, що кожне раціональне число, тобто дріб виду $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне, можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу або у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Наприклад, $\frac{5}{8} = 0,625$; $\frac{5}{11} = 0,454545...$, тобто $\frac{5}{11} = 0,(45)$.

Ви вмієте скінченний десятковий дріб подавати у вигляді звичайного дробу. Наприклад, $0,625 = \frac{625}{1000}$. Скоротивши цей дріб на 125, отримаємо $\frac{5}{8}$.

Проте ви ще не вмієте подавати нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу. Покажемо на прикладі, як можна розв'язувати цю задачу за допомогою суми нескінченної геометричної прогресії.

Розглянемо нескінченний періодичний десятковий дріб 0,(45).

Подамо це число у вигляді суми:

0,(45) = 0,45 + 0,0045 + 0,000045 + ...

Доданки 0,45; 0,0045; 0,000045; ... є членами нескінченної геометричної прогресії (b_n), у якій $b_1 = 0,45$, $q = 0,01$. Оскільки $|q| < 1$, то можемо знайти суму цієї прогресії:

$$S = \frac{0,45}{1-0,01} = \frac{0,45}{0,99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

Тому $0,(45) = \frac{5}{11}$.

ПРИКЛАД 1 Подайте нескінченний десятковий дріб 0,2(54) у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. Маємо: $0{,}2(54) = 0{,}2545454... = 0{,}2 + 0{,}0545454... =$ $= 0{,}2 + 0{,}054 + 0{,}00054 + 0{,}0000054 + ...$.

Нескінченний десятковий дріб 0,0545454... можна розглядати як суму нескінченної геометричної прогресії, перший член якої дорівнює $b_1 = 0{,}054$, а знаменник $q = 0{,}01$. Тоді

$$0{,}0545454... = \frac{0{,}054}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}054}{0{,}99} = \frac{54}{990} = \frac{3}{55}.$$

Звідси $0{,}2(54) = 0{,}2 + \frac{3}{55} = \frac{1}{5} + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}$.

Відповідь: $\frac{14}{55}$.

ПРИКЛАД 2 Дано правильний трикутник зі стороною a. З висот цього трикутника побудовано другий правильний трикутник, з висот другого побудовано третій трикутник і т. д. Знайдіть суму периметрів і суму площ усіх трикутників.

Розв'язання. Висота правильного трикутника зі стороною a дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, висота правильного трикутника зі стороною $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$ і т. д. Тоді периметри даних трикутників утворюють послідовність $3a$, $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{9a}{4}$ ..., що є геометричною прогресією зі знаменником $\frac{\sqrt{3}}{2}$, який менший від 1. Отже, сума периметрів $S = \frac{3a}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6a}{2 - \sqrt{3}} = \frac{6a\left(2 + \sqrt{3}\right)}{\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right)} = 6a\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

Площа правильного трикутника зі стороною a дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, площа правильного трикутника зі стороною $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ дорівнює $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4}$; площа правильного трикутника зі стороною $\frac{3a}{4}$ дорівнює $\left(\frac{3a}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$ і т. д. Отже, площі даних трикутників утворюють послідовність, яка є геометричною прогресією з першим членом $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ і знаменником $\frac{3}{4}$. Тоді сума площ дорівнює $\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = a^2\sqrt{3}$.

Відповідь: $6a\left(2 + \sqrt{3}\right)$; $a^2\sqrt{3}$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть знаменник q нескінченної геометричної прогресії ($|q| < 1$), у якої кожний член у 4 рази більший за суму всіх її наступних членів.

Розв'язання. Нехай a_n — довільний член прогресії, a_{n+1} — наступний за ним член. Розглянемо нескінченну геометричну прогресію з першим членом a_{n+1} і знаменником q ($|q| < 1$). Тоді її сума дорівнюватиме $\frac{a_{n+1}}{1-q}$. За умовою $a_n = \frac{4a_{n+1}}{1-q}$ або $a_n = \frac{4a_n q}{1-q}$. Оскільки жодний член геометричної прогресії не дорівнює нулю, то запишемо $1 = \frac{4q}{1-q}$. Звідси $q = \frac{1}{5}$.

Відповідь: $\frac{1}{5}$.

37.1.° Обчисліть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, якщо:

1) $b_1 = 24$; $q = \frac{3}{4}$;
2) $b_1 = -84$; $q = -\frac{1}{3}$;
3) $b_1 = 63$; $q = -\frac{1}{6}$;
4) $b_1 = -81$; $q = -\frac{2}{7}$.

37.2.° Обчисліть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, якщо:

1) $b_1 = 15$; $q = \frac{2}{3}$;
2) $b_1 = 18$; $q = -\frac{1}{4}$.

37.3.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

1) 10; 1; 0,1; ...;
2) 0,3; 0,03; 0,003; ...;
3) 6; −3; 1,5; ... .

37.4.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

1) 64, 24, 9, ...;
2) −396, 330, −275, ...

37.5.° Подайте нескінченний десятковий періодичний дріб у вигляді звичайного дробу:

1) 0,1111...;
2) 0,(5);
3) 0,(24);
4) 0,416416416...;
5) 0,2666...;
6) 0,6252525...;
7) 1,181818...;
8) 2,3(36).

37.6.° Подайте нескінченний десятковий періодичний дріб у вигляді звичайного дробу:

1) 0,222...;
2) 0,666...;
3) 0,(28);
4) 0,1777...;
5) 3,454545...;
6) 1,4(12).

37.7.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

1) $\sqrt{2}$, -1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ...;
2) $3\sqrt{3}$, 3, $\sqrt{3}$, ...;
3) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, 1, $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$, ...

37.8.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

1) $\sqrt{\frac{3}{2}}$, 1, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, ...;
2) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$, ...

37.9.° Знайдіть перший член нескінченної геометричної прогресії, сума якої дорівнює 63, а знаменник дорівнює $\frac{4}{9}$.

37.10.° Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює −60, а її перший член дорівнює −65. Знайдіть знаменник прогресії.

37.11.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_3 = 4$; $b_5 = 2$;
2) $b_1 + b_3 = 20$; $b_2 + b_4 = \frac{20}{3}$.

37.12.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_2 = 54$; $b_5 = 2$;
2) $b_2 - b_4 = 48$; $b_1 - b_3 = 240$.

37.13.° (*Задача Ферма*[1].) Покажіть, що коли S є сумою нескінченної геометричної прогресії (b_n), то $\frac{S}{S-b_1} = \frac{b_1}{b_2}$.

37.14.° Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює 2, а сума чотирьох її перших членів дорівнює $1\frac{7}{8}$. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії.

37.15.° Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює 256, а сума трьох її перших членів дорівнює 252. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії.

37.16.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо $b_2 b_4 = 36$ і $b_3 + b_5 = 8$.

37.17.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (c_n), якщо $c_3 c_5 = 20$ і $c_2 + c_4 = 12\sqrt{5}$.

37.18.° Розв'яжіть рівняння:

1) $1 + x + x^2 + \ldots = 4$, якщо $|x| < 1$;
2) $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \ldots = 1{,}5$, якщо $|x| > 1$.

37.19.° Розв'яжіть рівняння $1 - x^2 + x^4 - \ldots = \frac{16}{17}$, якщо $|x| < 1$.

37.20.° Знайдіть знаменник нескінченної геометричної прогресії, перший член якої в 1,5 раза більший за суму решти її членів.

[1] П'єр Ферма (1601–1665) — видатний французький математик.

37.21.° Знайдіть знаменник нескінченної геометричної прогресії, сума двох перших членів якої у 8 разів більша за суму решти її членів.

37.22.° Сума перших чотирьох членів нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q, $|q| < 1$, становить $\frac{9}{25}$ суми всіх її членів. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії, якщо другий член прогресії дорівнює 8, а перший є додатним.

37.23.° У нескінченній геометричній прогресії зі знаменником q, $|q| < 1$, сума членів з непарними номерами дорівнює 36, а сума членів з парними номерами дорівнює 12. Знайдіть перший член і знаменник прогресії.

37.24.° У квадрат зі стороною a вписано квадрат, вершинами якого є середини сторін першого квадрата, у другий квадрат вписано третій, вершинами якого є середини сторін другого, і т. д. (рис. 37.3). Знайдіть суму площ усіх квадратів.

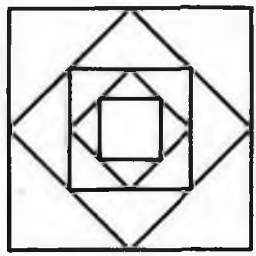


Рис. 37.3

37.25.° Геометричну фігуру складено з нескінченної послідовності рівносторонніх трикутників, розміщених так, як показано на рисунку 37.4. Площа кожного наступного трикутника вдвічі менша від площі попереднього. Сторона першого трикутника дорівнює 4 см. Чи поміститься така геометрична фігура на аркуші вашого зошита?

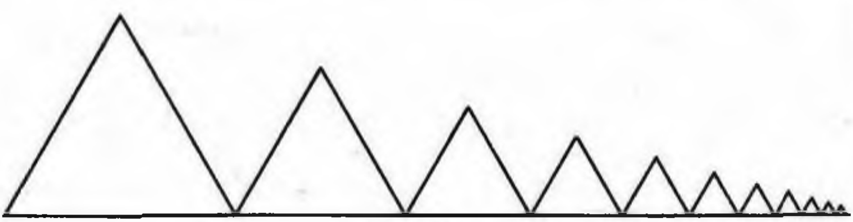


Рис. 37.4

37.26.° У коло радіуса R вписано правильний трикутник, у трикутник вписано коло, у це коло вписано правильний трикутник і т. д. Знайдіть суму: 1) периметрів усіх трикутників; 2) площ трикутників; 3) довжин кіл; 4) площ кругів, обмежених даними колами.

37.27.° У квадрат зі стороною a вписано коло, у коло вписано квадрат, у цей квадрат вписано коло, у яке знову вписано квадрат, і т. д. Знайдіть суму: 1) периметрів усіх квадратів; 2) площ квадратів; 3) довжин кіл; 4) площ кругів, обмежених даними колами.

37.28.° Побудуйте графік функції $y = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$.

37.29.° Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} + \dots$.

38. Сумування

Разом з кожною послідовністю $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ можна розглядати і таку послідовність S_n:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \dots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots ++ a_n,\ \dots .$$

Знаходження формули n-го члена послідовності (S_n) називають **сумуванням перших n членів послідовності (a_n)**.

Оскільки ви знаєте формули для обчислення суми n перших членів арифметичної і геометричної прогресій, то тим самим умієте сумувати перші n членів цих послідовностей.

За допомогою грецької літери Σ (сигма) суму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ записують так: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Наприклад, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$;

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

У п. 24 було встановлено, що

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Це означає, що ви вмієте сумувати перші n членів відповідно послідовності квадратів і послідовності кубів натуральних чисел.

Задача «знайти суму $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$» означає, що потрібно знайти суму n перших членів послідовності (a_n).

Одним з ефективних способів сумування є використання раніше доведених формул.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть суму $\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{25}{8}+\ldots+\frac{2^n\cdot n+1}{2^n}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{2^k\cdot k+1}{2^k}=k+\frac{1}{2^k}$.

Тоді задану суму можна переписати так:

$$\left(1+\frac{1}{2^1}\right)+\left(2+\frac{1}{2^2}\right)+\left(3+\frac{1}{2^3}\right)+\ldots+\left(n+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=(1+2+3+\ldots+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}.$$

Отже, $\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k\cdot k+1}{2^k}=\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть суму $1+12+45+\ldots+n^2(2n-1)$.

Розв'язання. Запишемо $k^2(2k-1)=2k^3-k^2$. Звідси

$$1+12+45+\ldots+n^2(2n-1)=(2\cdot1^3-1^2)+(2\cdot2^3-2^2)+$$

$$+(2\cdot3^3-3^2)+\ldots+(2\cdot n^3-n^2)=$$

$$=2(1^3+2^3+\ldots+n^3)-(1^2+2^2+\ldots+n^2)=2\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k^2=$$

$$=2\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^2(n+1)^2}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$

$$=\frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{6}.$$

ПРИКЛАД 3 Знайдіть суму $7+77+777+\underbrace{77\ldots7}_{n}$.

Розв'язання. Оскільки $\underbrace{77\ldots7}_{n}=7\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}$, то для розв'язання задачі достатньо знайти таку суму:

$$S_n=1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}.$$

Маємо: $S_n=\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}=$

$$=\frac{1}{9}(10+10^2+\ldots+10^n)-\frac{1}{9}(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n})=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{10(10^n-1)}{10-1}-\frac{n}{9}=\frac{10(10^n-1)}{81}-\frac{n}{9}.$$

Шукана сума дорівнює $\frac{70(10^n-1)}{81}-\frac{7n}{9}$.

Якщо для даної послідовності (a_n) вдається знайти таку послідовність (b_n), що $a_n = b_{n+1} - b_n$, тоді суму $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ знайти легко. Справді, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \ldots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1$.

ПРИКЛАД 4 Знайдіть суму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$.

Розв'язання. Маємо: $n \cdot n! = (n+1)! - n!$. Тепер можна записати

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \ldots + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1.$$

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що коли послідовність (a_n) — арифметична прогресія з ненульовими членами, то

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Розв'язання. Маємо: $\frac{1}{a_na_{n+1}} = \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{d}$, де d — різниця прогресії. Тоді

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \frac{1}{d} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) \cdot \frac{1}{d} + \ldots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{d} =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{a_{n+1} - a_1}{da_1 \cdot a_{n+1}} = \frac{a_1 + dn - a_1}{da_1 \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

ПРИКЛАД 6 Знайдіть суму $\frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{13}{2 \cdot 3} + \frac{25}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)} = \frac{2n(n+1) + 1}{n(n+1)} = 2 + \frac{1}{n(n+1)} = 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тоді можна записати

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2 + 2k + 1}{k(k+1)} = \left(2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 2n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n(2n+3)}{n+1}.$$

38.1.$^{\bullet}$ Знайдіть суму:

1) $1 + 6 + 15 + \ldots + n(2n - 1)$;
2) $2 + 10 + 30 + \ldots + n(n^2 + 1)$;
3) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$.

38.2.° Знайдіть суму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)$.

38.3.° Знайдіть суму $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{5^k \cdot k - 1}{5^k}$.

38.4.° Знайдіть суму $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1} \cdot k^2 + 3^k \cdot k + 1}{3^k}$.

38.5.° Знайдіть суму:

1) $9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{n}$; 2) $5 + 55 + 555 + \ldots + \underbrace{55\ldots5}_{n}$.

38.6.•• Доведіть, що коли послідовність (a_n) — арифметична прогресія з додатними членами, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}.$$

38.7.•• Знайдіть суму:

1) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(4n-7)(4n-3)}$;

2) $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{7}{2 \cdot 3} + \frac{13}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}$;

3) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$;

4) $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

38.8.•• Знайдіть суму:

1) $\frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 17} + \ldots + \frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$;

2) $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{13}{2 \cdot 3} + \frac{37}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{n^3 + n^2 + 1}{n(n+1)}$.

38.9.* Знайдіть суму $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2 - 1}$.

38.10.* Знайдіть суму $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

38.11.* Знайдіть суму $S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \ldots + n \cdot a^{n-1}$, де $a \neq 1$.

1.10. 6. **1.12.** Більше тих, у яких цифри записано в порядку спадання. **1.15.** 3) $a^2 - a + 5$; 4) $x^{48} + x^{24} + 1$. **1.16.** 1) 2; 2) 1. **1.17.** $\frac{4}{x(x+16)}$. **1.18.** 1) $\frac{2(1-3y)}{(3y+1)(2x+7)}$; 2) $\frac{x^2+xy+y^2}{y-2}$; 3) $\frac{1}{ab}$; 4) $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$. **1.19.** 3) $\frac{x-y}{x+y}$; 4) 1. **1.20.** 1) 2; 2) $(4; +\infty)$. **1.21.** 2) Якщо $a = 2$, то x — будь-яке; якщо $a > 2$, то $x \geqslant -a - 2$; якщо $a < 2$, то $x \leqslant -a - 2$. **1.22.** 1) $[2; +\infty) \cup \{-1\}$; 2) $(-1; 2) \cup (2; +\infty)$; 3) $[1; +\infty) \cup \{-2\}$; 4) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2)$. **1.23.** 1) Якщо $a \leqslant 1$, то $x > a$; якщо $1 < a \leqslant 3$, то $x > a$ або $x = 1$; якщо $a > 3$, то $x > a$, або $x = 1$, або $x = 3$. **1.24.** 4) $[-1; 4]$; 6) 2; −2. **1.25.** 4) $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **1.28.** 1) 1; 2) 2; 3; 3) 1; 4. **1.29.** 1) (0; 2), (4; 2); 2) (1; −1), (1; 2), (5; −1), (5; 2); 3) (1; −1), (−1; 1). **1.30.** 1) Якщо $a = 1$, то $x > 3$; якщо $a \neq 1$, то $x = 3$; 2) якщо $a < 1$, то $x = a$, або $x = 1$, або $x = 3$; якщо $1 \leqslant a < 3$, то $x = a$ або $x = 3$; якщо $a \geqslant 3$, то $x = a$; 3) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то $x = 1$; якщо $a \geqslant 0$ і $a \neq 1$, то $x = 1$ або $x = a^2$. **1.31.** 1) 6; 2) $6\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2}+1$; 4) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. **1.32.** 1) $\sqrt{a-3}+1$; 2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$; 3) $\sqrt{a-3}$; 4) 1. **1.33.** 1) 1; 2) $2ab$; 3) $\frac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}$; 4) $\frac{x+y}{2}$. **1.36.** $a = 1$. **1.37.** $a = 2$. **1.38.** 1) 9; 2) 0; 3) −3; −1; 2; 6. **1.39.** 1) 2; 3; $\frac{5\pm\sqrt{89}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{12}$; 3) −2; 3; $\frac{-7\pm\sqrt{73}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 2; 5) $-1\pm\sqrt{3}$; $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$; 6) 1; −1; $2\pm\sqrt{3}$; 7) −4; 8) $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. **1.42.** Не існують. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що значення виразу $5^n + 1$ не кратне 4. **1.45.** $m = 4$, $n = 6$. *Вказівка.* При $m \geqslant 5$ остання цифра десяткового запису числа $m! + 12$ дорівнює 2. **1.46.** 25; 76. *Вказівка.* Шукане число n таке, що число $(n^2 - n)$ кратне 100. Далі скористайтеся тим, що НСД $(n; n - 1) = 1$. **1.47.** *Вказівка.* $\frac{2n^2+5n+3}{3n^2+10n+8} = \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+2)(3n+4)}$. Доведіть, що НСД $(n + 1; n + 2) = 1$, НСД $(n + 1; 3n + 4) = 1$, НСД $(2n + 3; n + 2) = 1$, НСД $(2n + 3; 3n + 4) = 1$. **1.48.** *Вказівка.* Можна записати $x^2 + ax + b = (x - x_1) \times (x - x_2)$, де $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, $x_1 > 2$, $x_2 > 2$. Звідси $1 + a + b = (1 - x_1) \times (1 - x_2)$. **1.49.** 8. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що дві останні цифри запису числа $n^2 + 8n + 16$ — нулі. **2.10.** 1) *Вказівки.* $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 = (a^2 + 6a + 9) + (b^2 - 4b + 4)$. **2.16.** *Вказівка.* Розгляньте суму даних виразів. **2.17.** 1) *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **2.19.** *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **2.23.** *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **2.24.** *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **2.25**. *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **2.26.** *Вказівка.* Ліву частину нерівності можна записати так: $(a^8 - 2a^4 + 1) + (a^6 - 2a^4 + a^2)$. **2.28.** *Вказівка.* Скористайтеся методом доведення від супротивного. **2.29.** *Вказівка.* Скористайтеся методом доведення від супротивного. **2.31.** *Вказівка.* Оскільки $0 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$, то $\frac{x}{1+y} \leqslant \frac{x}{x+y}$ і $\frac{y}{1+x} \leqslant \frac{y}{y+x}$. **2.34.** *Вказівка.* Скористайтесь ключовою задачею 2.15 (1). **2.37.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $1 + x^2 \geqslant 2x$. **2.38.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $x^4 + 4 \geqslant 4x^2$ і $4y^4 + 1 \geqslant 4y^2$. **2.39.** *Вказівка.* Доведіть, що $4y^3 + y \geqslant 4y^2$ при $y \geqslant 0$. **2.42.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$ для $x = 2a$, $y = b$, $z = 1$. **2.48.** *Вказівка.* Запишіть нерівність, що доводиться, у вигляді $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac) \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$. **2.49.** *Вказівка.* Маємо: $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 - 8 = (x - y)^2 - 4(x - y) + 2xy$. **2.50.** *Вказівка.* Покажіть, що $a^2 + b^2 + ab - 3(a + b - 1) = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a - 1)(b - 1)$. **2.51.** *Вказівка.* Нехай твердження, що доводиться, хибне. Тоді є правильними нерівності $a - b^2 - \frac{1}{4} > 0$, $b - c^2 - \frac{1}{4} > 0$, $c - a^2 - \frac{1}{4} > 0$. Додайте ці нерівності і отримайте суперечність. **2.52.** *Вказівка.* Зауважимо, що коли є правильною одна з нерівностей $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, $c \geqslant 1$, то твердження, що доводиться, очевидне. Нехай $a < 1$, $b < 1$, $c < 1$ і є правильними нерівності $a(1 - b) > \frac{1}{4}$, $b(1 - c) > \frac{1}{4}$, $c(1 - a) > \frac{1}{4}$. Звідси $a(1 - a)b(1 - b)c(1 - c) > \frac{1}{64}$. Доведіть, що при $0 < x < 1$ виконується нерівність $0 < x(1 - x) \leqslant \frac{1}{4}$. **2.53.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що при $a > 0$ і $b > 0$ $\frac{1}{a^2 + b^2} \leqslant \frac{1}{2ab}$. **2.54.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $2ab \leqslant a^2 + b^2$. **2.56.** *Вказівка.* Доведіть, що $(a + b + c)^2 \geqslant 3(ab + bc + ac)$. **2.58.** *Вказівка.* Оскільки при заданій умові $x^2 \leqslant x$ і $y^2 \leqslant y$, то достатньо довести нерівність $(x + y + 1)^2 \geqslant 4(x + y)$. **2.59.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n+1}$, де $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. **2.60**. *Вказівка.* Ліва частина нерівності тотожно дорівнює виразу $\frac{xy^3}{x^3+2xyz}+\frac{yz^2}{y^3+2xyz}+\frac{zx^2}{z^3+2xyz}=\frac{y^2}{x^2+2yz}+\frac{z^2}{y^2+2zx}+$ $+\frac{x^2}{z^2+2xy}$. Далі див. розв'язання задачі 2.54. **2.61.** *Вказівка.* $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=\left(a^2+\frac{1}{4}e^2\right)+\left(b^2+\frac{1}{4}e^2\right)+\left(c^2+\frac{1}{4}e^2\right)+\left(d^2+\frac{1}{4}e^2\right)$. **2.62.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $1\cdot n \geqslant n$; $2\cdot(n-1)\geqslant n$; ...; $k\cdot(n-k+1)\geqslant n$, де $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. **2.63.** *Вказівка.* Перетворіть ліву частину нерівності, що доводиться, за допомогою рівності $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$, де $k \in \mathbb{N}$. **2.64.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $k\cdot k!=(k+1)!-k!$, $k \in \mathbb{N}$. **2.65.** *Вказівка.* $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$. Далі див. приклад 3 п. 2. **2.66.** *Вказівка.* Нехай $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$, $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$. Маємо: $A<B$. Звідси $A^2<AB=\frac{1}{2n+1}$. **2.67.** *Вказівка.* Нехай $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$, $C=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}$. Маємо: $A>C$, $A^2>AC=\frac{1}{4n}$. **2.68.** *Вказівка.* Нехай $S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+$ $+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}$, $S_1=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}$. Очевидно, що $S>S_1$. Тоді $2S>S+S_1$. **3.10.** *Вказівка.* $a^2+4=$ $=(a^2+3)+1$. **3.16.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(a;\ -b)$ і $(c;\ d)$. **3.22.** 12. **3.23.** 20. **3.24.** 3. **3.25.** 12. **3.26.** 8. **3.27.** 18. **3.28.** $\frac{1}{6}$. **3.29.** $\frac{1}{7}$. **3.30.** *Вказівка.* $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$. **3.38.** *Вказівка.* $\sqrt{(1-a)(1-b)}\leqslant$ $\leqslant\frac{1-a+1-b}{2}$. **3.40.** *Вказівка.* I спосіб. Скористайтеся тим, що $x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}$. II спосіб. Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(1;\ 1)$ і $(a;\ b)$. **3.43.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що середнє гармонічне чисел a і b не більше за їх середнє арифметичне. **3.44.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $\left(a;\ \sqrt{1-a^2}\right)$ і $\left(\sqrt{1-b^2};\ b\right)$. **3.45.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(1;\ 1;\ 1)$

і $(x;\ y;\ z)$. **3.48.** 5, −5. *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(3;\ 4)$ і $(x;\ y)$. **3.49.** 1. **3.51.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(a^2;\ b^2;\ c^2)$ і $\left(\frac{1}{a};\ \frac{1}{b};\ \frac{1}{c}\right)$. **3.54.** *Вказівка.* $(a + c)(b + d) = ab + ad + cb + cd = (ad + bc) + (cd + ba)$. **3.55.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $\left(\sqrt{3a+1};\ \sqrt{3b+1};\ \sqrt{3c+1}\right)$ і $(1;\ 1;\ 1)$. **3.57.** 5. *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(2;\ x)$ і $\left(\sqrt{x-1};\ 5\right)$. Далі скористайтеся умовою досягнення рівності в нерівності Коші—Буняковського. **3.58.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(x;\ y;\ z)$ і $(3;\ -1;\ 1)$. **3.59.** *Вказівка.* $|2x + y - z| \leqslant \sqrt{x^2+3y^2+z^2} \times \sqrt{2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+(-1)^2}$. **3.60.** *Вказівка.* І спосіб. $\sqrt{b-1} = \sqrt{(b-1)\cdot 1} \leqslant \frac{b-1+1}{2} = \frac{b}{2}$. ІІ спосіб. $\frac{a}{\sqrt{b-1}} + \frac{b}{\sqrt{a-1}} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a-1}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b-1}}} \geqslant 4$.

3.61. *Вказівка.* Маємо: $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$. Також, порівнюючи середнє квадратичне і середнє арифметичне чисел $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$, можна записати $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. **3.62.** *Вказівка.* $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{a}\right)^2 \geqslant \frac{\left(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{a}\right)^2}{2}$. Далі скористайтеся тим, що з умови $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$ випливає нерівність $ab \leqslant \frac{1}{4}$. **3.63.** *Вказівка.* $\sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} \geqslant \sqrt{2}\cdot\frac{a+1}{2}$. **3.64.** *Вказівка.* Маємо:

$$\sqrt{(1-a-b)^2+c^2+c^2} + \sqrt{(1-b-c)^2+a^2+a^2} + \sqrt{(1-c-a)^2+b^2+b^2} =$$
$$= \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{(1-a-b)^2+c^2+c^2}{3}} + \sqrt{\frac{(1-b-c)^2+a^2+a^2}{3}} + \sqrt{\frac{(1-c-a)^2+b^2+b^2}{3}}\right).$$

Далі порівняйте середнє квадратичне трьох чисел з їх середнім арифметичним. **3.65.** *Вказівка.* Нехай сторона квадрата дорівнює 1. Скористаємось позначеннями, показаними на рисунку. Залишилося довести нерівність $\sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{y^2+(1-z)^2} + \sqrt{z^2+(1-t)^2} + \sqrt{t^2+(1-x)^2} \geqslant 2\sqrt{2}$. Далі див. приклад 1 п. 3. **3.66.** *Вказівка.* $1 + a = 2 - b - c = (1-b) + (1-c) \geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$.

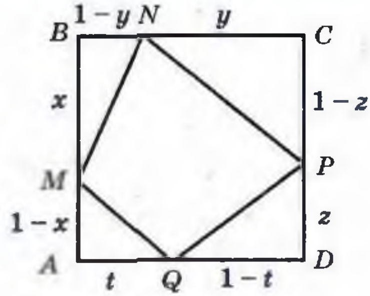


Рис. до задачі 3.65

3.67. *Вказівка.* І спосіб. Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}; \frac{y}{\sqrt{x+z}}; \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ і $\left(\sqrt{y+z}; \sqrt{x+z}; \sqrt{x+y}\right)$. II спосіб. У силу нерівності Коші $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4} \geqslant x$ і т. д. 3.68. *Вказівка.* Оскільки при $a > 0$ і $b > 0$ $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \frac{a+b}{2}$, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$.

3.69. *Вказівка.* $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1} \geqslant \frac{\frac{2a}{b+c}\cdot 1}{\frac{a}{b+c}+1} = \frac{2a}{a+b+c}$. 4.1. *Вказівка.* I спосіб. Скористайтеся нерівністю (*) з п. 4. II спосіб. Скористайтесь нерівністю (***) п. 4. 4.3. *Вказівка.* Скористайтеся нерівністю (**) з п. 4. 4.4. *Вказівка.* $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x} = \frac{(x^2)^2}{yx}+\frac{(y^2)^2}{zy}+\frac{(z^2)^2}{xz}$. 4.5. *Вказівка.* І спосіб. Скористайтеся нерівністю (***) з п. 4. II спосіб. $\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b} = \frac{1}{9}\left(\frac{(3a)^2}{b+2c}+\frac{(3b)^2}{c+2a}+\frac{(3c)^2}{a+2b}\right)$. Далі скористайтеся нерівністю (*) з п. 4. 4.6. *Вказівка.* І спосіб. $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b} = \frac{(a^2)^2}{ab+ac}+\frac{(b^2)^2}{bc+ba}+\frac{(c^2)^2}{ca+cb}$. Далі скористайтеся нерівністю (***) з п. 4. II спосіб. $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b} = \frac{1}{4}\left(\frac{(2a^2)^2}{ab+ac}+\frac{(2b^2)^2}{bc+ba}+\frac{(2c^2)^2}{ca+cb}\right)$. Далі скористайтеся нерівністю (*) з п. 4. 4.8. *Вказівка.* $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac} = \frac{1^2}{1+ab}+\frac{1^2}{1+bc}+\frac{1^2}{1+ac}$. Далі скористайтеся нерівністю (***) з п. 4. 4.9. *Вказівка.* Ліву частину нерівності подайте у вигляді $\frac{x^2}{x^2+2yx+3zx}+\frac{y^2}{y^2+2zy+3xy}+\frac{z^2}{z^2+2xz+3yz}$. Далі скористайтеся нерівністю (***) з п. 4 і нерівністю $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$. 4.11. *Вказівка.* Скориставшись ключовою задачею 2.17(1), можна записати, що $(x+1)(y+1) = xy+1+x+y \geqslant 2(x+y)$. 4.12. *Вказівка.* За допомогою ключової задачі 2.17(1) і умови $x \in [0;\ 1]$ можна записати, що $\frac{x}{2+yz} = \frac{x}{1+yz+1} \leqslant \frac{x}{1+y+z} \leqslant \frac{x}{x+y+z}$. **4.14.** *Вказівка.* Скориставшись ключовою задачею 2.13, можна записати, що $\frac{1}{a^3+b^3+abc} \leqslant \frac{1}{a^2b+b^2a+abc} = \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$. **4.15.** *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 2.13. **4.16.** *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 2.13. **4.17.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 2.19. **4.18.** *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 2.22. **4.19.** *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 2.25. **4.20.** *Вказівка.* Скориставшись задачею 2.29 (1), можна записати: $\frac{1}{\sqrt{1}} < 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0}$; $\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 2\sqrt{1}$; $\frac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$; ...; $\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$. **4.21.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 2.29 (2). **5.10.** 2) $(-\infty;\ -7) \cup (-7;\ 7) \cup (7;\ +\infty)$; 4) $[4;\ 6) \cup (6;\ +\infty)$. **5.21.** 3) $\{1\} \cup [2;\ +\infty)$; 4) $\{-1\} \cup [3;\ +\infty)$; 5) $(-2;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; 6) $[0;\ +\infty)$. **5.22.** 3) $(-3;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$; 4) $\{-4\} \cup [3;\ +\infty)$; 5) $\{-5\} \cup [-2;\ +\infty)$; 6) $(0;\ +\infty)$. **5.23.** 1) $\left[\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty;\ -\frac{23}{8}\right]$; 3) $\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; 4) $(-\infty;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -6] \cup [6;\ +\infty)$. **5.24.** 1) $\left[\frac{19}{20};\ +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty;\ -\frac{23}{12}\right]$; 3) $\left(-\infty;\ \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5};\ +\infty\right)$; 4) $(-\infty;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$. **5.25.** Див. рисунок. **5.26.** 1) $[-4;\ 1]$; 2) $\left[-\frac{1}{2};\ 2\right]$; 3) $[-3;\ 2]$; 4) $[-2;\ 2]$; 5) $[-4;\ 4]$; 6) $(-\infty;\ -1] \cup \left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$. **5.27.** 1) $[-10;\ 0]$; 2) $[-27;\ 3]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $[-1;\ 1]$; 5) $[0;\ 1]$; 6) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{9}\right] \cup [1;\ +\infty)$. **5.28.** 1) $\mathbb{Q}$; 2) $(-\infty;\ 0) \cup [1;\ +\infty)$; 3) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; 4) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; 5) $\mathbb{Q}$. **5.29.** 1) $\{1\}$; 2) $\{0;\ 1\}$; 3) $\mathbb{Q}$. **5.30.** 1) $\{0;\ 1\}$; 2) $\{0\}$. **5.31.** 3) Див. рисунок. *Вказівка.* $D(y) = [-1;\ 2)$, $E(y) = \{0;\ 1\}$. **5.32.** 2) Див. рисунок. *Вказівка.* $D(y) = \mathbb{Z}$, $E(y) = \{0\}$. **5.33.** 1) Див. рисунок; 2) див. рисунок. **5.34.** 1) Див. рисунок; 2) див. рисунок. **5.35.** Див. рисунок. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що коли $x \in \mathbb{Z}$, то $x^2 \equiv r \pmod 5$ тільки при $r \in \{0;\ 1;\ 4\}$. **5.37.** $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. **5.38.** $g(x) = 13 - 3x$. **5.39.** $f(x) = \frac{1}{3} - x$. *Вказівка.* Оскільки рівність, задана в умові, виконується при всіх x, то замість x підставте $-x$. Отримаємо $f(-x) + 2f(x) = -x + 1$. Із системи $\begin{cases} f(x) + 2f(-x) = x + 1, \\ f(-x) + 2f(x) = -x + 1 \end{cases}$ знаходимо $f(x) = \frac{1}{3} - x$. Залишилося пере-

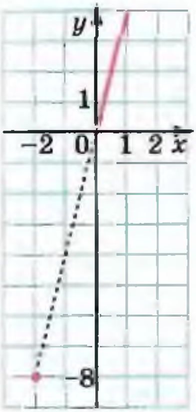


Рис. до задачі 5.25

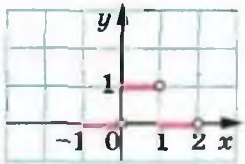


Рис. до задачі 5.31 (3)

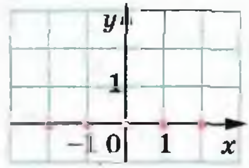


Рис. до задачі 5.32 (2)

Рис. до задачі 5.33 (1)

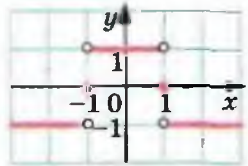


Рис. до задачі 5.33 (2)

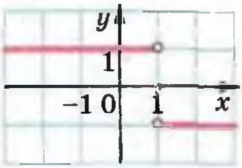


Рис. до задачі 5.34 (1)

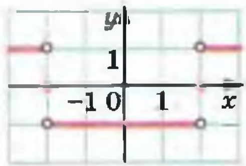


Рис. до задачі 5.34 (2)

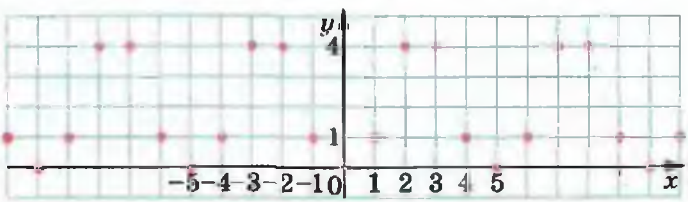


Рис. до задачі 5.35

вірити, що знайдена функція задовольняє умову задачі. **5.40.** $f(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$. *Вказівка*. У задану рівність замість x підставте $\frac{1}{x}$. **5.41.** $f(x) = \frac{x+10}{3}$. *Вказівка*. У задану рівність замість x підставте $1 - x$. **5.42.** 0; −2. *Вказівка*. Подайте дану функцію у вигляді $f(x) = (x+1)^2 - 1$. Тоді легко встановити, що $f(f(f(x))) = (x+1)^8 - 1$. **5.43.** −5; −4. *Вказівка*. $f(x) = (x+5)^2 - 5$. **5.44.** 1. *Вказівка*. Очевидно, що $x^2 - x + 1 \geqslant x$. Тоді $f(f(x)) \geqslant f(x) \geqslant x$. **6.8.** 5) 1; 6) 1; 7) $[0; +\infty)$; 8) $\mathbb{Z}$; 9) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **6.9.** 4) $(-\infty; 0]$; 5) 3; 6) $[0; 1)$; 7) $\{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; 8) $\frac{1}{2}$. **6.10.** 4) $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$;

6) $(k;\ k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **6.11.** 6) $(1;\ 3)$, $(3;\ +\infty)$; 7) $(-\infty;\ 0)$, $[1;\ +\infty)$. **6.12.** 2. **6.13.** $m < -2$. **6.14.** Зростає на кожному з проміжків виду $[k;\ k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **6.25.** Зростає на $(-\infty;\ 0]$, спадає на $[0;\ +\infty)$. *Вказівка.* Скористайтеся теоремою 6.4. **6.27.** Зростає на $[a;\ +\infty)$, спадає на $(-\infty;\ a]$. **6.28.** *Вказівка.* Скористайтеся теоремами 6.2 і 6.3. **6.31.** 1) $\min\limits_M f(x) = 1$, найбільшого значення не існує; 2) $\min\limits_M f(x) = 2$, найбільшого значення не існує; 3) $\min\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 4$; 4) $\min\limits_M f(x) = 0$, $\max\limits_M f(x) = \frac{1}{4}$. *Вказівка.* $x^4 + 4 \geqslant 4x^2$. **6.32.** 1) $\max\limits_M f(x) = 13$, найменшого значення не існує; 2) $\max\limits_M f(x) = -2$, найменшого значення не існує; 3) $\min\limits_{[0;\,2]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = 1$. **6.33.** 1) 2; 2) 2; 3) 1. **6.34.** 1) Зростаюча; 2) зростаюча. **6.35.** 1) Спадна; 2) спадна. **6.36.** $a = 0$. *Вказівка.* З теореми 6.5 випливає, що дана функція повинна мати не більше одного нуля. **6.37.** $a = 1$. **6.38.** $a \leqslant 2$. **6.39.** $a \leqslant 1$. **6.40.** 1) -1. *Вказівка.* Доведіть, що ліва частина рівняння задає зростаючу функцію; 2) 3; 3) 2. **6.41.** 1) 1; 2) 9; 3) $\frac{1}{2}$. **6.42.** 1) 9. *Вказівка.* Доведіть, що ліва і права частини рівняння задають функції, одна з яких є зростаючою, а друга — спадною; 2) 1. **6.43.** 1) 4; 2) 4. **6.44.** $(2;\ 2)$, $(-2;\ -2)$. *Вказівка.* Перше рівняння системи перепишемо так: $x^7 + x = y^7 + y$. Розглянемо функцію $f(t) = t^7 + t$. Вона є зростаючою. Тоді $x = y$. **6.45.** $(1;\ 1)$. **6.46.** $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(t) = 2\sqrt{t} + t^4$. Вона є зростаючою. **6.47.** $\frac{1}{2}$. *Вказівка.* Доведіть, що $|x| + |x-1| \geqslant 1$, а $\frac{4x}{4x^2+1} \leqslant 1$. **6.48.** 0. *Вказівка.* Див. приклад 7 п. 6. **6.49.** 1. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне такому: $\sqrt{2x - x^2} = \frac{x^2+1}{2x}$. **6.50.** 0. *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне такому: $\sqrt{4 - |x|} = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$. **6.51.** *Вказівка.* Див. приклад 8 п. 6. **6.52.** *Вказівка.* Ліву частину нерівності подайте у вигляді $(B - A)\,x_1 + A + B$, де $A = (1 - x_2)(1 - x_3)\ \ldots$ $\ldots\ (1 - x_n)$, $B = (1 + x_2)(1 + x_3)\ \ldots\ (1 + x_n)$. Розгляньте функцію $f(x) = (B - A)\,x + A + B$, $D(f) = [0;\ 1]$. Для будь-якого $x \in [0;\ 1]$ $f(x) \leqslant f(1)$. **6.54.** 3. *Вказівка.* Див. приклад 5 п. 6. **6.55.** 1, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$,

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. *Вказівка.* Перепишіть дане рівняння так: $\frac{\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3+1}{2}=x$. Розгляньте функцію $f(x)=\frac{x^3+1}{2}$. **6.56.** Не може. *Вказівка.* Доведіть, що $f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$. **7.6.** 6) Парна; 7) непарна; 8) непарна. **7.7.** Парна. **7.8.** Парна. **7.9.** Непарна. **7.11.** 0. **7.13.** 0. **7.14.** 0. **7.15.** Парна. **7.16.** Непарна. **7.17.** Спадна. **7.18.** Зростаюча. **7.19.** 2; 5. **7.20.** −3; −1. **7.21.** 0. *Вказівка.* Доведіть, що функція f є сталою на $[-5; 5]$. **7.22.** 1) $a = 1$. *Вказівка.* Покажіть, що при всіх $x \in \mathbb{R}$ рівність $(x-1)^4 + a(x+1)^4 = (x+1)^4 + a(x-1)^4$ виконується лише при $a = 1$; 2) $a = -1$. **7.23.** *Вказівка.* Даний вираз задає парну функцію. Доведіть, що многочлен, який задає парну функцію, не містить одночленів непарного степеня. **7.24.** $a = 1$. *Вказівка.* Див. приклад 3 п. 7. **9.17.** *а*) $y = x^2 + 3$; *б*) $y = -2x^2 - 1$. **9.18.** *а*) $y = 2x^2 - 6$; *б*) $y = 4 - x^2$. **9.19.** *а*) $y = (x-2)^2$; *б*) $y = -3(x+3)^2$. **9.20.** *а*) $y=\frac{1}{2}(x+4)^2$; *б*) $y = -2(x-1)^2$. **9.21.** *а*) $y = (x+2)^2 - 4$; *б*) $y = -(x-2)^2 + 5$; *в*) $y=\frac{1}{3}(x-3)^2+1$. **9.22.** *а*) $y = (x-4)^2 - 5$; *б*) $y = -2(x+6)^2 + 7$. **9.27.** Обидва твердження є правильними. **9.30.** 3) *Вказівка.* $y=\frac{-2x+2-2}{x-1}=-2-\frac{2}{x-1}$; 4) *Вказівка.* $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x+\frac{1}{2}}$. **9.32.** 2) Див. рисунок. *Вказівка.* $y=\sqrt{x} \to y=\sqrt{1+x} \to y=\sqrt{1-\frac{x}{2}}$. **9.34.** 5) Див. рисунок. *Вказівка.* $y = [x] \to y = [x-1] \to y = [2x-1]$. **9.35.** 8) Див. рисунок. *Вказівка.* $y=\{x\} \to y=\left\{x+\frac{1}{3}\right\} \to y=\left\{-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right\}$. **9.36.** Якщо $a < 0$, то коренів

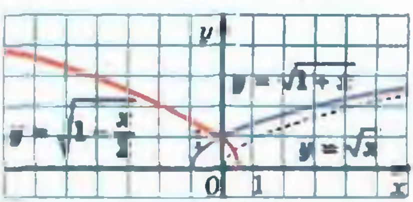


Рис. до задачі 9.32 (2)

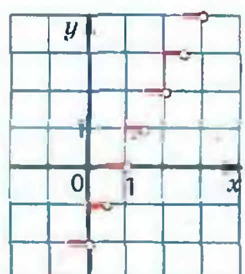


Рис. до задачі 9.34 (5)

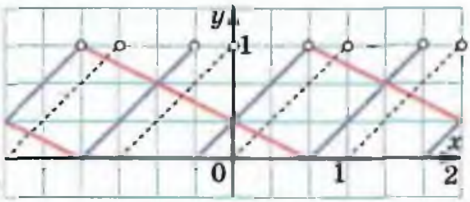


Рис. до задачі 9.35 (8)

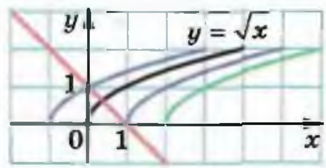


Рис. до задачі 9.38

немає; якщо $a = 0$, то один корінь; якщо $a > 0$, то 2 корені. *Вказівка*. Розгляньте графіки функцій $f(x) = a - |x|$ і $g(x) = x^2$. **9.37.** $a < 0$. **9.38.** Якщо $a \leqslant 1$, то один корінь; якщо $a > 1$, то коренів немає (див. рисунок). **9.39.** Якщо $a \geqslant -2$, то один корінь; якщо $a < -2$, то коренів немає. **9.40.** Якщо $a \leqslant 1$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = |1 - a|$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = |3 - a|$; якщо $1 < a < 2$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = |3 - a|$; якщо $a = 2$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 1$; якщо $2 < a < 3$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = |1 - a|$; якщо $a \geqslant 3$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = |3 - a|$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = |1 - a|$ (див. рисунок).

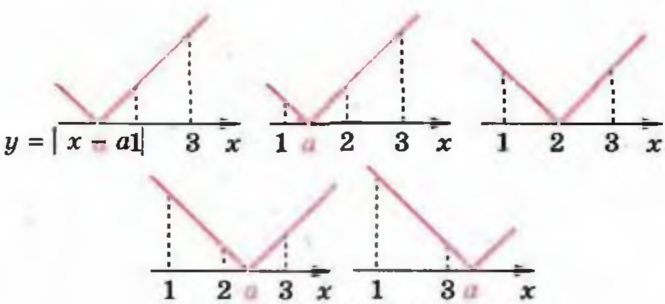


Рис. до задачі 9.40

9.42. Якщо $a \neq 0$, то 2 корені; якщо $a = 0$, то один корінь (див. рисунок). **9.43.** Якщо $|a| > 2$, то коренів немає; якщо $|a| = 2$, то безліч коренів; якщо $|a| < 2$, то 2 корені. *Вказівка*. Перепишіть рівняння так: $2 - |x| = |x - a|$ і скористайтеся рисунком. **9.44.** Якщо $|a| > \frac{3}{4}$, то 2 корені; якщо $|a| = \frac{3}{4}$, то один корінь; якщо $|a| < \frac{3}{4}$, то коренів немає. *Вказівка*. Див. рисунок. Значення параметра a, при яких пряма дотикається до параболи, можна знайти з умови, що квадратні рівняння $x - a = x^2 + 1$

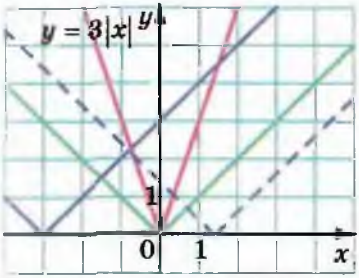


Рис. до задачі 9.42

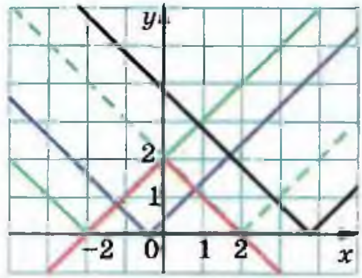


Рис. до задачі 9.43

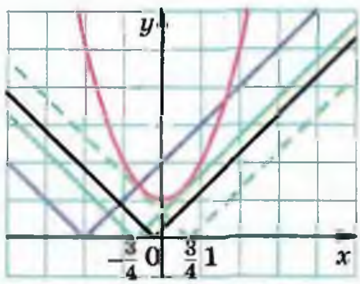


Рис. до задачі 9.44

і $a - x = x^2 + 1$ повинні мати один корінь. **9.45.** Якщо $|a| > \frac{9}{4}$, то коренів немає; якщо $|a| = \frac{9}{4}$, то один корінь; якщо $|a| < \frac{9}{4}$, то 2 корені. **10.8.** 1) $[-7; 7]$; 2) $[-3; 7]$, $[0; 6]$. **10.9.** 1) -2; 2; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup \cup (2; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-2; 2)$; 2) -3; 2; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup \cup (-3; 2) \cup (2; +\infty)$. **10.11.** *Вказівка*. 1) Скористайтеся схемою: $y = f(x) \rightarrow y = f(x - 1) \rightarrow y = f(|x| - 1)$; 2) скористайтеся схемою: $y = f(x) \rightarrow y = f(|x|) \rightarrow y = f(|x - 1|)$. **10.13.** 4) Див. рисунок. *Вказівка*. Скористайтеся схемою: $y = \sqrt{x} \rightarrow y = \sqrt{1 + x} \rightarrow y = = \sqrt{1 - x} \rightarrow y = \sqrt{1 - |x|}$. **10.15.** 3) Див. рисунок. *Вказівка*. Скористайтеся схемою: $y = \sqrt{x} \rightarrow y = \sqrt{x + 2} \rightarrow y = \sqrt{|x| + 2} \rightarrow y = = \sqrt{|x - 1| + 2}$. **10.17.** 1) Якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $a > 1$, то 2 корені; якщо $a = 1$, то 3 корені; якщо $0 < a < 1$, то 4 корені; 2) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $a > 1$, то 2 корені; якщо $a = 1$, то 3 корені; якщо $0 < a < 1$, то 4 корені; 3) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$, то 3 корені; якщо $0 < a < 1$, то 6 коренів; якщо $a = 1$, то 4 корені; якщо $a > 1$, то

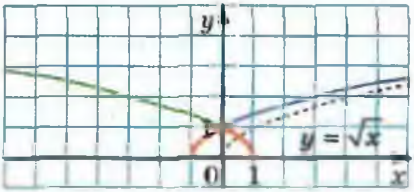


Рис. до задачі 10.13 (4)

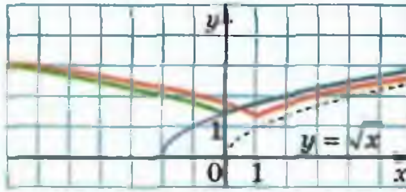


Рис. до задачі 10.15 (3)

2 корені; 4) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $a > 2$, то 1 корінь; якщо $0 < a < 2$, то 2 корені. **10.18.** 3) Якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $a = 3$, то 4 корені; якщо $0 < a < 1$, то 8 коренів; якщо $a = 1$, то 7 коренів; якщо $1 < a < 3$, то 6 коренів; якщо $a > 3$, то 2 корені. **10.23.** 1) Див. рисунок. *Вказівка.* Скористайтеся схемою: $y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{x-1} \to$ $\to y = \sqrt{|x|-1} \to y = \sqrt{|x|-1} - 1 \to y = \left|\sqrt{|x|-1} - 1\right|$. **10.25.** $a = 0$ або $a = 2$. **10.26.** $a = 1$ або $a = -5$. **10.27.** $a = -2$ або $a = -\frac{1}{2}$. **10.28.** $a = 1$ або $a = -\frac{1}{3}$. **10.29.** $a = -\frac{1}{2}$. **10.30.** $a = \frac{8}{3}$. **11.10.** –1; 1; 3.

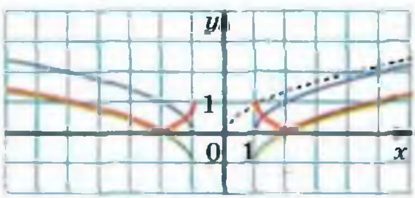


Рис. до задачі 10.23 (1)

11.11. 4. **11.12.** 1) 2 корені; 2) 1 корінь. **11.13.** 3 корені. **11.14.** 1) (–1; –1), (9; 9); 2) (2; 23), (8; 17). **11.15.** (3; 15), (–1; 11). **11.18.** 1) –25; 2) –13; 3) –22. **11.19.** 1) 26; 2) 17; 3) –10. **11.20.** $p = 1$, $q = 4$. **11.21.** $a = -\frac{7}{6}$, $b = \frac{7}{6}$. **11.22.** $a = 3$, $b = 5$. **11.25.** $a = 9$. **11.26.** $b = -16$. **11.27.** $b = 18$. **11.28.** $a \leqslant -1$. **11.29.** $a \geqslant 3$. **11.30.** $a = 0$, або $a = 1$, або $a = 4$. **11.31.** $c = -8$. **11.32.** $c = 14$. **11.33.** $c > 14$. **11.34.** $a = \frac{3}{2}$ або $a = -\frac{5}{2}$. *Вказівка.* Слід вимагати, щоб рівняння $x^2 - 2ax + 3 = x - 1$ мало єдиний розв'язок. **11.35.** $a = -5$. **11.36.** *а*) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; *б*) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$. **11.38.** Ні. *Вказівка.* Доведіть, що числа a і c різних знаків. **11.39.** Униз. **11.40.** $c > 0$. *Вказівка.* З умови випливає, що $f(1) > 0$. **11.41.** 1; 3. **11.42.** $a = \pm 1$

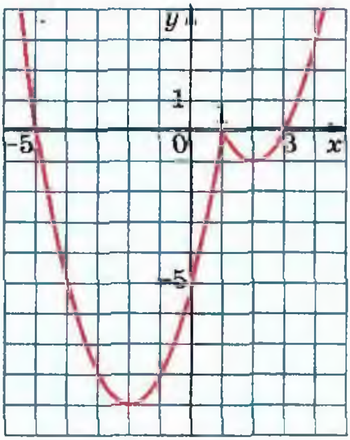


Рис. до задачі 11.54 (3)

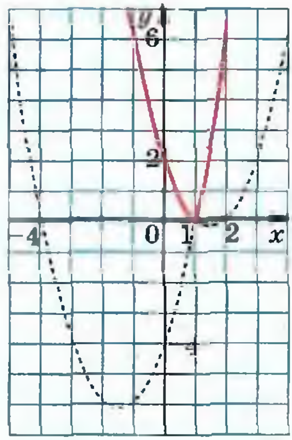


Рис. до задачі 11.55 (2)

або $a = \pm 3$. *Вказівка*. Модулі координат вершини параболи рівні. **11.43.** $-2 < a < 0$. **11.44.** $p = -4$, $q = 9$. **11.45.** $a = 1$, $b = -8$, $c = 6$. **11.46.** *а*) -4; *б*) 4. **11.47.** -1. **11.54.** 3) Див. рисунок. **11.55.** 2) Див. рисунок. **11.58.** $a = -\frac{1}{2}$. **11.59.** 2 корені. **11.60.** Ні. *Вказівка*. Графіки мають перетинатися в точці, абсциса якої дорівнює 1. **11.61.** Ні. *Вказівка*. Покажіть, що $a = c$. Тоді число -1 — нуль лінійної функції. **11.63.** -1. *Вказівка*. $f(1) \geqslant 0$. **11.64.** *Вказівка*. Координати вершин парабол мають вигляд $(a;\ a + 1)$. **11.66.** *Вказівка*. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ -1, & \text{якщо } 1 < x < 2, \\ x^2 - 4x + 3, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$ **11.68.** $\frac{25}{16}$. *Вказівка*. Розгляньте функцію $f(t) = t^2 + 2t + 2$, $D(f) = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **11.69.** $a = 3$ або $a = \frac{13}{4}$. *Вказівка*. Див. рисунок. **11.70.** $-\frac{5}{4} < a < \frac{21}{4}$. *Вказівка*. Див. приклад 3 п. 11. **11.71.** $a = 1$. *Вказівка*. Покажіть, що $x_1^2 + x_2^2 = 2(a^2 + a - 1)$, де x_1 і x_2 — корені рівняння. Дане рівняння має корені, якщо його дискримінант $D = 4a - 4 \geqslant 0$, тобто $a \geqslant 1$. Тому потрібно дослідити на найменше значення функцію $f(a) = 2(a^2 + a - 1)$,

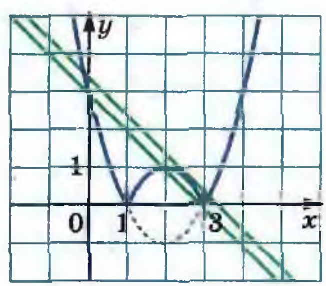


Рис. до задачі 11.69

$D(f) = [1; +\infty)$. **11.72.** $a = 2$. **11.73.** Усі точки, які лежать нижче від параболи $y = -x^2 - 3$. *Вказівка.* Маємо: $2a^2 - 4ax + x^2 - y - 3 = 0$. Розгляньте цю рівність як квадратне рівняння відносно a. Його дискримінант $D = 8x^2 + 8y + 24$ має бути від'ємним. **11.74.** Якщо $a < -\frac{3}{4}$, то 4 корені; якщо $-\frac{3}{4} \leqslant a < \frac{1}{4}$, то 2 корені; якщо $a = \frac{1}{4}$, то один корінь; якщо $a > \frac{1}{4}$, то коренів немає. *Вказівка.* Розглянувши дане рівняння як квадратне відносно a, отримуємо таку сукупність: $\left[\begin{array}{l} a = -x^2 + x, \\ a = -x^2 - x - 1. \end{array}\right.$ На координатній площині xa побудуйте графік даного рівняння. **11.75.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $f(0)\, f(1) = f(c)$. **11.76.** *Вказівка.* Нехай парабола перетинає осі координат у точках $A(0; y)$, $B(x_1; 0)$ і $C(x_2; 0)$, де x_1 і x_2 — нулі квадратичної функції (див. рисунок). Коло, яке проходить через точки A, B і C, перетинає вісь ординат у точці D. Маємо: $OB \cdot OC = OA \cdot OD$. Далі, скориставшись теоремою Вієта, покажіть, що коло проходить через точку $(0; 1)$.

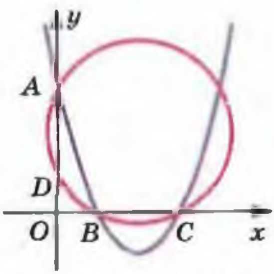


Рис. до задачі 11.76

11.78. *Вказівка.* Позначимо $a = x$ і розглянемо функцію $f(x) = x^2 + b^2 + c^2 - x^2 b - b^2 c - c^2 x - 1$. Маємо: $f(x) = (1 - b)x^2 - c^2 x + b^2 + c^2 - b^2 c - 1$. Якщо $b \neq 1$, то графіком цієї функції є парабола, вітки якої напрямлені вгору, а отже, найбільшого значення на відрізку $[0; 1]$ функція набуває в одній з точок $x = 0$ або $x = 1$. Тоді достатньо довести дві нерівності: $f(0) \leqslant 0$ і $f(1) \leqslant 0$. Випадок $b = 1$ розгляньте окремо. **12.9.** 1) $(-2; 1)$; 2) $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$; 3) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$; 4) $(-\infty; -21) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$; 6) $\left[-\frac{13}{3}; 1\right]$. **12.10.** 1) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-5; -3)$; 3) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty; -10) \cup (1; +\infty)$. **12.11.** При $-5 < x < 4$. **12.12.** При $1 < x < 2{,}5$. **12.13.** 1) -6; 2) -2. **12.14.** 1) 1; 2) -3. **12.19.** 1) $-4 < a < 4$; 2) $-8 < a < 12$; 3) $\frac{3}{8} < a < \frac{3}{2}$. **12.20.** 1) $b < -\frac{1}{16}$ або $b > 1$; 2) $b < 4$ або $b > 10$. **12.21.** 1) $(0; 3]$; 2) $[-4; -0{,}5] \cup [6; +\infty)$; 3) $[-1; 0) \cup (6; 10]$; 4) $(-5; -3]$. **12.22.** 1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; 3\right)$; 2) $(-2; 0] \cup [5; 9)$. **12.23.** 1) -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2) -3; -2; 1; 2. **12.24.** 1) $(6; +\infty)$; 2) $(-3; 5) \cup (5; 6)$;

3) $(-\infty; -9) \cup (-9; -2] \cup [7; 9) \cup (9; +\infty)$; 4) $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$. **12.25.** 1) $[-2; 2)$; 2) $(-5; 6) \cup (6; 7)$. **12.26.** 1) $(-11; 11)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$; 3) $[-5; -3] \cup [3; 5]$; 4) $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$. **12.27.** 1) $(-\infty; -1] \cup$ $\cup [-0{,}4; 0{,}4] \cup [1; +\infty)$; 2) $[-2; 2]$; 3) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. **12.28.** 1) $(-3; 4)$; 2) $(1; 4)$; 3) $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$; 4) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; 5) $[-1; 0] \cup$ $\cup [1; 6]$; 6) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 7) $(-\infty; 1)$; 8) $[-4; 2] \cup \left[3 + \sqrt{17}; +\infty\right)$. **12.29.** 1) $(-6; -3) \cup (-2; 1)$; 2) $\left(-1 - \sqrt{5}; -2\right) \cup \left(-2; -1 + \sqrt{5}\right)$; 3) $\left(-5; 3 + 2\sqrt{2}\right)$; 4) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$; 5) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$; 6) $(-2; 3)$. **12.30.** 1) $a > 4$; 2) $-1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{5}$; 3) $0 < a < \frac{1}{2}$; 4) $a > \frac{5}{3}$; 5) $a > 6$. **12.31.** 1) $a \geqslant 9$; 2) $3 \leqslant a \leqslant 7$; 3) $a > 1$; 4) $a > 4$. **12.32.** $a > \frac{9}{2}$. **12.33.** $a < -16$. **12.34.** $\frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{9}$. **12.35.** 1) Якщо $a < 1$, то $a < x < 1$ або $x > 4$; якщо $1 \leqslant a \leqslant 4$, то $x > 4$; якщо $a > 4$, то $x > a$; 2) якщо $a \leqslant -\frac{1}{4}$, то розв'язків немає; якщо $-\frac{1}{4} < a \leqslant 1$, то $-\frac{1}{4} \leqslant x < a$; якщо $a > 1$, то $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$. **12.36.** 1) Якщо $a \leqslant -8$, то $-8 < x < 9$; якщо $-8 < a < 9$, то $a < x < 9$; якщо $a \geqslant 9$, то розв'язків немає; 2) якщо $a < 1$, то $x < a$; якщо $1 \leqslant a \leqslant 8$, то $x < 1$; якщо $a > 8$, то $x < 1$ або $8 < x < a$. **12.37.** $1 \leqslant a \leqslant 2$. *Вказівка.* Умова задачі буде виконуватися, якщо множина розв'язків першої нерівності міститиме множину розв'язків другої нерівності. Шукані значення параметра a є розв'язками системи $\begin{cases} 1 \leqslant a \leqslant 3, \\ 1 \leqslant 2a - 1 \leqslant 3. \end{cases}$ **12.38.** $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant \frac{2}{3}$. **12.39.** $a \in [-2; 0]$. **12.40.** $a \in [0; 1]$. **12.41.** $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$. *Вказівка.* Маємо $f(x) = ax^2 + bx + c$. З умови випливає, що $f(1) < 0$. Умові задачі відповідає клітинка 5 таблиці на с. 117. **12.42.** $\varnothing$. **12.43.** 1) $a = \frac{4}{3}$ або $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$; 2) $0 < a < \frac{1}{3}$.

12.44. 1) $a = \frac{5}{2}$ або $-1 \leqslant a \leqslant 1$; 2) $0 < a < \frac{3}{2}$. **12.45.** *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x) = ax^2 + bx + c$. **12.46.** *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x) = cx^2 + bx + a$. **12.47.** 1; $\sqrt{33}$; $\sqrt{41}$; 7. *Вказівка.* Можна записати $x^2 - 8(x - \{x\}) + 7 = 0$. Звідси $x^2 - 8x + 7 = -8\{x\}$. Розв'язок рівняння слід шукати серед розв'язків системи $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \leqslant 0, \\ x^2 - 8x + 7 > -8. \end{cases}$ Маємо $x \in [1; 3) \cup (5; 7]$. Далі розгляньте 5 випадків: 1) $x \in [1; 2)$; 2) $x \in [2; 3)$; 3) $x \in (5; 6)$; 4) $x \in [6; 7)$; 5) $x = 7$. Для цих випадків $[x]$ дорівнює відповідно 1, 2, 5, 6, 7. **12.48.** 1; $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{19}$; 5. **13.1.** 4) $\left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.

13.2. 4) $(-\infty; -5) \cup \left(-\frac{3}{5}; 0\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 2\right)$. **13.3.** 2) $(-\infty; -1) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -6) \cup \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; 2\right)$. **13.4.** 3) $(-\infty; -4) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup (2; 3)$. **13.5.** 2) $\left(-\frac{5}{3}; 2\right)$; 7) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. **13.6.** 2) $\left(-\frac{2}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$; 4) $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; 1\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$. **13.7.** 4) $(-5; 0) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup (1; 8)$; 7) $(-2; 1) \cup (3; 4)$. **13.8.** 4) $(-\infty; -7) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$; 6) $\left(-1; \frac{1}{3}\right) \cup (2; 3) \cup (7; +\infty)$; 8) $(-\infty; -2) \cup \left(-\sqrt{3}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

13.9. 5) $(-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$; 7) $(-5; -1) \cup (2; 3)$. **13.10.** 5) $(-\infty; -4) \cup (-3; 3) \cup (6; +\infty)$; 8) $\left(-\sqrt{2}; 0\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right) \cup (2; +\infty)$. **13.11.** 2) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3] \cup [0; 2)$. **13.12.** 3) $(-\infty; -6] \cup [-4; 6]$. **13.13.** 1) $(-\infty; -4] \cup [5; +\infty) \cup \{-3\}$; 5) $(-3; -1] \cup \{0\}$. **13.14.** 2) $(-\infty; -5] \cup [-4; 0] \cup \{2\}$; 3) $(-3; -2) \cup (-2; -1] \cup (2; 3] \cup \{7\}$. **13.15.** $[-1; 0) \cup (0; 5] \cup \{-2\}$. **13.16.** $[-3; 0) \cup (0; 4] \cup \{5\}$. **13.17.** 1) $-4 < x < -3$ або $x > 5$; 2) $-4 \leqslant x \leqslant -3$ або $x \geqslant 5$; 3) $x < -4$; 4) $x \leqslant -4$, або $x = -3$, або $x = 5$. **13.18.** 1) $3 < x < 7$; 2) $3 \leqslant x \leqslant 7$ або $x = -2$; 3) $-2 < x < 3$; 4) $-2 \leqslant x \leqslant 3$ або $x = 7$. **13.19.** $(-3; 0] \cup (3; +\infty)$. **13.20.** $(-4; 1] \cup (4; +\infty)$. **13.21.** 1) $(-\infty; -8] \cup [-3; 3] \cup [8; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; 3) $(-\infty; 3)$; 4) $\left(-2; 1 - \sqrt{7}\right) \cup \left(2\sqrt{2}; +\infty\right)$. **13.22.** 1) $[-7; -5] \cup [5; 7]$; 2) $(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$; 3) $(-5; -2) \cup (2; 3) \cup (3; 5)$; 4) $[-1; 0)$. **13.23.** 1) $\left[\frac{3}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4] \cup [-1; 1] \cup [4; +\infty)$; 3) $\left[0; \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$. **13.24.** 1) $[4; 5) \cup (5; +\infty)$;

2) $(-\infty; -3]$; 3) $(0; +\infty)$. **13.25.** 1) $[3; +\infty)$. *Вказівка*. Позначивши $2x - 1 = a$ і $x^2 - x - 6 = b$, можна помітити, що дане рівняння має вигляд $|a| + |b| = a + b$. Тепер скористайтеся тим, що $|a| + |b| = a + b$ тоді й тільки тоді, коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$ (що було доведено у 8 класі); 2) $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$. **13.26.** 1) $\left[\frac{2}{3}; 2\right] \cup [3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. **13.27.** 1) Якщо $a \leqslant -\frac{3}{5}$ або $a \geqslant 1$, то $x \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$; якщо $-\frac{3}{5} < a < 1$, то $x \in \left(-\frac{3}{5}; a\right) \cup (a; 1)$; 2) якщо $a < -\frac{3}{5}$ або $a > 1$, то $x \in \left[-\frac{3}{5}; 1\right] \cup \{a\}$; якщо $-\frac{3}{5} \leqslant a \leqslant 1$, то $x \in \left[-\frac{3}{5}; 1\right]$. **13.28.** 1) Якщо $a \leqslant -\frac{3}{7}$ або $a \geqslant 1$, то $x \in \left(-\frac{3}{7}; 1\right)$; якщо $-\frac{3}{7} < a < 1$, то $x \in \left(-\frac{3}{7}; a\right) \cup (a; 1)$; 2) якщо $a < -\frac{3}{7}$ або $a > 1$, то $x \in \left[-\frac{3}{7}; 1\right] \cup \{a\}$; якщо $-\frac{3}{7} \leqslant a \leqslant 1$, то $x \in \left[-\frac{3}{7}; 1\right]$. **13.29.** 1) Якщо $a < 1$, то $x \in (a; 1) \cup (1; 3)$; якщо $1 \leqslant a < 3$, то $x \in (a; 3)$; якщо $a = 3$, то розв'язків немає; якщо $a > 3$, то $x \in (3; a)$; 2) якщо $a \leqslant 1$, то $x \in [a; 3]$; якщо $1 < a < 3$, то $x \in [a; 3] \cup \{1\}$; якщо $a = 3$, то $x \in \{1, 3\}$; якщо $a > 3$, то $x \in [3; a] \cup \{1\}$. **13.30.** 1) Якщо $a < -2$, то $x \in (a; -2) \cup (-2; 1)$; якщо $-2 \leqslant a < 1$, то $x \in (a; 1)$; якщо $a = 1$, то розв'язків немає; якщо $a > 1$, то $x \in (1; a)$; 2) якщо $a \leqslant -2$, то $x \in [a; 1]$; якщо $-2 < a < 1$, то $x \in [a; 1] \cup \{-2\}$; якщо $a = 1$, то $x \in \{-2, 1\}$; якщо $a > 1$, то $x \in [1; a] \cup \{-2\}$. **13.31.** $4\frac{1}{3}$; 5. *Вказівка*. Можна записати $2\{x\} - \{x\}[x] = [x] + \{x\} - 5$. Звідси $\{x\}(1 - [x]) = [x] - 5$. Останнє рівняння рівносильне такому: $\{x\} = \frac{[x]-5}{1-[x]}$. Тепер зрозуміло, що потрібні значення слід шукати серед розв'язків системи $\begin{cases} \frac{[x]-5}{1-[x]} < 1, \\ \frac{[x]-5}{1-[x]} \geqslant 0. \end{cases}$ **13.32.** $5\frac{1}{3}$; 6. **14.1.** $a < -1$ або $a > \frac{5}{2}$. **14.2.** $a < -13$ або $0 < a < 1$. **14.3.** $\frac{11}{20} \leqslant a < 1$ або $a > 3$. **14.4.** $-\frac{2}{3} \leqslant a < -\frac{1}{4}$ або $a > 1$. **14.5.** $a \geqslant \frac{7}{2}$. **14.6.** $a \leqslant -3$ або $-1 \leqslant a < -\frac{3}{4}$. **14.7.** $1 \leqslant a \leqslant \frac{6}{5}$. *Вказівка*. Розгляньте випадок $a = 1$, а потім зробіть задане рівняння зведеним. **14.8.** $a \leqslant -2$ або

$-\frac{7}{9} < a \leqslant 2$. **14.9.** $a < -2$ або $a > 5$. **14.10.** $2 < a < 5$. **14.11.** $-\frac{4}{5} \leqslant a < -\frac{3}{4}$, або $a > 12$, або $a = 1$. **14.12.** $-\frac{16}{7} \leqslant a < -2$. **14.13.** $a < -1-\sqrt{3}$ або $a > \sqrt{3}-1$. **14.14.** $a < -\frac{7}{3}$ або $a > 3$. **14.15.** $a \leqslant -\frac{1}{2}$. *Вказівка*. При $a \geqslant 0$ умова не виконується. Далі, позначивши ліву частину нерівності $f(x)$, покажіть, що шукане значення параметра є розв'язком сукупності систем $\begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(1) \leqslant 0, \\ x_0 \geqslant 1 \end{cases}$ і $\begin{cases} a < 0, \\ D < 0. \end{cases}$ **14.16.** $a < \frac{1}{2}$ або $a \geqslant \frac{7+\sqrt{13}}{6}$. **14.17.** $a > 1$. *Вказівка*. Переконайтеся, що $a = 0$ умову задачі не задовольняє. Далі запишіть умови, які відповідають кожному з положень параболи на рисунку. **14.18.** $a > \frac{16}{9}$. **14.19.** $a \leqslant \frac{13}{9}$. *Вказівка*. Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то значення параметра, при яких перша нерівність не має розв'язків, задовольняють умову задачі. **14.20.** $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$. **15.1.** 1) $(4; -2)$; 2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 3) $(0; 1)$, $(1; 1)$; 4) $(0; 0)$. **15.2.** 1) $(3; -2)$; 2) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$; 3) $(1; 0)$, $(1; -1)$; 4) $(0; 0)$. **15.9.** 11) *Вказівка*. $x = \sqrt{y} \to x - 1 = \sqrt{y} \to x - 1 = \sqrt{|y|} \to x - 1 = \sqrt{|y+1|} \to |x| - 1 = \sqrt{|y+1|}$ (див. рисунок); 12) *Вказівка*. $x = \sqrt{y} \to x - 1 = \sqrt{y+1} \to |x| - 1 = \sqrt{y+1} \to |x| - 1 = \sqrt{|y|+1}$ (див. рисунок). **15.11.** 4) *Вказівка*.

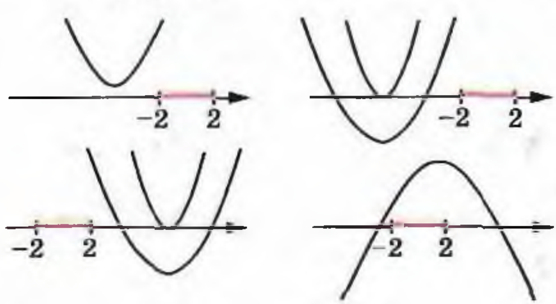


Рис. до задачі 14.17

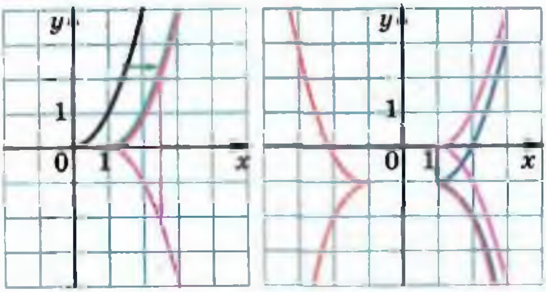


Рис. до задачі 15.9 (11)

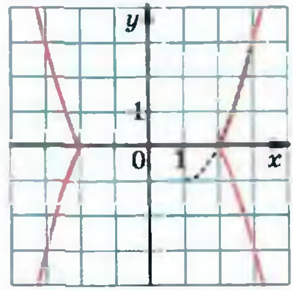


Рис. до задачі 15.9 (12)

$x = y^2 \to x = (y-1)^2 \to |x| = (|y|-1)^2 \to |x+2| = (|y|-1)^2$ (див. рисунок). **15.15.** 4) *Вказівка.* $x + y = 2 \to |x| + y = 2 \to |x| + |y| = 2 \to |x-1| + |y+2| = 2 \to |2x-1| + |y+2| = 2$ (див. рисунок). **15.16.** 5) *Вказівка.* $x - y = 2 \to |x| - y = 2 \to |x| - |y| = 2 \to |x+1| - |y-1| = 2 \to |x+1| - |2y-1| = 2$ (див. рисунок). **15.17.** 8) *Вказівка.* Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}(|x|-1)^2 + y^2 = 1,\\ y \geqslant 0.\end{cases}$ **15.18.** 8) *Вказівка.* Дане рівняння

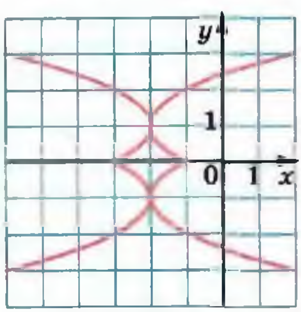


Рис. до задачі 15.11 (4)

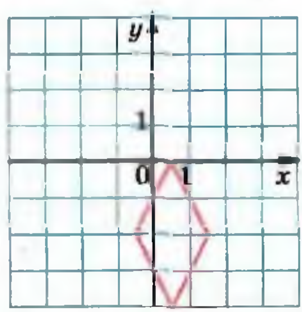


Рис. до задачі 15.15 (4)

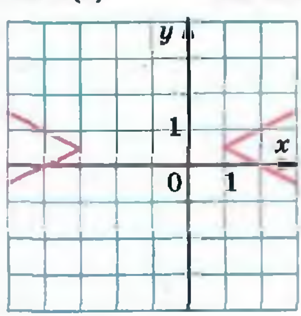


Рис. до задачі 15.16 (5)

рівносильне системі $\begin{cases} x^2 + (|y| - 2)^2 = 4, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ **15.21.** Якщо $|a| > 1$, то 1 корінь; якщо $|a| = 1$ або $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то 2 корені; якщо $|a| < 1$ і $|a| \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, то 3 корені. *Вказівка.* Побудуйте в системі координат xa графік заданого рівняння (див. рисунок). **15.22.** Якщо $a < -2$, то розв'язків немає; якщо $a = -2$, то 1 корінь; якщо $-2 < a < 0$, або $a = 1$, або $a > 2$, то 2 корені; якщо $a = 0$ або $a = 2$, то 3 корені; якщо $0 < a < 2$ і $a \neq 1$, то 4 корені. **15.23.** $\frac{1}{5} \leqslant a < \frac{1}{3}$ або $a = \frac{8}{15}$. *Вказівка.* Маємо: $ax = \sqrt{8x - x^2 - 15} + 1$. Графіком функції $y = ax$ є пряма, яка проходить через початок координат. Графіком функції $y = \sqrt{8x - x^2 - 15} + 1$ є півколо кола $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 1$, яке лежить вище від прямої $y = 1$. Указані графіки повинні мати одну спільну точку. Цій умові відповідають (див. рисунок) дотична OM і будь-яка пряма, яка проходить через початок координат, кутовий коефіцієнт якої не менший, ніж кутовий коефіцієнт прямої OB, і менший, ніж кутовий коефіцієнт прямої OA. **15.24.** $-\frac{2}{5} \leqslant a < 0$. **15.25.** Графік складається з чотирьох точок: (1; 1), (1; −1), (−1; 1), (−1; −1). *Вказівка.* Доведіть, що $(x^4 + 1)(y^4 + 1) \geqslant 4x^2y^2$, і з'ясуйте умову досягнення рівності. **15.26.** Графік складається з однієї точки (1; −2). **15.27.** Графік складається з 9 точок: (1; 1), (0; 1), (−1; 1), (1; 0), (0; 0), (−1; 0), (1; −1), (0; −1), (−1; −1). *Вказівка.* Скористайтеся тим, що при $0 \leqslant t \leqslant 1$ виконується нерівність $\sqrt{t} \geqslant t$. **15.28.** Графік складається з двох точок: $(2 - \sqrt{3}; 0)$ і $(2 + \sqrt{3}; 0)$. *Вказівка.* Застосуйте

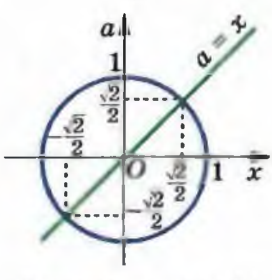


Рис. до задачі 15.21

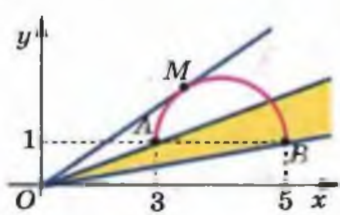


Рис. до задачі 15.23

нерівність Коші—Буняковського до наборів (1; 1; 2) і $\left(\sqrt{x+y};\ \sqrt{x-y};\ \sqrt{x^2+1}\right)$. Далі скористайтеся умовою рівності в нерівності Коші—Буняковського. **15.29.** Дуга кола $x^2 + y^2 = 1$, яка лежить у першій чверті. *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $\left(x;\ \sqrt{1-x^2}\right)$ і $\left(\sqrt{1-y^2};\ y\right)$. **15.30.** Множина прямих виду $y = x + c$, де $c \in \mathbb{Z}$. **15.31.** Усі точки координатної площини, які мають цілі координати. **15.32.** 3. *Вказівка.* Нехай $|x| + |y| = a$, де $a > 0$. Треба знайти найменше значення параметра a, при якому квадрат $|x| + |y| = a$ і коло $x^2 + (y-4)^2 = 1$ мають спільну точку (див. рисунок). **15.33.** 4. **16.2.** 4) (0; 0), (1; 1); 5) (0; 4), (5; −1). **16.3.** 1) 2 розв'язки; 2) 3 розв'язки; 3) один розв'язок; 4) 2 розв'язки; 5) розв'язків немає; 6) 3 розв'язки; 7) 4 розв'язки; 8) 2 розв'язки; 9) 3 розв'язки. **16.4.** 1) 2 розв'язки; 2) розв'язків немає; 3) 2 розв'язки; 4) 4 розв'язки; 5) 2 розв'язки; 6) 2 розв'язки. **16.6.** 1) Якщо $a > 0$, то 2 розв'язки; якщо $a = 0$, то один розв'язок; якщо $a < 0$, то розв'язків немає; 2) якщо $a < 1$ або $a > \sqrt{2}$, то розв'язків немає; якщо $a = 1$ або $a = \sqrt{2}$, то 4 розв'язки; якщо $1 < a < \sqrt{2}$, то 8 розв'язків; 3) якщо $a < -\frac{17}{4}$ або $a > 2$, то розв'язків немає; якщо $a = -\frac{17}{4}$ або $-2 < a < 2$, то 2 розв'язки; якщо $-\frac{17}{4} < a < -2$, то 4 розв'язки; якщо $a = -2$, то 3 розв'язки; якщо $a = 2$, то один розв'язок; 4) якщо $a > -\frac{1}{4}$, то 2 розв'язки; якщо $a = -\frac{1}{4}$, то один розв'язок; якщо $a < -\frac{1}{4}$, то розв'язків немає. **16.7.** 1) Якщо $a < 1$, то розв'язків немає; якщо $a = 1$, то 2 розв'язки; якщо $a > 1$, то 4 розв'язки; 2) якщо $a > 3\sqrt{2}$ або $a < -3$, то розв'язків немає; якщо $a = 3\sqrt{2}$ або $-3 < a < 3$, то 2 розв'язки; якщо $3 < a < 3\sqrt{2}$, то 4 розв'язки; якщо $a = 3$, то 3 розв'язки; якщо $a = -3$, то один розв'язок; 3) якщо $a < \frac{1}{2}$ або $a > 1$, то розв'язків немає; якщо

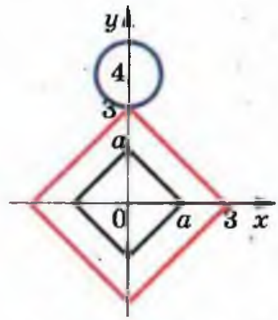


Рис. до задачі 15.32

$a = \frac{1}{2}$ або $a = 1$, то 4 розв'язки; якщо $\frac{1}{2} < a < 1$, то 8 розв'язків; 4) якщо $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$, то розв'язків немає; якщо $a = -2\sqrt{2}$ або $a = 2\sqrt{2}$, то 2 розв'язки; якщо $a < -2\sqrt{2}$ або $a > 2\sqrt{2}$, то 4 розв'язки. **16.8.** $a \neq -1$ і $a \neq \frac{9}{4}$. **16.10.** $a = -\frac{2}{3}$. **16.11.** $a = -7$. **16.12.** $a = -2$, $b = -7$. *Вказівка.* Друга система при будь-яких значеннях параметрів a і b має єдиний розв'язок. Цю властивість повинна мати і перша система. Тому прямі $x + y = 3$ і $x + 3y = 3$ перетинаються в точці, координати якої є розв'язком кожної із систем. **16.13.** $b = 3$. *Вказівка.* Якщо $a \neq -3$, то система має розв'язки при будь-якому b. Розгляньте окремо випадок, коли $a = -3$. **16.14.** $a = \frac{5}{2}$. **16.15.** $a = 1$. **16.16.** $c = -\frac{7}{3}$. **16.17.** $c = \frac{11}{3}$. **16.18.** $a \leqslant -3$ або $a \geqslant \frac{3}{4}$. **16.19.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що коли пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язком кожного з рівнянь $F(x; y) = 0$ і $G(x; y) = 0$, то вона також є розв'язком рівняння $F(x; y) + G(x; y) = 0$. **17.1.** 1) $(-1; 1)$, $(-3; -1)$; 2) $(6; 1)$, $(-6; -2)$; 3) $(5; 3)$, $(-1{,}5; -10)$; 4) $(2; -2)$; 5) $(4; 3)$; 6) $(0; 0)$, $(-2{,}4; 4{,}8)$; 7) $(2; 2{,}5)$, $(-4{,}4; -2{,}3)$; 8) $(4; -1)$, $(0; 3)$. **17.2.** 1) $(-1; 4)$, $(-0{,}5; 2{,}5)$; 2) $(4; 2)$, $(20; -14)$; 3) $(6; 9)$, $(-9; -6)$; 4) $(1; 0)$, $(-0{,}5; 0{,}75)$; 5) $(2; 4)$, $(3; 3)$; 6) $(1; 1)$, $\left(\frac{17}{3}; \frac{38}{3}\right)$. **17.3.** 1) $(3; 4)$, $(4; 6)$; 2) $(-2; 1)$, $\left(-6; \frac{9}{5}\right)$; 3) $(5; 1)$; 4) $(1; 3)$, $\left(\frac{3}{5}; \frac{21}{5}\right)$; 5) $(-1; -2)$. **17.4.** 1) $(2; 1)$, $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 2) $(1; 5)$, $\left(\frac{10}{3}; -2\right)$; 3) $(19; 8)$, $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$; 4) $(-15; -5)$, $(3; 4)$. **17.5.** 1) $(1; 1)$, $(1; -1)$; 2) $(2; 1)$, $(2; -1)$, $\left(-2; \sqrt{5}\right)$, $\left(-2; -\sqrt{5}\right)$; 3) $\left(-3; \sqrt{7}\right)$, $\left(-3; -\sqrt{7}\right)$. **17.6.** 1) $(1; 1)$, $(2; 0)$; 2) $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 2)$; 3) $(2; 1)$, $(-2; 1)$. **17.9.** 1) $\left(2; -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $\left(2; \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}; 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}; 0\right)$, $(-1; -3)$, $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$; 3) $(-4; 6)$, $(-4; -6)$, $\left(\frac{4}{7}; 2\frac{4}{7}\right)$; 4) $(-1; 4)$, $(4; -1)$, $(-5; 2)$, $(2; -5)$. **17.10.** 1) $(2; 3)$, $(0; 1)$, $(1{,}5; 1)$; 2) $(1; 1)$, $\left(1; \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(1; \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}\right)$, $(0; 2)$, $(-6; 2)$; 3) $\left(1; -\frac{5}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{2}\right)$; 4) $(2; -1)$, $(-1; 2)$, $(-2; 1)$, $(1; -2)$. **17.11.** 1) $(-2; 0)$, $(-2; -1)$, (1; 0), (1; –1); 2) (3; 2), (–3; –2); 3) (3; 1), (–3; –1), $\left(12; -\frac{7}{2}\right)$, $\left(-12; \frac{7}{2}\right)$; 4) (–1; –1). *Вказівка.* Відніміть від першого рівняння системи друге рівняння; 5) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. **17.12.** 1) (2; –1), (–1; t), де t — будь-яке число; 2) (2; –1), (–2; 1); 3) (1; 1), (–1; –1), $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; 4) (2; 2); 5) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **17.13.** 1) (3; 1), (1; 2). *Вказівка.* Помножте обидві частини другого рівняння системи на 3 і відніміть від першого; 2) (2; 1), $\left(-\frac{2}{13}; \frac{6}{13}\right)$; 3) $\left(-1+\sqrt{2}; -2\right)$, $\left(-1-\sqrt{2}; -2\right)$; 4) (1; 1). *Вказівка.* Додайте рівняння системи та отримайте $(x + y)^3 = 8$; 5) (1; 1). *Вказівка.* Додайте рівняння системи; 6) (1; 0). **17.14.** 1) (2; –5), (3; 2); 2) (–1; 1), (–2; 0); 3) (1; 1), $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; 4) (–1; –1); 5) (–1; 0). **17.15.** 1) (–1; 1); 2) (–1; 1), $\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; 3) (1; 2), (–1; –2); 4) (3; –1), $\left(-6\frac{3}{8}; -4\frac{3}{4}\right)$. *Вказівка.* Розкладіть ліві частини кожного з рівнянь на множники; 5) (2; 2), $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; 6) (4; 2), (–4; –2). **17.16.** 1) (1; 2), (–1; –2), (1; –2), (–1; 2); 2) $\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 3) (2; –1), (–2; 1), (1; –2), (–1; 2); 4) (1; 1), (7; –2). *Вказівка.* Почленно поділіть ліві і праві частини рівнянь системи, попередньо перетворивши перше рівняння до вигляду $(x + 3y)(x + 1) = 8$, а друге — до вигляду $(x + 3y)(y - 2) = -4$; 5) (1; 3), $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; 6) (3; –1), $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$. **17.17.** (1; 0), (–1; 0). *Вказівка.* Перемноживши відповідно ліві і праві частини рівнянь системи, отримаємо рівняння $x^8 = 1$, яке є наслідком даної системи. **17.18.** (1; 0). **17.19.** 1) (4; 2), (–4; –2). *Вказівка.* Перемноживши рівняння системи, отримаємо рівняння, лінійне відносно xy; 2) (3; 1), $\left(-32; \frac{1}{8}\right)$. **17.20.** 1) (1; 2), (–1; 2); 2) (1; 1), (–1; –1), (1; –1), (–1; 1). **17.21.** (1; –2), (–2; 1), (–1; 2), (2; –1). *Вказівка.* Перше рівняння системи розкладіть на множники. **17.22.** (1; 1), (–1; –1), $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **17.23.** (3; 1),

$\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. *Вказівка*. Помножте перше рівняння системи на x, друге — на $-y$ і додайте отримані рівняння. **17.24.** (0; 2), (0; −2), (1; −3), (−1; 3). *Вказівка*. З другого рівняння виразіть y^2 через x^2. У першому рівнянні запишіть $y^3 = y^2 \cdot y$. **17.25.** (1; 1), (−1; 1). *Вказівка*. З першого рівняння системи виразіть x^4 через y. Підставте отриманий вираз у друге рівняння системи. Покажіть, що отримане рівняння має єдиний корінь, який задовольняє умову $y \geqslant \frac{1}{2}$. **17.26.** (3; 1), (3; −1). **18.1.** 1) (3; 2), (−3; −2); 2) $\left(\frac{11}{13}; -\frac{24}{5}\right)$; 3) (14; −11), (11; −14); 4) $\left(6\frac{2}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{108}{125}; 11\frac{17}{125}\right)$. **18.2.** 1) (2; 3), (3; 2), (−2; −3), (−3; −2); 2) $\left(-3\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(-3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{19}{8}; -\frac{13}{8}\right)$, (2; 1); 4) (−4; 0), $\left(-\frac{40}{41}; -\frac{32}{41}\right)$. **18.3.** 1) (6; 2), (−6; −2); 2) (3; 1), (−3; −1), $\left(\frac{14\sqrt{106}}{53}; \frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$, $\left(-\frac{14\sqrt{106}}{53}; -\frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$; 3) (9; 12), (−12; −9). *Вказівка*. Виконайте заміну $x - y = u$, $xy = v$; 4) $\left(8; \frac{8}{5}\right)$, $\left(-4; \frac{4}{7}\right)$. **18.4.** 1) (−1; 2), (−2; 1); 2) (2; 3), (−2; −3); 3) (11; 1); 4) (2; 1), (6; −3), $\left(6 + 2\sqrt{3}; -2 - 2\sqrt{3}\right)$, $\left(6 - 2\sqrt{3}; -2 + 2\sqrt{3}\right)$. **18.5.** 1) $\left(\frac{2}{3}; -2\right)$. *Вказівка*. Виконайте заміну $\sqrt{9x^2 + 2y + 1} = t$; 2) (2; −2). **18.6.** (2; 3), $\left(-\frac{14}{9}; \frac{17}{27}\right)$. **18.7.** (2; 1), (−2; −1). *Вказівка*. Виконайте заміну $\frac{x}{y} = t$. **18.8.** 1) (−2; 3), (12; 24). *Вказівка*. Виконайте заміну $\sqrt{4 - x + y} = u$, $\sqrt{9 - 2x + y} = v$; 2) (2; 3), (−2; −3), (−2; 3), (2; −3). **18.9.** 1) (−10; 26), (4; 5); 2) (2; 1), (−2; −1). **18.10.** 1) (3; 1), (−3; −1), $\left(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$; 2) (2; 1), (−2; −1), (1; 2), (−1; −2). **18.11.** 1) (0; 0), (2; 2), (0,5; −0,1); 2) $\left(-\frac{5}{4}; \frac{1}{2}\right)$, (−5; 2). **18.12.** 1) (1; 2), (−1; −2); 2) (4; 2), (−4; −2); 3) (1; 1), (−1; −1), $\left(-\frac{25}{3\sqrt{149}}; \frac{1}{\sqrt{149}}\right)$, $\left(\frac{25}{3\sqrt{149}}; -\frac{1}{\sqrt{149}}\right)$; 4) $\left(-\frac{8}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, $\left(\frac{8}{\sqrt{11}}; -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, (3; 4), (−3; −4). **18.13.** 1) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, (2; −1), (−2; 1); 2) (1; 2), (−1; −2); 3) (2; 1), (−2; −1);

4) (2; −1), (−2; 1), $\left(-\frac{5}{\sqrt{78}}; \frac{23}{\sqrt{78}}\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{78}}; -\frac{23}{\sqrt{78}}\right)$. **18.14.** 1) (3; 1), (1; 3); 2) (2; 1). **18.15.** (2; 1), (−1; −2). **18.16.** 1) (1; 2), (2; 1); 2) (1; 1); 3) (2; 3), (3; 2), (−5; 2), (2; −5). **18.17.** 1) (4; 1), (1; 4); 2) (3; 4), (4; 3), $\left(-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}\right)$, $\left(-2+\sqrt{3}; -2-\sqrt{3}\right)$. **18.18.** 1) (3; 4), (4; 3), $\left(11+2\sqrt{31}; 11-2\sqrt{31}\right)$, $\left(11-2\sqrt{31}; 11+2\sqrt{31}\right)$; 2) (4; 1), (1; 4); 3) (2; 1), (1; 2), (−2; 1), (1; −2), (0; −3), (−3; 0). **18.19.** 1) (2; 2), $\left(-2-2\sqrt{2}; -2+2\sqrt{2}\right)$, $\left(-2+2\sqrt{2}; -2-2\sqrt{2}\right)$. *Вказівка.* Розкрийте дужки в першому рівнянні системи; 2) (−2; 3), (3; −2). **18.20.** 1) (4; 1), (1; 4), $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}; \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}; \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$; 2) (6; 6), $\left(\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}; -\frac{3(\sqrt{5}+1)}{2}\right)$, $\left(-\frac{3(\sqrt{5}+1)}{2}; \frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}\right)$; 3) $\left(1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}\right)$, $\left(1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\right)$. **18.21.** 1) (4; 8), (8; 4); 2) (1; 1), (1; −2), (−2; 1). **18.22.** 1) (2; 1), (1; 2), (−2; 1), (1; −2), (2; −1), (−1; 2), (−2; −1), (−1; −2); 2) (2; 1), (1; 2), (−2; −1), (−1; −2), (0; 2), (2; 0), (0; −2), (−2; 0); 3) (2; −1), (−1; 2), (−2; 1), (1; −2). **18.23.** 1) (1; 3), (3; 1), (−1; −3), (−3; −1); 2) (−3; −2), (−2; −3), (2; 3), (3; 2); 3) (2; 1), (1; 2), (−1; −2), (−2; −1), $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. **18.24.** 1) (5; 4), (−5; −4), (15; −12), (−15; 12); 2) (5; 3), (5; −3), $\left(-\sqrt{\frac{59}{2}}; \sqrt{\frac{9}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{59}{2}}; -\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$. *Вказівка.* Перепишемо перше рівняння системи так: $x^2-y^2+(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=20$. Нехай $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=t$. Тоді $t^2+t-20=0$. Звідси $t=-5$ або $t=4$.

Маємо: $\left[\begin{array}{l}(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=-5,\\ (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=4;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\sqrt{(x+y)(x-y)}=-5,\\ x+y<0,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{(x+y)(x-y)}=4,\\ x+y>0;\end{cases}\end{array}\right.$ 3) (−1; −1), (−1; 3), (2; −1), (2; 3). *Вказівка.* Виконайте заміну $x^2-x=u$, $y^2-2y=v$; 4) (1; 1). *Вказівка.* Поділіть обидві частини другого рівняння системи на xy. **18.25.** 1) (5; 4), (5; −4), $\left(-\frac{\sqrt{114}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\left(-\frac{\sqrt{114}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, $(1; 3)$, $\left(-\frac{5+\sqrt{11}}{4}; 2+\sqrt{11}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{11}-5}{4}; 2-\sqrt{11}\right)$. **18.26.** 1) $(\sqrt{6}; -2\sqrt{6})$, $(-\sqrt{6}; 2\sqrt{6})$. *Вказівка.* Розгляньте перше рівняння системи як квадратне відносно x і доведіть, що $y^2 \geqslant 24$; 2) $(1; -1)$. *Вказівка.* Розглянувши кожне рівняння системи як квадратне відносно x, можна показати, що y задовольняє умову $\begin{cases} y^4 \leqslant 1, \\ y^3 \leqslant -1; \end{cases}$ 3) $(2; 2)$. **18.27.** 1) $\left(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$; 2) $(-2; -1)$; 3) $(2; -1)$. **18.28.** 1) $(2; 1)$, $(2; -1)$. *Вказівка.* Запишіть перше рівняння системи так: $y^2 = (x-2)^2 + 1$. Тоді зрозуміло, що $y^2 \geqslant 1$; 2) $(8; -1)$. *Вказівка.* З першого рівняння системи випливає, що $x - y \leqslant 9$, а з другого рівняння $x - y \geqslant 9$. **18.29.** 1) $(2; 3)$, $(-2; 3)$; 2) $(3; 2)$. **18.30.** $(0; 1)$, $(1; 0)$. *Вказівка.* З першого рівняння системи випливає, що $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Тоді $x^5 \leqslant x^2$, $y^5 \leqslant y^2$, звідси $x^5 + y^5 \leqslant x^2 + y^2 = 1$. **18.31.** $(0; 1)$, $(1; 0)$. *Вказівка.* Доведіть, що $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. **18.32.** $(0; 0)$, $(1; 1)$. *Вказівка.* Віднімемо від першого рівняння системи друге, отримаємо $(y^3 - y^2 + y) - (x^3 - x^2 + x) = x^2 - y^2$. Звідси $x^3 + x = y^3 + y$. Далі скористайтеся тим, що функція $f(t) = t^3 + t$ є зростаючою. **18.33.** $(0; 0)$, $(3; 3)$, $(-3; -3)$. **18.34.** $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; -1)$. *Вказівка.* I спосіб. Слід зауважити, що всі розв'язки системи задовольняють умову $|x| \leqslant 1$ і $|y| \leqslant 1$ (див. приклад 2 п. 5). Зрозуміло, що пара $(0; 0)$ — розв'язок системи. Далі, перемноживши рівняння системи, отримаємо $\frac{4xy}{(1+x^2)(1+y^2)} = xy$. При $x \neq 0$ і $y \neq 0$ маємо $\frac{4}{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$. Остання рівність можлива лише за умови $\begin{cases} x^2 = 1, \\ y^2 = 1. \end{cases}$ II спосіб. Розгляньте функцію $f(t) = \frac{2t}{1+t^2}$. Доведіть, що вона зростає на проміжку $[-1; 1]$. Задана система набуває вигляду $\begin{cases} f(x) = y, \\ f(y) = x. \end{cases}$ Звідси $f(f(x)) = x$. Оскільки функція f зростає на проміжку $[-1; 1]$, то за теоремою 6.6 маємо $f(x) = x$. **18.35.** $(0; 0)$, $(1; 1)$. **18.36.** $a = -2$. *Вказівка.* Якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи, то пара $(y_0; x_0)$ також є її розв'язком. **18.37.** $a = -1$ або $a = \frac{4}{3}$. **18.38.** $a = 2$.

19.4. $2x + 3y \geqslant -1$. **19.5.** $3x - y > 2$. **19.14.** Див. рисунок. **19.15.** Див. рисунок. **19.16.** 1) Графіком є об'єднання півплощини і прямої (див.рисунок); 2) графіком є відкрита півплощина, з якої «вирізано» промінь (див.рисунок). **19.18.** $3 \leqslant a \leqslant 5$. *Вказівка.* У системі координат xa графіком даної нерівності є ромб, зображений на рисунку. **19.19.** $a \leqslant 0$ або $a \geqslant 12$. **19.20.** $-\sqrt{6} < a < 0$, або $0 < a < 1$, або $1 < a < \sqrt{12}$. *Вказівка.* Перепишіть дану

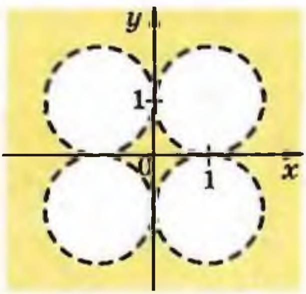


Рис. до задачі 19.14 (6)

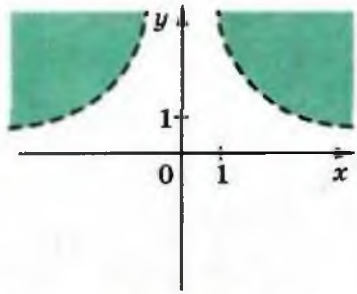


Рис. до задачі 19.14 (7)

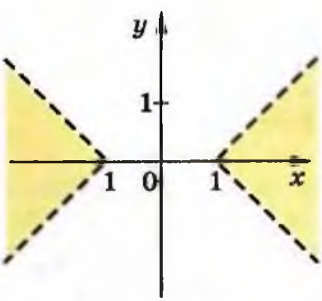


Рис. до задачі 19.14 (11)

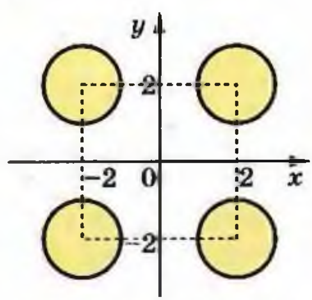


Рис. до задачі 19.15 (5)

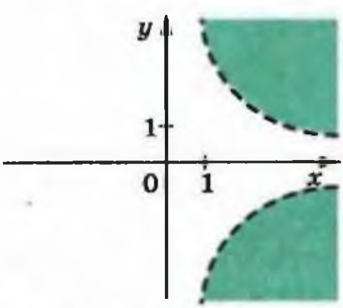


Рис. до задачі 19.15 (6)

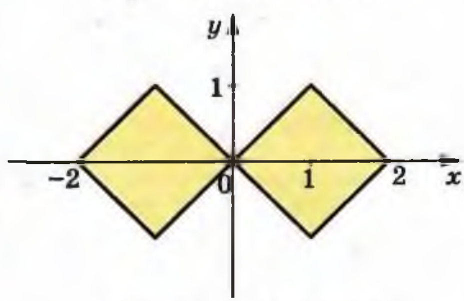


Рис. до задачі 19.15 (7)

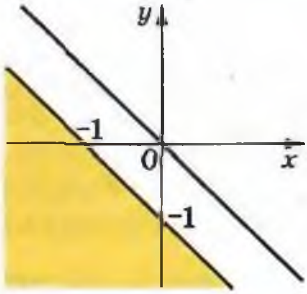


Рис. до задачі 19.16 (1)

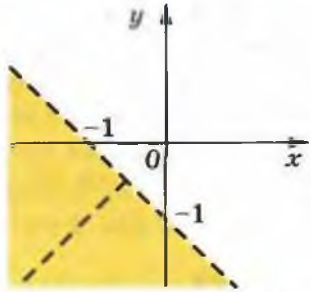


Рис. до задачі 19.16 (2)

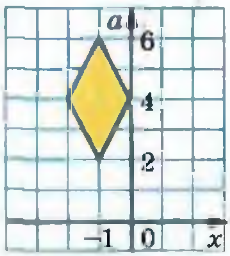


Рис. до задачі 19.18

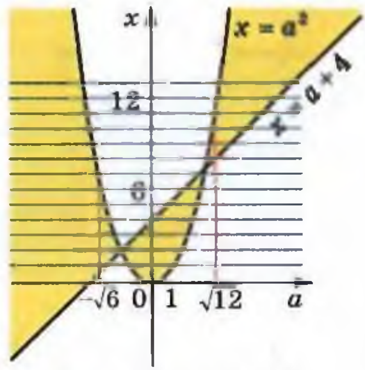


Рис. до задачі 19.20

нерівність так: $(x - a^2)(x - a - 4) \leqslant 0$. На рисунку зображено графік цієї нерівності в системі координат ax. Проведемо горизонтальні прямі $x = k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Потрібно знайти ті значення параметра a, при яких вертикальні прямі перетинають у зафарбованих областях не більше чотирьох прямих виду $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$. **20.10.** 4) Див.рисунок. **20.12.** 2) Див. рисунок. **20.13.** 3) Графіком є об'єднання півплощини і кола (див. рисунок). **20.14.** Квадрат (див. рисунок). *Вказівка.* Якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком нерівності, то пари $(-x_0; y_0)$, $(x_0; -y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ також є розв'язками нерівності. Тому досить побудувати графік нерівності $x + y + |x - y| \leqslant 2$ за умови $x \geqslant 0$ і $y \geqslant 0$, а потім скористатися симетрією відносно осей координат. **20.15.** Паралелограм (див. рисунок). **20.18.** 1) *Вказівка.* Задана умова визначається сукупністю двох систем: $\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ 2x = x^2 + y^2 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x < 1, \\ 1 = x^2 + y^2. \end{cases}$ Шуканий графік — об'єднання дуг двох кіл (див. рисунок). **20.19.** 1) Див.

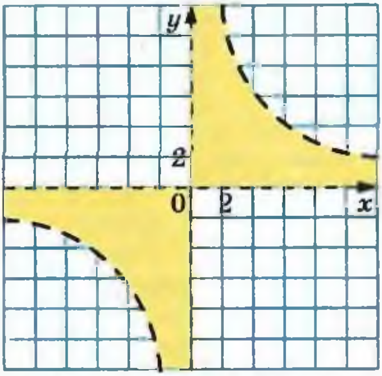


Рис. до задачі 20.10 (4)

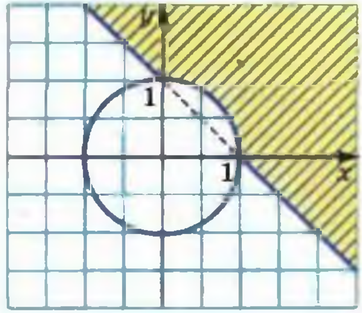


Рис. до задачі 20.12 (2)

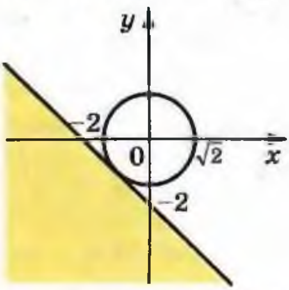


Рис. до задачі 20.13 (3)

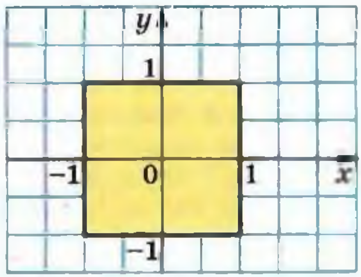


Рис. до задачі 20.14

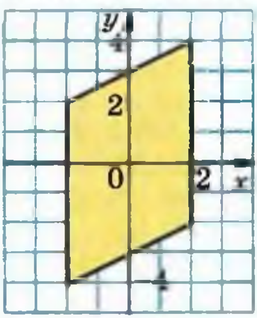


Рис. до задачі 20.15

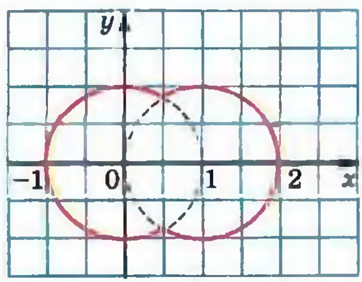


Рис. до задачі 20.18 (1)

рисунок. **20.20.** $a = -3$ або $a = 1$. *Вказівка.* На координатній площині xa побудуйте зображення множини розв'язків системи. **20.21.** $a = 0$ або $a = 4$. **20.22.** $-2 < a < 0$. *Вказівка.* Розкладіть на множники ліву частину нерівності системи. Побудуйте зображення множини розв'язків системи на координатній площині ax.

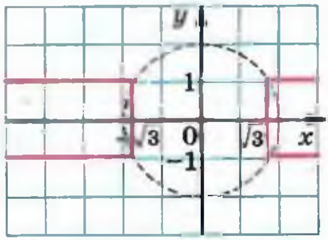


Рис. до задачі 20.19 (1)

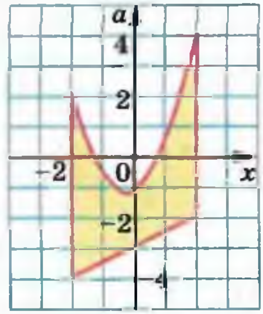


Рис. до задачі 20.25

20.23. $-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}$ або $0 < a < \sqrt{2}$. **20.24.** $-\frac{9}{4} < a < 2$. *Вказівка.* Див. приклад 3 п. 20. **20.25.** 1) $-4 \leqslant a \leqslant 4$; 2) $a = -4$ або $a = 4$; 3) $-4 \leqslant a < -3$; 4) $2 < a \leqslant 4$; 5) $a \leqslant -3,5$ або $a \geqslant 0,5$; 6) $-4 \leqslant a < -3,5$ або $2 < a \leqslant 4$. *Вказівка.* Скористайтеся графіком даної системи, зображеним на рисунку. **21.1.** 5 см, 12 см. **21.2.** 15 см, 17 см. **21.3.** 15 см і 12 см або 18 см і 10 см. **21.4.** 15 см, 6 см. **21.5.** 80 км/год, 60 км/год. **21.6.** 60 км/год, 30 км/год. **21.7.** 80 км/год, 60 км/год або 120 км/год, 80 км/год. **21.8.** 2 км/год. **21.9.** $\frac{5}{12}$ км/год. **21.10.** 18 км/год. **21.11.** 27 км/год, 3 км/год. **21.12.** 24 км/год, 16 км/год. **21.13.** 50 км/год, 40 км/год. **21.14.** 12 км/год, 18 км/год. **21.15.** 60 км/год. **21.16.** 2 км/год, 12 км/год. **21.17.** 8,4 г/см^3, 6,4 г/см^3. **21.18.** 12 днів, 24 дні або 40 днів, 10 днів. **21.19.** 16 год, 48 год. **21.20.** 10 год, 15 год. **21.21.** 10 год 25 хв. **21.22.** 12 год, 9 год. **21.23.** 500 м. **21.24.** 1 м/с. **21.25.** 30 км/год. **21.26.** 48 хв. **21.27.** 4 год. **21.28.** 90 м^3, 60 м^3. **21.29.** 10 лип і 4 берези або 11 лип і 5 беріз. **21.30.** 6 машин і 11 машин. **21.31.** 4 км/год, 3 км/год. **21.32.** 12 деталей. **21.33.** 5 деталей. **21.34.** 44 комплекти. **21.35.** 144 солдати. **21.36.** По 2 цехи кожного типу. **22.1.** 3) 20 кг, 40 кг; 4) 18 см, 12 см; 5) 5 см. **22.2.** 2) 1200 грн., 800 грн.; 3) 40 км/год, 30 км/год. **22.3.** 1) 15 ц, 20 ц; 2) 12 км/год, 4 км/год; 3) 10 год, 15 год або 12 год, 12 год; 4) не більше ніж 15 машин; 5) 60 Ом, 90 Ом; 6) 60 м, 80 м; 7) 24 год; 8) 15 : 2; 9) 6 км/год, 4 км/год; 10) 30 хв, 45 хв; 11) 3 год, 6 год; 12) 12 м^3; 13) 9 трактористів; 14) 7 кг, 21 кг; 15) у 2 рази. **22.4.** 1) 55 км/год, 75 км/год; 2) 7 Н, 24 Н; 3) не більше ніж 6 промахів; 4) 4 Ом, 6 Ом; 5) 60 км/год, 50 км/год; 6) 4 насоси; 7) 1,2 кг; 2,4 кг. **22.5.** 1) 10 хв; 2) 3 год 40 хв, 2 год 12 хв; 3) 150 м × 150 м; 4) через 1 год 30 хв; 5) 30 км; 6) 51 кінь і 9 биків, або 30 коней і 40 биків, або 9 коней і 71 бик. **22.6.** 1) 2,9 м; 2) 6 горобців, 20 горлиць, 14 голубів або 15 горобців, 10 горлиць, 15 голубів. **23.1.** 20 %. **23.2.** 6298,56 грн. **23.3.** 20 736 одиниць. **23.4.** 2400 грн. **23.5.** 600 грн. **23.6.** 5 %. **23.7.** На 15 %. **23.8.** 7,2 %. **23.9.** 20 %. **23.10.** 60 кг. **23.11.** 200 кг. **23.12.** 13,5 кг. **23.13.** 300 дерев. **23.14.** 1100 м. **23.15.** 400 сторінок. **23.16.** 300 кг. **23.17.** 40 пістолів або 60 пістолів. **23.18.** 10 грн. **23.19.** 150 %. **23.20.** 120 %. **23.21.** 2 год. **23.22.** 50 %. **23.23.** 200 г, 600 г. **23.24.** 4 кг, 6 кг. **23.25.** 12 л, 6 л. **23.26.** На 10 % першого разу і на 20 % другого. **23.27.** 20 %. **23.28.** 5 %. **23.29.** 2000 грн. **23.30.** 6 %. **23.31.** 10 %. **23.32.** 6 кг, 18 кг або 9 кг, 21 кг. **23.33.** 160 г, 20 %. **23.34.** 3 кг. **23.35.** 11 %, 5 %. **23.36.** 20 л. **23.37.** 20 т або $2\frac{2}{3}$ т. **23.38.** 33 кг. *Вказівка.* Нехай було отримано x кг соляної кислоти. Тоді математичною моделлю задачі є рівняння $\frac{11}{x}-\frac{2}{x-9}=\frac{1}{4}$, коренями якого є числа 33 і 12. Але корінь 12 не задовольняє умову задачі, виходячи з хімічних властивостей соляної кислоти. **23.39.** 6 л. **23.40.** 2 л. **24.6.** $\frac{n}{2n+1}$. **24.7.** $(-1)^n\cdot n$. **24.8.** $\frac{n}{n+1}$. **24.14.** 1) *Вказівка.* $3^{2k+3}+2^{k+3}=(3^{2k+1}+2^{k+2})\cdot 9-7\cdot 2^{k+2}$; 2) *Вказівка.* Досить показати, що різниця $(6^{2k+2}+19^{k+1}-2^{k+2})-19\,(6^{2k}+19^{k}-2^{k+1})$ кратна 17. **24.15.** 1) *Вказівка.* $7^{k+2}+8^{2k+1}=7\,(7^{k+1}+8^{2k-1})+57\cdot 8^{2k-1}$. **24.22.** *Вказівка.* $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$. Далі доведіть, що $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>0$. **24.24.** *Вказівка.* $a_{k+1}=(k+2)\,(k+3)\times\ldots\cdot(2k+1)\,(2k+2)=(k+2)\,(k+3)\cdot\ldots\cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot 2\,(k+1)=(k+1)\,(k+2)\,(k+3)\cdot\ldots\cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot 2=a_k\cdot 2\,(2k+1)$. **24.26.** *Вказівка.* Теорема «база індукції» виконується: існує чотирикутник з трьома гострими кутами. Очевидно, що в будь-якому n-кутнику ($n\geqslant 4$) існує кут, який не є гострим. «Відріжемо» його (див. рисунок). Отримаємо $(n+1)$-кутник, який має стільки ж гострих кутів, скільки й даний n-кутник. **24.27.** $1+\frac{n(n+1)}{2}$. **24.28.** *Вказівка.* Для $n=2$ твердження є очевидним. Нехай

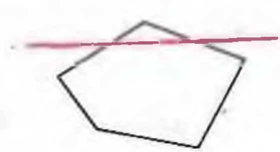


Рис. до задачі 24.26

твердження є правильним при $n = k$ і за результатами турніру між k шахістами їх упорядкували так: $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Тепер у турнірі між $k + 1$ шахістами розглянемо ще одного шахіста, який зіграв з кожним з цих k шахістів по одному разу. Рухаючись у записаній послідовності зліва направо, визначимо першого шахіста, у якого виграв розглядуваний шахіст, і поставимо його перед ним. **25.1.** $4 \cdot 3$. **25.2.** $3 \cdot 6 \cdot 5$. **25.3.** $7!$. **25.4.** $5!$. **25.5.** $20!$. **25.6.** 1) $3 \cdot 2$; 2) $3 \cdot 3$. **25.7.** Коли Антон узяв яблуко. **25.8.** $3 \cdot 2 + 4 \cdot 3$. **25.9.** $3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 5$. **25.10.** $5 \cdot 5$, $5 \cdot 4$. **25.11.** $5!$. **25.12.** 1) $4!$; 2) $3!$. **25.13.** 6^4. **25.14.** 5^3. **25.15.** $5 \cdot 6^3$. **25.16.** $4 \cdot 5^2$. **25.17.** $9 \cdot 10^6$. **25.18.** $28^4 \cdot 10^1$. **25.19.** 2^4. **25.20.** 6^3. **25.21.** $6 \cdot 7 \cdot 4$. **25.22.** $6 \cdot 7 \cdot 3$. **25.23.** I спосіб. $4 \cdot 4!$; II спосіб. $5! - 4!$. **25.24.** $4! \cdot 2$. **25.25.** $9 \cdot 10^3 \cdot 2$. **25.26.** $9 \cdot 10^4 \cdot 4$. **25.28.** $64 \cdot 49$. **25.29.** $4 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4$. **25.30.** $5^7 + 4 \cdot 5^6$. **25.31.** $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5$. **25.32.** 2^{10}. **25.33.** $(7! \cdot 4! \cdot 2!) \cdot 3!$. **25.34.** $(5!)^2$. **25.35.** $9 \cdot 10^4 - 4 \cdot 5^4$. *Вказівка.* Кількість усіх п'ятицифрових чисел дорівнює $9 \cdot 10^4$. Кількість п'ятицифрових чисел, усі цифри яких є парними, дорівнює $4 \cdot 5^4$. **25.36.** $9 \cdot 10^4 - 5^5$. **25.37.** $9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. *Вказівка.* Кількість п'ятицифрових чисел, усі цифри яких різні, дорівнює $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. **25.38.** $6^3 - 5^3$. **25.39.** $2 \cdot 9!$. *Вказівка.* Припустимо, що знайомі сіли на один стілець. 9 людей можна розмістити на 9 стільцях $9!$ способами. Оскільки знайомі можуть сісти справа або зліва один від одного, то всього варіантів $2 \cdot 9!$. **25.40.** $5! - 2 \cdot 4!$. **25.41.** 1) $\frac{6!}{3!}$. *Вказівка.* Якщо вважати всі букви цього слова різними (це умовно можна записати так: $МО_1ЛО_2КО_3$), то отримаємо $6!$ різних слів. Проте слова, які відрізняються лише перестановкою букв $О_1$, $О_2$, $О_3$, насправді є однаковими; 2) $\frac{10!}{3!\,2!\,2!}$; 3) $\frac{13!}{2!\,2!\,2!}$. **25.42.** 8^5. *Вказівка.* Пасажир вибирає поверх. Такий вибір для кожного пасажира можна здійснити 8 способами. **26.1.** A_{11}^2. **26.2.** A_{15}^3. **26.3.** A_{12}^6. **26.4.** A_{16}^2. **26.5.** A_9^3. **26.6.** A_5^3. **26.7.** A_6^3. **26.8.** $4A_4^2$. **26.9.** 1) 10; 2) 3; 3) 1. **26.11.** 1) 12; 2) 7; 3) 7; 4) 14.

26.12. 1) 5; 2) 9, 10; 3) 4. **26.13.** A_{32}^{2}. **26.14.** $A_{3}^{2} \cdot A_{5}^{4}$. **26.15.** $A_{15}^{3} \cdot A_{12}^{1} = A_{15}^{4} \cdot A_{11}^{3}$. **26.16.** $6 \cdot A_{6}^{2} - 5 \cdot A_{5}^{2}$. **27.5.** 1) 18; 2) 6; 3) 10; 4) 4; 5) 17. **27.6.** 1) 16; 2) 6; 3) 12; 4) 5. **27.7.** C_{29}^{5}. **27.8.** C_{10}^{3}. **27.9.** C_{n}^{4}. **27.10.** C_{7}^{2}. **27.11.** $C_{25}^{12} = C_{25}^{13}$. **27.12.** $C_{5}^{2} \cdot C_{12}^{5}$. **27.13.** $C_{11}^{3} \cdot C_{20}^{3}$. **27.14.** $C_{n}^{2} \cdot C_{m}^{2}$. **27.15.** $C_{12}^{2} \cdot C_{7}^{2}$. **27.16.** $C_{7}^{2} \cdot C_{13}^{3}$. **27.17.** $C_{12}^{3} \cdot C_{38}^{7}$. **27.18.** $C_{35}^{1} \cdot C_{34}^{1} \cdot C_{33}^{4}$. **27.19.** $7 \cdot C_{12}^{2} + 12 \cdot C_{7}^{2}$. **27.20.** $C_{8}^{1} + C_{8}^{3} + C_{8}^{5} + C_{8}^{7}$. **27.21.** $C_{15}^{10} + C_{15}^{11} + C_{15}^{12} + C_{15}^{13} + C_{15}^{14} + C_{15}^{15}$. **27.22.** I спосіб: $C_{7}^{2} \cdot C_{13}^{3} + C_{7}^{3} \cdot C_{13}^{2} + C_{7}^{4} \cdot C_{13}^{1} + C_{7}^{5} \cdot C_{13}^{0}$; II спосіб: $C_{20}^{5} - C_{7}^{0} C_{13}^{5} - C_{7}^{1} C_{13}^{4}$. **27.23.** $C_{100}^{10} - C_{12}^{0} C_{88}^{10} - C_{12}^{1} C_{88}^{9}$. **27.24.** I спосіб. $C_{18}^{7} + C_{19}^{6} + C_{19}^{6}$; II спосіб: $C_{20}^{7} - C_{18}^{5}$. **27.25.** $C_{12}^{4} \cdot C_{8}^{4} \cdot C_{4}^{4}$. **27.26.** $\dfrac{C_{12}^{4} \cdot C_{8}^{4} \cdot C_{4}^{4}}{3!}$. **27.27.** $C_{9}^{3} \cdot C_{6}^{3} \cdot C_{3}^{3}$. **27.28.** $C_{12}^{4} \cdot C_{15}^{4} \cdot P_{4}$. **27.29.** C_{m+1}^{n}. *Вказівка.* Розмістимо в ряд m білих куль. Чорна куля може зайняти одне з $m + 1$ положень: крайня зліва, між будь-якими двома білими кулями, крайня справа (див. рисунок). **27.30.** C_{16}^{4}. *Вказівка.* Розмістимо кулі в ряд. Чотири «перегородки» ділять ці кулі на п'ять груп (див. рисунок). Отже, кількість способів розкладання куль по ящиках дорівнює кількості способів розміщення 4 перегородок на 16 місцях. **27.31.** C_{n-1}^{k-1}. *Вказівка.* Запишемо $n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$. Далі скористайтеся ідеєю розв'язування задачі 27.30. **29.21.** 1) $\frac{1}{25}$; 2) $\frac{1}{20}$. **29.25.** 1) 3 кульки; 2) 8 кульок. **29.26.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{1}{9}$. **29.27.** $\frac{2}{3}$. **29.28.** $\frac{2}{3}$. **29.29.** 8 олівців. **29.30.** 19 олівців. **29.32.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{1}{9}$. *Вказівка.* Сприятливі події позначені на рисунку

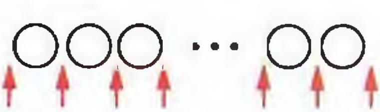
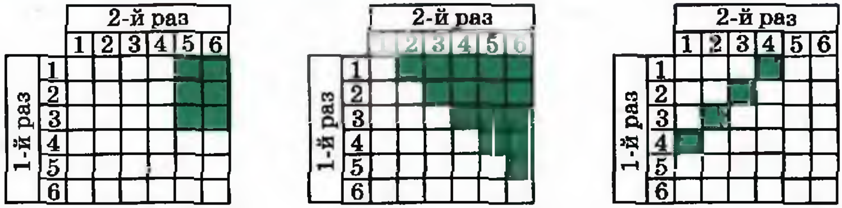


Рис. до задачі 27.29

Рис. до задачі 27.30



1) 2) 3)

Рис. до задачі 29.32

зеленим кольором. **29.33.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{5}{12}$. *Вказівка.* Кинути кубик двічі – це те саме, що незалежно один від одного кинути два кубики. Далі скористайтеся рисунком 29.3. **29.34.** У Петра. **29.35.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **29.36.** $\frac{1}{5}$. **29.37.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{7}{8}$. *Вказівка.* Кинути монету три рази — те саме, що незалежно одну від одної кинути три монети. Якщо пронумерувати монети, то маємо 8 рівноможливих результатів, як показано на рисунку.

Перша монета	Друга монета	Третя монета
Г	Г	Г
Г	Г	Ц
Г	Ц	Г
Г	Ц	Ц
Ц	Г	Г
Ц	Г	Ц
Ц	Ц	Г
Ц	Ц	Ц

Рис. до задачі 29.37

29.38. $\frac{2}{n-1}$. *Вказівка.* Якщо один із знайомих сидить, то другий може з однаковою ймовірністю сісти на одне з $n - 1$ місць, *лишилися.* *29.39.* $\frac{1}{2}$. *Вказівка.* Кожному варіанту розміщення, у якому A стоїть попереду B, відповідає варіант, де їх поміняли місцями і A стоїть після B. Тому кількість сприятливих варіантів *становить половину всіх варіантів.* *30.1.* $\frac{1}{C_5^4}$. *30.2.* $\frac{1}{C_6^4}$. *30.3.* $\frac{1}{A_7^4}$. 30.4. $\frac{1}{A_7^6}$. 30.5. $\frac{C_4^2}{C_{10}^2}$. 30.6. $\frac{C_{10}^3}{C_{50}^3}$. 30.7. $\frac{C_{93}^4}{C_{100}^4}$. 30.8. $\frac{C_{30}^5}{C_{50}^5}$. 30.9. $\frac{C_5^2}{C_{10}^2}$. *30.10.* $\frac{5 \cdot 5}{C_{10}^2}$. *30.11.* $\frac{C_7^2 \cdot C_{93}^4}{C_{100}^6}$. *30.12.* $\frac{C_{10}^3 \cdot C_7^2}{C_{17}^5}$. *30.13.* $\frac{7!}{7^7}$. *30.14. 1)* $\frac{4}{6^4}$; 2) $\frac{6}{6^4}$; 3) $\frac{5^4 + 4 \cdot 5^3}{6^4}$; 4) $\frac{C_4^2 \cdot 5^2}{6^4}$. 30.15. 1) $\frac{3!}{4!}$; 2) $\frac{3 \cdot 3!}{4!}$. 30.16. $\frac{C_{15}^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{25}^7}$. 30.17. $\frac{C_7^5 + C_{10}^1 \cdot C_7^4 + C_{10}^2 \cdot C_7^3}{C_{17}^5}$. 30.18. $\frac{C_{40}^4 \cdot C_{10}^2 + C_{40}^5 \cdot C_{10}^1 + C_{40}^6}{C_{50}^6}$. 30.19. $\frac{C_{93}^6 + C_7^1 \cdot C_{93}^5 + C_7^2 \cdot C_{93}^4}{C_{100}^6}$. 30.20. 1) $\frac{1}{8^5}$; 2) $\frac{8}{8^5}$; 3) $\frac{A_8^5}{8^5}$; 4) $\frac{3^5}{8^5}$. 30.21. $\frac{4! \cdot 9! \cdot 9! \cdot 9! \cdot 9!}{36!}$. 32.11. 8 членів. 32.12. 13. 32.13. 1; 2; 3; 4; 5. 32.14. 8. 32.15. 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 4) $a_n = (-1)^n + 1$; 5) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$; 6) $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$. 32.16. 1) $a_n = n^3 + 1$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; 3) $a_n = \frac{(-1)^n - n}{n}$; 4) $a_n = n^{(-1)^n}$; 5) $a_n = n - |n-3|$. 32.17. 1. 32.18. 1) $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + 2$; 2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{3 - a_n}$; 3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \left(\sqrt{a_n} + 1\right)^2$. 32.19. 3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$. 32.20. 1) $a = 2$ або $a = 3$; 2) не існують. 32.21. $a_{101} = \frac{1}{2}$. *Вказівка.* Покажіть, що $a_{n+6} = a_n$ для будь-якого натурального n. 32.22. $a_{101} = -1$. 32.23. *Вказівка.* Скористайтеся методом математичної індукції. 32.24. *Вказівка.* Доведення проведіть методом математичної індукції з кроком 2. 32.28. 1) $a_n = 2^n - 1$. *Вказівка.* Випишіть кілька перших членів послідовності і зробіть індуктивне припущення; 2) $a_n = \frac{n}{n+1}$;

3) $n^2 - 1$. **32.29.** *Вказівка.* Доведіть, що $a_n = (2n - 1)^2$. **32.30.** *Вказівка.* $a_{n+2} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2 + n + 1$. Покажіть, що $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_{n+1} + 1$. Звідси $a_{n+1}^2 < a_{n+2} < (a_{n+1} + 1)^2$. **32.31.** $x_1 = 1$ або $x_1 = 2$. *Вказівка.* Виконавши заміну $x_n - 1 = y_n$, отримаємо $y_{n+1} = y_n^2$. Тоді $y_{1000} = y_{999}^2 = \ldots = y_1^{2^{999}}$. Звідси $y_1 = 0$ або $y_1 = 1$. **33.9.** 1) Так, $n = 16$; 2) ні. **33.10.** 15. **33.13.** 23. **33.14.** –6. **33.15.** 1) Так, $a_1 = -3$, $d = -6$; 2) ні; 3) так, $a_1 = -2{,}8$, $d = -2{,}8$; 4) ні. **33.16.** 1) Так, $a_1 = 13$, $d = 7$; 2) так, $a_1 = \frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$; 3) ні. **33.18.** 18. **33.19.** 16. **33.20.** –0,6. **33.21.** –6; –4,5; –3; –1,5; 0; 1,5; 3. **33.22.** 2,2; 0,4; –1,4; –3,2. **33.23.** 1) $a_1 = 5$; $d = 2{,}5$; 2) $a_1 = -6$; $d = 4$ або $a_1 = 15$; $d = \frac{1}{2}$. **33.24.** 1) $a_1 = -2$; $d = 3$; 2) $a_1 = 20$; $d = -8$ або $a_1 = 51{,}5$; $d = -11{,}5$. **33.25.** Якщо перший член прогресії дорівнює її різниці або різниця прогресії дорівнює нулю. **33.32.** 60°. **33.38.** При $x = -1$: $a_1 = -3$; $a_2 = -2$; $a_3 = -1$; при $x = 8$: $a_1 = 60$; $a_2 = 43$; $a_3 = 26$. **33.39.** $y = 3$; $a_1 = 10$; $a_2 = 12$; $a_3 = 14$. **33.40.** $y = 1$; $a_1 = -1$; $a_2 = 8$; $a_3 = 17$; $a_4 = 26$. **33.41.** $x = -1$; $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. **33.42.** 0. **33.46.** 3, 13, 23. *Вказівка.* Числа p, $p + 10$, $p + 20$, де p — просте число, мають різні остачі при діленні на 3. **33.47.** 3, 5, 7. **33.48.** *Вказівка.* Нехай $a_k = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Тоді для $n \geqslant k$ маємо $a_n = m^2 + d(n - 1)$. Покажіть, що член з номером $n = 2m + d + 1$ також є квадратом натурального числа. **33.49.** *Вказівка.* Маємо $a^2 = a + kd$, $k \in \mathbb{N}$, $b = a + dm$, $m \in \mathbb{N}$. Тоді $b^2 = a^2 + 2adm + d^2m^2 = a + d\,(k + 2ma + dm^2)$. **33.50.** *Вказівка.* Нехай $a_n = a_1 + d\,(n - 1)$, $a_m = a_1 + d\,(m - 1)$ і a_1 — k-цифрове натуральне число. Оберемо m і n так, щоб $n - 1 = 10^s$, $m - 1 = 10^s$, де $s > k$. **33.51.** *Вказівка.* Нехай множина простих чисел виду $3n + 2$ є скінченною. Позначимо її члени $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Розгляньте число $3 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 2$. **33.52.** Не існує. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що можна вказати проміжки натурального ряду будь-якої довжини, які не містять жодного простого числа. **34.10.** 1) 204; 2) 570. **34.11.** –310. **34.12.** 156 ударів. **34.13.** 1400.

34.14. 710. **34.15.** 1188. **34.16.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) n^2. **34.17.** $n(n+1)$. **34.18.** 8; 14; 20. **34.19.** −17. **34.20.** $1\frac{2}{3}$; $10\frac{5}{6}$; 20; $29\frac{1}{6}$; $38\frac{1}{3}$. **34.21.** 3. **34.22.** −67,2. **34.23.** 63. **34.24.** 5880. **34.25.** 2112. **34.26.** 1632. **34.27.** 61 376. **34.28.** 70 336. **34.29.** 0,3. **34.30.** 10. **34.31.** 20. **34.32.** 16. **34.33.** Так; 19, 23, 27, 31, 35. **34.34.** Ні. **34.35.** 10 с. **34.36.** 42 сторінки. **34.37.** −1976. **34.38.** 348. **34.39.** $a_1 = 14$, $d = -3$. **34.40.** −10. **34.41.** 10. **34.42.** 690. **34.43.** 250. **34.44.** 1) 12; 2) 26. **34.45.** 1) 10; 2) 69. **34.46.** $a_1 = 1$; $d = 2$. **34.49.** 2610. **34.50.** 0. **34.51.** $-(m+n)$. **34.52.** 0. *Вказівка.* Нехай прогресія містить $(2n+1)$ членів. З умови випливає, що $\frac{2a_2 + 2d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 2dn}{2} \cdot (n+1)$. Звідси випливає, що $a_1 + dn = 0$. **34.53.** 0. *Вказівка.* Загальна кількість ігор дорівнює $0{,}5n(n-1)$. Тоді кількість очок, які набрали всі команди, дорівнює $n(n-1)$. Нехай остання команда набрала x очок. Якщо d — різниця прогресії, тоді кількість очок, набрана всіма командами, дорівнює $0{,}5(2x + d(n-1))n$. Отримуємо рівняння $n(n-1) = 0{,}5(2x + d(n-1))n$. **35.4.** Так. **35.13.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ або $-\frac{3}{5}$. **35.14.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) 0,001. **35.15.** 6. **35.16.** 9. **35.17.** 30 і 150. **35.18.** 1, 2, 4, 8. **35.19.** Так, $b_1 = \frac{5}{4}$; $q = 4$. **35.20.** $x_1 = 49$; $q = 7$. **35.21.** 1) 15 або −15; 2) 6 або −6; 3) $2\sqrt{5}$ або $-2\sqrt{5}$. **35.22.** 216. **35.23.** 243. **35.26.** $P_n = \frac{3a}{2^{n-1}}$. **35.28.** 3) Послідовність є геометричною прогресією, якщо $q \neq -1$. **35.30.** 80, 40, 20, 10, 5 або 80, −40, 20, −10, 5. **35.31.** 6, 18, 54, 162, 486 або 6, −18, 54, −162, 486. **35.32.** 1) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$ або $b_1 = -2\sqrt{3}$, $q = -\sqrt{3}$; 2) $b_1 = 162$, $q = \frac{1}{3}$; 3) $b_1 = 7$, $q = -2$ або $b_1 = \frac{14}{9}$, $q = -3$. **35.33.** 1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$; 2) $b_1 = -1$, $q = 3$. **35.34.** При $x = 1$ маємо 3, 6, 12; при $x = -14$ маємо −27, −9, −3. **35.35.** При $x = 2$ маємо 8, 4, 2; при $x = -7$ маємо −1, −5, −25. **35.36.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **35.37.** 3, 7,

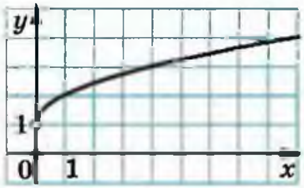


Рис. до задачі 37.29

11. 35.38. 8, 10, 12 або 17, 10, 3. **35.39.** 5, 15, 45 або 45, 15, 5. **35.40.** 2, 6, 18 або 18, 6, 2. **35.41.** 18, 6, 2 або 2, 6, 18. **35.42.** 2, 4, 8, 12 або $\frac{25}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{3}{2}$. **35.43.** 1, 5, 9, 13. **36.5.** 1) 1456; 2) $155(5+\sqrt{5})$. **36.6.** 762. **36.7.** 1210. **36.8.** −68,2. **36.9.** 27. **36.10.** −7 або 6. **36.11.** 16 ран. **36.12.** 5. **36.13.** 72. **36.14.** $\frac{9}{8}$. **36.15.** 4368. **36.16.** −12 285. **36.17.** $\frac{A}{B}$. **36.19.** $2n+\frac{(4^n-1)(4^{n+1}+1)}{3\cdot 4^n}$. **36.20.** 8. **36.21.** 5. **36.23.** $\left(\frac{A}{B}\right)^{50}$. *Вказівка.* Доведіть, що $b_1\cdot b_{100}=\frac{A}{B}$, далі скористайтеся задачею 35.24. **37.7.** 1) $2(\sqrt{2}-1)$; 2) $\frac{9(\sqrt{3}+1)}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$. **37.8.** 1) $\frac{3(\sqrt{6}+2)}{2}$; 2) $3\sqrt{2}+4$. **37.9.** 35. **37.10.** $-\frac{1}{12}$. **37.11.** 1) $16+8\sqrt{2}$ або $16-8\sqrt{2}$; 2) 27. **37.12.** 1) 243; 2) 312,5. **37.14.** $b_1=1$, $q=\frac{1}{2}$ або $b_1=3$, $q=-\frac{1}{2}$. **37.15.** $b_1=192$, $q=\frac{1}{4}$. **37.16.** $27+9\sqrt{3}$ або $27-9\sqrt{3}$. **37.17.** $\frac{25(5+\sqrt{5})}{2}$ або $\frac{25(\sqrt{5}-5)}{2}$. **37.18.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) −3. **37.19.** $-\frac{1}{4}$ або $\frac{1}{4}$. **37.20.** $\frac{2}{5}$. **37.21.** $-\frac{1}{3}$ або $\frac{1}{3}$. **37.22.** $b_1=4\sqrt{5}$, $q=\frac{2}{\sqrt{5}}$. **37.23.** $b_1=32$, $q=\frac{1}{3}$. **37.24.** $2a^2$. **37.25.** Так. **37.26.** 1) $6R\sqrt{3}$; 2) $R^2\sqrt{3}$; 3) $4\pi R$; 4) $\frac{4}{3}\pi R^2$. **37.27.** 1) $4a(2+\sqrt{2})$; 2) $2a^2$; 3) $\pi a(2+\sqrt{2})$; 4) $\frac{\pi a^2}{2}$. **37.29.** Див. рисунок. **38.1.** 1) $\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$; 2) $\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}$; 3) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. **38.2.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. **38.3.** $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 5^n}$. **38.4.** $n(n+1)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$.

38.5. 1) $\frac{10(10^n-1)}{9}-n$; 2) $\frac{50(10^n-1)}{81}-\frac{5n}{9}$. **38.7.** 1) $\frac{n-1}{4n-3}$; 2) $\frac{n(n+2)}{n+1}$; 3) $1-\frac{1}{(n+1)!}$. *Вказівка.* $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$; 4) $1-\frac{1}{(n+1)^2}$. *Вказівка.* $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$. **38.8.** 1) $\frac{n}{2(5n+2)}$; 2) $\frac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}$. *Вказівка.* $\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+n$. **38.9.** $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. *Вказівка.* $\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. **38.10.** $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. *Вказівка.* $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

38.11. $S_n=\frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2}$. *Вказівка.* Розгляньте рівність $aS_n=a+2a^2+3a^3+4a^4+\ldots+n\cdot a^n$.

Предметний покажчик

Зміст

§ 6. Числові послідовності

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
з поглибленим вивченням математики

Редактор *Г. Ф. Висоцька*
Художник *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *О. О. Удалов*
Коректор *Т. Є. Цента*

Підписано до друку 21.07.2009. Формат 60×90/16.
Гарнітура шкільна. Папір офсетний. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 24,00.
Тираж 5000 прим. Замовлення № 368.

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, 719-46-80, факс: (057) 758-83-93

Віддруковано з готових діапозитивів
у друкарні ПП «Модем»
Тел. (057) 758-15-80