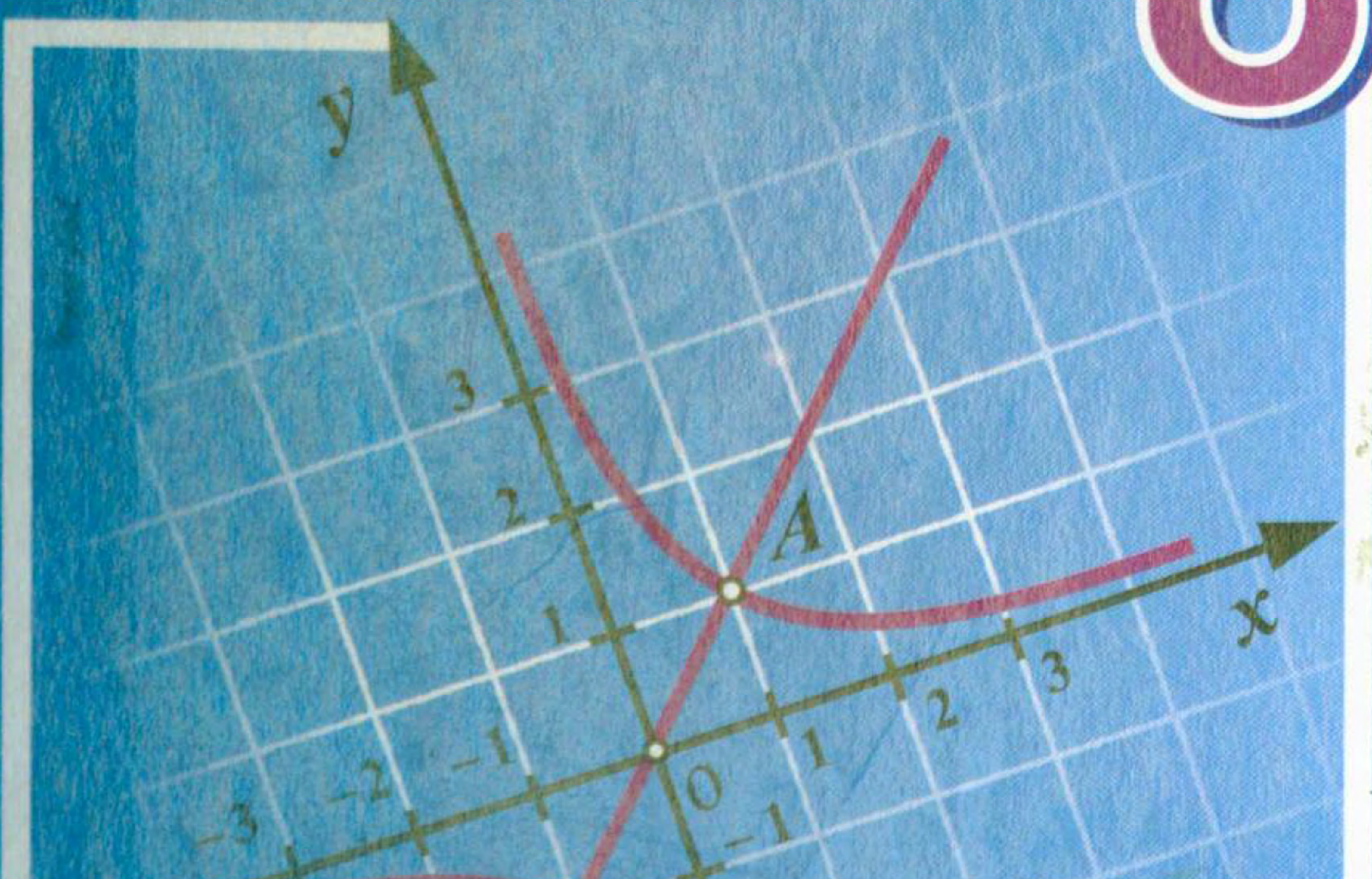
Василь Кравчук
Марія Підручна
Галина Янченко

АЛГЕБРА

клас
8



УДК 51(075)
ББК 22.1я721
К 77

Редактори: *Ярослав Гап'юк,* кандидат педагогічних наук

Ярослав Гринчишин, кандидат фізико-математичних наук

Сергій Мартинюк, кандидат фізико-математичних наук

Літературний редактор *Людмила Олійник*

Обкладинка *Світлани Демчак*

Затверджено Міністерством освіти і науки України
(протокол №1/11-2550)

Кравчук Василь, Підручна Марія, Янченко Галина

К 77 Алгебра: Підручник для 8 класу. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. — 224 с.

ISBN 978-966-07-1314-7

УДК 51(075)

ISBN 978-966-07-1314-7

ЮНІ ДРУЗІ!

Кілька слів про особливості підручника.

Матеріал, який ви вивчатимете, поділено на три параграфи, а параграфи — на пункти.

Кожний пункт розпочинається викладом теоретичного матеріалу. Деякі пункти містять додатковий матеріал під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше».

Для тих, хто хоче знати більше

Далі йде рубрика «Приклади розв'язання вправ». Це підказка. Вона допоможе вам ознайомитися з основними видами вправ, способами їхнього розв'язування та навчить правильно записувати розв'язання.

Приклади розв'язання вправ

Прочитавши теоретичний матеріал та поміркувавши над зразками розв'язаних задач, варто спочатку розв'язувати усні вправи і простіші задачі (рівень А), а потім перейти до складніших (рівень Б). Задачі рівня В — для найкмітливіших, тих, хто хоче вміти та знати більше і мати найвищі оцінки. Для деяких задач цього рівня наведено розв'язання.

Рівень А

Рівень Б

Рівень В

Для самостійної роботи вдома рекомендовано задачі, номери яких виділені кольором (наприклад, 257).

Рубрика «Вправи для повторення» допоможе періодично повторювати основні види вправ.

Вправи для повторення

Після вивчення параграфа ви зможете повторити і систематизувати матеріал, відповівши на запитання та розв'язавши задачі наприкінці параграфа.

Свої знання можна перевірити, розв'язавши завдання для самоперевірки.

Щиро бажаємо успіху!

§ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Описуючи реальні процеси мовою математики, часто отримують вирази, які містять дію ділення на вираз зі змінною. У цьому параграфі ми розглядатимемо саме такі вирази.

Ми з'ясуємо: що таке дробовий вираз, дріб, раціональний вираз; як здійснювати тотожні перетворення раціональних виразів; як розв'язувати рівняння з дробовими виразами.

$2a + b^2$ — цілий вираз

$\dfrac{a}{c^2 + b}$ — дріб

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{d}{c}$ — дробовий вираз

раціональні вирази

1. Поняття раціонального виразу

1. Цілі, дробові та раціональні вирази. У сьомому класі ми вивчали цілі вирази. Прикладами таких виразів є:

$$a+b;\quad 3a^2;\quad 2x(x-y)^2;\quad \frac{c}{3};\quad a:4;\quad b;\quad 3.$$

Цілі вирази можуть містити дії додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня, а також дію ділення, але тільки на число, відмінне від нуля.

Кожний цілий вираз можна записати у вигляді многочлена. Наприклад,

$$2x(x-y)^2 = 2x(x^2-2xy+y^2) = 2x^3-4x^2y+2xy^2.$$

Розглянемо вирази

$$\frac{5y}{y+1}+1;\quad \frac{17ab}{a^2-b^2};\quad 3a:b;\quad (x-y)^2-\frac{x}{x+y}.$$

Ці вирази відрізняються від цілих виразів тим, що містять дію ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають *дробовими виразами*.

Цілі й дробові вирази називають *раціональними виразами*.

$\frac{b}{4}+a^3$ *цілий вираз*	$\frac{4}{b}+a^3$ *дробовий вираз*
Раціональні вирази	

Раціональні вирази $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{2{,}3}{x(y+2)}$, $\frac{5a}{7}$ є частками двох виразів, до того ж, дію ділення записано за допомогою риски дробу. Такі вирази називають *дробами*.

Якщо маємо дріб $\frac{A}{B}$, де A і B — деякі числові вирази або вирази зі змінними, то вираз A називають *чисельником* дробу, а вираз B — *знаменником*.

Отже, $\frac{ab}{a+b}$ — дріб із чисельником ab і знаменником $a+b$.

Дріб $\frac{A}{B}$, у якому A і B — многочлени, називають *раціональним дробом*.

Прикладами раціональних дробів є вирази: $\frac{4}{x+3}$; $\frac{a+b}{a-b}$; $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$; $\frac{x}{a}$; $\frac{b}{3}$.

2. Допустимі значення змінних. Розглянемо дробовий вираз $\frac{5}{a-2}$.

Якщо $a = 3$, то значення цього виразу дорівнює: $\frac{5}{3-2} = \frac{5}{1} = 5$;

якщо $a = -6$, то значення виразу дорівнює: $\frac{5}{-6-2} = -\frac{5}{8}$.

Значення виразу $\frac{5}{a-2}$ можна знайти для будь-якого значення a, крім $a = 2$. Якщо $a = 2$, то знаменник $a - 2$ дорівнює нулю, а на нуль ділити не можна. Кажуть: якщо $a \neq 2$, то вираз $\frac{5}{a-2}$ має зміст, а якщо $a = 2$, то вираз не має змісту.

Значення змінних, для яких вираз має зміст, називають *допустимими значеннями* змінних. Так, для виразу $\frac{5}{a-2}$ допустимими значеннями змінної є всі значення a, крім $a = 2$.

Допустимими значеннями змінних будь-якого цілого виразу є всі значення змінних. Допустимими значеннями змінних дробового виразу є всі значення змінних, крім тих, для яких дорівнює нулю знаменник хоча б одного з дробів, що входять до даного виразу.

3. Тотожно рівні вирази. Тотожності. Розглянемо цілий вираз $x^2 + x(1 - x)$. Виконаємо перетворення цього виразу:

$$x^2 + x(1 - x) = x^2 + x - x^2 = x.$$

Для будь-якого значення змінної x відповідні значення обох виразів — $x^2 + x(1 - x)$ і x — дорівнюють одне одному. Такі цілі вирази ми називали тотожно рівними.

А які два не цілі вирази вважають тотожно рівними?

Розглянемо дробові вирази $\frac{x^2+x(1-x)}{x-1}$ і $\frac{x}{x-1}$. Допустимими значеннями змінної обох виразів є всі значення x, крім $x = 1$. Ці вирази мають однакові знаменники й тотожно рівні чисельники. Тому для кожного *допустимого* значення x відповідні значення виразів дорівнюють одне одному. Такі вирази називають *тотожно рівними*.

Означення **Два вирази називають тотожно рівними, якщо для будь-яких допустимих для них значень змінних їхні відповідні значення дорівнюють одне одному.**

Якщо два тотожно рівних вирази $\frac{x^2+x(1-x)}{x-1}$ та $\frac{x}{x-1}$ сполучити знаком «=», то одержимо рівність $\frac{x^2+x(1-x)}{x-1}=\frac{x}{x-1}$, яка є правильною для будь-якого допустимого значення x. Таку рівність називають *тотожністю.*

Означення **Рівність, яка є правильною для всіх допустимих значень змінних, що входять до неї, називають тотожністю.**

Наприклад, $\frac{2ab\cdot a}{3a\cdot 3b}=\frac{2a^2b}{9ab}$, $\frac{xy}{x^2-y^2}=\frac{xy}{(x-y)(x+y)}$ — тотожності.

Заміну одного виразу тотожно рівним йому виразом називають ***тотожним перетворенням виразу.***

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти значення виразу $x+\frac{28}{x+3}$, якщо $x=4$; $x=\frac{1}{3}$.

Якщо $x=4$, то $x+\frac{28}{x+3}=4+\frac{28}{4+3}=4+4=8.$

Якщо $x=\frac{1}{3}$, то $x+\frac{28}{x+3}=\frac{1}{3}+\frac{28}{\frac{1}{3}+3}=\frac{1}{3}+\frac{28}{\frac{10}{3}}=\frac{1}{3}+28\cdot\frac{3}{10}=$

$$=\frac{1}{3}+\frac{42}{5}=\frac{1}{3}+8\frac{2}{5}=8\frac{11}{15}.$$

Вправа 2. Знайти значення виразу $\frac{(a-b)(a+b)+b^2}{a+b}$, якщо:

а) $a=8$; $b=32$; **б)** $a=0{,}6$; $b=-0{,}6$.

Спростимо даний вираз: $\frac{(a-b)(a+b)+b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2+b^2}{a+b}=\frac{a^2}{a+b}.$

а) Якщо $a=8$; $b=32$, то $\frac{a^2}{a+b}=\frac{8^2}{8+32}=\frac{64}{40}=1{,}6.$

б) Якщо $a=0{,}6$; $b=-0{,}6$, то $\frac{a^2}{a+b}=\frac{0{,}6^2}{0{,}6-0{,}6}=\frac{0{,}36}{0}$ — не має змісту.

Вправа 3. Вказати допустимі значення змінної у виразі:

а) $y+\dfrac{y+4}{y-3}$; **б)** $\dfrac{2a-1}{a^2+a}$; **в)** $\dfrac{x+4}{x^2+8}$.

● **а)** Допустимими є всі значення y, крім $y = 3$.

б) Знайдемо значення a, для яких знаменник дробу дорівнює нулю:

$a^2 + a = 0$; $a(a + 1) = 0$; $a = 0$ або $a + 1 = 0$; $a = 0$ або $a = -1$.

Допустимими є всі значення a, крім $a = 0$ і $a = -1$.

в) Для будь-якого значення x значення знаменника $x^2 + 8$ не менше ніж 8, а тому не дорівнює нулю. Отже, допустимими є всі значення x. ●

Усно

1. Які з виразів є цілими виразами? дробовими? Які з виразів є дробами? раціональними дробами?

а) $\dfrac{a+b}{a-b}$; **б)** $\dfrac{x}{3}+x^2$; **в)** $\dfrac{4}{x}-x^2$;

г) $\left(\dfrac{1}{2}+b^3\right)\cdot a$; **д)** $\dfrac{5}{x(y+1)}$; **е)** $\dfrac{xy+x}{5}$.

2. Для яких значень змінної вираз не має змісту? Назвіть допустимі значення змінної у виразі:

а) $\dfrac{8}{c}$; **б)** $\dfrac{9-x}{x-1}$; **в)** $\dfrac{b+4}{b(b-2)}$.

3. Знайдіть значення виразу $\dfrac{10}{a}$, якщо: $a = 10$; $a = -1$; $a = 2$.

4. Які з рівностей є тотожностями?

а) $\dfrac{a+3a}{a-1}=\dfrac{4a}{a-1}$; **б)** $\dfrac{a\cdot 3a}{a-1}=\dfrac{3a}{a-1}$; **в)** $\dfrac{b}{a(a+b)}=\dfrac{b}{a^2+ab}$.

Рівень А

Знайдіть значення виразу:

5. **а)** $\dfrac{-x^2}{x+5}$, якщо $x = 0$; $x = 5$; $x = -3$;

б) $\dfrac{2ab}{a-b}$, якщо $a = 4$, $b = 2$; $a = -4$, $b = 6$.

6. а) $\dfrac{(-y)^2}{y-4}$, якщо $y=0$; $y=6$; $y=-1$; б) $\dfrac{2b+c}{2b-c}$, якщо $b=3$, $c=4$.

Заповніть таблицю:

7.

x	-2	-1	0	1	$1{,}5$	2
$\dfrac{x}{x+1}$						

8.

a	-4	-1	0	1	2	$2{,}5$
$\dfrac{3}{a-2}$						

Вкажіть допустимі значення змінної у виразі:

9. а) $\dfrac{6x^2+1}{x-2}$; б) $\dfrac{6a+1}{a(a-3)}$; в) $\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{1}{b}$; г) $\dfrac{11x}{x^2+2}$.

10. а) $\dfrac{1-y^3}{y+3}$; б) $\dfrac{5}{2x}-\dfrac{1}{x-2}$; в) $\dfrac{m}{(m-1)(m+1)}$; г) $\dfrac{a+1}{a^2+1}$.

11. Автомобіль проїхав 195 км за t год. Запишіть у вигляді виразу швидкість автомобіля. Знайдіть значення цього виразу, якщо $t=3$.

12. Оператор набрав 45 сторінок тексту за k год. Запишіть у вигляді виразу кількість сторінок, які оператор набирав за 1 год. Знайдіть значення цього виразу, якщо $k=9$.

13. Маса малої деталі дорівнює a г, а великої — b г. До комплекту входять малі та великі деталі, загальна маса яких дорівнює відповідно 150 г і 250 г. Запишіть у вигляді виразу кількість усіх деталей одного комплекту. Знайдіть значення цього виразу, якщо $a=5$, $b=10$.

Рівень Б

Для яких значень змінної вираз не має змісту?

14. а) $\dfrac{4x+1}{x^2-4}$; б) $\dfrac{8a}{a^2-5a}$; в) $\dfrac{y-5}{(y-6)^2}$.

15. а) $\dfrac{3x}{x^2-7x}$; б) $\dfrac{2z+7}{9-z^2}$; в) $\dfrac{1-2b}{b(b^2+2)}$.

Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

16. а) $\dfrac{7b}{4b^2-1}+b$; б) $\dfrac{3k}{4-(k+2)^2}$; в) $\dfrac{6m}{m^2+2m}+\dfrac{m}{m-1}$.

17. а) $\dfrac{5c}{4-9c^2}$; б) $\dfrac{3n-2}{(3+n)^2-9}$; в) $\dfrac{5a}{a^2-4}+\dfrac{a+1}{a}$.

Знайдіть значення виразу:

18. $\dfrac{2a-3}{3a+1}$, якщо $a=-0{,}2$; $a=\dfrac{2}{3}$; $a=3\dfrac{1}{6}$.

19. $\dfrac{2-x}{5x-3}$, якщо $x=0{,}7$; $x=\dfrac{3}{7}$; $x=1\dfrac{1}{5}$.

20. Знайдіть значення виразу $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{y}$, якщо:

а) $x=44$; $y=4$; б) $x=46$; $y=46$; в) $x=1{,}25$; $y=0{,}25$.

21. Знайдіть значення виразу $\dfrac{m(1-n)+n(1+m)}{4n}$, якщо:

а) $m=67$; $n=-67$; б) $m=16{,}75$; $n=0{,}25$.

22. Катер пройшов 25 км за течією річки і 20 км проти течії. Знайдіть час руху катера, якщо його швидкість у стоячій воді дорівнює v км/год, а швидкість течії річки — u км/год.

23. Перший робітник виготовив 48 деталей за n год, а другий — 64 деталі за m год. Скільки деталей виготовляли за 1 год обидва робітники разом?

Рівень В

24. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

а) $\dfrac{11x-1}{|x|-3}$; б) $\dfrac{3y}{|y|-y}$; в) $\dfrac{m}{m^2-2|m|}$; г) $\dfrac{a+3}{|a-1|+1}$.

25. Знайдіть значення виразу $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$, якщо $n=10$.

26. Поїзд за певний час повинен був подолати шлях завдовжки 250 км, рухаючись зі швидкістю a км/год. Але через 2 год після початку руху його затримали. Щоб прибути до місця призначення вчасно, він збільшив швидкість на 25 км/год. Знайдіть тривалість затримки.

Вправи для повторення

27. Розкладіть на множники:

а) $ab^2 - ac^2$; **б)** $x^3 + 8$;

в) $xy + 8x + 9y + 72$; **г)** $a^2 - 4b^2 + a + 2b$.

28. Порівняйте дроби: $\frac{7}{9}$ і $\frac{20}{27}$; $\frac{11}{18}$ і $\frac{17}{24}$; $\frac{7}{15}$ і $\frac{9}{25}$.

29. Скоротіть дроби: $\frac{18}{48}$; $\frac{56}{98}$; $\frac{96}{123}$; $\frac{175}{325}$; $\frac{77}{121}$.

30. Скількома способами можна розподілити 4 зошити між двома учнями, якщо зошити: а) однакові? б) різні?

31. *Задача з «Арифметики» Л. П. Магніцького.* Хазяїн найняв робітника на рік й обіцяв йому дати 12 карбованців і кожух. Але робітник, пропрацювавши тільки 7 місяців, захотів залишити роботу. При розрахунку він одержав кожух і 5 карбованців. Скільки коштує кожух?

2. Основна властивість дробу

1. Основна властивість дробу. Пригадаймо основну властивість *звичайних дробів*: якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те ж натуральне число, то отримаємо дріб, який дорівнює даному. Отже, якщо a, b і c — натуральні числа, то $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ і $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Аналогічна властивість справедлива для будь-яких дробів. А саме:
для будь-яких значень a, b і c, де $b \neq 0$ і $c \neq 0$, справджується рівність

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Рівність $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ є тотожністю і виражає *основну властивість дробу*. Ця властивість означає, що чисельник і знаменник дробу можна помножити на вираз, не тотожно рівний нулю, зокрема — на відмінне від нуля число.

Наприклад, $\dfrac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x+1} = \dfrac{6\cdot\frac{1}{2}x}{6\cdot\left(\frac{1}{3}x+1\right)} = \dfrac{3x}{2x+6}$;

$$\frac{a+b}{a} = \frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)} = \frac{a^2-b^2}{a^2-ab}, \text{ якщо } a \neq 0,\ a \neq b.$$

2. Скорочення дробів. Переставимо в тотожності $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ місцями праву й ліву частини, одержимо:

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}.$$

За допомогою одержаної тотожності дріб $\frac{ac}{bc}$ можна замінити дробом $\frac{a}{b}$, тобто дріб $\frac{ac}{bc}$ можна скоротити на спільний множник c чисельника і знаменника.

Наприклад, $\frac{4n^2}{2mn}=\frac{2n\cdot 2n}{m\cdot 2n}=\frac{2n}{m}$, якщо $m\neq 0$, $n\neq 0$.

Рівність $\frac{4n^2}{2mn}=\frac{2n}{m}$ є тотожністю, тобто вона є правильною для всіх допустимих значень змінних m і n.

3. Зміна знака чисельника або знаменника дробу. Розглянемо правильну числову рівність $\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$. Її можна прокоментувати так: якщо змінити знак у чисельнику дробу і знак перед дробом, то одержимо дріб, який дорівнює даному.

У такий же спосіб змінюють знак чисельника або знаменника будь-якого дробу, використовуючи тотожності:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},\qquad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

Якщо змінити знак у чисельнику або знаменнику дробу і знак перед дробом, то одержимо дріб, тотожно рівний даному.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виділити спільний множник чисельника та знаменника дробу й скоротити дріб: **а)** $\frac{12a}{8ab}$; **б)** $\frac{-18xy^3}{-6x^2y^2}$.

а) $\frac{12a}{8ab}=\frac{4a\cdot 3}{4a\cdot 2b}=\frac{3}{2b}$. **б)** $\frac{-18xy^3}{-6x^2y^2}=\frac{-6xy^2\cdot 3y}{-6xy^2\cdot x}=\frac{3y}{x}$.

Вправа 2. Розкласти на множники чисельник і знаменник дробу й скоротити дріб: **а)** $\dfrac{10b-5a}{a^2-4b^2}$; **б)** $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3}$.

• **а)** $\dfrac{10b-5a}{a^2-4b^2}=\dfrac{-5(a-2b)}{(a-2b)(a+2b)}=\dfrac{-5}{a+2b}=-\dfrac{5}{a+2b}$.

б) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3}=\dfrac{x^2+xy+y^2}{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}=\dfrac{1}{x-y}$. •

Вправа 3. Звести дріб $\dfrac{3a}{7b}$ до знаменника $42a^2b$.

• Оскільки $42a^2b=7b\cdot 6a^2$, то, помноживши чисельник і знаменник даного дробу на $6a^2$, матимемо: $\dfrac{3a}{7b}=\dfrac{3a\cdot 6a^2}{7b\cdot 6a^2}=\dfrac{18a^3}{42a^2b}$. •

Усно

32. Які з дробів $\dfrac{4}{2m}$, $\dfrac{6}{12m}$, $\dfrac{2m}{m^2}$ тотожно рівні дробу $\dfrac{2}{m}$?

33. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{5x}{15y}$; **б)** $\dfrac{ab}{4b}$; **в)** $\dfrac{m(n-2)}{n(n-2)}$; **г)** $\dfrac{18a^2}{a^3}$.

34. Зведіть дріб:

а) $\dfrac{11}{b}$ до знаменника b^2; **б)** $\dfrac{3x}{2y}$ до знаменника $4xy$.

Рівень А

35. Виділіть спільний множник чисельника та знаменника дробу й скоротіть дріб:

а) $\dfrac{3x}{5x}$; **б)** $\dfrac{4a}{6a}$; **в)** $\dfrac{9ab}{6b}$; **г)** $\dfrac{-10x^2y}{15xy^2}$.

Скоротіть дріб:

36. **а)** $\dfrac{28x^2y^2}{35x^2y^3}$; **б)** $\dfrac{24b^2c^2}{36bc}$; **в)** $\dfrac{-15mn^2}{40m^2n^2}$; **г)** $\dfrac{8k^2m^4}{-12k^4m^3}$.

37. а) $\frac{18c^2n^2}{12n^3}$; б) $\frac{36xy^2}{28xy}$; в) $\frac{40ab^2}{-24a^2b^3}$; г) $\frac{-14ac^3}{-42bc^3}$.

38. а) $\frac{a(m-n)}{m-n}$; б) $\frac{b(c+d)}{3b(c+d)}$; в) $\frac{5k}{15k+20}$; г) $\frac{m^2-mn}{mn}$.

39. а) $\frac{ab(a+b)}{c(a+b)}$; б) $\frac{m(x-2y)}{m(x-y)}$; в) $\frac{3x-9}{x-3}$; г) $\frac{7xy}{xy-5y}$.

40. Подайте частку у вигляді дробу й скоротіть дріб:

а) $10a^2b^2 : (5a^3b)$; б) $24m^2n : (-6mn)$; в) $(-28ab^3) : (-21b^4)$.

Знайдіть значення виразу:

41. а) $\frac{20a^3b}{4a^2b^2}$, якщо $a = 48; b = 16$; $a = -4{,}2; b = 11$.

б) $15x^2y^3 : (30xy^2)$, якщо $x = 300; y = 0{,}06$.

42. $\frac{18bc^3}{2b^2c^2}$, якщо $b = 3; c = 4{,}5$; $b = -1{,}4, c = 2{,}8$.

Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу й скоротіть дріб:

43. а) $\frac{6a-3b}{8a-4b}$; б) $\frac{12a^2-16a}{3a^2-4a}$; в) $\frac{a^2-b^2}{a-b}$; г) $\frac{xy+x^2y}{xy-xy^2}$;

д) $\frac{a^2-9}{7a+21}$; е) $\frac{7x^2-28}{10x-20}$; є) $\frac{4y-8}{y^2-4y+4}$; ж) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$.

44. а) $\frac{9x-6y}{15x-10y}$; б) $\frac{c^2+2c}{c^2-2c}$; в) $\frac{m^2-n^2}{n+m}$; г) $\frac{ab+a^2}{ab+b^2}$.

д) $\frac{x^2-y^2}{5x+5y}$; е) $\frac{10a-10b}{ab-b^2}$; є) $\frac{3m-6}{m^2-4m+4}$; ж) $\frac{a^2-25}{a^2-10a+25}$.

45. Зведіть дріб:

а) $\frac{k}{4p}$ до знаменника: $12p$; $4pq$; $16p^2$;

б) $\frac{5}{2a^2}$ до знаменника: $4a^4$; $10a^2b$.

46. Зведіть дріб $\frac{4}{3xy}$ до знаменника: $15xy$; $3xy^2$; $9x^3y$.

Рівень Б

Скоротіть дріб:

47. а) $\frac{6ab-9b^2}{4a^2-9b^2}$; б) $\frac{4c^2-25x^2}{4c^2+20cx+25x^2}$; в) $\frac{2x^3y-8xy^3}{2xy^2-x^2y}$.

48. а) $\frac{x^3+8}{x+2}$; б) $\frac{z^2+3z+9}{27-z^3}$; в) $\frac{y^6-1}{1-y^2}$.

49. а) $\frac{ax+cx-ay-cy}{cx-cy}$; б) $\frac{b^2+2ab+a^2}{a^2+ab-ax-bx}$; в) $\frac{8a+4b}{2ab+b^2-2ad-bd}$.

50. а) $\frac{14b-63c}{4b^2-81c^2}$; б) $\frac{3kn-12n}{k^2-8k+16}$; в) $\frac{6mn+2m^2}{9mn^2-m^3}$;

г) $\frac{15-5c}{c^3-27}$; д) $\frac{x^2-y^2}{xy-x+y-y^2}$; е) $\frac{a^2+ac+bc+ab}{a^2b+abc}$.

Знайдіть значення виразу:

51. $\frac{3a^2+9a}{a^2-9}$, якщо $a=4$; $a=-\frac{1}{3}$.

52. $\frac{x^2-4}{5x+10}$, якщо $x=-1$; $x=\frac{2}{9}$.

53. Зведіть дріб:

а) $\frac{7}{x+y}$ до знаменника x^2+xy; б) $\frac{2}{x+y}$ до знаменника $x^2+2xy+y^2$;

в) $\frac{c}{a-b}$ до знаменника a^2-b^2; г) $\frac{n}{m-n}$ до знаменника m^3-n^3.

54. Зведіть дріб:

а) $\frac{2a}{x+y}$ до знаменника x^2-y^2; б) $\frac{1}{a+c}$ до знаменника a^3+c^3.

Рівень В

Скоротіть дріб:

55. а) $\frac{13824x^{n+2}}{15552x^n}$; б) $\frac{2045x^n}{1755x^{2n}}$.

56. а) $\frac{x^2+3xy+2y^2}{x^2-xy-2y^2}$; б) $\frac{y^3+2y^2-y-2}{y^2+y-2}$.

57. Побудуйте графік функції, заданої формулою:

а) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$; б) $y = \dfrac{|x|}{x}$.

58. Доведіть, що дріб є нескоротним для будь-якого натурального значення n:

а) $\dfrac{n+2}{n+1}$; б) $\dfrac{2n+5}{n+2}$; в) $\dfrac{2n+3}{5n+7}$.

Розв'язання. **б)** Припустимо, що існує натуральне значення n, для якого дріб $\dfrac{2n+5}{n+2}$ є скоротним. Нехай дріб можна скоротити на натуральне число d, де $d \geq 2$. Виділимо в чисельнику дробу вираз, який стоїть у знаменнику:

$$\frac{2n+5}{n+2} = \frac{2n+4+1}{n+2} = \frac{2(n+2)+1}{n+2}.$$

Оскільки знаменник $n + 2$ і чисельник $2(n + 2) + 1$ діляться на d, то 1 має ділитися на d. Одержали суперечність, бо 1 не ділиться (націло) на натуральне число d, де $d \geq 2$. Отже, не існує натурального значення n, для якого дріб $\dfrac{2n+5}{n+2}$ був би скоротним.

59. Доведіть тотожність:

а) $\dfrac{ab+3a+5b+15}{ab+3a+3b+b^2} = \dfrac{a^2+10a+25}{a^2+ab+5a+5b}$;

б) $\dfrac{2xy+3y+2x+3}{2xz+3z+4x+6} = \dfrac{3xy+2y+3x+2}{3xz+2z+6x+4}$.

Вправи для повторення

60. Розв'яжіть рівняння:

а) $2(x + 3) - 5 = 7$; б) $2{,}5y - 0{,}44 = 0{,}4(y + 1)$;

в) $(x - 2)(x + 3) - (x + 2)^2 = 2$; г) $\dfrac{5}{7}x - \dfrac{1}{9} = \dfrac{3}{7}x + \dfrac{5}{9}$.

61. В одній системі координат побудуйте графіки функцій $y = -x + 1$ та $y = 0{,}5x - 2$ і знайдіть координати точки перетину графіків.

62. Сьогодні в магазині 2 кг помідорів і 3 кг огірків коштують 28 грн. Тиждень тому, коли помідори й огірки були дорожчими на 25 %, 1 кг помідорів і 2 кг огірків коштували 20 грн. Скільки коштують 1 кг помідорів і скільки 1 кг огірків сьогодні?

63. Є два сплави міді й цинку. В один сплав мідь і цинк входять у відношенні 5 : 2, а в інший — у відношенні 3 : 4. Скільки потрібно взяти кожного сплаву, щоб одержати 28 кг нового з однаковим умістом міді й цинку?

3. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками

1. Додавання дробів з однаковими знаменниками. Дроби з однаковими знаменниками додають так само, як і звичайні дроби з однаковими знаменниками, тобто додають їхні чисельники, а знаменник залишають той самий:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}. \qquad (1)$$

Рівність (1) є тотожністю, тобто вона правильна для будь-яких значень a, b і c, де $b \neq 0$.

З тотожності (1) випливає таке *правило додавання дробів з однаковими знаменниками*: ***щоб додати дроби з однаковими знаменниками, потрібно додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.***

2. Віднімання дробів з однаковими знаменниками. Віднімання дробів з однаковими знаменниками виконують на основі тотожності

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}. \qquad (2)$$

З тотожності (2) випливає *правило віднімання дробів з однаковими знаменниками*: ***щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, потрібно від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.***

3. Запис дробу у вигляді суми або різниці дробів. У кожній з тотожностей (1) і (2) переставимо місцями ліву і праву частини:

$$\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}; \quad \frac{a-c}{b}=\frac{a}{b}-\frac{c}{b}.$$

Одержані тотожності можна використовувати, якщо потрібно записати дріб у вигляді суми або різниці дробів.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Додати дроби:

а) $\frac{7}{a}+\frac{5}{a}$; б) $\frac{2a+1}{ab}+\frac{b-1}{ab}+\frac{3}{ab}$; в) $\frac{5x-2y}{2x-y}+\frac{x-y}{2x-y}$.

• а) $\frac{7}{a}+\frac{5}{a}=\frac{7+5}{a}=\frac{12}{a}$.

б) $\dfrac{2a+1}{ab}+\dfrac{b-1}{ab}+\dfrac{3}{ab}=\dfrac{2a+1+b-1+3}{ab}=\dfrac{2a+b+3}{ab}.$

в) $\dfrac{5x-2y}{2x-y}+\dfrac{x-y}{2x-y}=\dfrac{5x-2y+x-y}{2x-y}=\dfrac{6x-3y}{2x-y}=\dfrac{3(2x-y)}{2x-y}=3.$ •

Вправа 2. Відняти дроби:

а) $\dfrac{4n}{2n^2-3n}-\dfrac{2n+3}{2n^2-3n};$ **б)** $\dfrac{2a}{x-y}-\dfrac{3a}{y-x}.$

• **а)** $\dfrac{4n}{2n^2-3n}-\dfrac{2n+3}{2n^2-3n}=\dfrac{4n-(2n+3)}{2n^2-3n}=\dfrac{2n-3}{n(2n-3)}=\dfrac{1}{n}.$

б) Згідно з тотожністю $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{-b}$ маємо: $-\dfrac{3a}{y-x}=\dfrac{3a}{-(y-x)}=\dfrac{3a}{x-y}$. Тому:

$\dfrac{2a}{x-y}-\dfrac{3a}{y-x}=\dfrac{2a}{x-y}+\dfrac{3a}{x-y}=\dfrac{2a+3a}{x-y}=\dfrac{5a}{x-y}.$ •

Вправа 3. Записати дріб у вигляді суми або різниці цілого числа і дробу:

а) $\dfrac{3a+5}{a};$ **б)** $\dfrac{2a+2b+1}{a+b};$ **в)** $\dfrac{3n+1}{n+1}.$

• **а)** $\dfrac{3a+5}{a}=\dfrac{3a}{a}+\dfrac{5}{a}=3+\dfrac{5}{a}.$

б) $\dfrac{2a+2b+1}{a+b}=\dfrac{2(a+b)}{a+b}+\dfrac{1}{a+b}=2+\dfrac{1}{a+b}.$

в) $\dfrac{3n+1}{n+1}=\dfrac{3n+3-2}{n+1}=\dfrac{3(n+1)-2}{n+1}=\dfrac{3(n+1)}{n+1}-\dfrac{2}{n+1}=3-\dfrac{2}{n+1}.$ •

Усно

64. Знайдіть суму дробів:

а) $\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{4};$ **б)** $\dfrac{9b}{11}+\dfrac{3b}{11};$ **в)** $\dfrac{3a}{x}+\dfrac{a}{x};$ **г)** $\dfrac{x+a}{d}+\dfrac{a}{d}.$

65. Знайдіть різницю дробів:

а) $\dfrac{x}{7}-\dfrac{y}{7};$ **б)** $\dfrac{8n}{9}-\dfrac{3n}{9};$ **в)** $\dfrac{a+y}{x}-\dfrac{y}{x};$ **г)** $\dfrac{x+2y}{c}-\dfrac{x}{c}.$

Рівень А

Виконайте додавання (віднімання) дробів:

66. **а)** $\dfrac{2b}{a}+\dfrac{3b}{a};$ **б)** $\dfrac{5n+3}{3n+1}+\dfrac{7n-1}{3n+1};$ **в)** $\dfrac{2a-3}{xy}+\dfrac{4a}{xy}+\dfrac{3}{xy};$

г) $\frac{6a}{5p} - \frac{3a}{5p}$; д) $\frac{3+a}{9a} - \frac{3-a}{9a}$; е) $\frac{9}{7-b} - \frac{b+2}{7-b}$.

67. а) $\frac{3n+5}{5n} + \frac{2n-7}{5n}$; б) $\frac{4a-1}{2a} - \frac{3+3a}{2a}$; в) $\frac{7b-3}{4b-1} - \frac{3b-2}{4b-1}$.

Спростіть вираз:

68. а) $\frac{7x-2}{4x+1} + \frac{5x+2}{4x+1}$; б) $\frac{a-3b}{a+b} - \frac{3a-b}{a+b}$;

в) $\frac{a-3}{3a-1} + \frac{5a+1}{3a-1}$; г) $\frac{6p}{p-2} - \frac{12}{p-2}$;

д) $\frac{5+a}{a-b} + \frac{5+b}{b-a}$; е) $\frac{x+4}{x-2y} - \frac{3x-4}{2y-x}$.

69. а) $\frac{6m-1}{m-1} - \frac{m+4}{m-1}$; б) $\frac{x+3y}{x+y} + \frac{7x+5y}{x+y}$;

в) $\frac{8m}{m-n} + \frac{8n}{n-m}$; г) $\frac{7c-9}{c-3} - \frac{c-15}{3-c}$.

Знайдіть значення виразу:

70. а) $\frac{b-3}{4b} + \frac{3b-1}{4b}$, якщо $b = -3$; б) $\frac{7a^2-1}{3a} - \frac{a^2-1}{3a}$, якщо $a = 0{,}28$.

71. а) $\frac{a-3}{a^2} + \frac{3+a}{a^2}$, якщо $a = 5$; б) $\frac{4c+5}{2c} - \frac{2c-1}{2c}$, якщо $c = 0{,}4$.

Рівень Б

Спростіть вираз:

72. а) $\frac{c^2-2c}{c-1} - \frac{1}{1-c}$; б) $\frac{a^5}{a-1} - \frac{a^3}{a-1}$;

в) $\frac{b^2+9}{b^2-9} + \frac{6b}{b^2-9}$; г) $\frac{12a^4}{3a^2b-b^4} - \frac{4a^2b^3}{3a^2b-b^4}$.

73. а) $\frac{5y^2-14}{y-2} - \frac{y^2-10}{2-y}$; б) $\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3} - \frac{2xy}{(x-y)^3}$;

в) $\frac{a^2+1}{a^3-1} + \frac{a}{a^3-1}$; г) $\frac{18a^2}{3a-b^2} - \frac{2b^4}{3a-b^2}$.

74. а) $\frac{(a+b)^2}{ab} - \frac{(a-b)^2}{ab}$; б) $\frac{x^3}{(x-2)^2} - \frac{4x^2}{(x-2)^2} + \frac{4x}{(x-2)^2}$.

Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого числа і дробу:

75. а) $\frac{3+8x}{2x}$; б) $\frac{5m-5n+2}{m-n}$; в) $\frac{4y+5}{y+2}$; г) $\frac{2x-y}{x+y}$.

76. а) $\frac{14b+5}{7}$; б) $\frac{3b+3c-a}{b+c}$; в) $\frac{6c+1}{2c+1}$; г) $\frac{4x-3y}{x-y}$.

Рівень В

77. Спростіть вираз:

а) $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{x^4}{x^2+x+1}$; б) $\frac{a^4+x^4}{a^3+x^3}+\frac{a^2x^2}{a^3+x^3}$.

Вказівка. а) Многочлен x^4+x^2+1 можна розкласти на множники, записавши його у вигляді $(x^4+2x^2+1)-x^2$.

Вправи для повторення

78. Обчисліть:

а) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$; б) $\frac{3}{14}-\frac{4}{21}$; в) $\frac{2}{9}-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$;

г) $\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{14}-\frac{1}{6}$; д) $3\frac{1}{3}:\frac{5}{9}-\frac{2}{15}$; е) $7\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{11}-4\frac{5}{6}$.

79. Подайте одночлен $24a^7b^8$ у вигляді добутку двох одночленів, одним з яких є:

а) $6a^4b^7$; б) $4a^2b^5$; в) $24a^7b$; г) $8ab^7$.

80. Із двох міст, відстань між якими дорівнює 80 км, одночасно назустріч один одному виїхали мотоцикліст та автомобіль і зустрілися через 40 хв. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона в $1\frac{2}{3}$ разу більша від швидкості мотоцикліста.

81. Через першу трубу басейн можна наповнити за 18 год, через другу — за 15 год, а через третю трубу з повного басейна можна випустити воду за 30 год. За який час можна наповнити басейн, якщо відкрити всі три труби?

4. Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками

1. Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками. Щоб додати або відняти звичайні дроби з різними знаменниками, потрібно:

1) звести дроби до спільного знаменника;

2) додати або відняти одержані дроби з однаковими знаменниками.

У такий же спосіб додають і віднімають будь-які дроби з різними знаменниками.

Нехай потрібно додати дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$, які мають різні знаменники. Зведемо ці дроби до спільного знаменника bd. Для цього чисельник і знаменник першого дробу помножимо на d, а другого дробу — на b. Одержимо:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}; \qquad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}.$$

Знаючи, як додати дроби з однаковими знаменниками, матимемо:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Отже,

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}}.$$

Віднімають дроби з різними знаменниками аналогічно, а саме:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}}.$$

2. Зведення дробів до спільного знаменника. Першим кроком додавання або віднімання дробів з різними знаменниками є зведення дробів до спільного знаменника. Зупинимося на цьому детальніше, розглянувши приклади.

Приклад 1. Звести до спільного знаменника дроби $\frac{5}{8a^3b}$ і $\frac{7}{12a^2c^2}$.

Спільний знаменник обох цих дробів повинен бути одночленом. За коефіцієнт цього одночлена візьмемо найменше спільне кратне коефіцієнтів знаменників даних дробів, тобто 24, а кожну змінну візьмемо з найбільшим показником, з яким вона входить у знаменники дробів, тобто візьмемо a^3, b і c^2. Тоді спільним знаменником буде $24a^3bc^2$. Додатковим множником для першого дробу є $3c^2$, бо $24a^3bc^2 = 8a^3b \cdot 3c^2$; для другого — $2ab$, бо $24a^3bc^2 = 12a^2c^2 \cdot 2ab$. Одержимо:

$$\frac{5}{8a^3b} = \frac{5\cdot 3c^2}{24a^3bc^2} = \frac{15c^2}{24a^3bc^2}; \qquad \frac{7}{12a^2c^2} = \frac{7\cdot 2ab}{24a^3bc^2} = \frac{14ab}{24a^3bc^2}.$$

Отже, щоб звести до простішого спільного знаменника дроби, знаменниками яких є одночлени, потрібно:

1) знайти найменше спільне кратне (НСК) коефіцієнтів знаменників;

2) утворити спільний знаменник у вигляді добутку НСК і степенів змінних з найбільшим показником, з яким вони входять до знаменників;

3) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник. (Щоб знайти додатковий множник для дробу, потрібно записати спільний знаменник у вигляді добутку двох одночленів, одним з яких є знаменник даного дробу. Тоді другий одночлен буде додатковим множником.)

Приклад 2. Звести до спільного знаменника дроби $\frac{3}{a^2-ab}$ і $\frac{2}{a^2+ab}$.

Розкладемо на множники знаменник кожного дробу:

$$\frac{3}{a^2-ab} = \frac{3}{a(a-b)}; \quad \frac{2}{a^2+ab} = \frac{2}{a(a+b)}.$$

Спільним знаменником дробів є добуток $a(a-b)(a+b) = a(a^2-b^2)$. Додатковим множником для першого дробу є вираз $a+b$, для другого — вираз $a-b$. Помноживши чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник, одержимо:

$$\frac{3}{a^2-ab} = \frac{3(a+b)}{a(a^2-b^2)}; \qquad \frac{2}{a^2+ab} = \frac{2(a-b)}{a(a^2-b^2)}.$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Звести до спільного знаменника дроби $\frac{3}{m^2-n^2}$ і $\frac{9}{n-m}$.

• $\frac{3}{m^2-n^2} = \frac{3}{(m-n)(m+n)}$; $\frac{9}{n-m} = -\frac{9}{m-n}$. Спільним знаменником дробів є добуток $(m-n)(m+n)$. Додатковим множником для першого дробу є 1, для другого — $m+n$. Тому перший дріб залишаємо без зміни, а для другого дробу матимемо: $\frac{9}{n-m} = -\frac{9(m+n)}{(m-n)(m+n)} = -\frac{9(m+n)}{m^2-n^2}$. •

Вправа 2. Виконати додавання (віднімання) дробів:

а) $\dfrac{5b}{ac}+\dfrac{4c}{b}$; б) $\dfrac{4}{9x^2y^2}+\dfrac{7}{12xy^3}$;

в) $\dfrac{2}{xy-y^2}-\dfrac{2}{x^2-xy}$; г) $m-3+\dfrac{2+m^2}{1-m}$.

● **а)** Спільним знаменником дробів є добуток їхніх знаменників. Тому додатковий множник для першого дробу — b, а для другого — ac.

$$\frac{\overset{b}{5b}}{ac}+\frac{\overset{ac}{4c}}{b}=\frac{5b^2+4ac^2}{abc}.$$

б) Спільним знаменником дробів є $36x^2y^3$. Додатковим множником для першого дробу є $4y$, для другого — $3x$.

$$\frac{\overset{4y}{4}}{9x^2y^2}+\frac{\overset{3x}{7}}{12xy^3}=\frac{16y+21x}{36x^2y^3}.$$

в) Розклавши на множники знаменник кожного дробу, матимемо:

$$\frac{2}{xy-y^2}-\frac{2}{x^2-xy}=\frac{\overset{x}{2}}{y(x-y)}-\frac{\overset{y}{2}}{x(x-y)}=\frac{2x-2y}{xy(x-y)}=\frac{2(x-y)}{xy(x-y)}=\frac{2}{xy}.$$

г) Записавши вираз $m-3$ у вигляді дробу зі знаменником 1, матимемо:

$$m-3+\frac{2+m^2}{1-m}=\frac{\overset{1-m}{m-3}}{1}+\frac{2+m^2}{1-m}=\frac{(m-3)(1-m)+2+m^2}{1-m}=$$

$$=\frac{m-m^2-3+3m+2+m^2}{1-m}=\frac{4m-1}{1-m}.$$ ●

Вправа 3. Довести тотожність $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a}-1=\dfrac{b^2}{a(a+b)}$.

● Перетворимо ліву частину рівності:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a}-1=\frac{\overset{a}{a}}{a+b}+\frac{\overset{a+b}{b}}{a}-\frac{\overset{a(a+b)}{1}}{1}=\frac{a^2+b(a+b)-a(a+b)}{a(a+b)}=$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2-a^2-ab}{a(a+b)}=\frac{b^2}{a(a+b)}.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву частину рівності звели до правої частини. Тому ця рівність є тотожністю. ●

Нагадаємо, що для доведення тотожностей одну частину тотожності зводять до іншої частини, або обидві частини зводять до одного й того ж виразу, або утворюють різницю лівої та правої частин і доводять, що вона дорівнює нулю.

Рівень А

Зведіть до спільного знаменника дроби:

82. а) $\frac{m}{ab}$ і $\frac{4}{b}$; б) $\frac{d}{a^2}$ і $\frac{1}{a^3}$; в) $\frac{3}{2c}$ і $\frac{9}{c^2}$;

г) $\frac{1}{3c}$ і $\frac{2}{5c}$; д) $\frac{3}{8a}$ і $\frac{1}{12a}$; е) $\frac{x}{2y^2}$ і $\frac{5}{6y^3}$;

є) $\frac{x}{18a^2}$ і $\frac{y}{27a^4}$; ж) $\frac{5}{6ab}$ і $\frac{5}{4b}$; з) $\frac{p}{3a^2}$ і $\frac{q}{6ab}$.

83. а) $\frac{7}{8a}$ і $\frac{5}{a}$; б) $\frac{3}{2a^3}$ і $\frac{2}{a^2}$; в) $\frac{k}{2b}$ і $\frac{n}{3b}$;

г) $\frac{8}{15ab}$ і $\frac{7}{20ab}$; д) $\frac{5}{6a^2}$ і $\frac{7}{18a}$; е) $\frac{3}{4y^3}$ і $\frac{7}{20y^2}$.

84. а) $\frac{5}{a+1}$ і $\frac{4}{a+2}$; б) $\frac{3}{2(a-1)}$ і $\frac{2}{3(a-1)}$; в) $\frac{1}{ab+b}$ і $\frac{1}{a+1}$.

85. а) $\frac{1}{c+3}$ і $\frac{2}{c-1}$; б) $\frac{3}{8(b+2)}$ і $\frac{1}{4(b+2)}$; в) $\frac{8}{xy-x}$ і $\frac{7}{y-1}$.

Подайте у вигляді дробу:

86. а) $\frac{a}{c}-\frac{m}{n}$; б) $\frac{a}{3}+\frac{b}{12}$; в) $\frac{5a}{4x}-\frac{3b}{5x}$;

г) $\frac{7c}{9y}-\frac{c}{6y}$; д) $\frac{5b}{12x}+\frac{7b}{18x}$; е) $\frac{4b}{15a}-\frac{6a}{25b}$.

87. а) $\frac{c}{6}+\frac{ad}{18}$; б) $\frac{3k}{5a}+\frac{2k}{3a}$; в) $\frac{n}{24x}-\frac{5n}{36x}$.

Виконайте додавання (віднімання) дробів:

88. а) $\frac{7+3x}{x}+\frac{10-3y}{y}$; б) $\frac{a+2b}{b}-\frac{2a-b}{a}$; в) $\frac{a}{a+c}-\frac{a}{c}$;

г) $\frac{2}{z-1}+\frac{2}{z+1}$; д) $\frac{2a}{2a+1}-\frac{3a}{3a+2}$; е) $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}$.

89. а) $\frac{4-2a}{a}+\frac{3+2b}{b}$; б) $\frac{2x-y}{x}-\frac{2y-x}{y}$; в) $\frac{y-1}{y-2}-\frac{y+2}{y+1}$.

90. а) $2+\frac{2}{2n-1}$; б) $3-\frac{3x-2y}{x}$; в) $\frac{y^2}{y-2}-y$.

91. а) $\frac{5-2y}{y+1}+2$; б) $1-\frac{2x}{2x+3}$; в) $\frac{2+3c^2}{c-1}-3c$.

92. а) $\frac{1}{c}-\frac{c-5}{c^2}$; б) $\frac{a+2b}{a}+\frac{a-2b^2}{ab}$; в) $\frac{4x-1}{8x}+\frac{5-6x}{12x}$;

г) $\frac{6-a}{6a}-\frac{a+9}{9a}$; д) $\frac{1-y}{3xy}+\frac{2x+3}{6x^2}$; е) $\frac{5a}{2(a+b)}-\frac{4a}{3(a+b)}$;

є) $\frac{7}{x}-\frac{7y}{x(x+y)}$; ж) $\frac{4}{a+5}-\frac{4a+15}{a(a+5)}$; з) $\frac{3}{a+b}+\frac{3a}{b(a+b)}$.

93. а) $\frac{a+2}{a^2}-\frac{1}{a}$; б) $\frac{3x+y}{3xy}+\frac{x-1}{3x}$; в) $\frac{3b-1}{6b}-\frac{2b-1}{4b}$;

г) $\frac{a+b}{3ab}+\frac{a-2}{6a}$; д) $\frac{2m+1}{m(m-1)}-\frac{2}{m-1}$; е) $\frac{b+4c}{5(b-c)}+\frac{b-4c}{3(b-c)}$.

Спростіть вираз:

94. а) $\frac{a-3b}{2a-2b}+\frac{a+2b}{3a-3b}$; б) $\frac{m+4n}{m^2-n^2}+\frac{4}{m+n}$; в) $\frac{k}{k-2}-\frac{k^2}{k^2-4}$.

95. а) $\frac{x-y}{xy}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$; б) $\frac{2-x^2}{x-1}+x+1$; в) $\frac{5a+6}{8a}+\frac{a-1}{4a}-\frac{a+1}{2a}$.

96. а) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m+3n}{2m-2n}$; б) $\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{1}{x-y}$; в) $\frac{a-3}{3a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{3}$.

Доведіть тотожність:

97. а) $\frac{3}{a-3}-\frac{3}{a}=\frac{9}{a^2-3a}$; б) $\frac{b}{(a-b)^2}=\frac{a}{(a-b)^2}-\frac{1}{a-b}$.

98. а) $\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}=\frac{2m}{m^2-n^2}$; б) $\frac{1}{b^2-1}=\frac{b}{b^2-1}-\frac{1}{b+1}$.

Рівень Б

Зведіть до спільного знаменника дроби:

99. а) $\frac{9}{14a^3b}$ і $\frac{5}{21ab^2}$; б) $\frac{1}{18x^3y^3}$ і $\frac{1}{27xy^4}$; в) $\frac{a}{9x^2y}$ і $\frac{b}{15xy^3}$.

100. а) $\frac{8}{9x^3y^3}$ і $\frac{5}{24xy^5}$; б) $\frac{a}{16m^3n^3}$ і $\frac{b}{24m^4n}$; в) $\frac{a}{15xy^6}$ і $\frac{b}{25x^5y}$.

101. а) $\frac{3}{x^2+xy}$ і $\frac{2}{xy+y^2}$; б) $\frac{x}{x^2-y^2}$ і $\frac{y}{x+y}$; в) $\frac{m}{m^2+2mn+n^2}$ і $\frac{n}{m+n}$;

г) $\frac{c}{4c^2-1}$ і $\frac{c^2}{1-2c}$; д) $\frac{1}{1-x^3}$ і $\frac{2}{x-1}$; е) $\frac{y}{y^3-8}$ і $\frac{2}{y^2+2y+4}$.

102. а) $\frac{x}{x^2+x^2y}$ і $\frac{y}{y^2+y}$; б) $\frac{n}{m^2-4mn+4}$ і $\frac{m}{2-m}$; в) $\frac{a}{4a^2-b^2}$ і $\frac{b}{b-2a}$.

Перетворіть у дріб вираз:

103. а) $\frac{1+a}{a^2bc}+\frac{1-bc}{ab^2c^2}$; б) $\frac{4x+1}{12x^4y^2}-\frac{3y-1}{9x^3y^3}$;

в) $\frac{c+1}{cm+cn}-\frac{d+1}{dm+dn}$; г) $\frac{x}{12(x-y)}+\frac{x}{18(x+y)}$.

д) $\frac{b+1}{ab-b^2}+\frac{a+1}{ab-a^2}$; е) $\frac{1}{(b-a)^2}-\frac{1}{a^2-b^2}$.

104. а) $\frac{2a+1}{16a^3b^2}-\frac{3b+1}{24a^2b^3}$; б) $\frac{7}{ax-ay}-\frac{5}{by-bx}$;

в) $\frac{b}{a^2-b^2}-\frac{b}{a^2+ab}$; г) $\frac{x-y}{(x+y)^2}+\frac{1}{2x+2y}$.

105. а) $\frac{2m-n}{mn}-\frac{2}{n}+\frac{5}{m^2}$; б) $\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$;

в) $\frac{a+b}{a^2}-\frac{a+b}{ab}-\frac{a-b}{b^2}$; г) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+1}+1$.

106. а) $k-\frac{1}{k}-\frac{1-n^2}{kn^2}$; б) $\frac{1}{a^2b}-\frac{1}{ab^2}-\frac{a+b}{a^2b^2}$.

Спростіть вираз:

107. а) $\frac{x-1}{3x-12}-\frac{x-3}{2x-8}$; б) $\frac{8x}{x^2-16}-\frac{4}{x+4}$.

в) $\frac{3}{a+1}+\frac{a+4}{a^2+a}$; г) $\frac{a-b}{4a+4b}+\frac{a+b}{4b-4a}$;

д) $\frac{b^2}{by-y^2}+\frac{b}{y-b}$; е) $\frac{b}{2a^2-ab}-\frac{4a}{2ab-b^2}$;

є) $x+y-\frac{x^2+y^2}{x+y}$; ж) $a^2-\frac{a^4+1}{a^2-1}+1$.

108. а) $\frac{2a}{3a+3}-\frac{3a}{5a+5}$; б) $\frac{5}{4b-32}+\frac{20}{64-b^2}$;

в) $m-\frac{(m-n)^2}{m+n}+n$; г) $\frac{a-1}{a}-\frac{a+10}{a^2-10a}$;

д) $\frac{5a}{a-9}+\frac{45a}{a^2-18a+81}$; е) $\frac{9}{2x+6}-\frac{9x}{x^2-9}$.

109. а) $\frac{2}{5a-25}-\frac{4}{a^2-25}-\frac{1}{5a+25}$; б) $\frac{2}{x+2}-\frac{x+3}{4-x^2}+\frac{3x+1}{x^2-4x+4}$;

в) $\frac{9}{a^3+27}-\frac{a+3}{a^2-3a+9}$; г) $\frac{1-b}{b^2-b+1}+\frac{b^2}{b^3+1}$.

110. а) $\frac{a}{a-5}-\frac{4}{a+5}-\frac{a^2}{a^2-25}$; б) $\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{2b-a}-\frac{3a}{a^2-4b^2}$.

Доведіть тотожність:

111. а) $\frac{n}{n^2-2mn+m^2}=\frac{m+n}{n^2-mn}+\frac{m^2}{n(n-m)^2}$;

б) $\frac{1}{a+3}-\frac{3}{3-a}-\frac{4a-15}{a^2-9}=\frac{21}{a^2-9}$.

112. а) $\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{x+2}{x^2-1}-\frac{2(2x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$;

б) $\frac{3b-1}{b^2-1}+\frac{5}{2b^2+2b}-\frac{3}{b}=\frac{3b+1}{2b(b^2-1)}$.

Знайдіть значення виразу:

113. а) $\frac{1}{x+2}-\frac{x-1}{(x+2)^2}-\frac{x+1}{x^2+2x}$, якщо $x = 4$;

б) $\frac{2a}{a-b}-\frac{3a}{a+b}-\frac{5b}{a}$, якщо $a = -2$; $b = 3$.

114. $\frac{9x^2+4y^2}{3x-2y}+\frac{12xy}{2y-3x}$, якщо $x = 4$; $y = -5$.

115. Подайте дріб у вигляді суми або різниці дробів:

а) $\frac{a-10}{2a}$; б) $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$; в) $\frac{5x^2-1}{x^4}$; г) $\frac{x^2+8y^2}{2xy}$.

Рівень В

116. Знайдіть такі числа a і b, щоб рівність виконувалася для всіх допустимих значень x:

а) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$; б) $\frac{2x-1}{(x-3)(x+4)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+4}$.

117. Спростіть вираз:

а) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$;

б) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}$;

в) $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{4x^3}{1+x^4}-\frac{8x^7}{1+x^8}$;

г) $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}$;

д) $\frac{b}{b^2-1}+\frac{b^2+b-1}{b^3-b^2+b-1}+\frac{b^2-b-1}{b^3+b^2+b+1}+\frac{2b^3}{1-b^4}$.

118. Доведіть тотожність:

а) $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}=0$;

б) $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$.

Вправи для повторення

119. Обчисліть:

а) $\frac{9}{16}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{5}{27}$;

б) $\frac{4}{9}:\frac{2}{27}-\frac{16}{17}:\frac{8}{51}$;

в) $0,4+8\cdot\left(5-0,8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}$;

г) $\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8,9-2,6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}$.

120. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}2x+3y=12;\\2x-y=4;\end{cases}$

б) $\begin{cases}3x-5y=22;\\7x+2y=24.\end{cases}$

121. Протягом року вкладник зняв зі свого рахунку $\frac{3}{5}$ усіх грошей і не робив нових внесків. У кінці року банк нарахував 12% річних, і на рахунку вкладника стало 896 грн. Скільки грошей було на рахунку вкладника на початку року?

122. Змішали 30%-й розчин сульфатної кислоти з 10%-м й одержали 600 г 15%-го розчину. Скільки грамів кожного розчину при цьому використали?

123*. У двох посудинах, місткість кожної з яких дорівнює 10 л, було разом 10 л концентрованої кислоти. Першу посудину долили дощенту водою й одержаною сумішшю доповнили другу посудину. Після цього у другій посудині стало кислоти на 5 л більше, ніж у першій. Скільки кислоти було в кожній посудині спочатку?

Завдання для самоперевірки № 1

Рівень 1

1. Чому дорівнює значення виразу $\frac{2x-1}{x-5}$, якщо $x=-4$?

а) 1; **б)** –1; **в)** $\frac{7}{9}$; **г)** не існує.

2. Для яких значень змінної не має змісту вираз $\frac{8}{2x-5}+x$?

а) $x=0$; **б)** $x=2$; **в)** $x=2{,}5$; **г)** $x=5$.

3. Скоротіть дріб $\frac{18a^2}{3a^3}$.

а) $\frac{18}{a}$; **б)** $\frac{1}{6a^3}$; **в)** $\frac{6}{a}$; **г)** $\frac{6}{a^3}$.

4. Зведіть дріб $\frac{3}{b}$ до знаменника b^2.

а) $\frac{3}{b^2}$; **б)** $\frac{3b}{b^2}$; **в)** $\frac{3}{b^3}$; **г)** $\frac{3b^2}{b}$.

5. Додайте дроби: $\frac{3y-1}{y^2}+\frac{5-8y}{y^2}$.

а) $\frac{4+11y}{y^2}$; **б)** $\frac{4-5y}{2y^2}$; **в)** $4-5y$; **г)** $\frac{4-5y}{y^2}$.

6. Спростіть вираз $\frac{9a-2b}{2a}-\frac{2a-b}{a}$.

а) $\frac{5a-4b}{2a}$; **б)** $\frac{7a-3b}{2a}$; **в)** 2,5; **г)** $\frac{11a-4b}{2a}$.

Рівень 2

7. Для яких значень змінної не має змісту вираз $\frac{11x}{2x^2-10x}$?

8. Скоротіть дріб:

а) $\frac{27a^3b^2}{36a^4b}$; **б)** $\frac{5a-10b}{3a-6b}$.

9. Знайдіть значення виразу $\frac{2a^2-6a}{a-3}$, якщо $a=7$.

10. Подайте у вигляді дробу:

а) $\frac{5x}{a^3b} - \frac{3y}{ab^2}$; б) $\frac{a}{4x+4y} + \frac{b}{7x+7y}$.

11. Спростіть вираз:

а) $2 + \frac{x+2y}{x-y}$; б) $\frac{8}{m-n} - \frac{16n}{m^2-n^2}$.

Рівень 3

12. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі $\frac{14k}{(k-2)^2-4}$.

13. Скоротіть дріб:

а) $\frac{196x^2y^5}{35x^3y}$; б) $\frac{3a^3-a^2}{ab^2-9a^3b^2}$.

14. Подайте у вигляді дробу:

а) $\frac{a+1}{a^2-a} - \frac{a-1}{a^2+a}$; б) $\frac{mn}{(m+n)^2} + \frac{n}{m-n} + \frac{n}{m+n}$.

15. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{m^2-mn} - \frac{1}{mn-n^2}$, якщо $m = 0,7$; $n = \frac{1}{3}$.

16. Спростіть вираз:

а) $a+b-\frac{2ab}{a+b}$; б) $\frac{b}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a+b}{b^2-ab}$.

Рівень 4

17. Для яких значень змінної не має змісту вираз?

а) $\frac{15}{a^2+2a-15}$; б) $\frac{3}{|x-7|+|x|}$.

18. Скоротіть дріб:

а) $\frac{x^3-10x^2-4x+40}{10-x}$; б) $\frac{x^2-16x-a^2+64}{x+a-8}$.

19. Подайте у вигляді дробу:

а) $\frac{1}{5x+5} - \frac{x-1}{6x^2+12x+6}$; б) $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b} - \frac{a^2+b^2}{a^2+2ab+b^2}$.

20. Спростіть вираз $\frac{1}{a-2} + \frac{1}{a+2} - \frac{a}{a^2-4} + \frac{a^2+4}{8a-2a^3}$.

21. Доведіть тотожність $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8}$.

5. Множення дробів. Піднесення дробу до степеня

1. Множення дробів. Коли множать звичайні дроби, то окремо множать їхні чисельники та знаменники і перший добуток записують чисельником дробу, а другий — знаменником. Наприклад, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot5}{4\cdot7}=\frac{15}{28}$.

Так само множать будь-які дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \qquad (1)$$

Рівність (1) є тотожністю, тобто вона є правильною для будь-яких значень a, b, c і d, де $b \neq 0$ і $d \neq 0$.

З тотожності (1) випливає *правило множення дробів*: ***щоб помножити дріб на дріб, потрібно перемножити окремо їхні чисельники та знаменники і перший добуток записати чисельником дробу, а другий — знаменником.***

Це правило поширюється на випадок множення трьох і більше дробів.

2. Піднесення дробу до степеня. За допомогою правила множення дробів можна обґрунтувати правило піднесення дробу до n-го степеня.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ разів}}=\frac{\overbrace{aa\ldots a}^{n\text{ разів}}}{\underbrace{bb\ldots b}_{n\text{ разів}}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Отже,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}. \qquad (2)$$

З тотожності (2) випливає *правило піднесення дробу до степеня*: ***щоб піднести дріб до степеня, потрібно піднести до цього степеня чисельник та знаменник і перший результат записати чисельником дробу, а другий — знаменником.***

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виконати множення:

а) $\frac{a^4b}{8c^2}\cdot\frac{6c^3}{a^3}$; б) $\frac{ab+b^2}{a^2}\cdot\frac{b}{a^2-b^2}$.

• а) $\dfrac{a^4b}{8c^2}\cdot\dfrac{6c^3}{a^3}=\dfrac{a^4b\cdot 6c^3}{8c^2\cdot a^3}=\dfrac{3abc}{4}$;

б) $\dfrac{ab+b^2}{a^2}\cdot\dfrac{b}{a^2-b^2}=\dfrac{b(a+b)\cdot b}{a^2\cdot(a-b)(a+b)}=\dfrac{b^2}{a^2(a-b)}$. •

Вправа 2. Помножити дріб $\dfrac{x+3}{x-3}$ на многочлен $x-3$.

• $\dfrac{x+3}{x-3}\cdot(x-3)=\dfrac{x+3}{x-3}\cdot\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot 1}=x+3$. •

Вправа 3. Піднести до квадрата дріб $-\dfrac{2a^3b}{5m^2n}$.

• $\left(-\dfrac{2a^3b}{5m^2n}\right)^2=\left(\dfrac{2a^3b}{5m^2n}\right)^2=\dfrac{(2a^3b)^2}{(5m^2n)^2}=\dfrac{2^2\cdot(a^3)^2\cdot b^2}{5^2\cdot(m^2)^2\cdot n^2}=\dfrac{4a^6b^2}{25m^4n^2}$.

Скорочений запис: $\left(-\dfrac{2a^3b}{5m^2n}\right)^2=\dfrac{4a^6b^2}{25m^4n^2}$. •

Усно

124. Виконайте множення:

а) $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{m}{n}$; б) $\dfrac{5}{3a}\cdot\dfrac{2b}{5}$; в) $\dfrac{2}{k}\cdot m$; г) $\dfrac{3x}{4}\cdot\dfrac{1}{x}$.

125. Піднесіть до степеня:

а) $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2$; б) $\left(\dfrac{2a}{3c}\right)^2$; в) $\left(\dfrac{a^2}{c}\right)^4$; г) $\left(-\dfrac{3a^2}{c^3}\right)^3$.

Рівень А

Виконайте множення:

126. а) $\dfrac{4}{3a}\cdot\dfrac{5b}{16}$; б) $\dfrac{3k}{5}\cdot\dfrac{2}{9k}$; в) $\dfrac{8b^2}{11}\cdot\dfrac{1}{b}$; г) $\dfrac{y^4}{7}\cdot\left(-\dfrac{14}{y^2}\right)$;

д) $\dfrac{c}{5d^2}\cdot\dfrac{25d}{c^4}$; е) $\dfrac{12x^3}{5y}\cdot\dfrac{10y}{x^2}$; є) $4x\cdot\dfrac{3a}{2x^3}$; ж) $\left(-\dfrac{5m}{6n}\right)\cdot 3n^2m$.

127. а) $\dfrac{3}{4b^2}\cdot\dfrac{2b^4}{9}$; б) $\dfrac{6k}{7}\cdot\dfrac{21}{k^5}$; в) $\dfrac{6x^3}{a}\cdot\left(-\dfrac{a^2}{9x}\right)$; г) $\dfrac{5a}{4y^2}\cdot 2ay$.

Подайте у вигляді дробу:

128. а) $\frac{25a^2}{4b^3}\cdot\frac{10b^2}{15a^5}$; б) $-\frac{5a}{9b^4}\cdot 3ab^3$; в) $-17x^2y\cdot\left(-\frac{y}{34x^5}\right)$.

129. а) $\frac{2x^2}{9y^2}\cdot\frac{27y^2}{4x^3}$; б) $-\frac{2a}{5b^3}\cdot(-10ab^2)$; в) $12m^2\cdot\left(-\frac{3}{16mn^3}\right)$.

Виконайте множення:

130. а) $\frac{x-y}{a^2}\cdot\frac{a^3b}{(x-y)^2}$; б) $\frac{x^3}{m+n}\cdot\frac{(m+n)^3}{x}$; в) $\frac{3x+3y}{b^3}\cdot\frac{b^2}{x+y}$;

г) $\frac{2x-1}{x^2-7x}\cdot\frac{x-7}{2x-1}$; д) $\frac{m^2-9}{m+2}\cdot\frac{m+2}{m-3}$; е) $\frac{a^2-4a+4}{a+4}\cdot\frac{a+4}{a^2-4}$.

131. а) $\frac{a+b}{y^2}\cdot\frac{y^4}{a+b}$; б) $\frac{x+y}{a^3}\cdot\frac{a^4}{(x+y)^2}$; в) $\frac{ab+ac}{k^2}\cdot\frac{k}{b+c}$;

г) $\frac{b^2-2b+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{b-1}$; д) $\frac{y^2-16}{ab}\cdot\frac{b^2}{y-4}$; е) $\frac{c^2+2c+1}{c^3}\cdot\frac{c^5}{c^2-1}$.

Піднесіть до степеня:

132. а) $\left(\frac{2x^2}{y}\right)^2$; б) $\left(-\frac{2a^3}{3b}\right)^4$; в) $\left(-\frac{n^2k^3}{5m}\right)^3$; г) $\left(\frac{3a^2b^4}{4c^3}\right)^3$.

133. а) $\left(\frac{3m}{n^2}\right)^2$; б) $\left(\frac{2x^2}{y^2z}\right)^3$; в) $\left(-\frac{3a^3b}{5c^2}\right)^3$; г) $\left(-\frac{9x^3y^4}{5a^3}\right)^2$.

Рівень Б

Виконайте множення:

134. а) $\frac{12a^3}{x^3}\cdot\frac{5x^2y}{18a^2}\cdot\frac{b}{a^2}$; б) $\frac{3m^2}{4n}\cdot\left(-\frac{2n}{3m^3}\right)\cdot\frac{4n}{3m^2}$; в) $\frac{5ab}{xy+y^2}\cdot\frac{bx+by}{10a^3}$;

г) $\frac{xy}{a^2+a^3}\cdot\frac{a+a^2}{x^2y^3}$; д) $\frac{18a^2}{2x-x^2}\cdot\frac{4-2x}{27ax}$; е) $\frac{3a+2b}{ab+b^2}\cdot\frac{ab+a^2}{9a+6b}$.

135. а) $\frac{ab^2}{3mn}\cdot\frac{m^3}{4a^3}\cdot\frac{6mn^2}{ab^2}$; б) $\frac{5x+5y}{x+x^2}\cdot\frac{x^2+x^3}{15x+15y}$; в) $\frac{16mn}{2y+y^2}\cdot\frac{6+3y}{20m^3n}$.

Спростіть вираз:

136. а) $\dfrac{3a-1}{a^2-1}\cdot\dfrac{a+1}{9a^2-1}$; б) $\dfrac{b^2-a^2}{9x-9y}\cdot\dfrac{x^2-xy}{a-b}$;

в) $\dfrac{4xy}{(x+y)^2}\cdot\dfrac{x^2+xy}{32x^2}$; г) $\left(\dfrac{5y}{a-y}\right)^2\cdot\dfrac{a^2-y^2}{10y}$;

д) $\dfrac{(2x+1)^2}{7b-7a}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{4x+2}$; е) $\dfrac{4m-4n}{(m+n)^3}\cdot\dfrac{m^2+2mn+n^2}{2m^2-2n^2}$;

є) $\dfrac{m^3-n^3}{2y-2x}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{m^2+mn+n^2}$; ж) $\dfrac{c^2-4a^2}{a^3+b^3}\cdot\dfrac{3a+3b}{2a+c}$.

137. а) $\dfrac{5a-5b}{x^2-2xy+y^2}\cdot\dfrac{x-y}{a-b}$; б) $\dfrac{3a-3b}{5a+5b}\cdot\dfrac{(a+b)^2}{b^2-a^2}$;

в) $\dfrac{(4-x)^2}{xy+y^2}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{12-3x}$; г) $\dfrac{1-y^2}{2a^3+2b^3}\cdot\dfrac{a^2-ab+b^2}{3-3y}$;

д) $\dfrac{15a}{2ab+2b^2}\cdot\left(\dfrac{a+b}{5a}\right)^2$; е) $\dfrac{a^2-1}{x^3-1}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{a^2+2a+1}$.

Знайдіть значення виразу:

138. $\dfrac{x^2+8x+16}{15x^2+3x}\cdot\dfrac{25x^2-1}{16-x^2}$, якщо $x=-1$; $x=5$; $x=\dfrac{2}{3}$.

139. $\dfrac{a^3+27}{0{,}2a^3}\cdot\dfrac{4a^3}{a^2-3a+9}$, якщо $a=-4$; $a=5$; $a=-\dfrac{1}{4}$.

Рівень В

140. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{x^2+xy+xz+yz}{x^2-xy+xz-yz}\cdot\dfrac{x^2-xy-2x+2y}{x^2+xy-2x-2y}$;

б) $\left(\dfrac{a^4-2a^2b+b^2}{a^2-2ab+b^2}\right)^3\cdot\left(\left(\dfrac{a-b}{a^2-b}\right)^3\right)^2$.

141. Знайдіть значення виразу $16^n\cdot\left(\dfrac{16^{n+1}+4\cdot16^n}{64^{n+1}-4\cdot64^n}\right)^2$, якщо $n=74$; $n=1000$.

Вправи для повторення

142. Знайдіть числа, обернені до даних: $\frac{2}{7}$; 4; $1\frac{5}{6}$; 0,2; 1,6.

143. Обчисліть:

а) $\frac{18}{25}:\frac{4}{15}$; **б)** $4\frac{2}{3}:42-\frac{1}{6}$; **в)** $0{,}125:3\frac{1}{8}-1\frac{2}{5}:7$.

144. У вазі лежать 5 персиків, 10 абрикосів і 15 слив. Знайдіть імовірність того, що взятий навмання фрукт є: **а)** персиком; **б)** абрикосом; **в)** сливою; **г)** не персиком.

145. У першому резервуарі було 480 л води, а у другому — 282 л. З першого резервуара беруть щоденно 25 л води, а з другого — 16 л. Через скільки днів у першому резервуарі води буде удвічі більше, ніж у другому?

146*. Від пристані *A* до пристані *B* за течією річки одночасно відпливли катер і пліт. Коли через 1,5 год катер прибув до пристані *B*, плоту залишалося проплисти до цієї пристані ще 27 км. Не затримуючись на пристані *B*, катер вирушив у зворотний шлях. Через який час після відправки від пристані *B* катер зустріне пліт? Яка швидкість катера у стоячій воді?

6. Ділення дробів

Коли ділять звичайні дроби, то перший дріб множать на дріб, обернений до другого. Наприклад, $\frac{2}{7}:\frac{3}{5}=\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{21}$.

У такий же спосіб ділять будь-які дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

Остання рівність є тотожністю, тобто вона правильна для всіх значень a, b, c і d, де $b\neq 0$, $c\neq 0$ і $d\neq 0$. З цієї тотожності випливає *правило ділення дробів*: ***щоб поділити один дріб на другий, потрібно перший дріб помножити на дріб, обернений до другого.***

Наприклад, $\frac{2a}{b^2}:\frac{a}{2b}=\frac{2a}{b^2}\cdot\frac{2b}{a}=\frac{2a\cdot 2b}{b^2\cdot a}=\frac{4}{b}$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виконати ділення:

а) $\frac{15a^2}{14c^3} : \frac{a^3}{7c}$; б) $\frac{ab}{a^2-1} : \frac{3b}{a^2-a}$; в) $\frac{4x^2-y^2}{2x} : (2x-y)$.

• а) $\frac{15a^2}{14c^3} : \frac{a^3}{7c} = \frac{15a^2}{14c^3} \cdot \frac{7c}{a^3} = \frac{15a^2 \cdot 7c}{14c^3 \cdot a^3} = \frac{15}{2c^2a}$.

б) $\frac{ab}{a^2-1} : \frac{3b}{a^2-a} = \frac{ab}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{a(a-1)}{3b} = \frac{ab \cdot a(a-1)}{(a-1)(a+1) \cdot 3b} = \frac{a^2}{3(a+1)}$.

в) $\frac{4x^2-y^2}{2x} : (2x-y) = \frac{(2x-y)(2x+y)}{2x} \cdot \frac{1}{2x-y} = \frac{(2x-y)(2x+y)}{2x(2x-y)} = \frac{2x+y}{2x}$. •

Усно

147. Виконайте ділення:

а) $\frac{x}{y} : \frac{m}{n}$; б) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$; в) $\frac{a}{4} : 2$; г) $3 : \frac{3}{x}$.

Рівень А

Виконайте ділення:

148. а) $\frac{a}{9} : \frac{2a}{3}$; б) $\frac{6ab}{5c} : \frac{2b}{15}$; в) $x^2 : \frac{1}{x}$; г) $\frac{9}{d} : 3$;

д) $19n^3 : \frac{38n}{5p^2}$; е) $\frac{33c^3}{12m} : (11c)$; є) $\frac{c^3}{2a^5} : \frac{c}{4a^3}$; ж) $\frac{12ab^2}{25x^3} : \frac{3b^3}{5x^4}$.

149. а) $\frac{3x}{10y^4} : \frac{1}{5y^3}$; б) $27a^4 : \frac{18a^3}{7b^2}$; в) $\frac{6x^2}{5y^2} : \frac{3x}{y^3}$; г) $\frac{5mn^2}{7k^3} : (10n^2)$.

150. а) $\frac{18a^3}{-5b^4} : \frac{-6a^4}{15b}$; б) $-\frac{9b^3}{20n^2} : \frac{36b^4}{5n^3}$; в) $14xy^2 : \left(-\frac{28x^2y^3}{5z}\right)$.

151. а) $\frac{-8x^2}{9y^2}:\frac{4x^2}{3y^3}$; б) $-\frac{15m^3}{2n^2}:\frac{9m^4}{8n}$; в) $-\frac{6xy^3}{5}:\left(-\frac{3x^2y^4}{10}\right)$.

Спростіть вираз:

152. а) $\frac{6a+6b}{c^4}:\frac{a+b}{c^2}$; б) $\frac{mn-n^2}{a^3}:\frac{m-n}{a}$; в) $\frac{c^2-d^2}{k^2}:\frac{c+d}{k^3}$;

г) $\frac{x^6}{x^2-16}:\frac{x^4}{x-4}$; д) $\frac{b^3}{b^2-6b+9}:\frac{b}{b-3}$; е) $\frac{y^2-4y+4}{y+1}:\frac{y^2-4}{y+1}$.

153. а) $\frac{x^3}{ab+ac}:\frac{x}{b+c}$; б) $\frac{4-a^2}{c^4}:\frac{2-a}{c^3}$; в) $\frac{m^2n+mn}{y^5}:\frac{m+1}{y}$;

г) $\frac{k^2-25}{k}:\frac{k+5}{k^2}$; д) $\frac{x^2-2xy+y^2}{10}:\frac{x-y}{25}$; е) $\frac{a-2}{a^2+2a+1}:\frac{a-2}{a^2-1}$.

Рівень Б

Виконайте ділення:

154. а) $\frac{5x-x^3}{4a^3}:\frac{x^2}{8a^4}$; б) $\frac{1-b^2}{ac^3}:\frac{b+b^2}{a^2c^2}$; в) $\frac{5a^2-a}{(a-b)^2}:\frac{10a-2}{a-b}$;

г) $\frac{3x^2-3}{x^2+1}:(2x+2)$; д) $\frac{18ab^2}{1-x^2}:\frac{24a^2b}{(1-x)^2}$; е) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}:\frac{a+b}{ac-bc}$.

155. а) $\frac{7c^3-c^2}{11ab^3}:\frac{c^2}{22a^3b}$; б) $\frac{4-x^2}{x+x^2}:\frac{2x-x^2}{x+1}$; в) $\frac{(m-n)^2}{m^2+m}:\frac{6m-6n}{m^2-1}$.

Спростіть вираз:

156. а) $\frac{3a+6b}{a^2-b^2}:\frac{7a+14b}{a^2-2ab+b^2}$; б) $\frac{4c^2+4c+1}{3x-3y}:\frac{1-4c^2}{x^2-y^2}$;

в) $\frac{mn^2}{m^3+n^3}:\frac{4m^2n}{m^2-mn+n^2}$; г) $\left(\frac{3a}{a-b}\right)^2:\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$;

д) $\frac{2x-2y}{(x+y)^3}:\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$; е) $\frac{a^3-27}{a-2a^2}:\frac{a^2+3a+9}{4a^2-1}$.

157. а) $\frac{2c+4d}{1+b+b^2}:\frac{ac+2ad}{1-b^3}$; б) $\frac{x+2y}{3x-3y}:\frac{2(x+2y)^2}{x^2-y^2}$;

в) $\frac{(a-b)^2}{ab+b^2}:\frac{a^2-b^2}{ab^2+b^3}$; г) $\frac{ab-ac}{4-2a+a^2}:\frac{c^2-b^2}{a^3+8}$.

Доведіть тотожність:

158. а) $\frac{a^2-b^2}{4ab}:\frac{5a+5b}{8ab^2}=\frac{2b(a-b)}{5}$;

б) $\left(1-\frac{m}{n}:\left(1+\frac{m}{n}\right)+\frac{m}{n}:\left(1-\frac{m}{n}\right)\right):\frac{m-n}{m+n}=-\frac{m^2+n^2}{(m-n)^2}$.

159. а) $(3x-12y):\frac{x^2-16y^2}{2x}=\frac{6x}{x+4y}$; б) $a:\frac{a-1}{2}-\frac{a^3-1}{2a^2+2a}:\frac{a^2+1-2a}{4a}=\frac{2}{1-a^2}$.

Рівень В

160. Спростіть вираз:

а) $\frac{x^2-0,25}{x^6-x^4-x^2+1}:\left(\frac{x-0,5}{x^2-1}\right)^2$; б) $\frac{a^2+6a+5}{a^2-ab+a-b}:\frac{a^2+4a-5}{a^2-ab-a+b}$.

161. Доведіть, що вираз $\frac{x+3y}{x^2+xy-2y^2}:\frac{x^2+2xy-3y^2}{x+2y}$ набуває лише додатних значень.

162. На причалі *А* стоять піднімальні крани № 1 і № 2, а на причалі *Б* — піднімальні крани № 3 і № 4. За допомогою крана № 1 можна розвантажити баржу на 3 год, 2 год і 1 год швидше, ніж за допомогою відповідно кранів № 2, № 3 і № 4. На якому причалі за допомогою обох його кранів можна швидше розвантажити баржу?

Вправи для повторення

163. Розв'яжіть рівняння:

а) $3(x+4)=4(x+3)$; б) $2x(x-1)+x(x-2)=3x^2-2$.

164. Обчисліть:

а) $0{,}32\cdot15{,}48-2{,}32\cdot15{,}48$; **б)** $12\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)$.

165. Функція задана формулою $y = 5x - 8$.

а) Знайдіть значення функції, якщо $x = -1$; $x = 3$.

б) Знайдіть значення аргументу, якщо $y = -3$; $y = 6$.

166. До магазину завезли 5 ящиків яблук і 6 ящиків груш, загальна маса яких дорівнює 120 кг. Ящик груш на 2 кг легший від ящика яблук. Знайдіть масу ящика яблук і масу ящика груш.

167. Є сталь двох сортів з умістом нікелю 10% і 40%. Скільки сталі кожного сорту потрібно взяти, щоб після переплавки одержати 12 т сталі, яка містила б 30% нікелю?

7. Тотожні перетворення раціональних виразів

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Спростити вираз: $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$.

• Спочатку подамо вирази у кожній дужці у вигляді дробів, а потім знайдемо їх частку:

1) $\frac{a}{a+1}+1=\frac{a+a+1}{a+1}=\frac{2a+1}{a+1}$;

2) $1-\frac{3a^2}{1-a^2}=\frac{1-a^2-3a^2}{1-a^2}=\frac{1-4a^2}{1-a^2}$;

3) $\frac{2a+1}{a+1}:\frac{1-4a^2}{1-a^2}=\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{1-a^2}{1-4a^2}=\frac{(2a+1)\cdot(1-a)(1+a)}{(a+1)\cdot(1-2a)(1+2a)}=\frac{1-a}{1-2a}$.

Ці записи можна проводити в рядок:

$$\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)=\frac{a+a+1}{a+1}:\frac{1-a^2-3a^2}{1-a^2}=\frac{2a+1}{a+1}:\frac{1-4a^2}{1-a^2}=$$

$$=\frac{2a+1}{a+1}\cdot\frac{1-a^2}{1-4a^2}=\frac{(2a+1)\cdot(1-a)(1+a)}{(a+1)\cdot(1-2a)(1+2a)}=\frac{1-a}{1-2a}.$$ •

Раціональний вираз прикладу 1 ми звели до раціонального дробу $\frac{1-a}{1-2a}$. Взагалі, будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді раціонального дробу.

Приклад 2. Довести тотожність: $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\dfrac{b+a}{b-a}$.

• Спростимо ліву частину рівності:

$$\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b+a}{ab}:\frac{b-a}{ab}=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{ab}{b-a}=\frac{b+a}{b-a}.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву частину рівності звели до правої частини. Тому ця рівність є тотожністю. •

Рівень А

Спростіть вираз:

168. а) $\left(1+\dfrac{1}{a}\right):\dfrac{a^2-1}{3}$; б) $\left(\dfrac{1}{a+5}-\dfrac{1}{a-5}\right):\dfrac{5}{a+5}$;

в) $\dfrac{a^2-49}{a^2}\cdot\dfrac{1}{a+7}-\dfrac{1}{a}$; г) $\left(\dfrac{2}{b-2}-\dfrac{1}{2b-1}\right):\dfrac{6b}{b-2}$;

д) $\dfrac{a^4}{a^2-8a+16}:\dfrac{a}{2a-8}-\dfrac{a^3}{a-4}$; е) $\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x}{x+y}\right)\cdot\dfrac{x+y}{xy}$.

169. а) $\left(1-\dfrac{1}{b}\right)\cdot\dfrac{4}{b^2-2b+1}$; б) $\dfrac{a-5}{a}-\dfrac{a^2-100}{a-5}\cdot\dfrac{1}{a-10}$;

в) $\dfrac{x^2+2x}{3}\cdot\dfrac{9}{x+2}-\dfrac{3x^2}{x-4}$; г) $\left(\dfrac{4}{c+2}-\dfrac{2}{c+1}\right):\dfrac{8c}{c+2}$.

Доведіть тотожність:

170. а) $\dfrac{a}{a^2+18a+81}:\dfrac{a}{9a+81}+\dfrac{a}{a+9}=1$;

б) $\dfrac{a^6}{a^2-2a+1}:\dfrac{a^4}{3a-3}-\dfrac{2a^2+1}{a-1}=a+1$.

171. а) $\dfrac{4x}{x+y}:\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)=2x-2y;$

б) $\dfrac{5a+10}{a^2}\cdot\dfrac{a^2+3a}{a+2}-\dfrac{15}{a}=5.$

172. Спростіть вираз $\dfrac{x^2+x}{2}\cdot\dfrac{12}{x+1}-\dfrac{6x^2}{x+3}$ і знайдіть його значення, якщо $x=6$.

173. Спростіть вираз $\left(\dfrac{x}{x-9}-\dfrac{x}{x+9}\right):\dfrac{9x}{x+9}$ і знайдіть його значення, якщо $x=4$.

Рівень Б

Спростіть вираз:

174. а) $\dfrac{m}{n-m}-\dfrac{m^3-mn^2}{m^2+n^2}\cdot\left(\dfrac{m}{(m-n)^2}-\dfrac{n}{m^2-n^2}\right);$

б) $\dfrac{a}{3-a}+\dfrac{a^2+3a}{2a+3}\cdot\left(\dfrac{a+3}{a^2-3a}-\dfrac{a}{a^2-9}\right);$

в) $\left(\dfrac{2a}{2a+b}-\dfrac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\dfrac{2a}{4a^2-b^2}+\dfrac{1}{b-2a}\right);$

г) $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{a+b}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right):\dfrac{(a+b)^2}{ab};$

д) $\left(\dfrac{2x^2+x}{x^3-1}-\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+5}{x+1}\right).$

175. а) $\dfrac{x^2}{x^2+y^2}-\dfrac{xy-y^2}{x^2-y^2}:\left(1-\dfrac{x}{x+y}\right);$

б) $\left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{x+3}{x^2-4}+\dfrac{3x+1}{x^2-4x+4}\right):\dfrac{3x^2+2}{x^2-4};$

в) $\left(\dfrac{x-2}{x^2-2x+4}-\dfrac{6x-13}{x^3+8}\right):\dfrac{15-5x}{2x^3+16};$

г) $\left(\dfrac{49}{a^3+27}-\dfrac{a+3}{a^2-3a+9}\right)\cdot\dfrac{a^4+27a}{16-a^2}+\dfrac{40-a^2}{a+4}$.

176. а) $\dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{1+\dfrac{1}{ab}}$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{m+n}+\dfrac{1}{m-n}}{\dfrac{1}{m+n}-\dfrac{1}{m-n}}$.

177. а) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{c-1}-\dfrac{1}{c+1}}{\dfrac{1}{c-1}+\dfrac{1}{c+1}}$.

Доведіть тотожність:

178. а) $\left(\dfrac{m^2-n^2}{mn}-\dfrac{1}{m+n}\left(\dfrac{m^2}{n}-\dfrac{n^2}{m}\right)\right):\dfrac{m-n}{m}=\dfrac{m}{m+n}$;

б) $\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-3a}\cdot\left(\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right)=\dfrac{a-1}{a^2}$;

в) $\left(\dfrac{b}{a^2+ab}-\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{a}{b^2+ab}\right):\left(\dfrac{b}{a}-2+\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{1}{a+b}$.

179. а) $\left(\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{3}{a^3+1}+\dfrac{3}{a^2-a+1}\right)\cdot\left(a-\dfrac{2a-1}{a+1}\right)=1$;

б) $\left(\dfrac{a}{a+n}-\dfrac{a}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\dfrac{a}{a-n}-\dfrac{a}{a^2-n^2}\right)=\dfrac{a-n}{a+n}$.

Рівень В

180. Спростіть вираз:

а) $\left(\dfrac{1}{a^2-9}:\dfrac{b-a}{3a^2+9a}-\dfrac{3a}{9-3b-3a+ab}\right):\dfrac{3a}{b^3-27}$;

б) $\left(1+2\cdot\dfrac{10y^2-3xy}{x^2-3xy}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x-5y}+\dfrac{2y}{(x-5y)^2}\right)$;

в) $\frac{1}{m^2+2mn+2n^2}-\frac{1}{m^2-2mn+2n^2}-\frac{m}{n(m^2+2n^2)}+\frac{m}{n(m^2-2n^2)}$.

181. Доведіть тотожність:

а) $\left(\frac{x-3}{x+1}+\frac{4}{x^2+2x+1}\right)\cdot\left(\frac{x(x+3)}{1-3x+3x^2-x^3}+\frac{1}{x^2-2x+1}\right)=\frac{1}{1-x}$;

б) $\frac{a+2}{12-4a-3a^2+a^3}-\frac{1-a}{6-5a+a^2}=\frac{a^2-3a}{a-2}\cdot\left(1-\frac{a-2}{a-3}\right)^2$.

182. Подайте у вигляді раціонального дробу: $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-x}}}$.

Вправи для повторення

183. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x-1)(x^2+x+1)-x^3-x^2=2x$; б) $(x+2)^2-4=0$;

в) $\frac{x}{2}-\frac{x+4}{3}=1$; г) $\frac{y-3}{5}+\frac{y+3}{4}=6$.

184. Для яких значень a рівняння $(a^2-3a)x=2a-6$ не має коренів? має один корінь?

185. З пункту A до пункту B, відстань між якими дорівнює 360 км, вийшов товарний поїзд і рухався зі швидкістю 50 км/год. Через 40 хв назустріч йому з пункту B вийшов пасажирський поїзд і рухався зі швидкістю 90 км/год. На якій відстані від пункту A поїзди зустрінуться?

186. У першому мішку було борошна втричі більше, ніж у другому. Після того як з першого мішка взяли 15 кг борошна, а з другого — 5 кг, у першому мішку стало на 20 кг борошна більше, ніж у другому. Скільки борошна було в кожному мішку спочатку?

187*. По круговій доріжці велотреку їдуть два велосипедисти зі сталими швидкостями. Коли вони їдуть у протилежних напрямках, то зустрічаються через кожні 10 с; коли ж їдуть в одному напрямку, то один наздоганяє іншого через кожні 100 с. Яка швидкість кожного велосипедиста, якщо довжина доріжки дорівнює 200 м?

8. Раціональні рівняння

1. Цілі та дробові раціональні рівняння. Розглянемо рівняння:

$$2(x-7)=3x-9; \qquad \frac{6x}{x-9}=4; \qquad \frac{5}{x-1}=\frac{3}{x-4}.$$

Ліва і права частини кожного з цих рівнянь є раціональними виразами. Такі рівняння називають *раціональними рівняннями.*

Раціональні рівняння поділяють на цілі й дробові. Якщо обидві частини раціонального рівняння є цілими виразами, то таке рівняння називають *цілим раціональним рівнянням*. Раціональне рівняння, у якого хоча б одна частина є дробовим виразом, називають *дробовим раціональним рівнянням*.

$2(x-7)=3x-9$ — ціле раціональне рівняння;

$\frac{3(y-2)}{5}=\frac{2(y+1)}{3}$ — ціле раціональне рівняння;

$\frac{6x}{x-9}=4$ — дробове раціональне рівняння;

$\frac{5}{x-1}=\frac{3}{x-4}$ — дробове раціональне рівняння.

У дробовому раціональному рівнянні $\frac{5}{x-1}=\frac{3}{x-4}$ ліва і права частини мають зміст, якщо $x \neq 1$ і $x \neq 4$. Тому числа 1 і 4 не можуть бути коренями цього рівняння.

У цілому раціональному рівнянні $2(x-7)=3x-9$ обидві частини мають зміст для будь-якого значення x.

Значення змінної, для яких мають зміст вирази, що стоять у лівій і правій частинах рівняння, утворюють *область допустимих значень* (скорочено ОДЗ) рівняння. Так, ОДЗ рівняння $\frac{5}{x-1}=\frac{3}{x-4}$ утворюють усі значення x, крім $x=1$ та $x=4$; ОДЗ рівняння $2(x-7)=3x-9$ утворюють усі значення x.

Взагалі, ОДЗ будь-якого цілого раціонального рівняння утворюють усі значення змінної, а ОДЗ будь-якого дробового раціонального рівняння — усі значення змінної, крім тих, для яких знаменники дробів, що входять до рівняння, дорівнюють нулю.

2. Рівносильність рівнянь. Розв'язування будь-якого рівняння зводиться до виконання певних перетворень, у результаті яких дане рівняння замінюють простішим. Зрозуміло, що потрібно виконувати такі перетворення, які не приводили б до втрати коренів рівняння.

Коли ми розв'язуємо рівняння $3x - x = 8$, то спочатку зводимо подібні доданки у його лівій частині й одержуємо рівняння $2x = 8$. Обидва рівняння — $3x - x = 8$ і $2x = 8$ — мають одну й ту ж ОДЗ, яку утворюють усі значення x, та один і той же корінь — число 4. Виконане тотожне перетворення лівої частини рівняння привело до рівняння з тим же коренем.

Два рівняння, які мають одні й ті ж корені, називають ***рівносильними****.* *Два рівняння, які не мають коренів, теж вважають рівносильними.*

Отже,

рівняння $3x - x = 8$ і $2x = 8$ рівносильні;

рівняння $x + 6 = x$ і $0x = 1$ рівносильні, бо кожне з них не має коренів.

Виконаємо перетворення лівої частини рівняння

$$\frac{x(x-1)^2}{x-1} = 0, \qquad (1)$$

а саме, — скоротимо дріб на $x - 1$. Одержимо рівняння

$$x(x-1) = 0. \qquad (2)$$

Зазначимо такі відмінності рівнянь (1) і (2):

1) вони мають різні ОДЗ;

2) значення $x = 1$ є коренем рівняння (2), але не є коренем рівняння (1), бо для $x = 1$ ліва частина рівняння (1) не має змісту.

Виконане перетворення лівої частини рівняння (1) привело до рівняння (2), яке має не ті самі корені, що рівняння (1).

Отже, рівняння (1) і (2) не рівносильні.

У 7 класі ми розглядали лише такі перетворення рівнянь, виконуючи які, одержують рівняння з тими ж коренями. Отже, ці перетворення переводять рівняння у рівносильне йому рівняння. З ними пов'язані такі *основні властивості рівнянь:*

Властивість 1. *Якщо в деякій частині рівняння виконати тотожне перетворення, яке не змінює ОДЗ, то одержимо рівняння, рівносильне даному.*

Властивість 2. *Якщо деякий доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному.*

Властивість 3. *Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те ж, відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.*

Якщо обидві частини рівняння помножити на *вираз зі змінною*, то можна одержати рівняння, не рівносильне даному. Зупинимося на цьому детальніше.

3. Множення обох частин рівняння на вираз зі змінною. Розглянемо рівняння:

$$\frac{x^2+x}{x-2}=\frac{3x}{x-2}. \qquad (3)$$

Дроби в обох частинах цього рівняння мають однакові знаменники. Замінимо рівняння (3) цілим раціональним рівнянням, помноживши обидві його частини на спільний знаменник $x-2$:

$$(x-2)\cdot\frac{x^2+x}{x-2}=(x-2)\cdot\frac{3x}{x-2};$$

$$x^2+x=3x. \qquad (4)$$

Чи рівносильні рівняння (3) і (4)? Щоб це встановити, розв'яжемо обидва рівняння.

Оскільки дроби в обох частинах рівняння (3) мають однакові знаменники, то коренями рівняння можуть бути лише такі значення x, для яких чисельники дробів дорівнюють один одному, а знаменники відмінні від нуля. Прирівняємо чисельники:

$$x^2+x=3x;\quad x^2-2x=0;\quad x(x-2)=0;\quad x=0 \text{ або } x=2.$$

Якщо $x=0$, то обидва чисельники дорівнюють 0, а знаменники відмінні від 0. Тому $x=0$ — корінь рівняння (3).

Якщо $x=2$, то знаменники дорівнюють 0 (значення $x=2$ не входить в ОДЗ рівняння). Тому $x=2$ не є коренем рівняння (3).

Отже, рівняння (3) має один корінь $x=0$. Рівняння ж (4) має два корені $x=0$ та $x=2$. Тому ці рівняння не рівносильні.

Зазначимо такі особливості рівнянь (3) і (4):

1) корінь $x=0$ рівняння (3) є також і коренем рівняння (4);

2) корінь $x=2$ рівняння (4) є значенням змінної, для якого значення знаменника $x-2$ дорівнює 0.

Перейшовши від рівняння (3) до рівняння (4), ми не втратили корінь $x=0$ рівняння (3), проте одержали *сторонній* щодо цього рівняння корінь $x=2$.

Правильним є таке твердження:

Якщо обидві частини деякого рівняння помножити на цілий вираз зі змінною, то можна одержати рівняння, не рівносильне даному. Одержане рівняння має такі властивості: 1) його коренями є всі корені даного рівняння; 2) воно може мати сторонні корені щодо даного рівняння.

Сторонніми коренями можуть бути значення змінної, для яких цілий вираз, на який ми множимо обидві частини рівняння, набуває значення 0. Ці сторонні корені можна відкинути, зробивши перевірку.

Розглянемо приклад.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{x^2-2}{x} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4x}$.

• Спільним знаменником усіх дробів, які входять у рівняння, є $4x$. Помножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник:

$$\left.\frac{x^2-2}{x} = \frac{3x}{4} + \frac{1}{4x}\ \right| \cdot 4x; \qquad 4x^2 - 8 = 3x^2 + 1.$$

Розв'яжемо одержане ціле раціональне рівняння:

$4x^2 - 3x^2 - 8 - 1 = 0$; $x^2 - 9 = 0$; $(x-3)(x+3) = 0$; $x = 3$ або $x = -3$.

Якщо $x = 3$ або $x = -3$, то спільний знаменник $4x$ відмінний від нуля. Тому числа 3 і -3 є коренями рівняння.

Відповідь. -3; 3. •

Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна:

1) помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник дробів, які входять до рівняння, і замінити його цілим раціональним рівнянням;
2) розв'язати одержане ціле раціональне рівняння;
3) виключити з його коренів ті, для яких спільний знаменник дробів дорівнює нулю.

4. Розв'язування дробових раціональних рівнянь на основі умови рівності дробу нулю. *Дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.*

$$\frac{a}{b} = 0 \text{ тоді й тільки тоді, коли } a = 0 \text{ і } b \neq 0.$$

Використовуючи це твердження, розв'яжемо рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{x^2-2x}{x-2} = 0$.

• Використаємо умову, за якої дріб дорівнює нулю. Прирівняємо чисельник дробу до нуля:

$$x^2 - 2x = 0; \quad x(x-2) = 0; \quad x = 0 \text{ або } x = 2.$$

Перевіримо, чи для знайдених значень x знаменник $x - 2$ відмінний від нуля.

Якщо $x = 0$, то $x - 2 = 0 - 2 = -2 \neq 0$. Тому $x = 0$ — корінь рівняння.

Якщо $x = 2$, то $x - 2 = 2 - 2 = 0$. Тому $x = 2$ — не є коренем рівняння.

Відповідь. 0. •

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{6x}{x-9}=4$.

• Зведемо дане рівняння до рівняння, ліва частина якого є дробом, а права — нулем:

$$\frac{6x}{x-9}=4;\quad \frac{6x}{x-9}-4=0;\quad \frac{6x-4(x-9)}{x-9}=0;\quad \frac{2x+36}{x-9}=0.$$

Прирівняємо чисельник дробу $\frac{2x+36}{x-9}$ до нуля:

$$2x+36=0;\quad 2x=-36;\quad x=-18.$$

Якщо $x=-18$, то знаменник $x-9$ дробу відмінний від нуля. Справді:

$$x-9=-18-9=-27\neq 0.$$

Отже, $x=-18$ — корінь даного рівняння.

Відповідь. -18. •

Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння на основі умови рівності дробу нулю, потрібно:

1) звести його до вигляду $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — цілі раціональні вирази;
2) прирівняти до нуля чисельник дробу й розв'язати одержане ціле раціональне рівняння $f(x)=0$;
3) виключити з його коренів ті, для яких знаменник дробу дорівнює нулю.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\frac{2x-9}{x+3}+4=\frac{x}{x+3}$.

• $\frac{2x-9}{x+3}+4-\frac{x}{x+3}=0;\quad \frac{2x-9+4x+12-x}{x+3}=0;\quad \frac{5x+3}{x+3}=0.$

Використаємо умову, за якої дріб дорівнює нулю, і запишемо її у вигляді системи:

$$\begin{cases}5x+3=0;\\ x+3\neq 0,\end{cases}\quad \text{звідки}\quad \begin{cases}x=-0,6;\\ x\neq -3.\end{cases}$$

Отже, $x=-0,6$ — корінь даного рівняння.

Відповідь. $-0,6$. •

Узагальнивши розв'язання рівняння прикладу 2, прийдемо до твердження:

Рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ *рівносильне системі* $\begin{cases}f(x)=0;\\ g(x)\neq 0.\end{cases}$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати рівняння $\frac{y+1}{y-3}-\frac{1}{y+3}=\frac{6}{y^2-9}$.

• Розкладемо знаменник правої частини рівняння на множники:

$$\frac{y+1}{y-3}-\frac{1}{y+3}=\frac{6}{(y-3)(y+3)}.$$

Помноживши обидві частини одержаного рівняння на спільний знаменник $(y-3)(y+3)$, матимемо:

$(y+3)(y+1)-(y-3)=6;\quad y^2+y+3y+3-y+3-6=0;$

$y^2+3y=0;\quad y(y+3)=0;\quad y=0$ або $y=-3$.

Якщо $y=0$, то $(y-3)(y+3)=3\cdot(-3)\neq 0$. Тому $y=0$ — корінь рівняння.

Якщо $y=-3$, то $(y-3)(y+3)=(-3-3)(-3+3)=(-6)\cdot 0=0$. Тому $y=-3$ — не є коренем рівняння.

Відповідь. 0.•

Вправа 2. З міста A до міста B, відстань між якими дорівнює 21 км, виїхав велосипедист, а через 20 хв услід за ним — мотоцикліст, швидкість якого утричі більша від швидкості велосипедиста. Знайти швидкість велосипедиста, якщо відомо, що мотоцикліст приїхав у місто B на 40 хв раніше, ніж велосипедист.

• Нехай швидкість велосипедиста дорівнює x км/год, тоді швидкість мотоцикліста — $3x$ км/год. Шлях завдовжки 21 км велосипедист подолав за $\frac{21}{x}$ год, а мотоцикліст — за $\frac{21}{3x}=\frac{7}{x}$ (год). Оскільки велосипедист був у дорозі на 20 хв + 40 хв = 60 хв = 1 год довше, ніж мотоцикліст, то маємо рівняння

$$\frac{21}{x}-\frac{7}{x}=1.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$\frac{21}{x}-\frac{7}{x}-1=0;\quad \frac{21-7-x}{x}=0;\quad \frac{14-x}{x}=0;\quad \begin{cases}14-x=0;\\ x\neq 0;\end{cases}\quad x=14.$$

Відповідь. 14 км/год.•

Усно

188. Назвіть цілі раціональні рівняння; дробові раціональні рівняння:

а) $\dfrac{5}{x-7}=1$; б) $3(x-11)=0$; в) $\dfrac{1}{3}-x=3$; г) $\dfrac{2}{x^2}=0$.

189. Вкажіть ОДЗ рівняння:

а) $\dfrac{x+2}{x-5}=0$; б) $\dfrac{x-4}{4x}=1$; в) $\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{4}{x+1}$; г) $\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{3}{x+1}$.

190. Чи рівносильні рівняння?

а) $\dfrac{4x}{x-1}=8$ і $\dfrac{x}{x-1}=2$; б) $\dfrac{1}{2x}=\dfrac{3}{x+1}$ і $\dfrac{1}{2x}-\dfrac{3}{x+1}=0$;

в) $\dfrac{x^2(x+3)}{x}=0$ і $x(x+3)=0$; г) $\dfrac{2x}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}$ і $2x=4$.

Рівень А

Розв'яжіть рівняння:

191. а) $\dfrac{x+8}{x-1}=0$; б) $\dfrac{x-1}{x+8}=0$; в) $\dfrac{2x-8}{x^2-16}=0$.

192. а) $\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{x-6}{x-3}=0$; б) $\dfrac{3x+1}{x+1}=\dfrac{2x-2}{x+1}$; в) $\dfrac{x-5}{x-6}=\dfrac{2x}{x-6}$.

193. а) $\dfrac{x+2}{x}+1=0$; б) $\dfrac{x}{x+1}=2$; в) $\dfrac{x-10}{x}=3$.

194. а) $\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{4x}=1$; б) $\dfrac{1}{5x}+\dfrac{3}{4x}=2$; в) $\dfrac{4}{3x}-\dfrac{1}{2x}=1$.

195. а) $\dfrac{2x+4}{4+x}=0$; б) $\dfrac{2x+4}{4-x^2}=0$; в) $\dfrac{4x}{x-2}=\dfrac{12}{x-2}$;

г) $\dfrac{3x-4}{2x}=\dfrac{x-6}{2x}$; д) $\dfrac{x-1}{x+5}+2=0$; е) $\dfrac{5x-10}{x}=4$;

є) $\dfrac{x-5}{2x-1}=-4$; ж) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2x}=5$; з) $\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{3x}=1$.

196. а) $\frac{2x^2-4x}{x-2}=0$; б) $\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-2}=0$; в) $\frac{x+3}{x-1}=\frac{2x}{2x+3}$.

197. а) $\frac{x^2-3x}{2x+1}=0$; б) $\frac{x^2}{x+2}+x=0$; в) $\frac{x-5}{x+2}=\frac{3x}{3x-1}$.

198. Яке число потрібно додати до знаменника дробу $\frac{19}{41}$, щоб одержати дріб, який дорівнює $\frac{1}{3}$?

199. Яке число потрібно відняти від знаменника дробу $\frac{3}{47}$, щоб одержати дріб, який дорівнює $\frac{1}{4}$?

200. Яке одне й те ж число потрібно додати до чисельника дробу $\frac{1}{2}$ й помножити на нього знаменник цього дробу, щоб одержати дріб, який дорівнює $\frac{2}{3}$?

201. На яке одне й те ж число потрібно помножити чисельник дробу $\frac{1}{5}$ й додати його до знаменника цього дробу, щоб одержати дріб, який дорівнює $\frac{1}{2}$?

Рівень Б

202. Чи рівносильні рівняння $\frac{x(2x-3)}{x}=0$ та $x(2x-3)=0$? Відповідь обґрунтуйте.

203. Доведіть, що рівняння $\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{x-1}$ та $x+2=3$ не рівносильні.

Розв'яжіть рівняння:

204. а) $\frac{x+1}{2x-2}+\frac{x+4}{2x+3}=1$; б) $\frac{5x+4}{x-2}-\frac{4x+1}{x+3}=1$;

в) $\frac{x+5}{x-2}-\frac{x+3}{x+2}=\frac{2}{x^2-4}$; г) $\frac{3y-1}{2y+5}+\frac{4-3y}{5-2y}=\frac{15}{25-4y^2}$;

д) $\frac{7}{(x-2)^2}-\frac{3}{(x+2)^2}=\frac{4}{x^2-4}$; е) $\frac{2x}{(2x+3)^2}-\frac{1}{2x-3}+\frac{4}{4x^2-9}=0$.

205. а) $\frac{x+6}{x-1}+\frac{x-6}{x+1}=2;$ б) $\frac{6x-5}{3x+1}-\frac{x-2}{x-3}=1;$

в) $\frac{2x-9}{1-x}+\frac{2x+1}{x+1}=\frac{1}{1-x^2};$ г) $\frac{2z+3}{2z-3}-\frac{2z-3}{2z+3}=\frac{3}{4z^2-9}.$

206. Відстань між містами A та B дорівнює 720 км. З міста A до міста B виїхав автомобіль й одночасно з ним вилетів літак. Автомобіль прибув до міста B на 10 год пізніше, ніж літак. Знайдіть швидкості літака та автомобіля, якщо швидкість літака в 6 разів більша, ніж швидкість автомобіля.

207. До басейну підведені дві труби. Через першу трубу басейн можна наповнити водою вдвічі швидше, ніж через другу. Якщо відкрити обидві труби одночасно, то басейн можна наповнити за 4 год. За який час можна наповнити басейн через кожну трубу окремо?

208. Батько й син скопали грядку за 15 хв. За який час може скопати грядку батько, працюючи сам, якщо він може це зробити удвічі швидше, ніж син?

Рівень В

209. Знайдіть значення a, для яких рівняння $\frac{(x-1)(x-2)}{x-a}=0$ рівносильне рівнянню $(x-1)(x-2)=0$.

210. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x^2-25}{|x-3|-2|x-6|}=0;$ б) $\frac{|x-3|-4}{x^3-2x^2-2x+1}=0;$

в) $\frac{x^2+3x+1}{x^2+3x+2}=\frac{x^2+3x+2}{x^2+3x+4};$ г) $\frac{2}{x^2-2x-1}+\frac{2}{x^2-2x+2}=-1.$

Вказівки. **в)** Позначте вираз x^2+3x через y, запишіть рівняння з невідомим y та розв'яжіть його. **г)** Позначте вираз x^2-2x через y.

211. Розв'яжіть рівняння з параметром a:

а) $(a-2)x=a^2-2a;$ б) $a^2x-a=x+1;$

в) $\frac{x-2a}{x-4}=0;$ г) $\frac{x-a+1}{(x-3)(2x+3)}=0.$

Розв'язання. **в)** Прирівняємо чисельник дробу до нуля: $x - 2a = 0$; $x = 2a$. Якщо $x = 2a$, то знаменник дробу дорівнює: $x - 4 = 2a - 4$. Одержаний знаменник дорівнює нулю, якщо $a = 2$. Отже, якщо $a = 2$, то рівняння коренів не має. Якщо ж $a \neq 2$, то знаменник відмінний від нуля й число $x = 2a$ є коренем рівняння.

Відповідь. Якщо $a \neq 2$, то $x = 2a$; якщо $a = 2$, то рівняння коренів не має.

212. Для яких значень a рівняння $\dfrac{x+2a-1}{(x-1)(x+3)} = 0$ не має коренів?

213. Для яких значень a рівняння $\dfrac{(x-a)(x-2a-7)}{x-5} = 0$ має один корінь?

Вправи для повторення

Спростіть вираз:

214. **а)** $(a^2b^4)^3 \cdot (2a^2b)^2$; **б)** $3x^{17}y^{14} \cdot (4xy^3)^3$;

в) $y^2(4x + 3y^2 - 5) - (4xy^2 + 3y^4)$;

г) $(5a^2 - 3ab + b^3) \cdot b^3 - (b^4 - 3ab^2 - 5a^2) \cdot b^2$.

215. **а)** $\dfrac{4xy^2}{x^2 - y^2} \cdot \dfrac{x+y}{2xy}$; **б)** $\left(1 - \dfrac{2a}{a^2+1}\right) : \dfrac{a-1}{a^2+1} + 1$.

216. Чотири хлопці зібралися грати у футбол. Скількома способами їх можна поділити на дві команди, по 2 хлопці у кожній?

217. Чи можна покласти 120 яблук у три кошики так, щоб у першому кошику було на 5 яблук більше, ніж у другому, і на 8 яблук менше, ніж у третьому?

218. Басейн наповнили водою за 6 год, відкривши дві труби. Якщо відкрити лише першу трубу, то басейн можна наповнити за 15 год. За який час можна наповнити басейн, якщо відкрити лише другу трубу?

Обчисліть:

219. **а)** $2{,}5^7 : 2{,}5^5 - 3^3 \cdot 0{,}3$; **б)** $16^3 : (4^{12} : 8^4)$;

в) $(0{,}5^{18} : 0{,}5^6) \cdot (2^{16} : 2^4)$; **г)** $(-1{,}7)^{30} : (-1{,}7)^{25} + 1{,}7^5$.

220*. **а)** $7^{64} - (7^{32} + 1)(7^{16} + 1)(7^8 + 1)(7^4 + 1)(7^2 + 1)(7 + 1)(7 - 1)$;

б) $2^{128} - (2^{64} + 1)(2^{32} + 1)(2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)$.

Завдання для самоперевірки № 2

Рівень 1

1. Виконайте множення: $\frac{4m^2}{n-2} \cdot \frac{n-2}{m^3}$.

а) $\frac{4m^5}{(n-2)^2}$; б) $\frac{4}{m^2}$; в) $\frac{4}{m}$; г) $4m$.

2. Виконайте ділення: $\frac{a+b}{a} : \frac{a^2-b^2}{a^4}$.

а) $\frac{(a+b)(a^2-b^2)}{a^5}$; б) $\frac{a^4}{a-b}$; в) $\frac{a^3}{a-b}$; г) $\frac{a^3}{a+b}$.

3. Піднесіть до степеня: $\left(\frac{2x^3}{a^2b}\right)^3$.

а) $\frac{6x^6}{a^5b^4}$; б) $\frac{8x^9}{a^6b^3}$; в) $\frac{2x^9}{a^6b^3}$; г) $\frac{8x^6}{a^6b^3}$.

4. Знайдіть значення виразу $\frac{1+a}{a-2} - \frac{a+2}{a} \cdot \frac{a^2}{a^2-4}$, якщо $a = 3$.

а) –3; б) 1; в) 4; г) 3.

5. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x+3}{x-3} = 0$.

а) –3; 3; б) –3; в) 3; г) коренів немає.

6. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x}{2x+3} = 1$.

а) –3; б) 1; в) 4; г) коренів немає.

Рівень 2

7. Піднесіть до степеня:

а) $\left(\frac{0{,}1a^3}{b^2}\right)^3$; б) $\left(-\frac{4xy^2}{3z^4}\right)^3$.

8. Спростіть вираз:

а) $\frac{27a^3b^2}{4c^4} \cdot \frac{8ac^3}{9b^4}$; б) $\frac{18xy^2}{25z^4} : \frac{24x^2y^2}{5z}$.

9. Спростіть вираз:

а) $\frac{x+3}{x^2+9} \cdot \left(\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3}\right)$; б) $\frac{a-3}{a-2} : \left(a - \frac{a}{a-2}\right)$.

10. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{y}{y+1} + 1\right) \cdot \frac{3y+3}{2y-1}$, якщо $y = 3$.

11. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x^2+2x}{x-1}=0$; б) $\frac{x}{x+3}=3$.

Рівень 3

12. Спростіть вираз:

а) $\frac{4ab^3}{9c^2}\cdot\left(\frac{3ac^2}{4b^2}\right)^3$; б) $\left(-\frac{6x^3y^2}{5z}\right)^2:\left(-\frac{9x^7y^2}{35z^3}\right)$.

13. Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$; б) $\frac{2}{a+b}\cdot\left(\frac{a+b}{3a}-a-b\right)$.

14. Знайдіть значення виразу $\frac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\frac{3x-3}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}$, якщо $x=5$.

15. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{3}{4x}+\frac{1}{6x}=2$; б) $\frac{3x^2+10x-25}{x+5}=x-5$.

16. Партію деталей робітник може виготовити в 1,5 разу швидше, ніж його учень. За який час цю партію деталей виготовить учень, якщо разом з робітником вони можуть її виготовити за 4 год?

Рівень 4

17. Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{49}{a^3+27}-\frac{a+3}{a^2-3a+9}\right)\cdot\frac{a^4+27a}{16-a^2}$;

б) $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right):\frac{a+1}{a^2-a+1}$.

18. Доведіть тотожність $\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2-y^2}\right)=\frac{y-x}{y+x}$.

19. Доведіть, що значення виразу $\left(\frac{x-2}{x^2-2x+4}-\frac{6x-13}{x^3+8}\right):\frac{(x-3)^2}{2x^3+16}$ не залежать від значень x.

20. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{|2x-5|-1}{x-3}=0$; б) $\frac{4-5y}{y+5}-\frac{1+5y}{5-y}=\frac{7}{y^2-25}$.

21. Моторний човен проплив 36 км за течією річки і повернувся у початковий пункт. На шлях проти течії річки човен затратив часу на 1 год більше, ніж на шлях за течією. Знайдіть швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

9. Степінь з цілим показником

1. Степінь з натуральним показником. Степені з натуральним показником ми вивчали у 7 класі. Нагадаємо, що степенем числа a з натуральним показником n, де $n > 1$, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a. Наприклад,

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$$

У виразі 4^3 число 4 називають *основою степеня*, число 3 — *показником степеня*, а весь вираз — *степенем*. Степенем числа a з показником 1 називають саме число a: $a^1 = a$.

Для степеня з натуральним показником були встановлені такі властивості:

$$\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}; \qquad \boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}\ (a \neq 0,\ m > n)}; \qquad \boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}};$$

$$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}; \qquad \boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ (b \neq 0)}.$$

Розширимо дію піднесення до степеня. Розглянемо, що означає піднесення до степеня з нульовим і цілим від'ємним показником.

2. Степінь з нульовим показником. Для степенів з натуральними показниками нами була встановлена тотожність $a^m : a^n = a^{m-n}$, де $a \neq 0$ і $m > n$. З цієї тотожності випливає правило ділення степенів: *щоб поділити степені з однаковими основами, потрібно основу залишити ту саму, а від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника.*

Якщо правило ділення степенів застосувати до випадку $m = n$, то отримаємо: $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$. З іншого боку, частка рівних чисел дорівнює 1: $a^n : a^n = 1$. Маємо:

$$a^n : a^n = a^0; \qquad a^n : a^n = 1.$$

Отже, щоб правило ділення степенів з натуральними показниками m і n застосувати до випадку $m = n$, доцільно вважати, що $a^0 = 1$, де $a \neq 0$.

Означення **Степінь числа a з нульовим показником, де $a \neq 0$, дорівнює 1.**

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

Наприклад, $3^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$. Степінь числа 0 з нульовим показником не визначений, тобто запис 0^0 не має змісту.

3. Степінь з цілим від'ємним показником. Щоб увести поняття степеня з цілим від'ємним показником, поширимо правило ділення степенів на випадок $m < n$. Запишемо число n у вигляді $n = m + k$, де k — натуральне число. Тоді матимемо:

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+k} = a^{m-(m+k)} = a^{-k}.$$

Виконаємо ділення, розглядаючи частку $a^m : a^n$ як дріб:

$$a^m : a^n = a^m : a^{m+k} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^k} = \frac{1}{a^k}.$$

Отже, доцільно прийняти за означенням, що

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}, \text{ де } a \neq 0,\ k \text{ — натуральне число.}$$

Означення | **Якщо $a \neq 0$ і n — натуральне число, то**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Наприклад, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $6^{-1} = \frac{1}{6^1} = \frac{1}{6}$. Степінь числа 0 з цілим від'ємним показником не визначений. Так, запис 0^{-2} не має змісту.

4. Піднесення дробу до від'ємного степеня. Щоб піднести до від'ємного степеня дріб, можна використати рівність

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \ (a \neq 0,\ b \neq 0,\ n \text{ — натуральне}).$$

Ця рівність випливає з таких перетворень:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 : \frac{a^n}{b^n} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Наприклад: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 16$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Обчислити:

а) $100 \cdot 5^{-3}$; б) $27 \cdot (-3)^{-5}$; в) $0{,}2^{-2} + 2^0$.

• а) $100 \cdot 5^{-3} = 100 \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5} = 0{,}8$;

б) $27 \cdot (-3)^{-5} = 27 \cdot \frac{1}{(-3)^5} = \frac{3^3}{-3^5} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$;

в) $0{,}2^{-2} + 2^0 = \frac{1}{0{,}2^2} + 1 = \frac{1}{0{,}04} + 1 = 25 + 1 = 26$. •

Вправа 2. Використовуючи від'ємний показник, подати дріб $\frac{3}{ab^3}$ у вигляді добутку.

• $\frac{3}{ab^3} = 3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b^3} = 3a^{-1}b^{-3}$. •

Вправа 3. Спростити вираз $\left(x^{-1} + y^{-1}\right) \cdot (x+y)^{-1}$.

• $\left(x^{-1} + y^{-1}\right) \cdot (x+y)^{-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x+y} = \frac{y+x}{xy} \cdot \frac{1}{x+y} = \frac{1}{xy}$. •

Вправа 4. Подати у вигляді раціонального дробу вираз $\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}}$.

• $\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{b+a}{ab} : \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2} =$

$$= \frac{b+a}{ab} \cdot \frac{a^2b^2}{(b-a)(b+a)} = \frac{ab}{b-a}.$$ •

Усно

221. Обчисліть: 2^4; $(-3)^3$; $0{,}1^3$; $(-1)^6$; $(-15)^0$; $0{,}3^0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0$; 0^0.

222. Замініть степінь із цілим від'ємним показником на дріб: 5^{-2}; 4^{-1}; 3^{-3}; 2^{-4}.

223. Обчисліть: 5^{-1}; 3^{-2}; 4^{-3}; 2^{-4}; 1^{-6}.

224. Замініть дріб на степінь з цілим від'ємним показником: $\frac{1}{3^2}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{4^3}$; $\frac{1}{2^9}$.

Рівень А

225. Подайте числа 4, 8, 16, 32, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ у вигляді степенів з основою 2.

226. Подайте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$ у вигляді степенів з основою 3.

Обчисліть:

227. 9^{-2}; 15^{-1}; 3^{-3}; 5^{-4}; 12^{0}; $(-2)^{-4}$; $(-3)^{-3}$; $0{,}5^{-2}$.

228. 7^{-2}; 2^{-5}; 4^{-1}; $(-5)^{-2}$; $(-6)^{-1}$; $0{,}7^{0}$.

Знайдіть значення виразу:

229. **а)** $5 \cdot 10^{-2}$; **б)** $16 \cdot 2^{-5}$; **в)** $5^{-3} : 25^{0}$; **г)** $3 : 2^{-3}$;
д) $2^{-4} + 2^{-2}$; **е)** $2^{-3} - 2^{-4}$; **є)** $6^{-1} + 3 \cdot 3^{-2}$; **ж)** $4^{-1} - 3^{-2}$.

230. **а)** $14 \cdot 7^{-2}$; **б)** $4 : 2^{-4}$; **в)** $5^{-1} + 2 \cdot 6^{-1}$; **г)** $2^{-3} - 4^{-2}$.

Подайте у вигляді раціонального дробу вираз:

231. **а)** $4a^{-2}b^{-1}$; **б)** $7^{-1}ab^{-5}$; **в)** $x^{-2}y^{-3}$; **г)** $(a + b)^{-2}$.

232. **а)** $10x^{-1}y^{-4}$; **б)** $m^{-3}n^{-4}$; **в)** $4^{-1}a^{-3}b^{3}$; **г)** $5(x - 1)^{-1}$.

Використовуючи від'ємний показник, подайте у вигляді добутку дріб:

233. **а)** $\frac{a}{b^3}$; **б)** $\frac{4}{xy^2}$; **в)** $\frac{1}{2ab}$; **г)** $\frac{a+b}{(a-b)^2}$.

234. **а)** $\frac{2}{a^2}$; **б)** $\frac{1}{ab}$; **в)** $\frac{a^4}{2b^3}$; **г)** $\frac{x}{x+y}$.

235. Знайдіть значення виразів:
а) b^{-2}; $(-b)^{-2}$; $-b^{-2}$, якщо $b = 4$; **б)** a^{-3}; $(-a)^{-3}$; $-a^{-3}$, якщо $a = 5$.

236. Знайдіть значення виразу:
а) $8a^{-3} + 1$, якщо $a = -2$; $a = 2$; **б)** $(b + 1)^{-2}$, якщо $b = -2$; $b = 0$; $b = 2$.

Рівень Б

Знайдіть значення виразу:

237. **а)** $256 \cdot 2^{-8}$; **б)** $0{,}1^{-2} + (-1)^{-24}$;
в) $1{,}5^{-3} : 2{,}5^{-2}$; **г)** $3^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$;
д) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} - \left(\frac{2}{9}\right)^{-2}$; **е)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} + \left(-1\frac{3}{5}\right)^{-2}$.

238. а) $1^{-1}+2^{-1}+3^{-1}+4^{-1}$; б) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}+\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$;

в) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-9}:\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}-\left(\frac{1}{27}\right)^{-1}$; г) $\left(2+2^{-1}\right)^{-2}-\left(2+2^{-2}\right)^{-1}$.

239. а) $243\cdot 3^{-4}$; б) $0{,}2^{-3}-(-0{,}5)^{-2}$;

в) $(-1{,}6)^{-1}:2{,}5^{-2}$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}-\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1}$;

д) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}$; е) $\left(1-2^{-1}\right)^{-4}+(-1)^{-25}$.

Спростіть вираз:

240. а) $(a+5)^{-2}(3a+15)$; б) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right):(a+b)$;

в) $(b-4)^{-1}-(b+4)^{-1}$; г) $\left(x^{-3}-y^{-3}\right):\left(x^{2}+xy+y^{2}\right)$;

д) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{y-1}\right)(y-x)^{-1}$; е) $\left(1-\frac{x^{-2}}{x^{-2}+1}\right):\frac{1}{1-x^{4}}$.

241. а) $(a-b)^{-2}\left(a^{2}-b^{2}\right)$; б) $\left((a-7)^{-1}+(a+7)^{-1}\right):\frac{a}{a-7}$;

в) $\left(m^{-1}-n^{-1}\right):\frac{m^{2}-n^{2}}{m^{3}n^{3}}$; г) $\frac{1}{x^{-3}-y^{-3}}-\frac{1}{x^{-3}+y^{-3}}$.

Рівень В

242. Доведіть, що вираз $\left(2^{m}\cdot 11^{n-1}-2^{m-1}\cdot 11^{n}\right)\cdot 2^{-m}\cdot 11^{-n}$ для всіх натуральних значень m і n набуває одного й того ж значення.

243. Чи може значення виразу $\frac{x^{-2}}{x^{-2}+1}$ дорівнювати 1?

244. Чи існують значення x, для яких є правильною рівність $\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{-1}=0$?

245. Розв'яжіть рівняння:

а) $x+x^{-1}=2$; б) $\frac{x+1}{x-1}+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}=2$.

Вправи для повторення

246. Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз:

а) $-5x^3y^2 \cdot 2xy^3$; б) $(-3a^2b^4)^2$; в) $(-2xy^5)^3$; г) $(m^4n^3)^2 \cdot (-mn)^3$.

247. Знайдіть значення виразу:

а) $5^3 \cdot 2^3$; б) $4^4 \cdot 1{,}25^4 \cdot 2^4$; в) $4^9 : (2^3)^3$; г) $2{,}5^5 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}4^5$.

248. Три програмісти розробили 45 комп'ютерних програм. Другий програміст розробив удвічі менше програм, ніж перший, і на 5 менше, ніж третій. Скільки програм розробив кожний програміст?

249. Повість має 120 сторінок. Кількість сторінок, які прочитала Руслана, на 40% більша від кількості сторінок, які їй залишилося прочитати. Скільки сторінок повісті прочитала Руслана?

250*. *Задача Л. М. Толстого.* Косарі найнялися викосити дві ділянки луків. Розпочавши зранку косити більшу ділянку, вони після полудня розділилися: одна половина залишилась на першій і до вечора її викосила, а друга половина перейшла косити на другу ділянку, площа якої удвічі менша від площі першої. Скільки було косарів, якщо відомо, що наступного дня один косар докосив протягом дня другу ділянку?

10. Властивості степеня з цілим показником

Степені з цілим показником мають усі властивості, встановлені для степенів з натуральним показником, а саме:
для будь-якого $a \neq 0$ і довільних цілих m і n справджуються рівності:

$$a^m a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$ і довільного цілого n справджуються рівності:

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Для доведення цих властивостей використовують означення степеня з цілим показником і властивості степеня з натуральним показником.

Покажемо, наприклад, що рівність $a^m a^n = a^{m+n}$ є правильною, якщо показники степенів є цілими від'ємними числами. Нехай $m = -p$, $n = -q$, де p і q — натуральні числа. Доведемо, що $a^{-p} \cdot a^{-q} = a^{-p-q}$ $(a \neq 0)$.

Оскільки $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$, $a^{-q} = \dfrac{1}{a^q}$, $a^{-(p+q)} = \dfrac{1}{a^{p+q}}$, то:

$$a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \cdot a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{-p-q}.$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Обчислити:

а) $3^{-5} \cdot 3^2 : 3^{-4}$; **б)** $(5^{-2})^3 \cdot 5^4$; **в)** $(2^3)^{-4} : 4^{-5}$.

• **а)** $3^{-5} \cdot 3^2 : 3^{-4} = 3^{-5+2-(-4)} = 3^1 = 3$;

б) $(5^{-2})^3 \cdot 5^4 = 5^{-6} \cdot 5^4 = 5^{-6+4} = 5^{-2} = \dfrac{1}{25}$;

в) $(2^3)^{-4} : 4^{-5} = 2^{-12} : (2^2)^{-5} = 2^{-12} : 2^{-10} = 2^{-12-(-10)} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$. •

Вправа 2. Подати вираз у вигляді степеня з основою a:

а) $a^{-14} \cdot a^{12} : a^{-4}$; **б)** $(a^5)^{-2} : a^{-7}$.

• **а)** $a^{-14} \cdot a^{12} : a^{-4} = a^{-14+12-(-4)} = a^2$;

б) $(a^5)^{-2} : a^{-7} = a^{-10} : a^{-7} = a^{-10-(-7)} = a^{-3}$. •

Вправа 3. Подати степінь у вигляді виразу, який не містить степеня з від'ємним показником: **а)** $\left(x^{-2}y^{-3}\right)^{-2}$; **б)** $\left(\dfrac{2}{3}m^{-4}n^2\right)^{-3}$.

• **а)** $\left(x^{-2}y^{-3}\right)^{-2} = x^4y^6$;

б) $\left(\dfrac{2}{3}m^{-4}n^2\right)^{-3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} m^{12}n^{-6} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 m^{12}n^{-6} = \dfrac{27m^{12}}{8n^6}$. •

Усно

251. Обчисліть:

а) $2^{-3} \cdot 2^2$; **б)** $3^{-4} : 3^{-3}$; **в)** $5^{-8} \cdot 5^8$; **г)** $4^3 : 4^5$;

д) $\left(8^{-1}\right)^{-1}$; **е)** $\left(7^{-1}\right)^2$; **є)** $2^{-2} \cdot 5^{-2}$; **ж)** $\dfrac{8^{-2}}{4^{-2}}$.

Рівень А

Обчисліть:

252. а) $2^{11} \cdot 2^{-7}$; б) $4^{15} : 4^{17}$; в) $\left(3^{-1}\right)^{-2} \cdot 3^{-4}$;

г) $5^3 : \left(5^{-1}\right)^{-4}$; д) $10^{-6} : 10^{-7} \cdot 10^2$; е) $4^{-2} : 4^{-5} + \left(10^{-1}\right)^{-2}$.

253. а) $3^{-5} : 3^{-7}$; б) $2^{-7} \cdot 2^5$; в) $\left(5^{-1}\right)^{-3} \cdot 5^{-3}$;

г) $4^{-6} : 4^{-4} \cdot 4^5$; д) $\left(6^{-3}\right)^2 : 6^{-5}$; е) $\left(11^{-2}\right)^{-1} - \left(9^{-1}\right)^{-2}$.

254. Подайте вираз у вигляді степеня з основою a:

а) $a^3 : a^{-7} \cdot a^5$; б) $a^{-4} \cdot a^6 : a^9$; в) $\left(a^{-2}\right)^5 : a^{-3}$; г) $a^{17} \cdot \left(a^8\right)^{-2}$.

255. Подайте вираз у вигляді степеня з основою b:

а) $b^8 : b^{-2} \cdot b^{10}$; б) $b^4 \cdot b^{-12} : b^3$; в) $\left(b^7\right)^{-2} \cdot b^{10}$; г) $\left(b^{-9}\right)^{-2} : b^{14}$.

256. Подайте вираз $\left(x^{-8}\right)^2 : x^{-14}$ у вигляді степеня з основою x та знайдіть його значення, якщо $x = 0{,}1$.

257. Подайте вираз $\left(y^3\right)^{-4} \cdot y^{15}$ у вигляді степеня з основою y та знайдіть його значення, якщо $y = 0{,}5$.

Рівень Б

Обчисліть:

258. а) $16^{-1} \cdot 2^5 \cdot 4^{-2}$; б) $5^8 : \left(125 : 25^{-1}\right)$; в) $\left(9^{-3} : 3^{-5}\right) : 27^{-2}$;

г) $4^{-5} \cdot 3^3 \cdot 0{,}25^{-5}$; д) $2^{-8} \cdot 1{,}25^{-8} \cdot 0{,}4^{-8}$; е) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{-3} - 2^{-2}$.

259. а) $\frac{\left(2^{-2}\right)^{-3} : 16}{2^2}$; б) $\frac{9^{-4} \cdot 4^{-4}}{2^{-9} \cdot 3^{-9}}$; в) $\frac{5^{-4} \cdot 6^{-3}}{5^{-5} \cdot 3^{-3}}$.

260. а) $3^{-4}\cdot 9^{5}\cdot 27^{-1}$; б) $2^{6} : \left(2^{-5} : 8^{-1}\right)^{-2}$; в) $2,5^{-5}\cdot 0,4^{-5}\cdot 7^{-1}$;

г) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\cdot 3^{-5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$; д) $\frac{9^{-6}\cdot 0,5^{-8}}{3^{-6}\cdot 1,5^{-8}}$; е) $(6,25)^{-3}\cdot(2,5)^{8}-1,5^{2}$.

Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємним показником:

261. а) $5xy^{-3}\cdot 0,4x^{-4}y$; б) $\left(0,04x^{-1}\right)^{-2}\cdot 5^{-2}x^{-5}$;

в) $3\frac{1}{3}m^{5}n^{-17}\cdot 0,12m^{-1}n^{19}$; г) $81^{2}a^{-2}b^{-3}\cdot\left(3a^{-1}b^{-2}\right)^{-4}$;

д) $\frac{\left(4a^{-3}b^{-4}\right)^{-1}}{0,2a^{-9}b^{6}}$; е) $\frac{0,5mn^{-2}}{\left(0,25m^{3}n^{-2}\right)^{-2}}$.

262. а) $\left(\frac{1}{8}a^{-2}b\right)^{-1}\cdot 2^{-4}a^{-1}b^{2}$; б) $0,12a^{-3}b^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}a^{-2}b\right)^{-2}$;

в) $\left(0,2ab^{3}\right)^{-1}\cdot 25a^{2}$; г) $\frac{27a^{-2}b^{-3}}{(3a^{-1}b)^{4}}$.

Подайте у вигляді степеня вираз:

263. а) $\frac{1}{16}x^{-4}$; б) $0,001b^{-3}$; в) $32a^{-5}$; г) $\frac{1}{125}x^{-3}$.

264. а) $81x^{-2}$; б) $125a^{-3}$; в) $\frac{1}{27}y^{-3}$; г) $0,00001x^{-5}$.

Спростіть вираз:

265. а) $(a^{-1}-1)(a^{-1}+1)-a^{-2}$; б) $(b^{-3}-3)(b^{-3}+3)-b^{-3}(b^{-3}+2)$;

в) $(x^{-1}-y^{-2})^{2}-(x^{-1}+y^{-2})^{2}$; г) $(c^{-1}-c)^{2}-(c^{-1}-2c^{2})(c^{-1}+2c^{2})$;

д) $(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2})$; е) $\frac{a^{-8}+2a^{-4}b^{-4}+b^{-8}}{a^{-8}-b^{-8}}$.

266. а) $(x^{-1}-y^{-1})(x^{-1}+y^{-1})+2y^{-2}$; б) $(a^{-2}-a^{2})^{2}+2-a^{-4}$;

в) $(a^{-1}-b^{-1})^{2}+(a^{-1}+b^{-1})^{2}$; г) $\frac{m^{-4}-n^{-4}}{m^{-4}-2m^{-2}n^{-2}+n^{-4}}$.

Рівень В

267. Подайте вираз у вигляді степеня:

а) $\left(\frac{a}{b^{2}}\right)^{-m}\cdot\left(a^{2m}b^{m}\right)^{2}$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-n+1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-2n}\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}$.

268. Обчисліть: $2^8\left(1+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}+2^{-5}+2^{-6}+2^{-7}+2^{-8}\right)$.

269. Доведіть, що вираз $4a^{-4}-4a^{-2}b^{-1}+b^{-2}$ набуває лише невід'ємних значень.

270. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{2x^{-10}+2y^{-10}}{x^{-20}-y^{-20}}:\dfrac{3x^{-10}+3y^{-10}}{x^{-20}-2x^{-10}y^{-10}+y^{-20}}$;

б) $\left(a^{-2}-1\right)\left(\dfrac{1}{a^{-1}-1}-\dfrac{1}{a^{-1}+1}-1\right)$;

в) $\left(\dfrac{2b^{-2}+b^{-1}}{b^{-3}-1}-\dfrac{b^{-1}+1}{b^{-2}+b^{-1}+1}\right)\left(1+\dfrac{b^{-1}+1}{b^{-1}}-\dfrac{b^{-2}+5b^{-1}}{b^{-2}+b^{-1}}\right)$.

Вправи для повторення

271. Обчисліть:

а) $1{,}7\cdot10^4$; **б)** $3{,}2\cdot10^{-2}$; **в)** $5{,}2:10^3$; **г)** $0{,}3:10^{-4}$.

272. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases}2x-y=3;\\3x+2y=1.\end{cases}$

273. Два станки-автомати за 1 год спільної роботи виготовляють 250 деталей. Перший станок за 4 год і другий за 2 год разом виготовляють 740 деталей. Скільки деталей виготовляє за годину кожний станок?

274. На двох полицях було 88 книжок. Коли з першої полиці переставили на другу 15 книжок, то на другій полиці стало на 2 книжки більше, ніж на першій. Скільки книжок було на кожній полиці спочатку?

275. З пункту A до пункту B туристи йшли зі швидкістю 6 км/год, а назад поверталися зі швидкістю 5 км/год. Знайдіть відстань між пунктами, якщо на зворотний шлях туристи затратили на 1 год більше, ніж на шлях від A до B.

11. Стандартний вигляд числа

У науці й техніці мають справу як з дуже великими, так і з дуже малими додатними числами. Так, на уроках фізики і хімії ви використовували число Авогадро, яке дорівнює

$$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}\text{ моль}^{-1} = 602000000000000000000000\text{ моль}^{-1}.$$

Відомо також, що 1 моль води має масу 18 г і містить N_A молекул. Тому кількість молекул в 1 г води дорівнює

$$N = \frac{N_A}{\mu} = 3,3 \cdot 10^{22} = 33000000000000000000000;$$

маса однієї молекули води дорівнює

$$2,99 \cdot 10^{-23}\text{ г} = 0,0000000000000000000000299\text{ г}.$$

Про числа $6,02 \cdot 10^{23}$, $3,3 \cdot 10^{22}$, $2,99 \cdot 10^{-23}$ кажуть, що вони записані у стандартному вигляді.

Стандартним виглядом числа x називають його запис у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \le a < 10$ і n — ціле число.

Число n називають порядком числа x. Наприклад, порядок числа $2,7 \cdot 10^{19}$ дорівнює 19, а порядок числа $3,3 \cdot 10^{-27}$ дорівнює –27.

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число.

Наприклад, запишемо число $x = 345,8$ у стандартному вигляді $a \cdot 10^n$. Число a має міститися між 1 і 10, тому в цілій частині десяткового запису числа a повинна бути лише одна, до того ж відмінна від 0, цифра. Щоб одержати число a, перенесемо в числі x кому на 2 цифри ліворуч: $a = 3,458$. Число a у $100 = 10^2$ разів менше від числа x, тому $x = a \cdot 10^2 = 3,458 \cdot 10^2$.

Інший приклад: $0,000235 = 2,35 \cdot 10^{-4}$. (У числі $x = 0,000235$ перенесли кому праворуч на 4 цифри, одержали число $a = 2,35$, яке у 10^4 разів більше від числа x. Тому $x = a : 10^4 = a \cdot \frac{1}{10^4} = a \cdot 10^{-4} = 2,35 \cdot 10^{-4}$.)

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати у стандартному вигляді число:

а) 0,56; б) 31,6; в) 2000.

• а) $0,56 = 5,6 \cdot 10^{-1}$; б) $31,6 = 3,16 \cdot 10$; в) $2000 = 2 \cdot 10^3$. •

Вправа 2. Виконати множення і записати результат у стандартному вигляді: $\left(8,4 \cdot 10^3\right) \cdot \left(2,3 \cdot 10^{-6}\right)$.

• $\left(8,4 \cdot 10^3\right) \cdot \left(2,3 \cdot 10^{-6}\right) = (8,4 \cdot 2,3) \cdot \left(10^3 \cdot 10^{-6}\right) = 19,32 \cdot 10^{-3} =$

$= 1,932 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1,932 \cdot 10^{-2}$. •

Вправа 3. Виконати ділення і записати результат у стандартному вигляді: $\left(4,2 \cdot 10^5\right) : \left(8,4 \cdot 10^{-3}\right)$.

• $\left(4,2 \cdot 10^5\right) : \left(8,4 \cdot 10^{-3}\right) = \frac{4,2 \cdot 10^5}{8,4 \cdot 10^{-3}} = \frac{4,2}{8,4} \cdot \frac{10^5}{10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^8 = 0,5 \cdot 10 \cdot 10^7 = 5 \cdot 10^7$. •

Усно

276. Яке з чисел записане у стандартному вигляді?

а) $0,3 \cdot 10^5$; б) $3,8 \cdot 10^{-5}$; в) $12 \cdot 10^{-1}$; г) $1,0001 \cdot 10^8$.

277. Назвіть порядок числа, записаного у стандартному вигляді:

а) $1,33 \cdot 10^4$; б) $4,5 \cdot 10^{-3}$; в) $8,5 \cdot 10^{23}$; г) $3,4 \cdot 10^{-9}$.

Рівень А

Запишіть у стандартному вигляді число:

278. а) 7500; б) 110000; в) 34,17; г) 456000000;

д) 0,035; е) 0,00015; є) 0,53954; ж) 0,0000002.

279. а) 15680; б) 70000; в) 5350000; г) 17,93;

д) 0,0000011; е) 0,0101; є) 0,0143; ж) 0,00004.

280. Округліть число до десятків й одержаний результат запишіть у стандартному вигляді:

а) 1427; б) 155,678; в) 54,23; г) 4911,2.

281. Округліть число до одиниць й одержаний результат запишіть у стандартному вигляді:

а) 157,415; б) 8901,5; в) 18,9; г) 315,5.

Запишіть у вигляді цілого числа або десяткового дробу число:

282. а) $1,2 \cdot 10^3$; б) $3,5 \cdot 10^5$; в) $4,2 \cdot 10^{-3}$; г) $5,7 \cdot 10^{-5}$.

283. а) $3,3 \cdot 10^2$; б) $8,1 \cdot 10^4$; в) $1,8 \cdot 10^{-2}$; г) $9,9 \cdot 10^{-4}$.

Рівень Б

Подайте:

284. а) $1,9 \cdot 10^{15}$ г у тоннах; б) $2,8 \cdot 10^{-1}$ т у кілограмах;

в) $5,2 \cdot 10^{-3}$ м у сантиметрах; г) $6,12 \cdot 10^2$ м у дециметрах.

285. а) $7,3 \cdot 10^{-1}$ м у дециметрах; б) $1,1 \cdot 10^2$ ц у кілограмах;

в) $9,3 \cdot 10^2$ кг у грамах; г) $8,6 \cdot 10^{-2}$ км у сантиметрах.

Виконайте множення і запишіть результат у стандартному вигляді:

286. а) $(2,3\cdot10^4)\cdot(1,2\cdot10^{-7})$; б) $(5,1\cdot10^{-5})\cdot(6,8\cdot10^{-7})$;

в) $(4,8\cdot10^{-12})\cdot(1,5\cdot10^5)$; г) $(5,9\cdot10^{11})\cdot(8,2\cdot10^{-11})$.

287. а) $(4,2\cdot10^{-4})\cdot(4,5\cdot10^8)$; б) $(1,25\cdot10^{-3})\cdot(1,6\cdot10^{-5})$.

Виконайте ділення і запишіть результат у стандартному вигляді:

288. а) $(9,9\cdot10^7):(1,1\cdot10^{-11})$; б) $(1,3\cdot10^7):(6,5\cdot10^{-3})$;

в) $(8,1\cdot10^{-11}):(1,8\cdot10^{-4})$; г) $(1,1\cdot10^{-5}):(6,4\cdot10^{-13})$.

289. а) $(8,5\cdot10^{-3}):(1,7\cdot10^5)$; б) $(3,4\cdot10^{-8}):(6,8\cdot10^{-4})$.

290. Відомо, що перша космічна швидкість для Землі дорівнює $7,9\cdot10^3$ м/с, друга — $1,12\cdot10^4$ м/с, третя — $1,667\cdot10^4$ м/с. Виразіть ці швидкості у кілометрах за секунду й запишіть одержані результати числами у стандартному вигляді.

291. Яку відстань у метрах пролетить супутник за 1 год, якщо він рухається з першою космічною швидкістю?

Вправи для повторення

292. Функція задана формулою $y = -2x + 5$.

а) Знайдіть значення функції, які відповідають значенням аргументу: 0; 3.

б) Знайдіть значення аргументу, яким відповідають значення функції: –3; 1.

в) Побудуйте графік функції.

г) Використовуючи графік, вкажіть нуль функції та координати точки перетину графіка з віссю ординат.

293. Розв'яжіть рівняння:

а) $(4x-1)(4x+1)-3=15x^2$; б) $(3x-2)^2-9x^2=7$;

в) $\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{3}{5}$; г) $\dfrac{x-3}{3x}-\dfrac{x}{3x-1}=0$.

294. У першому зерносховищі було утричі більше зерна, ніж у другому. Після того як з першого зерносховища вивезли 120 т зерна, а до другого привезли 140 т, у першому зерносховищі зерна стало на 130 т більше, ніж у другому. Скільки тонн зерна було у кожному зерносховищі спочатку?

12. Функція $y=\frac{k}{x}$

Розглянемо приклади.

1. Нехай тіло рухається рівномірно ы прямолінійно. Якщо за час t с тіло проходить шлях 4 м, то швидкість його руху дорівнює $v=\frac{4}{t}$ м/с. Швидкість v є функцією від часу t.

2. Нехай площа прямокутника дорівнює 12 см^2, а одна з його сторін — x см, тоді друга сторона прямокутника дорівнює $y=\frac{12}{x}$ см. Довжина другої сторони прямокутника є функцією від довжини першої сторони за сталої площі.

Перейшовши до прийнятих позначень аргументу і функції, в обох прикладах матимемо функції, які задаються формулою $y=\frac{k}{x}$. Кожну з таких функцій називають *оберненою пропорційністю*.

Означення **Оберненою пропорційністю називають функцію, яку можна задати формулою виду $y=\frac{k}{x}$, де x — незалежна змінна, k — деяке число, що не дорівнює нулю.**

Побудуємо графік функції $y=\frac{4}{x}$. Складемо таблицю для кількох значень x і відповідних значень y:

x	–8	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4	8
y	–0,5	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1	0,5

Позначимо на координатній площині точки, координати яких подані у таблиці (рис. 1).

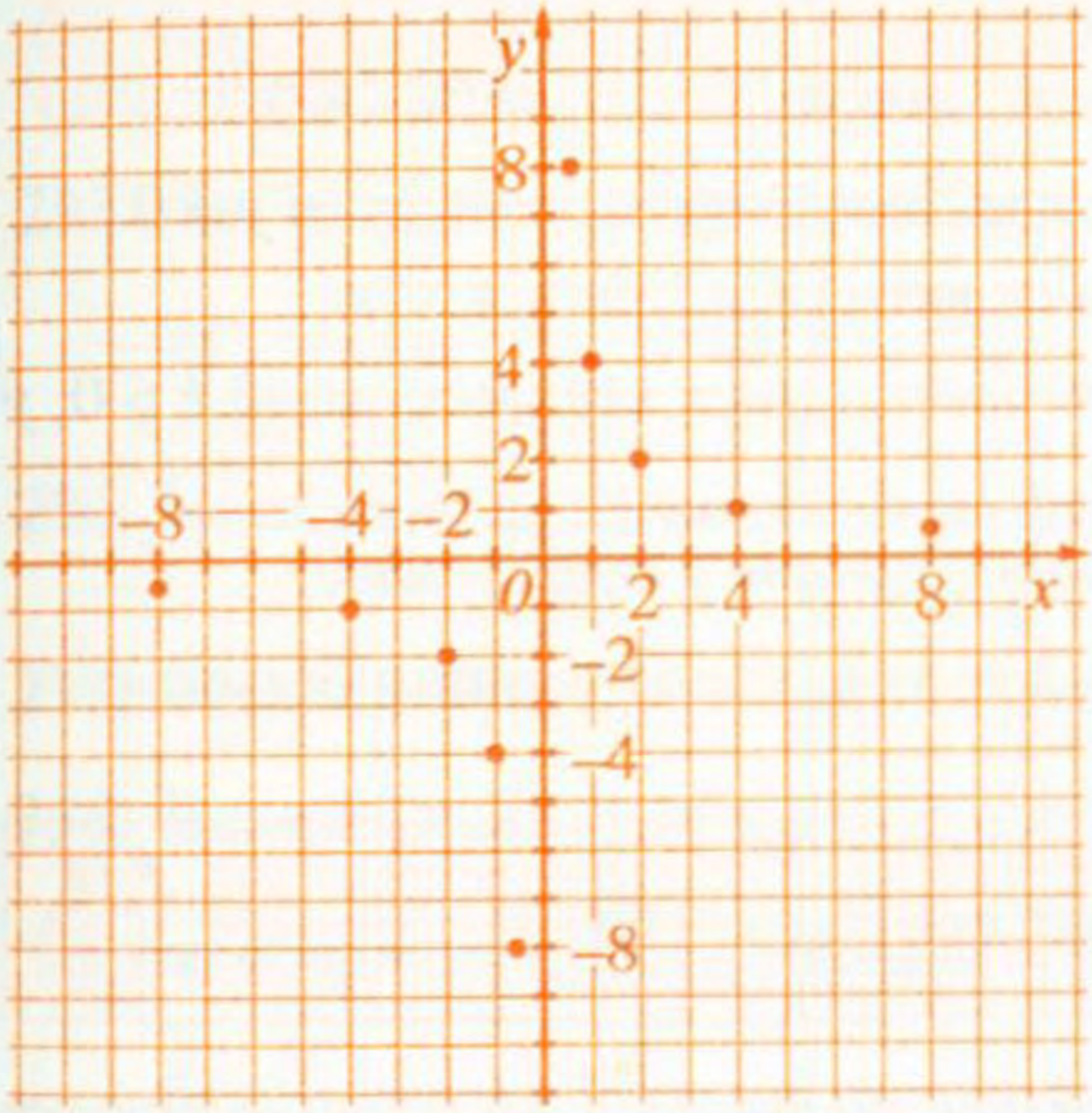


Рис. 1

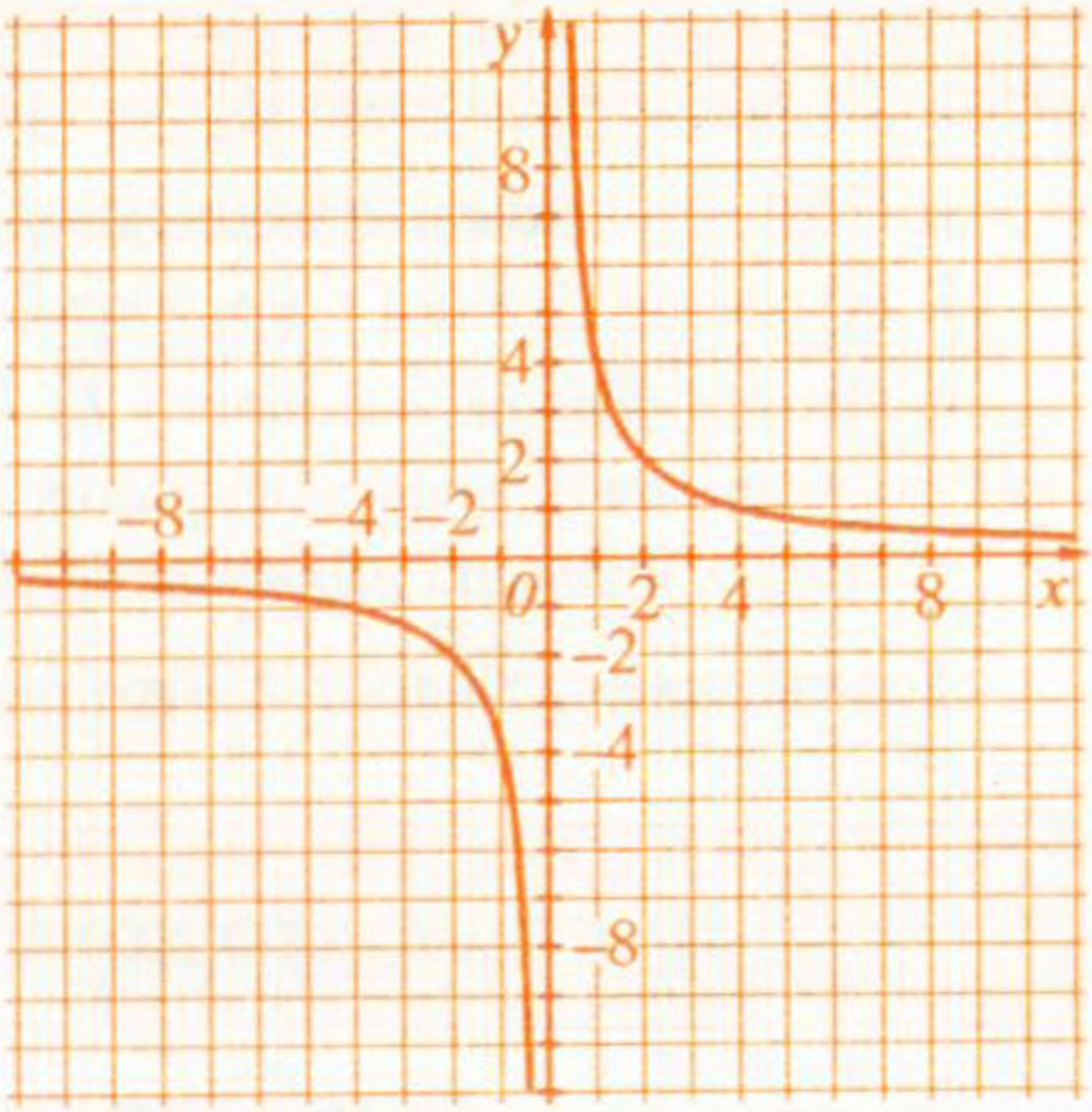


Рис. 2

Якби для кожного значення x, крім $x = 0$, обчислили відповідне значення y і позначили точки з такими координатами на координатній площині, то одержали б лінію, яку називають *гіперболою* (рис. 2). Вона складається із двох віток, розміщених у першій та третій координатних чвертях.

Взагалі, графік будь-якої оберненої пропорційності називають *гіперболою*. На рисунку 3 зображена гіпербола, яка є графіком функції $y = -\frac{4}{x}$. Вона складається із двох віток, розміщених у другій і четвертій координатних чвертях.

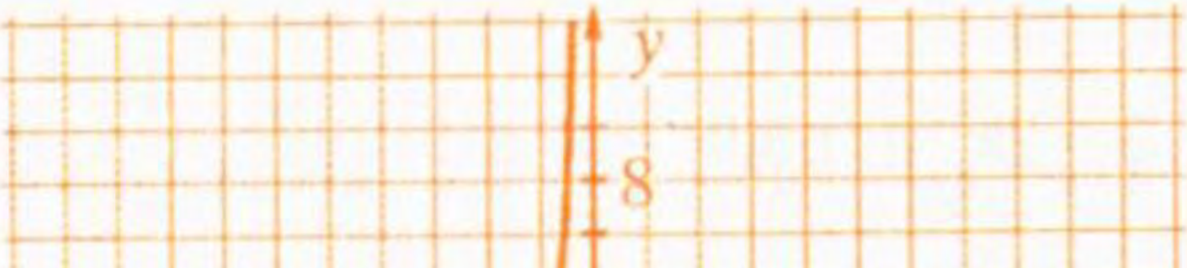


Рис. 3

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$ (оберненої пропорційності).

1. *Область визначення функції утворюють усі числа, крім* $x = 0$.

2. *Область значень функції утворюють також усі числа, крім* $y = 0$.

3. *Графіком функції є гіпербола*, яка складається з двох віток.

4. *Графік функції лежить у I і III координатних чвертях, якщо* $k > 0$; *у II і IV координатних чвертях, якщо* $k < 0$.

5. *Графік функції симетричний відносно початку координат.*

Доведення властивості 5 в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше».

Для тих, хто хоче знати більше

Доведемо, що графік оберненої пропорційності симетричний відносно початку координат (властивість 5).

Справді, якщо графіку функції $y = \frac{k}{x}$ належить точка (a; b), то справджується рівність $b = \frac{k}{a}$. Тоді правильною є рівність $-b = \frac{k}{-a}$, з якої випливає, що графіку належить і точка ($-a$; $-b$) — точка, симетрична точці (a; b) відносно початку координат.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати графічно рівняння $\frac{6}{x} + 2 = 2x + 1$.

• Рівняння $\frac{6}{x} + 2 = 2x + 1$ рівносильне рівнянню $\frac{6}{x} = 2x - 1$. Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{6}{x}$ та $y = 2x - 1$ (рис. 4). Ці графіки перетинаються в точках з абсцисами $x = -1{,}5$ та $x = 2$.

Отже, $x = -1{,}5$ та $x = 2$ — корені рівняння.

Відповідь. $-1{,}5$; 2. •

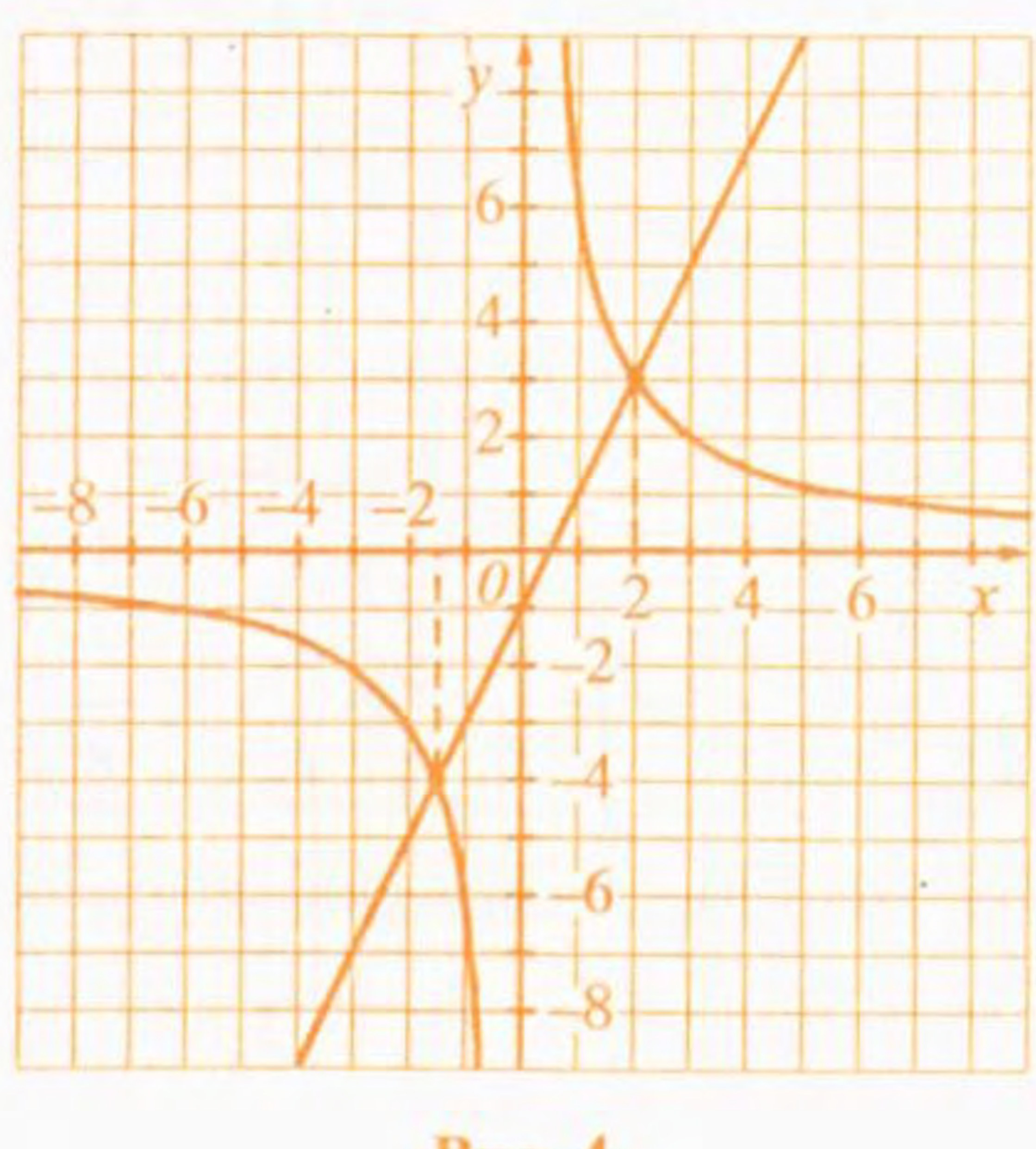


Рис. 4

Усно

295. Які із заданих функцій є оберненою пропорційністю?

а) $y = 16x$; б) $y = \frac{16}{x}$; в) $y = \frac{x}{16}$; г) $y = -\frac{16}{x}$.

296. Вкажіть область визначення функції: $y = \frac{3}{x}$; $y = -\frac{10}{x}$.

297. У яких чвертях розміщений графік функції: $y = -\frac{17}{x}$; $y = \frac{13}{x}$?

298. Вкажіть правильні твердження:

а) обернену пропорційність задають формулою $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$;

б) графіком оберненої пропорційності є гіпербола;

в) графік оберненої пропорційності проходить через початок координат;

г) графік оберненої пропорційності симетричний відносно початку координат.

Рівень А

299. Знайдіть значення функції $y = \frac{8}{x}$, якщо: $x = -4$; $x = 2$; $x = 8$.

300. Знайдіть значення x, для яких значення функції $y = -\frac{15}{x}$ дорівнює: –5; –1; 15.

301. Функція задана формулою $y = \frac{10}{x}$. Заповніть таблицю:

x	–5		1	10	
y		–5			0,5

302. Чи належать графіку функції $y = -\frac{8}{x}$ точки: $A(-8; 1)$; $B(-4; -2)$; $C(-2; 4)$; $D(-0{,}5; 8)$?

303. Чи належать графіку функції $y = \frac{9}{x}$ точки: $A(-1; 9)$; $B(3; 3)$; $C(-2; -4{,}5)$; $D(9; 1)$?

Побудуйте графік функції:

304. а) $y = \frac{8}{x}$; б) $y = -\frac{5}{x}$; в) $y = -\frac{4}{x}$, де $-4 \le x \le 5$ $(x \neq 0)$.

305. а) $y=-\dfrac{6}{x}$; б) $y=\dfrac{2}{x}$; в) $y=\dfrac{3}{x}$, де $-3 \le x \le 3$ $(x \ne 0)$.

306. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{5}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть значення функції, які відповідають таким значенням аргументу: –2,5; 4.

307. Побудуйте графік функції $y=-\dfrac{8}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть значення аргументу, яким відповідають такі значення функції: –2; 4.

308. Учень має певну суму грошей, на яку він може купити 400 г цукерок за ціною 4 грн. за кілограм. Скільки цукерок за ціною b грн. за кілограм може купити учень на цю ж суму?

309. Автомобіль, рухаючись зі швидкістю 70 км/год, проїхав певний шлях за 2 год. За який час автомобіль проїде цей шлях, рухаючись зі швидкістю v км/год?

Рівень Б

310. Обернена пропорційність задана формулою $y=\dfrac{a}{x}$. Знайдіть a, якщо для $x=0{,}5$ значення функції дорівнює 2.

311. Точка з абсцисою 3 належить графіку функції $y=-\dfrac{24}{x}$. Знайдіть ординату цієї точки.

312. Запишіть формулу оберненої пропорційності, якщо її графіку належить:
а) точка $A(-3;\ 12)$; б) точка $B(8;\ 4)$.

313. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

а) $y=-\dfrac{5}{x}$ і $y=x-4{,}5$; б) $y=\dfrac{12}{x}$ і $y=-2x+1$.

314. Для яких значень аргументу набувають однакових значень функції?

а) $y=\dfrac{3}{x}$ і $y=3x$; б) $y=-\dfrac{4}{x}$ і $y=5$.

Розв'яжіть графічно рівняння:

315. а) $x-1=\dfrac{2}{x}$; б) $\dfrac{5}{x}+2x=7$.

316. а) $\dfrac{3}{x}=x+2$; б) $2x-9=-\dfrac{4}{x}$.

Рівень В

317. Для яких значень аргументу графік функції $y = \frac{5}{x}$ розміщений вище від графіка функції $y = 5x$?

318. Побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{2-7x}{x^2-2x} - \frac{6}{2-x}$; б) $y = \frac{-40}{(x-5)^2-(5+x)^2}$.

319. Доведіть, що для від'ємних значень a і k графіки функцій $y = ax + 3$ та $y = \frac{k}{x}$ перетинаються у II і IV координатних чвертях.

320. Розв'яжіть графічно рівняння $\frac{2}{|x|} = x+1$.

321. Знайдіть, використовуючи графіки функцій, кількість коренів рівняння $-\frac{3}{|x|} = x-4$.

Вправи для повторення

322. Спростіть вираз $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$.

323. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y=4; \\ \frac{2x-1}{2} = \frac{y}{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y^2=8; \\ x+y=2. \end{cases}$

324. Сума двох чисел дорівнює 105,8. Одне з них на 30 % більше від іншого. Знайдіть менше з цих чисел.

325. Відстань між морськими портами A і B дорівнює 150 км. Від порту A до порту B вийшов теплохід і йшов зі швидкістю 25 км/год. Через 30 хв від порту B назустріч йому вийшов другий теплохід, швидкість якого дорівнює 30 км/год. Яку відстань пропливе перший теплохід до зустрічі?

Цікаво знати

Звичайні дроби вміли додавати, віднімати, множити й ділити ще давні єгиптяни (2 тисячі років до н. е.). У часи **Архімеда** (287–212 рр. до н.е.) знаменник звичайного дробу писали над чисельником. Сучасне ж позначення дробу у вигляді $\frac{a}{b}$, де a — чисельник, b — знаменник, уперше можна побачити в роботах італійського вченого **Леонарда Пізанського** (він же Фібоначчі) у 1202 році. Широкого поширення такий запис набув у XVI ст. після введення буквеної символіки. Тоді ж поширилась і сучасна форма запису дій із дробами.

Англійський учений **Ісаак Ньютон** (1643–1727) уперше почав розглядати дріб як частку від ділення одного виразу на інший. У книжці «Загальна арифметика» він писав: «Запис однієї з двох величин під другою, нижче від якої між ними проведено риску, означає частку або величину, яка виникає від ділення верхньої величини на нижню».

Ньютон також поширив позначення a^n, уведене **Рене Декартом** (1596–1650) для степенів з натуральним показником, на випадок від'ємного показника.

Чому нульовим степенем будь-якого числа a $(a \neq 0)$ повинна бути одиниця? Це питання тривалий час породжувало суперечки. Адже відомо, що натуральний показник степеня — це число, яке показує, скільки разів основу множать саму на себе. Але помножити основу саму на себе нуль разів не можна, тому вираз a^0 тривалий час для всіх залишався загадкою. Були навіть спроби довести, що для будь-якого відмінного від нуля числа a виконується рівність $a^0 = 1$. Лише у XVIII ст. стало зрозуміло, що потрібно не доводити, а просто домовитись, що $a^0 = 1$ (для $a \neq 0$). Ця домовленість є зараз загальноприйнятою.

Запитання і вправи для повторення § 1

1. Наведіть приклади дробових виразів; дробів.

2. Сформулюйте основну властивість дробу.

3. За яким правилом додають дроби з однаковими знаменниками?

4. За яким правилом віднімають дроби з однаковими знаменниками?

5. Як додають та віднімають дроби з різними знаменниками?

6. Сформулюйте правило множення дробів.

7. Сформулюйте правило піднесення дробу до степеня.

8. Сформулюйте правило ділення дробів.

9. Які рівняння називають рівносильними? Наведіть приклад двох рівносильних рівнянь.

10. Сформулюйте властивості рівнянь.

11. Чому дорівнює степінь числа з нульовим показником?

12. Чому дорівнює степінь a^{-n}, де $a \neq 0$ і n — натуральне число?

13. Які властивості степеня з цілим показником?

14. Який запис числа називають його записом у стандартному вигляді?

15. Яку функцію називають оберненою пропорційністю? Наведіть приклади оберненої пропорційності.

16. Які властивості має обернена пропорційність?

326. Для яких значеннях змінної не має змісту вираз?

а) $\frac{6}{x-3}$; б) $\frac{6a-1}{2a+1}$; в) $\frac{b+4}{b^2-4b}$; г) $\frac{11x}{x^2-16}$.

Скоротіть дріб:

327. а) $\frac{8xy^2}{4x^2y}$; б) $\frac{72ab^3}{48a^3}$; в) $\frac{128mn^4}{32m^2n^5}$; г) $\frac{75x^2y^4z}{175x^4z^3}$.

328. а) $\frac{6m-3n}{8m-4n}$; б) $\frac{3c-4d}{3c^2-4cd}$; в) $\frac{a^2-9}{3a+9}$; г) $\frac{c^2-16}{(c+4)^2}$;

д) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-9}$; е) $\frac{x^3-8y^3}{x^2+2xy+4y^2}$; є) $\frac{5x^2-10xy+4y-2x}{x^2-4xy+4y^2}$.

329*. Доведіть: якщо для деяких натуральних значень a і b дріб $\frac{a-b}{a+b}$ нескоротний, то й дріб $\frac{a}{b}$ нескоротний.

330. Спростіть вираз:

а) $\frac{4x}{2x+1}+\frac{2}{2x+1}$; б) $\frac{y^2-3y}{y-5}+\frac{3y-25}{y-5}$; в) $\frac{(b+c)^2}{b+c-2}-\frac{4}{b+c-2}$.

331. Знайдіть значення виразу $\frac{6a^3-4}{5a}-\frac{a^3-4}{5a}$, якщо $a=25$; $a=-1{,}8$.

332. Подайте вираз у вигляді дробу:

а) $\frac{b}{a}+\frac{2}{3a}$; б) $\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}$; в) $\frac{1}{2ab}-\frac{3-b}{6b^2}$;

г) $x-y+\frac{2x-y}{5}$; д) $x-\frac{2x^2}{2x+y}$; е) $\frac{7bc-a^2}{7bc+a^2}-1$.

Спростіть вираз:

333. а) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$; б) $\frac{a+b}{b}-\frac{2a+b}{a+b}$; в) $\frac{x-b}{x^2-xy}+\frac{y-b}{y^2-xy}$.

334. а) $\frac{a}{b}+\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+ab}{ab-b^2}$; б) $\frac{4}{a-4}-\frac{1}{a+4}+\frac{a-7}{a^2-16}$;

в) $\frac{3y}{4y-2}+\frac{y}{10y+5}+\frac{3y}{1-4y^2}$; г) $\frac{b-a}{a^2+ab+b^2}-\frac{5ab}{a^3-b^3}+\frac{3}{a-b}$.

335. Подайте вираз у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

а) $\frac{a+9}{a}$; б) $\frac{a^2+4a+1}{a}$; в) $\frac{(x+2)^2+3}{x+2}$.

336*. Для яких натуральних значень n значення дробу є цілим числом?

а) $\frac{n+8}{n}$; б) $\frac{7n-11}{n}$; в) $\frac{5-n^2}{n^2}$.

337. Виконайте множення:

а) $\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{5a}$; б) $\frac{12a^3}{25x^3}\cdot\frac{5x^2}{18a^2}$; в) $\frac{a^3b^2}{12c^4}\cdot\frac{18c^5}{8b^4}\cdot\frac{4b}{a^4}$;

г) $\frac{xy-x^2}{2x^3}\cdot\frac{2x^2}{x^2-y^2}$; д) $\frac{1-x^2}{2x-x^2}\cdot\frac{4-2x}{1+x}$; е) $\frac{x^3+y^3}{xy-y^2}\cdot\frac{xy-x^2}{x^2-xy+y^2}$.

338. Піднесіть до степеня:

а) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3$; б) $\left(-\frac{x^3}{3y^2}\right)^4$; в) $\left(-\frac{ab^2}{5c}\right)^3$; г) $\left(-\frac{m^2n^4}{2k^3}\right)^5$.

339. Виконайте ділення:

а) $\frac{5x^3}{4a^3}:\frac{15x^2}{8a^4}$; б) $\frac{4-b^2}{1-b}:\frac{2b+b^2}{1-b^2}$; в) $\frac{x^2-2xy+y^2}{2x+2y}:\frac{2x-2y}{x^2+xy}$.

340. Знайдіть значення виразу $\frac{x^2-y^2}{2x^2y^2}:\frac{x-y}{20xy^2}$, якщо $x=\frac{1}{3}$; $y=2\frac{2}{3}$.

341. Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right)$;

б) $\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)$;

в) $\left(\frac{2a}{a+2}+\frac{2a}{6-3a}+\frac{8a}{a^2-4}\right):\frac{a-4}{a-2}$.

342. Доведіть тотожність:

а) $\left(x-\frac{4xy}{x+y}+y\right):\left(\frac{x}{y+x}-\frac{y}{y-x}-\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)=x-y$;

б) $\left(\frac{1}{m-2n}+\frac{6m}{4n^2-m^2}+\frac{1}{m+2n}\right):\left(\frac{m^2+4n^2}{m^2-4n^2}+1\right)=-\frac{2}{m}$.

343. Спростіть вираз $\frac{a+1}{a^2+1-2a}-\frac{1-a(1-a)}{1-a}\cdot\frac{a+1}{a^3+1}$ і знайдіть його значення, якщо $a=2$.

344. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{xy-y^2}{x^4-y^4}:\left(1-\frac{x}{x+y}\right)$ дорівнює 0.

345. Доведіть, що вираз $\frac{1}{(x+y)^2+2(x^2-y^2)+(x-y)^2}\cdot 4x^2$ для всіх допустимих значень змінних набуває одного й того ж значення.

346*. Подайте у вигляді раціонального дробу вираз:

а) $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}}}$; б) $\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

347. Обчисліть:

а) $81\cdot 3^{-3}$; б) $0{,}01^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; в) $(-2{,}5)^{-1}:1{,}5^{-2}$;

г) $3^{-4}\cdot 3^3+2^{-4}\cdot 2^5$; д) $(4^{-4})^{-4}:2^{30}$; е) $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-4}\cdot\left(1\frac{3}{5}\right)^{-4}-\left(2\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

348. Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємним показником:

а) $\frac{ab^{-2}}{c}$; б) $\frac{(a-b)^{-1}}{a^{-1}(a+b)}$; в) $\left(\frac{x^{-2}}{2y^3}\right)^{-1}$; г) $\frac{(c+c^{-1})^{-2}}{c^{-1}}$.

349. Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{4x^{-2}y}{3}\right)^{-3}\cdot 64x^6y^{-7}$; б) $\left(3a^{-5}c^{-2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{c^5}{9}\right)^{-1}$;

в) $(2x+3)^{-2}(4x+6)$; г) $\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-1}-b^{-1}}$;

д) $\left(\frac{1}{x^{-1}}-\frac{1}{y^{-1}}\right)(x-y)^{-1}$; е) $\frac{a^{-3}+b^{-3}}{a^{-1}+b^{-1}}$.

350. Подайте вираз у вигляді степеня з основою 2:

а) $32\cdot 2^{n-3}$; б) $2^{n+1}\cdot 64$; в) $16\cdot 2^{-n+3}$; г) $\frac{1}{32}\cdot 2^{n-3}$.

351. У виразі $x^{-7}+x^{-5}$ винесіть за дужки множник: x^{-3}; x^{-5}; x.

352*. Доведіть, що для всіх цілих значень змінних вираз набуває одного й того ж значення:

а) $\frac{3^m\cdot 7^{-n-1}+3^{m-2}\cdot 7^{-n}}{3^m\cdot 7^{-n}}$; б) $\frac{5^{-n-1}\cdot 7^{-n}+5^{-n}\cdot 7^{-n-1}}{35^{-n+1}}$.

Розв'яжіть рівняння:

353. а) $\frac{x+1}{x-2}=0$; б) $\frac{x^3+3x}{x+3}=0$;

в) $\frac{x+2}{x^2-4}=0$; г) $\frac{3x}{x-1}=2$.

354. а) $\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{x+3}{x-1}$; б) $\frac{x-2}{2x+1}+\frac{x-4}{3x-2}=0$;

в) $\frac{x+7}{x}-\frac{x+5}{x+4}=\frac{2}{x^2+4x}$; г) $\frac{z-1}{z+5}+\frac{4-z}{5-z}=\frac{1-2z^2}{25-z^2}$.

355*. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-a}{x+1}=3$ з параметром a.

356*. Для яких значень параметра a рівняння $\frac{x-a+1}{(x-2)(x-2a)}=0$ не має коренів?

357. Виразіть час у секундах і запишіть одержане число у стандартному вигляді: 1 год; 1 доба; 30 діб.

358. Виразіть масу в грамах і запишіть одержане число у стандартному вигляді: 5 ц 11 кг; 1 т 2 ц; 23 т.

359. Побудуйте графік функції:

а) $y = -\frac{3}{x}$; **б)** $y = \frac{3}{x}$, де $1 \le x \le 6$.

360. Запишіть формулу оберненої пропорційності, якщо її графік проходить через точку $B\left(-6; -\frac{1}{3}\right)$.

361. Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A(1; 8)$. Чи проходить графік цієї функції через точку $B(0{,}5; 16)$? $C(-0{,}4; -20)$?

362. За допомогою графіків функцій встановіть, чи має корені рівняння $\frac{10}{x} = 0{,}5x - 1$.

363. Розв'яжіть графічно рівняння $\frac{4}{x} = x$.

364*. Побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3} + 3$; **б)** $y = \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x - 1} + 1$.

Завдання для самоперевірки № 3

Рівень 1

1. Вкажіть правильні рівності:

а) $(-100)^0 = 1$; **б)** $4^{-2} = -16$; **в)** $(-3)^0 = -3$; **г)** $(-5)^{-2} = \frac{1}{25}$.

2. Обчисліть: $7^{-2} \cdot 14^0$.

а) 49; **б)** $\frac{2}{7}$; **в)** $\frac{1}{49}$; **г)** $\frac{1}{7}$.

3. Знайдіть значення виразу $2^4 \cdot 2^{-3} + 2^{-1}$.

а) 2; **б)** 130; **в)** $2\frac{1}{2}$; **г)** $2\frac{1}{4}$.

4. Запишіть у вигляді степеня вираз $b^6 : b^{-2}$.

а) b^8; **б)** b^{-12}; **в)** b^{-3}; **г)** b^4.

5. Запишіть у стандартному вигляді число 2570.

а) $25{,}7 \cdot 10^2$; **б)** $2{,}57 \cdot 10^{-3}$; **в)** $0{,}257 \cdot 10^4$; **г)** $2{,}57 \cdot 10^3$.

6. Для якого значення аргументу значення функції $y = \frac{10}{x}$ дорівнює 4?

а) 40; **б)** 2,5; **в)** 5; **г)** 2,4.

Рівень 2

7. Обчисліть:

а) $(-2)^{-3} \cdot (-5)^0$; **б)** $(0{,}1)^{-2} \cdot \frac{20}{40^0}$.

8. Знайдіть значення виразу:

а) $2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$; **б)** $(-3)^{-2} + 12 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

9. Спростіть вираз:

а) $\left(2a^{-1}b^3\right) \cdot \left(6a^2b^{-3}\right)$; **б)** $(b-3)^{-2} \cdot \left(b^2 - 3b\right)$.

10. Подайте у вигляді виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

а) $\left(3a^{-5}b^{2}\right)^{-2}$; б) $\left(\frac{1}{3}m^{4}n^{-2}\right)^{-3}$.

11. Побудуйте графік функції $y = -\frac{4}{x}$.

Рівень 3

12. Знайдіть значення виразу:

а) $8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} + (0,2)^{-2}$; б) $3^{-5} : \left(3^{-6} : 9^{-2}\right)$.

13. Спростіть вираз:

а) $\frac{a^{2}b^{-1}}{2c^{-2}}\cdot\frac{8a^{-1}c}{b^{-4}}$; б) $\left(\frac{1}{3}m^{-3}n^{4}\right)^{2} : \left(m^{-4}n^{5}\right)$.

14. Спростіть вираз:

а) $(a+2)^{-2}\cdot(5a+10)$; б) $\left(a^{-2}-b^{-2}\right) : \frac{(a-b)}{ab}$.

15. Обчисліть і запишіть результат числом у стандартному вигляді:

а) $\left(2,3\cdot10^{4}\right)\cdot\left(6,1\cdot10^{-5}\right)$; б) $\left(5,1\cdot10^{-2}\right) : \left(1,7\cdot10^{3}\right)$.

16. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = -\frac{8}{x}$ і $y = x - 9$.

Рівень 4

17. Обчисліть:

а) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-9}$; б) $\frac{27^{-3}\cdot16^{-6}}{8^{-9}\cdot81^{-2}}$.

18. Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{x^{m}}{y^{k}}\right)^{-2}\cdot x^{m-3}\cdot y^{-2k+1}$; б) $\left(\frac{2y}{b}\right)^{-n} : \left(\frac{2b^{2}}{y}\right)^{1-n}$.

19. Спростіть вираз:

а) $\left(x^{-2}+y^{-2}\right)\cdot\dfrac{(xy)^2}{x^4-y^4}$; **б)** $(a^{-n}-a^{n})^2-a^{2n}(1+a^{-4n})$.

20. Знайдіть число x, для якого є правильною рівність, та запишіть його у стандартному вигляді:

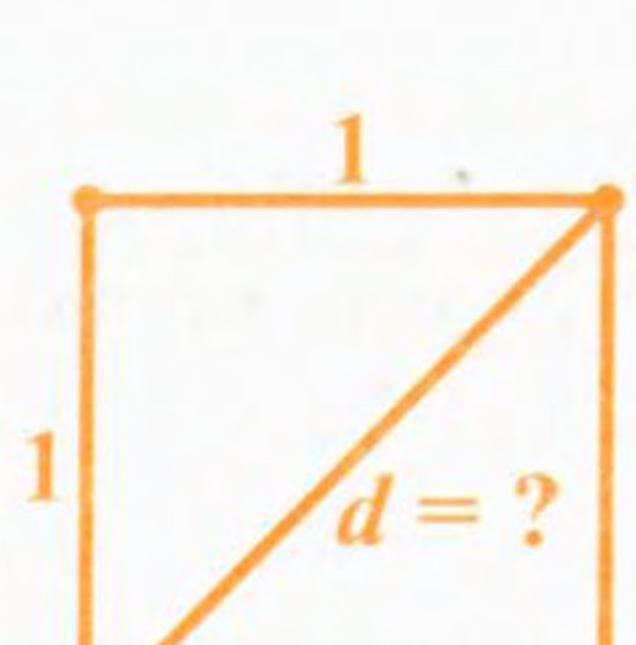
а) 120 км/хв = x м/с; **б)** 3,6 м/хв^2 = x м/с^2.

21. Графік функції $y=\dfrac{k}{x}$ проходить через точку (–7; 15). Чи проходить цей графік через точку (35; –3)?

§ 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

У попередніх класах ми розглядали натуральні, цілі та раціональні числа. Виявляється, що для практичних та теоретичних потреб таких чисел замало. Серед них, наприклад, немає числа, яке виражало б довжину діагоналі квадрата зі стороною 1.

У даному параграфі ми розширимо поняття числа: розглядатимемо ірраціональні та дійсні числа. З'ясуємо також: що таке квадратний корінь, арифметичний квадратний корінь, які властивості має арифметичний квадратний корінь.



13. Функція $y = x^2$

Ви знаєте, що площу квадрата обчислюють за формулою $S = a^2$, де a — довжина сторони квадрата. Оскільки кожному значенню a відповідає єдине значення площі S, то S є функцією від a. Перейшовши до прийнятих позначень аргументу й функції, матимемо функцію $y = x^2$.

Надалі розглядатимемо функцію $y = x^2$, у якій змінній x можна надавати будь-яких значень.

Побудуємо графік функції $y = x^2$. Складемо таблицю для кількох значень x та відповідних значень y:

x	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
y	9	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9

Позначимо на координатній площині точки (рис. 5), координати яких подані в таблиці. Якби для кожного значення x обчислили відповідне значення y й позначили б точки з такими координатами на координатній площині, то одержали б лінію, яка є графіком функції $y = x^2$ (рис. 6). Цю лінію називають *параболою*.

Функція $y = x^2$ має такі властивості:

1. *Область визначення функції утворюють усі числа.*

2. *Графіком функції є парабола.*

3. *Якщо $x = 0$, то $y = 0$.* Графік проходить через точку (0; 0). Цю точку називають *вершиною* параболи. Якщо $x \neq 0$, то $y > 0$. Це означає, що всі точки параболи, крім її вершини, розміщені вище від осі x.

4. *Область значень функції утворюють усі невід'ємні числа.*

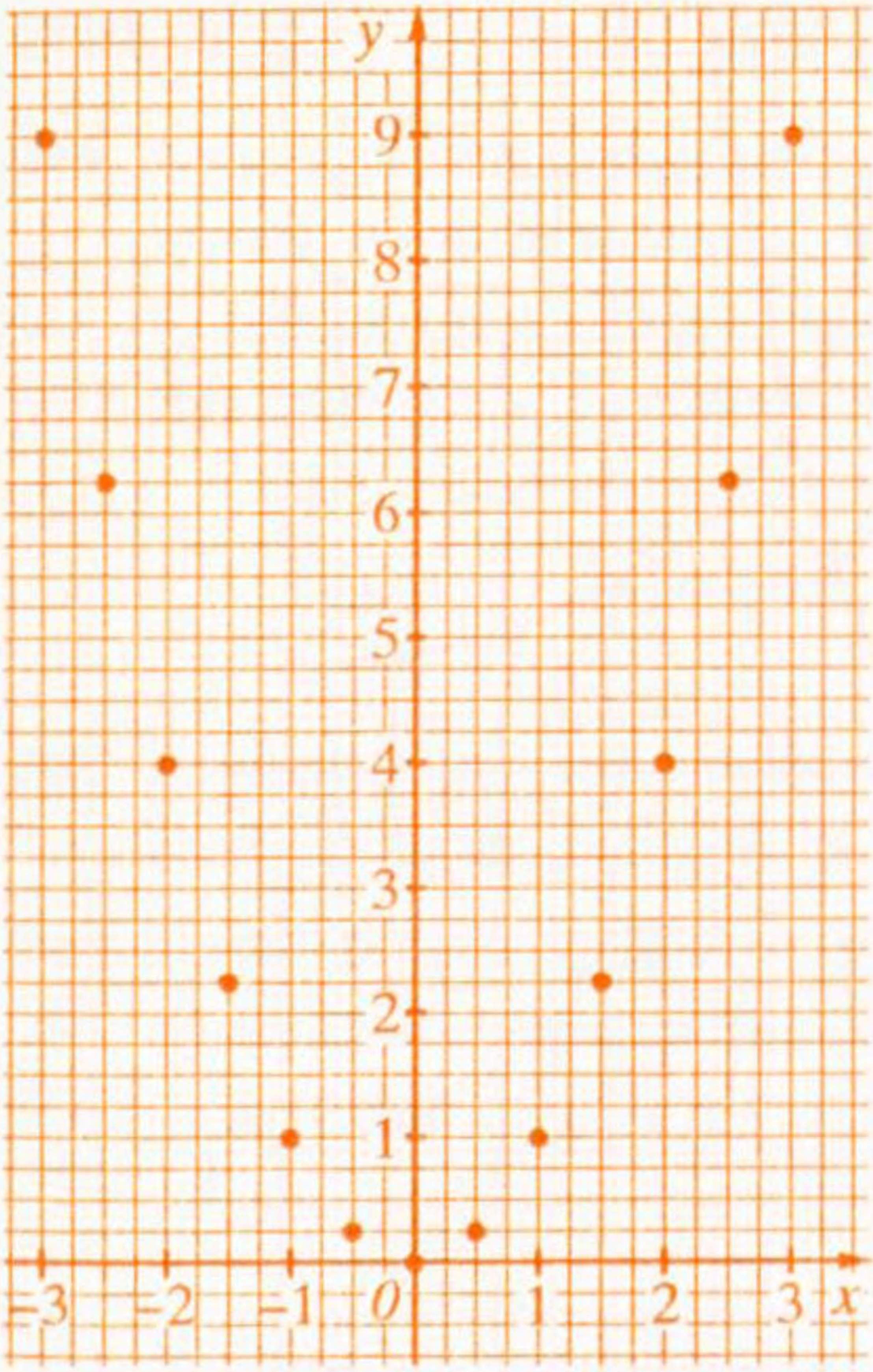


Рис. 5

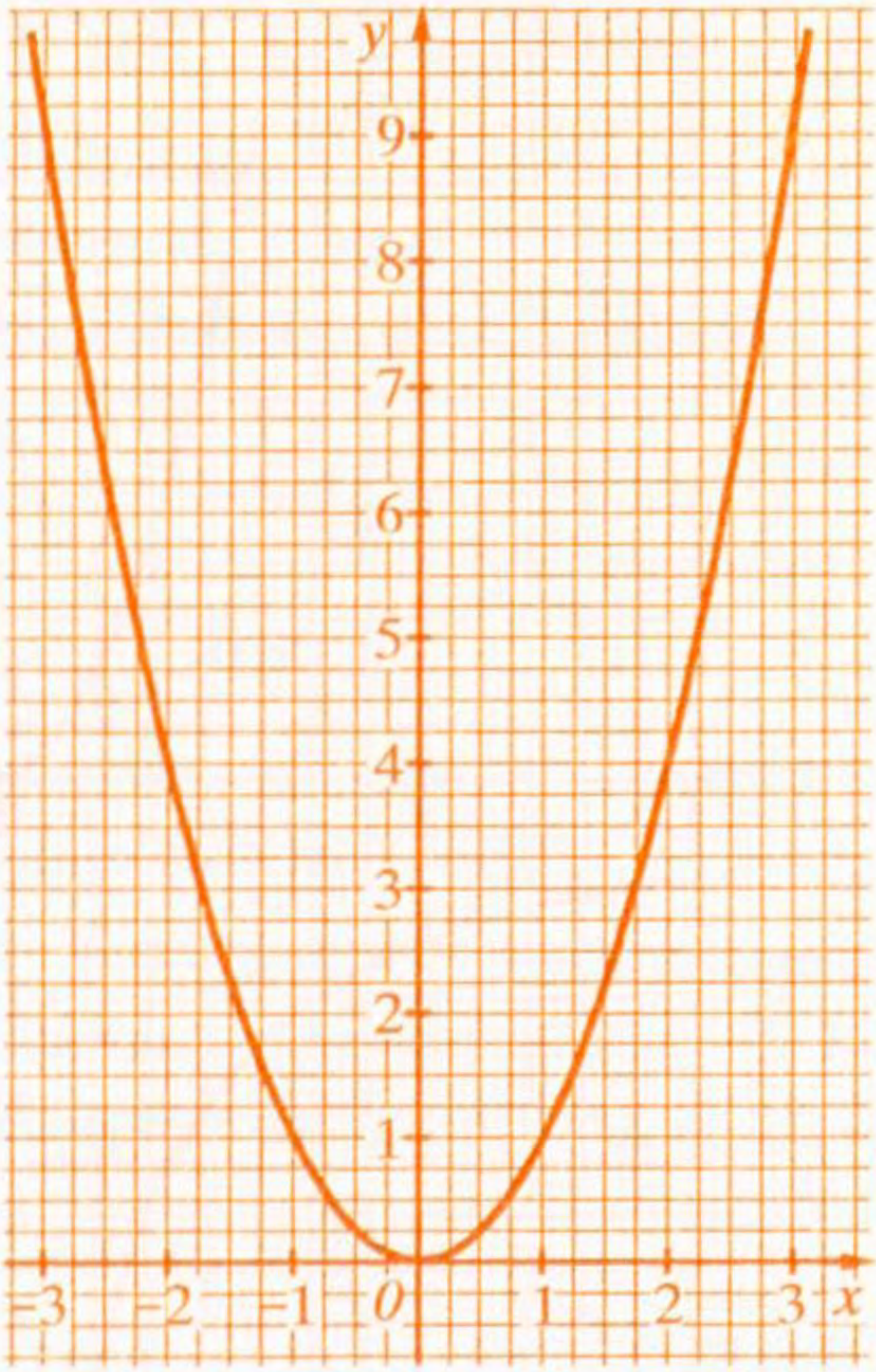


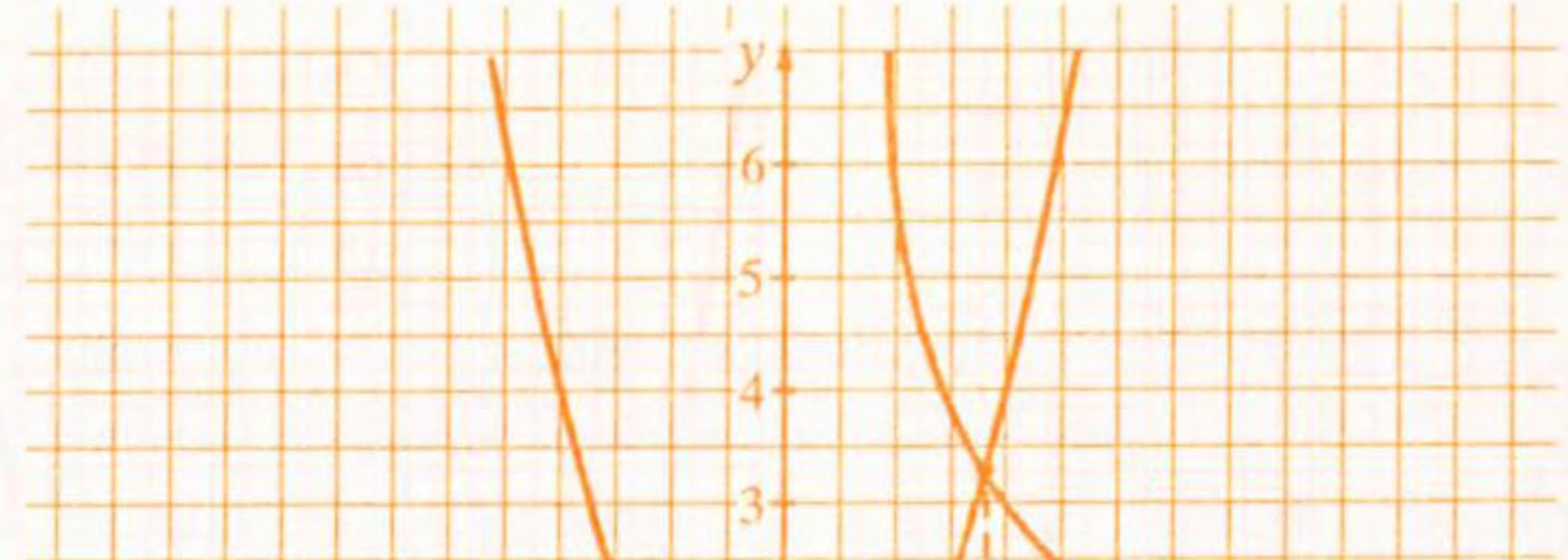
Рис. 6

5. *Графік функції симетричний відносно осі у.* Справді, протилежним значенням аргументу відповідає одне й те ж значення функції. Наприклад, протилежним значенням аргументу $x = -2$ та $x = 2$ відповідає одне й те ж значення функції $y = 4$. Отже, якщо графіку належить точка $(a; b)$, то йому належить і точка $(-a; b)$. Це й означає, що *парабола симетрична відносно осі у.*

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати графічно рівняння $x^2 = \dfrac{6}{x}$.

• Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = \dfrac{6}{x}$. Ці графіки перетинаються в точці з абсцисою $x \approx 1{,}8$.



Відповідь. ≈1,8. •

Примітка. Розв'язуючи графічно рівняння $x^2 = \frac{6}{x}$, ми знайшли не корінь рівняння, а його наближене значення. Тому, власне, рівняння ми не розв'язали. Графічний спосіб знаходження наближених значень коренів рівняння можна використовувати для розв'язання практичних задач, в яких достатньо знати не точні значення, а наближені. Крім того, графічний спосіб дозволяє встановити кількість коренів рівняння. Як видно з графіка, рівняння $x^2 = \frac{6}{x}$ має єдиний корінь.

Усно

365. Вкажіть правильні твердження:

а) область значень функції $y = x^2$ утворюють усі числа;

б) функція $y = x^2$ може набувати від'ємних значень;

в) графіком функції $y = x^2$ є гіпербола;

г) графік функції $y = x^2$ симетричний відносно осі y;

д) точка (–1; 1) належить графіку функції $y = x^2$.

Рівень А

366. Функція задана формулою $y = x^2$. Знайдіть:

а) значення y, яке відповідає таким значенням x: –4; –2,1; 0; 5;

б) значення x, яким відповідають такі значення y: 36; 49; 100; 121.

367. Для функції $y = x^2$ заповніть таблицю:

x	–5	–1,5			4
y			0	0,36	

368. Користуючись графіком функції $y = x^2$ (рис. 6), знайдіть значення аргументу, яким відповідають такі значення функції: 1,5; 3,5; 7,5.

369. Користуючись графіком функції $y = x^2$ (рис. 6), знайдіть значення функції, які відповідають таким значенням аргументу: –2,25; 0,75; 1,25.

370. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку: $A(15; 225)$; $B(-22; 464)$; $C\left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{25}\right)$?

371. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку: $M(14; 186)$; $N\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{9}\right)$?

372. Побудуйте графік функції $y = x^2$, де $-3 \le x \le 2$.

373. Побудуйте графік функції $y = x^2$, де $-2 \le x \le 3$.

Рівень Б

374. Для яких значень аргументу функції $y = x^2$ та $y = 5x$ набувають одного й того ж значення?

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій і встановіть, скільки спільних точок мають ці графіки:

375. а) $y = x^2$ і $y = x - 5$; б) $y = x^2$ і $y = 4x - 4$.

376. $y = x^2$ і $y = 3x + 1$.

Розв'яжіть графічно рівняння:

377. а) $x^2 = -\frac{1}{x}$; б) $x^2 - 3 = -2x$.

378. а) $x^2 = \dfrac{8}{x}$; б) $x^2 + x = 2$.

379. Скільки коренів має рівняння $x^2 - \dfrac{4}{x} = 0$?

380. Скільки коренів має рівняння $x^2 - 2x - 1 = 0$?

381. Вкажіть значення x, для яких значення функції $y = x^2$ менші, ніж відповідні значення функції $y = 1$.

Рівень В

382. Доведіть, що будь-яка пряма, паралельна осі y, перетинає параболу $y = x^2$.

383. Знайдіть значення k, для якого графіки функцій $y = kx + 4$ і $y = x^2$ перетинаються в точці з абсцисою -1.

384. Для яких значень x точки параболи $y = x^2$ розміщені нижче від прямої $y = -x + 6$?

Вправи для повторення

385. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 49 = 0$; б) $(3x - 2)^2 - 9 = 0$.

386. Спростіть вираз:

а) $\left(\dfrac{1}{a^3} - \dfrac{1}{b^3}\right) : \left(a^2 + ab + b^2\right)$; б) $\dfrac{2mn}{m-n} \cdot \left(\dfrac{1}{mn-n} - \dfrac{1}{mn-m}\right)$.

387. Довжина обода заднього колеса трактора дорівнює 2 м, переднього — 1,5 м. На якій відстані переднє колесо робить на 10 обертів більше, ніж заднє?

388*. Температуру можна вимірювати за шкалами Цельсія і Фаренгейта. Відомо, що 0 градусам за Цельсієм відповідає 32 градуси за Фаренгейтом, а 100 градусам за Цельсієм відповідає 212 градусів за Фаренгейтом.

а) Яку температуру повітря показує термометр зі шкалою Фаренгейта, якщо термометр зі шкалою Цельсія показує 20 градусів?

б) Знайдіть температуру, яка і за шкалою Цельсія, і за шкалою Фаренгейта виражається одним і тим же числом.

14. Квадратний корінь. Арифметичний квадратний корінь

1. Квадратні корені. Розглянемо задачу: знайти сторону квадрата, площа якого дорівнює 9 см^2.

Нехай сторона квадрата дорівнює x см. Тоді його площа становитиме x^2 см^2, що за умовою задачі дорівнює 9 см^2. Отже, $x^2 = 9$.

Розв'яжемо одержане рівняння графічно. Парабола $y = x^2$ перетинає пряму $y = 9$ у двох точках з абсцисами 3 і –3 (див. рис. 7). Тому коренями рівняння $x^2 = 9$ є два числа $x = 3$ та $x = -3$.

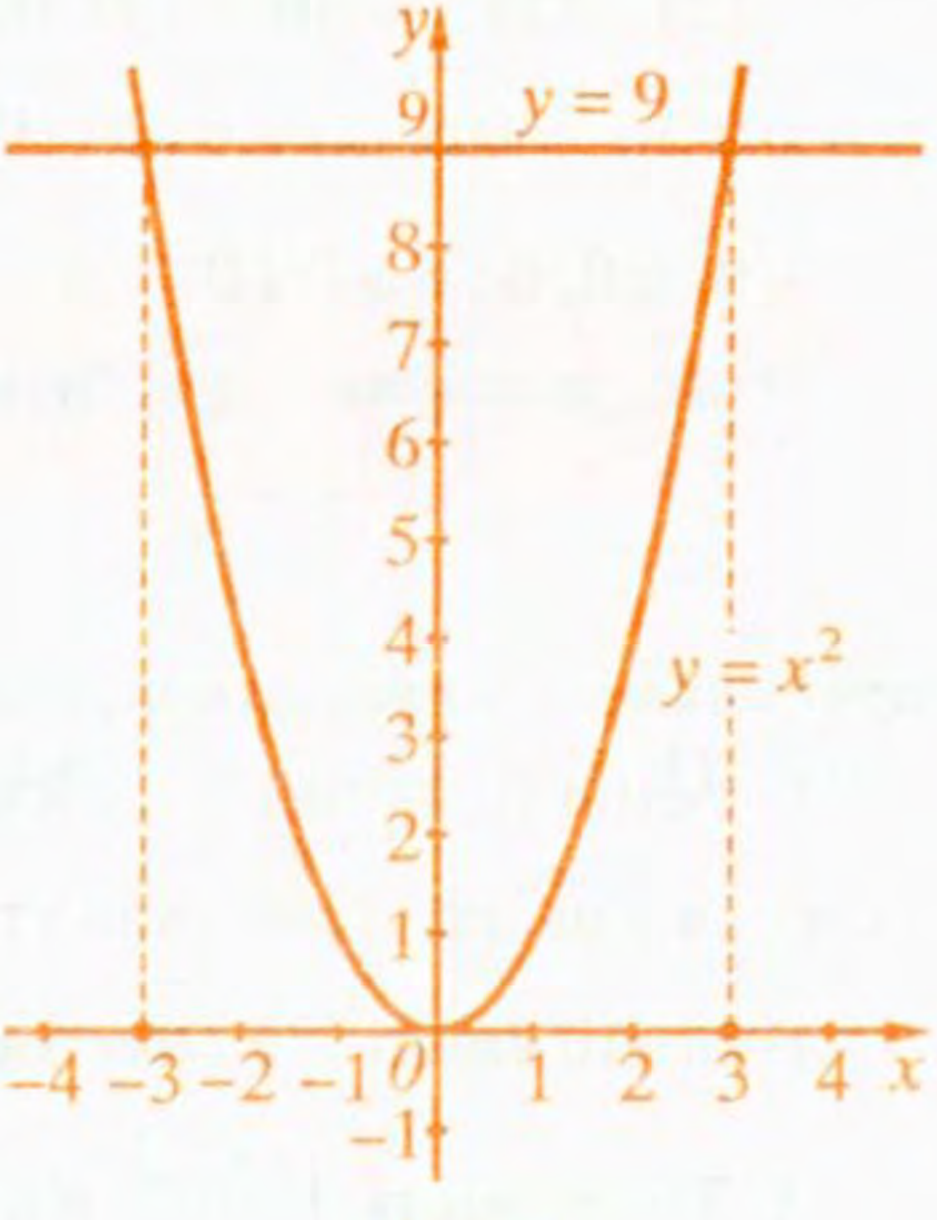


Рис. 7

Довжина сторони квадрата не може виражатися від'ємним числом. Отже, шукана сторона дорівнює 3 см.

Розв'язуючи задачу, ми знайшли числа 3 і –3, квадрати яких дорівнюють 9. Кожне з цих чисел називають *квадратним коренем* з числа 9.

Означення | **Квадратним коренем з числа *a* називають таке число, квадрат якого дорівнює *a*.**

Квадратними коренями з числа 9, як ми вже показали, є два числа: 3 і –3.

Квадратними коренями з числа 6,25 є числа 2,5 і –2,5, бо $2{,}5^2 = 6{,}25$ і $(-2{,}5)^2 = 6{,}25$.

Квадратним коренем з числа 0 є тільки число 0, бо тільки квадрат нуля дорівнює нулю.

Квадратних коренів з числа –9 не існує, бо немає чисел, квадрат яких дорівнював би від'ємному числу.

2. Арифметичний квадратний корінь. Числа 3 і –3 є квадратними коренями з числа 9. Невід'ємний з цих коренів, тобто число 3, називають *арифметичним квадратним коренем* з числа 9.

Означення | **Арифметичним квадратним коренем з числа *a* називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює *a*.**

Арифметичний квадратний корінь з числа a позначають $\sqrt{a}$ ($\sqrt{\ }$ — знак арифметичного квадратного кореня). Вираз $\sqrt{a}$ читають: квадратний корінь з a (правильно було б: арифметичний квадратний корінь з a, але під час читання слово «арифметичний» опускають).

Отже, $\sqrt{9} = 3$ (читають: квадратний корінь з дев'яти дорівнює три).

За означенням арифметичного квадратного кореня:

$\sqrt{121} = 11$, бо число 11 невід'ємне ($11 \geq 0$) і $11^2 = 121$;

$\sqrt{0,36} = 0,6$, бо $0,6 \geq 0$ і $0,6^2 = 0,36$;

$\sqrt{0} = 0$, бо $0 \geq 0$ і $0^2 = 0$.

Отже, ***рівність***

$$\sqrt{a} = b$$

***є правильною, якщо виконуються дві умови*: 1) $b \geq 0$; 2) $b^2 = a$.**

Коренів із числа –1 не існує, тому не існує й арифметичного квадратного кореня з цього числа. Кажуть, що вираз $\sqrt{-1}$ не має змісту.

Взагалі, ***вираз* $\sqrt{a}$ *має зміст, якщо* $a \geq 0$.**

3. Тотожність $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \geq 0$. Оскільки $\sqrt{a}$ — це таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a, то:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad (a \geq 0).$$

Наприклад, $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$, $\left(\sqrt{1,5}\right)^2 = 1,5$.

4. Добування квадратного кореня. Знаходження значення арифметичного квадратного кореня іноді називають добуванням квадратного кореня. Добувати квадратні корені з натуральних чисел, які є точними квадратами, можна за таблицею квадратів (див. форзац). Нехай потрібно знайти $\sqrt{5476}$. За таблицею квадратів знаходимо, що число 5476 є квадратом числа 74, тому $\sqrt{5476} = 74$. Зрозуміло, що за таблицею квадратів не можна знайти значення квадратного кореня з натурального числа, які не є точним квадратом або квадрат якого не поміщено у таблицю.

Для добування квадратного кореня з числа можна використати мікрокалькулятор. Для цього потрібно ввести число в мікрокалькулятор, а потім натиснути клавішу $\boxed{\sqrt{}}$. На екрані мікрокалькулятора з'явиться значення кореня.

Знайдемо $\sqrt{111{,}9}$. Уведемо в мікрокалькулятор число 111,9 і натиснемо клавішу $\boxed{\sqrt{}}$. На екрані з'явиться число 10,5782796 — наближене значення $\sqrt{111{,}9}$. Одержаний результат округлюють до потрібного числа знаків. Наприклад, округливши результат до тисячних, отримаємо: $\sqrt{111{,}9} \approx 10{,}578$.

Знайдемо $\sqrt{11943936}$. Уведемо в мікрокалькулятор число 11943936 і натиснемо клавішу $\boxed{\sqrt{}}$. На екрані з'явиться число 3456 — точне значення $\sqrt{11943936}$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Довести, що $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$.

• Число 0,2 невід'ємне і його квадрат дорівнює 0,04 ($0{,}2^2 = 0{,}04$). Тому $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$. •

Вправа 2. Знайти значення виразу $\sqrt{49} \cdot \sqrt{0{,}25} - \sqrt{0{,}2 \cdot 0{,}8}$.

• $\sqrt{49} \cdot \sqrt{0{,}25} - \sqrt{0{,}2 \cdot 0{,}8} = 7 \cdot 0{,}5 - \sqrt{0{,}16} = 3{,}5 - 0{,}4 = 3{,}1$. •

Усно

389. Знайдіть квадратні корені з числа; арифметичний квадратний корінь з числа:

а) 49; б) 1; в) 0; г) –16.

390. Доведіть, що:

а) $\sqrt{81} = 9$; б) $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$.

391. Чи є правильною рівність?

а) $\sqrt{36} = 8$; б) $\sqrt{36} = -6$; в) $\sqrt{36} = 6$.

392. Чи має зміст вираз?

а) $\sqrt{256}$; б) $\sqrt{-16}$; в) $\sqrt{-2\cdot(-8)}$.

393. Для яких значень x має зміст вираз?

а) $\sqrt{x}$; б) $\sqrt{x^2}$; в) $\left(\sqrt{x}\right)^2$.

394. Знайдіть значення виразу:

а) $\left(\sqrt{3}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{4,32}\right)^2$; в) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$.

Рівень А

Обчисліть:

395. а) $\sqrt{25}$; б) $\sqrt{1}$; в) $\sqrt{144}$; г) $\sqrt{225}$;

д) $\sqrt{0,09}$; е) $\sqrt{0,64}$; є) $\sqrt{1,21}$; ж) $\sqrt{4,41}$.

396. а) $\sqrt{36}$; б) $\sqrt{81}$; в) $\sqrt{196}$; г) $\sqrt{400}$;

д) $\sqrt{0,01}$; е) $\sqrt{0,25}$; є) $\sqrt{2,25}$; ж) $\sqrt{3,24}$.

397. а) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{49}}$; в) $\sqrt{\frac{36}{81}}$; г) $\sqrt{\frac{16}{225}}$.

398. а) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{1}{81}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{121}}$; г) $\sqrt{\frac{100}{169}}$.

Доведіть, що:

399. а) $\sqrt{3,61}=1,9$; б) $\sqrt{0,0121}=0,11$.

400. а) $\sqrt{20,25}=4,5$; б) $\sqrt{0,0081}=0,09$.

Знайдіть значення виразу:

401. а) $\sqrt{36}+\sqrt{64}$; б) $\sqrt{196}\cdot\sqrt{0,25}$;

в) $3\sqrt{1,69}-\sqrt{4}$; г) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{6,25}-1,5\sqrt{49}$;

д) $\sqrt{81}+\sqrt{225}-\sqrt{441}$; е) $\sqrt{1600}:\sqrt{6400}-5\sqrt{0,25}$;

є) $\sqrt{0,7\cdot 0,8-0,2}$; ж) $\sqrt{11,36+0,8\cdot 5,8}$.

402. а) $\sqrt{100}-\sqrt{49}$; б) $\sqrt{144}:\sqrt{36}$;

в) $\sqrt{1,96}+2\sqrt{1,44}$; г) $\sqrt{0,36}\cdot\sqrt{900}-17\sqrt{9}$;

д) $\sqrt{2,7\cdot 0,5+0,09}$; е) $\sqrt{1,09-0,4\cdot 2,7}$.

403. а) $\sqrt{2x+3}$, якщо $x=3$; $x=-1$; $x=0,12$;

б) $\sqrt{a-2b}$, якщо $a=8$, $b=2$; $a=-3$, $b=-14$.

404. $\sqrt{4a-3}$, якщо $a=1$; $a=7$; $a=31$; $a=0,76$.

405. а) $\left(-\sqrt{7}\right)^2$; б) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; в) $\left(-3\sqrt{5}\right)^2$.

406. а) $\left(5\sqrt{2}\right)^2$; б) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2$; в) $10\left(\sqrt{3,2}\right)^2$.

Знайдіть за допомогою таблиці квадратів значення квадратного кореня:

407. а) $\sqrt{361}$; б) $\sqrt{1444}$; в) $\sqrt{4096}$; г) $\sqrt{8836}$.

408. а) $\sqrt{576}$; б) $\sqrt{2116}$; в) $\sqrt{5929}$; г) $\sqrt{9216}$.

Знайдіть за допомогою мікрокалькулятора значення квадратного кореня (результат округліть до сотих):

409. а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{50}$; в) $\sqrt{1,6}$; г) $\sqrt{4,38}$.

410. а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{12,5}$; г) $\sqrt{0,15}$.

Рівень Б

411. Для яких значень x має зміст вираз?

а) $\sqrt{5x}$; б) $\sqrt{-5x}$; в) $\sqrt{5(-x)^2}$.

Чи має зміст вираз?

412. а) $\sqrt{15\cdot17-16^2}$; б) $\sqrt{(-0,3)\cdot(-1,8)-0,5}$; в) $\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2-\frac{1}{3}}$.

413. а) $\sqrt{21^2-24\cdot20}$; б) $\sqrt{-3,6-2:(-0,5)}$; в) $\sqrt{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}-\frac{2}{25}}$.

Знайдіть значення виразу:

414. а) $10\sqrt{0,0049}+4\sqrt{0,49}$; б) $\sqrt{\frac{16}{81}}:\sqrt{\frac{64}{225}}+\sqrt{\frac{1}{9}}$;

в) $\frac{2}{9}\sqrt{81}+\sqrt{2,25}+2\sqrt{3,24}$; г) $\sqrt{0,09}\cdot\sqrt{2500}-0,7\sqrt{900}$;

д) $\frac{3}{7}\left(\sqrt{441}-\sqrt{196}\right)\left(\sqrt{1,69}-\sqrt{2,89}\right)$; е) $\left(\sqrt{0,0016}-\sqrt{16}\right):\left(\sqrt{18\frac{7}{9}}-\frac{1}{3}\right)$.

415. а) $3\sqrt{0,0009}+9\sqrt{\frac{1}{10000}}$; б) $\sqrt{2\frac{7}{9}}:\left(\sqrt{\frac{4}{81}}+\sqrt{\frac{16}{81}}\right)$;

в) $\sqrt{0,0144}+2\sqrt{0,0225}\cdot\sqrt{\frac{4}{9}}$; г) $\frac{5}{9}\left(\sqrt{40000}-\sqrt{22500}\right):\left(\sqrt{1}-\sqrt{\frac{16}{81}}\right)$.

Рівень В

416. Доведіть, що вираз має зміст для будь-якого значення x:

а) $\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)+1}$; б) $\sqrt{x^2-8x+17}$.

417. Для яких значень x є правильною рівність?

а) $\sqrt{x}=-x$; б) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=0$; в) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$.

Вправи для повторення

418. Знайдіть значення виразу:

а) $25^2+(-25)^2$; б) $1,25^2-(-1,25)^2$; в) $\left(2\frac{2}{7}\right)^2-2\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2$.

419. Знайдіть значення виразів a^2, $(-a)^2$, $|a|^2$, якщо $a = -1{,}2$.

420. Знайдіть найменше значення виразу:

а) $x^2 + 2$; **б)** $x^2 - 1$; **в)** $(2x)^2 + (3x)^2$.

421. На трьох полицях стоять книжки. На нижній полиці книжок удвічі менше, ніж на двох інших, на середній — утричі менше, ніж на двох інших, а на верхній полиці стоїть 30 книжок. Скільки всього книжок на полицях?

422*. Пшеницею засіяли 65% першого поля і 45% другого поля. Відомо, що на першому і другому полях разом засіяли 53% загальної площі обох полів. Яку частину загальної площі обох полів становить площа першого поля?

15. Рівняння $x^2 = a$

Розглянемо рисунок 8, на якому зображена парабола $y = x^2$ та прямі $y = a$ для трьох випадків: $a > 0$, $a = 0$ та $a < 0$.

Якщо $a > 0$, то пряма $y = a$ перетинає параболу у двох точках з абсцисами $-\sqrt{a}$ й $\sqrt{a}$. Тому в даному випадку коренями рівняння $x^2 = a$ є числа: $x = -\sqrt{a}$ й $x = \sqrt{a}$.

Якщо $a = 0$, то матимемо пряму $y = 0$, яка має з параболою одну спільну точку $(0; 0)$. Отже, рівняння $x^2 = 0$ має єдиний корінь $x = 0$.

Якщо $a < 0$, то пряма $y = a$ не перетинає параболу. В даному випадку рівняння $x^2 = a$ коренів не має.

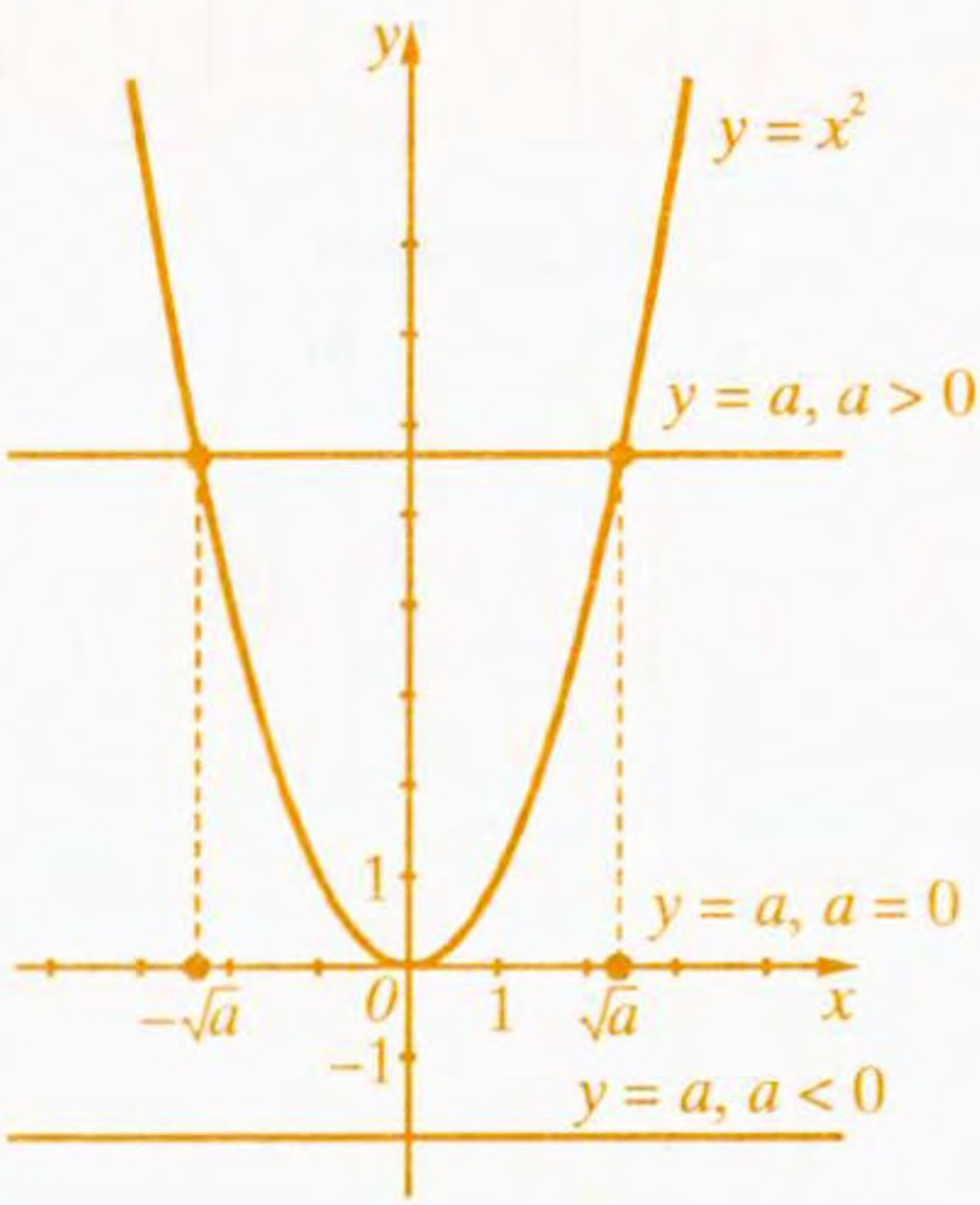


Рис. 8

Отже, рівняння $x^2 = a$:

1) має два корені $x = -\sqrt{a}$ і $x = \sqrt{a}$, якщо $a > 0$;

2) має єдиний корінь $x = 0$, якщо $a = 0$;

3) не має коренів, якщо $a < 0$.

Наприклад,

рівняння $x^2 = 4$ має два корені $x = -\sqrt{4} = -2$ і $x = \sqrt{4} = 2$;

рівняння $x^2 = 3$ має два корені $x = -\sqrt{3}$ і $x = \sqrt{3}$;

рівняння $x^2 = -3$ не має коренів.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати рівняння:

а) $2x^2 - 14 = 0$; б) $3 + 2x^2 = 0$; в) $(2x - 1)^2 = 9$.

● а) $2x^2 - 14 = 0$; $2x^2 = 14$; $x^2 = 7$; $x = -\sqrt{7}$ або $x = \sqrt{7}$.

Відповідь. $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$.

б) $3 + 2x^2 = 0$; $2x^2 = -3$; $x^2 = -1{,}5$ — рівняння коренів не має, бо $-1{,}5 < 0$.

Відповідь. Рівняння коренів не має.

в) $(2x - 1)^2 = 9$;

1) $2x - 1 = -3$; $2x = -2$; $x = -1$; 2) $2x - 1 = 3$; $2x = 4$; $x = 2$.

Відповідь. -1; 2. ●

Усно

423. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 = 49$; б) $x^2 = 11$; в) $x^2 = 0$; г) $x^2 = -11$.

Рівень А

Розв'яжіть рівняння:

424. а) $x^2 = 121$; б) $x^2 = 0{,}16$; в) $x^2 = 5$; г) $x^2 = 0{,}3$;

д) $x^2 = \frac{1}{4}$; е) $x^2 = \frac{1}{3}$; є) $x^2 = -1$; ж) $x^2 = 1{,}44$.

425. а) $3x^2 = 48$; б) $x^2 + 8 = 57$; в) $44 - x^2 = 8$; г) $-2x^2 = 18$;

д) $-0{,}4x^2 = -8$; е) $\frac{1}{2}x^2 = 1$; є) $12 + 3x^2 = 6$; ж) $2(x^2 + 1) = 10$.

426. а) $x^2 = 144$; б) $x^2 = 15$; в) $x^2 = 1{,}21$; г) $x^2 = \frac{2}{5}$;

д) $5x^2 = 20$; е) $2 - x^2 = 4$; є) $4x^2 + 5 = 41$; ж) $3(x^2 + 4) = 9$.

427. Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда. Його довжина удвічі більша від ширини, висота дорівнює 4 дм, а об'єм — 72 дм^3. Знайдіть довжину й ширину акваріума.

428. Довжина ділянки прямокутної форми утричі більша від ширини. Знайдіть розміри ділянки, якщо її площа дорівнює 108 м^2.

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння:

429. а) $2(x^2 - 3) + 3(2x^2 + 1) = 5$; б) $(2x - 5)^2 + (2x + 5)^2 = 62$;

в) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$; г) $(5x + 1)^2 - 2 = 10x$.

430. а) $3x^2 - 8 + 2(3 - x^2) = 1$; б) $(2x - 1)(2x + 1) = x^2 + 2$;

в) $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 = 146$; г) $9 - (0{,}5x - 1)^2 = x$.

431. а) $(2x - 1)^2 = 16$; б) $(3 - x)^2 = 2{,}25$.

432. а) $(x + 2)^2 = 49$; б) $(1 - 2x)^2 = 121$.

433. Добуток двох протилежних чисел на 49 менший від їх суми. Знайдіть ці числа.

434. Добуток двох послідовних цілих чисел більший від меншого з цих чисел на 4. Знайдіть ці числа.

Рівень В

435. Розв'яжіть рівняння:

а) $((x^2 - 1)^2 - 2)^2 = 4$; б) $\left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot x = 2x^2 - 1$.

436. Для яких значень a рівняння $x^2 = a^2 - 2a$ має один корінь?

Вправи для повторення

437. Розв'яжіть рівняння:

а) $\dfrac{10x+20}{x^2-2x-8}=0$; б) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}=0$.

438. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x+2y=5$ і $3x-y=-6$.

439*. Для яких значень a система рівнянь $\begin{cases} x-2y=5; \\ 3x+ay=2 \end{cases}$ не має розв'язків?

440. Три робітники виготовили партію деталей. Перший робітник виготовив $\frac{2}{5}$ усіх деталей, другий — 75% тієї кількості, що виготовив перший, а третій — на 6 деталей менше, ніж перший. Скільки всього деталей виготовили робітники?

16. Ірраціональні та дійсні числа

1. Натуральні, цілі та раціональні числа. У курсі математики ми вивчали натуральні, цілі та раціональні числа.

Натуральні числа

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

використовують здебільшого для лічби.

Цілі числа

$$\ldots\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

— це натуральні числа, протилежні їм числа й число 0.

Раціональні числа — це цілі та дробові числа. Прикладами раціональних чисел є 1,2; –3,65; $\frac{2}{5}$; $-3\frac{4}{7}$; 2; 0; –3 тощо.

Усі натуральні числа утворюють *множину натуральних чисел*, яку позначають буквою N; усі цілі числа утворюють *множину цілих чисел*, яку позначають буквою Z; усі раціональні числа утворюють *множину раціональних чисел*, яку позначають буквою Q. Кожне натуральне число є цілим. Тому множина натуральних чисел є частиною (підмножиною) множини цілих чисел. У свою чергу, множина цілих чисел є підмножиною множини раціональних чисел (див. рис. 9).

Рис. 9

Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне. Наприклад,

$$1\frac{2}{3}=\frac{5}{3};\quad -3{,}7=\frac{-37}{10};\quad 2=\frac{2}{1};\quad -3=\frac{-3}{1}.$$

Тому кажуть, що *раціональні числа — це числа, які можна подати у вигляді дробу* $\frac{m}{n}$, *де* m *— ціле число, а* n *— натуральне.*

Раціональні числа можна подавати також у вигляді десяткових дробів. Наприклад, щоб подати раціональні числа $\frac{3}{8}$ і $\frac{18}{55}$ у вигляді десяткових дробів, потрібно чисельники дробів поділити на їхні знаменники.

$$\begin{array}{r|l}
3 & 8 \\ \hline
30 & 0{,}375 \\
-24 & \\ \hline
60 & \\
-56 & \\ \hline
40 & \\
-40 & \\ \hline
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
18 & 55 \\ \hline
180 & 0{,}32727... \\
-165 & \\ \hline
150 & \\
-110 & \\ \hline
400 & \\
-385 & \\ \hline
150 & \\
-110 & \\ \hline
400 & \\
-385 & \\ \hline
15 &
\end{array}$$

$$\frac{3}{8}=0{,}375 \qquad\qquad \frac{18}{55}=0{,}32727...=0{,}3(27)$$

Раціональне число $\frac{3}{8}$ подали у вигляді скінченного десяткового дробу 0,375, а раціональне число $\frac{18}{55}$ — у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу 0,3(27) з періодом 27.

Скінченний десятковий дріб 0,375 можна записати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу, дописуючи праворуч у вигляді десяткових знаків безліч нулів: $0{,}375 = 0{,}375000... = 0{,}375(0)$.

Отже, обидва раціональні числа $\frac{3}{8}$ і $\frac{18}{55}$ можна подати у вигляді нескінченних десяткових періодичних дробів:

$$\frac{3}{8}=0{,}375000...=0{,}375(0);\qquad \frac{18}{55}=0{,}32727...=0{,}3(27).$$

Взагалі, ***будь-яке раціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу***. Наприклад:

$$15{,}6 = 15{,}6000... = 15{,}6(0); \quad 3 = 3{,}000... = 3{,}(0);$$

$$-\frac{5}{9} = -0{,}555... = -0{,}(5); \quad -2\frac{3}{4} = -2{,}75000... = -2{,}75(0).$$

Правильно і навпаки: ***будь-який нескінченний десятковий періодичний дріб є записом деякого раціонального числа***. Наприклад:

$$0{,}(6) = \frac{2}{3}; \quad 1{,}(27) = 1\frac{3}{11}; \quad -0{,}2(0) = -0{,}2 = -\frac{1}{5}.$$

Щоб переконатися, що дані рівності є правильними, досить раціональні числа $\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{11}$ і $-\frac{1}{5}$ подати у вигляді нескінченних десяткових дробів.

2. Ірраціональні числа. Розглянемо приклад.

Нехай маємо квадрат $ABCD$, сторона якого дорівнює одиничному відрізку (рис. 10). Позначимо довжину діагоналі AC через x. На цій діагоналі побудуємо квадрат $ACEF$, як показано на рисунку. Площа квадрата $ABCD$ дорівнює 1, площа трикутника ACD дорівнює $\frac{1}{2}$ — половині площі квадрата, а площа квадрата $ACEF$ — $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$. З іншого боку, площа квадрата $ACEF$ дорівнює квадрату сторони AC, тобто x^2. Тому $x^2 = 2$. Одержали, що довжина x діагоналі AC має бути додатним числом, квадрат якого дорівнює 2. Однак серед раціональних чисел немає числа, квадрат якого дорівнює 2 (доведення у рубриці «Для тих, хто хоче знати більше»).

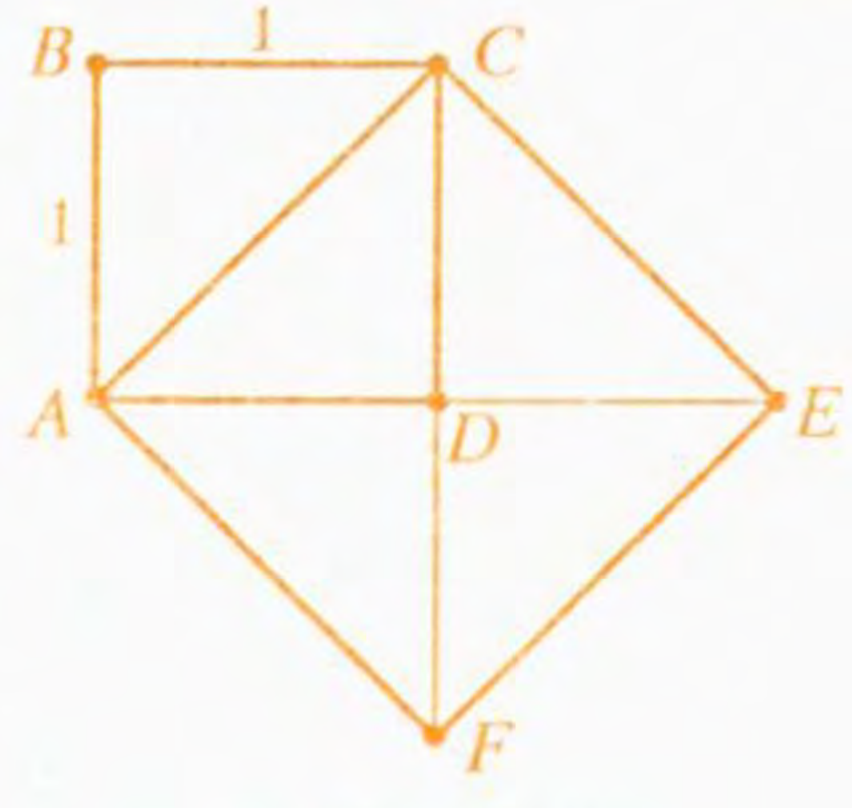


Рис. 10

Отже, число x, яке визначає довжину діагоналі квадрата зі стороною 1, не є раціональним числом.

Оскільки число x є додатним і його квадрат дорівнює 2, то $x = \sqrt{2}$. Таким чином, $\sqrt{2}$ — не раціональне число, тобто його не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне.

Число, яке не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне, називають *ірраціональним*. Префікс «ір» означає заперечення: ірраціональне — не раціональне.

Отже, $\sqrt{2}$ — ірраціональне число. Якщо шукати значення $\sqrt{2}$ за допомогою мікрокалькулятора, то одержимо наближене значення

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356.$$

Точне ж значення

$$\sqrt{2} = 1,41421356...$$

подається у вигляді нескінченного десяткового неперіодичного дробу (цей дріб не може бути періодичним, бо значення $\sqrt{2}$ не є раціональним числом).

Будь-яке ірраціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового неперіодичного дробу.

Прикладами ірраціональних чисел є: $\sqrt{3} = 1,732...$, $-\sqrt{10} = -3,162...$. Взагалі, якщо натуральне число n не є точним квадратом, то числа $\sqrt{n}$ і $-\sqrt{n}$ є ірраціональними.

Ірраціональними є також числа:

$\pi = 3,1415926...$, яке виражає відношення довжини кола до його діаметра;

0,505005000500005... (кількість нулів між п'ятірками послідовно збільшується на 1).

3. Дійсні числа. *Раціональні та ірраціональні числа утворюють множину дійсних чисел*, яку позначають буквою $\boldsymbol{R}$. Кожне дійсне число a можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу. Якщо цей дріб періодичний, то дійсне число a є раціональним; якщо ж цей дріб неперіодичний, то дійсне число a є ірраціональним. Множини натуральних, цілих та раціональних чисел є підмножинами множини дійсних чисел (див. рис. 11).

Рис. 11

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, ділити (на відмінні від нуля числа), підносити до степеня, до того ж для цих дій виконуються властивості, встановлені для дій над раціональними числами. Зокрема, для дій додавання і множення справджуються переставна, сполучна і розподільна властивості:

переставна властивість: $a + b = b + a$; $ab = ba$;

сполучна властивість: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab)c = a(bc)$;

розподільна властивість: $a(b + c) = ab + ac$,

де a, b і c — будь-які дійсні числа.

Наприклад: $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$; $3\cdot(\pi+\sqrt{5})=3\cdot\pi+3\cdot\sqrt{5}$.

Будь-які два дійсні числа можна порівняти. Якщо числа записані у вигляді нескінченних десяткових дробів, то їх порівнюють за тими ж правилами, що й скінченні десяткові дроби. Наприклад,

$$5{,}13869... < 5{,}14308...,$$

бо дані числа мають однакові цілі частини, однакове число десятих, однак друге число має більше число сотих.

4. Етапи розвитку поняття числа. В історії розвитку поняття числа відправною точкою є натуральні числа, які виникли дуже давно й служили для підрахунку кількості предметів. Кожне наступне розширення й узагальнення поняття числа проходило під впливом потреб практики, а також під впливом потреб самої математики.

Так, необхідність точніше вимірювати розміри земельних ділянок, визначати час, вести торгові розрахунки тощо привела до поняття дробового додатного числа.

Ідея введення від'ємного числа більше пов'язана з потребами самої математики — від'ємні числа потрібні були для розв'язування рівнянь.

Уведення ірраціональних та дійсних чисел розв'язало проблему вимірювання довжини відрізка, адже за вибраної одиниці вимірювання дійсним числом виражається довжина будь-якого відрізка.

(Детальніше про історію розвитку поняття числа читайте в розділі «Цікаво знати» наприкінці параграфа.)

Для тих, хто хоче знати більше

Доведемо, що серед раціональних чисел немає числа, квадрат якого дорівнює 2.

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що раціональне число x, квадрат якого дорівнює 2, існує. Подамо число x у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, n — натуральне. Тоді:

$$x^2 = 2; \quad \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2; \quad \frac{m^2}{n^2} = 2; \quad m^2 = 2n^2.$$

З рівності $m^2 = 2n^2$ випливає, що m^2 — парне число. Тоді й число m має бути парним (якби число m було непарним, то й число m^2 було б непарним). Нехай $m = 2k$, де k — ціле число. Підставивши в рівність $m^2 = 2n^2$ замість m число $2k$, знайдемо: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $2k^2 = n^2$. З рівності $2k^2 = n^2$ випливає, що число n^2, а з ним і число n, — парне. Оскільки числа m і n парні, то дріб $\frac{m}{n}$ можна скоротити на 2. Це суперечить тому, що дріб $\frac{m}{n}$ нескоротний.

Отже, припущення, що існує раціональне число, квадрат якого дорівнює 2, неправильне. Тому правильним є твердження, яке потрібно було довести.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти наближене значення виразу $a - b$, де $a = 3{,}10346\ldots$, $b = 1{,}78052\ldots$, округливши попередньо значення a і b:

а) до сотих; **б)** до тисячних.

• **а)** $a \approx 3{,}10$; $b \approx 1{,}78$; $a - b \approx 3{,}10 - 1{,}78 = 1{,}32$;

б) $a \approx 3{,}103$; $b \approx 1{,}781$; $a - b \approx 3{,}103 - 1{,}781 = 1{,}322$. •

Вправа 2. Порівняти числа:

а) $\sqrt{2}$ і 1,415; **б)** $-\sqrt{2}$ і $-1{,}4154$; **в)** $-\sqrt{2}$ і 1,5.

• **а)** За допомогою мікрокалькулятора знаходимо: $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$. Оскільки $1{,}4142135\ldots < 1{,}415$, то $\sqrt{2} < 1{,}415$.

б) $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots < 1{,}4154$, тому $-\sqrt{2} > -1{,}4154$.

в) $-\sqrt{2} < 0$, а $1{,}5 > 0$, тому $-\sqrt{2} < 1{,}5$. •

Усно

441. Які з чисел 0; $-2{,}5$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{7}$; 0,2(3); $-\sqrt{2}$; π; 0,121122111222... (кількість одиниць і двійок послідовно збільшується на 1) є раціональними? ірраціональними? Наведіть інші приклади раціональних та ірраціональних чисел.

442. Чи правильно, що:

а) будь-яке натуральне число є дійсним;

б) будь-яке ірраціональне число є дійсним;

в) будь-яке дійсне число є раціональним?

443. Вкажіть правильні твердження:

а) $\sqrt{5}$ — ірраціональне число; б) $\sqrt{5}$ — дійсне число;

в) $\sqrt{5}$ — раціональне число; г) 0,(6) — ірраціональне число.

Рівень А

Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу число:

444. а) 2,6; б) –1,48; в) 6; г) –40;

д) $\frac{3}{8}$; е) $3\frac{1}{9}$; є) $-4\frac{2}{11}$; ж) $3\frac{1}{12}$.

445. а) 1,5; б) –7,09; в) $2\frac{5}{16}$; г) $-1\frac{7}{30}$.

Порівняйте числа:

446. а) 8,998… і 9,113…; б) –0,382... і 5,117...;

в) –32,144... і –12,543...; г) –2,724... і –2,725... .

447. а) 7,351… і 7,452...; б) 0,836... і –2,938...;

в) –0,951... і –0,953...; г) –11,531... і –12,938... .

Яке з чисел більше?

448. а) 0,6 чи $\frac{3}{7}$; б) –0,327 чи $-\frac{1}{3}$;

в) 0,579... чи 0,58; г) 2,72 чи 2,(72);

д) 1,7 чи $\sqrt{3}$; е) 1,8 чи $\sqrt{3}$;

є) $\sqrt{6}$ чи –3; ж) $-\sqrt{5}$ чи –2.

449. а) 0,75 чи $\frac{5}{7}$; б) 5,338... чи 5,(33);

в) $-1\frac{2}{3}$ чи –1,68; г) –5,(31) чи –5,31;

д) 3,34 чи $\sqrt{10}$; е) 15 чи $\sqrt{226}$.

450. Запишіть у порядку зростання числа: 2,(7); 0,82; –1,95...; –0,03...; $\sqrt{5}$.

451. Запишіть у порядку спадання числа: 4,38...; –1,32; $-1\frac{1}{3}$; $\sqrt{17}$; 4,(89).

Рівень Б

452. Знайдіть наближене значення суми $x + y$, округливши доданки до сотих:

а) $x = 0{,}3849\ldots$; $y = 1{,}1020\ldots$; **б)** $x = 102{,}3120\ldots$; $y = 23{,}1023\ldots$.

453. Знайдіть наближене значення суми $x + y$, округливши доданки до десятих:

а) $x = 18{,}4105\ldots$; $y = 9{,}9981\ldots$; **б)** $x = 0{,}9018\ldots$; $y = 0{,}0799\ldots$.

Порівняйте числа:

454. **а)** 0,7129... і $\frac{5}{7}$; **б)** $2\frac{1}{3}$ і $\sqrt{5}$; **в)** $-\sqrt{2}$ і –1,4(3).

455. **а)** 1,5(4) і $1\frac{15}{29}$; **б)** –15 і $-\sqrt{224}$; **в)** 7,1(2) і $\sqrt{49{,}8}$.

Рівень В

456. Доведіть, що число 5,10100100010... (кількість нулів послідовно збільшується на 1) є ірраціональним.

457. Доведіть, що $\sqrt{3}$ — ірраціональне число.

458. Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка двох раціональних чисел є раціональним числом.

459. Доведіть, що сума раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом.

460. Чи може сума, добуток двох ірраціональних чисел бути раціональним числом?

Вправи для повторення

461. Піднесіть до квадрата:

а) $(mn)^2$; б) $\left(\frac{m}{n}\right)^2$; в) $\left(m^3\right)^2$; г) $\left(-\frac{3m^5}{2n^2}\right)^2$.

462. Знайдіть значення виразу $|2a-3|$, якщо $a=5$; $a=1{,}4$; $a=1{,}6$.

463. Два велосипедисти одночасно вирушили з пункту A до пункту B, відстань між якими дорівнює 78 км. Швидкість другого велосипедиста на 2 км/год більша, ніж швидкість першого. Прибувши до пункту B, другий велосипедист одразу ж вирушив назад і, проїхавши 4 км, зустрів першого велосипедиста. Знайдіть швидкість другого велосипедиста.

464. Через першу трубу басейн можна наповнювати водою, а через другу — випускати воду з басейна. Час, за який наповнюють басейн через першу трубу, в 2,5 разу менший від часу, за який випускають воду з повного басейну через другу трубу. Якщо відкрити обидві труби одночасно, то басейн можна наповнити за 12 год. За який час можна наповнити басейн, відкривши лише першу трубу?

17. Властивості арифметичного квадратного кореня

Нагадаємо спочатку, як ми доводимо рівність $\sqrt{81}=9$. Оскільки 1) права частина рівності є невід'ємним числом і 2) квадрат правої частини дорівнює підкореневому виразу в лівій частині ($9^2=81$), то рівність $\sqrt{81}=9$ є правильною. Такі міркування використовуватимемо для доведення властивостей арифметичного квадратного кореня, сформульованих у вигляді теорем.

1. Квадратний корінь з добутку.

Теорема **1. Корінь з добутку двох невід'ємних множників дорівнює добутку коренів із цих множників:**

$$\text{якщо } a \geq 0 \text{ і } b \geq 0, \text{ то } \sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Доведення. 1) Вирази $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ для $a \geq 0$ і $b \geq 0$ мають зміст. Оскільки $\sqrt{a} \geq 0$ і $\sqrt{b} \geq 0$, то $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \geq 0$.

2) $\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2=ab.$

Отже, вираз $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ набуває невід'ємних значень, і квадрат цього виразу дорівнює ab. Тому рівність $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ є правильною. •

Наприклад, $\sqrt{25\cdot 49}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{49}=5\cdot 7=35.$

Використовуючи теорему 1, можна знаходити корінь з добутку, який містить три і більше невід'ємних множники. Наприклад, якщо $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$, то:

$$\sqrt{abc}=\sqrt{(ab)c}=\sqrt{ab}\cdot\sqrt{c}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}.$$

Взагалі, *корінь з добутку кількох невід'ємних множників дорівнює добутку коренів з цих множників.*

2. Квадратний корінь із дробу.

Теорема 2. **Корінь із дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює кореню з чисельника, поділеному на корінь зі знаменника:**

$$\text{якщо } a\ge 0 \text{ і } b>0, \text{ то } \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доведення. 1) Вираз $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ для $a\ge 0$ і $b>0$ має зміст. Оскільки $\sqrt{a}\ge 0$ і $\sqrt{b}>0$, то $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ge 0$. 2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{a}{b}$. Отже, рівність $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ є правильною. •

Наприклад, $\sqrt{\frac{25}{49}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}=\frac{5}{7}.$

3. Квадратний корінь зі степеня.

Теорема 3. **Корінь зі степеня a^{2n}, де $a\ge 0$ і n — натуральне число, дорівнює a^n:**

$$\sqrt{a^{2n}}=a^n.$$

Доведення. 1) Оскільки $a\ge 0$, то $a^n\ge 0$. 2) $\left(a^n\right)^2=a^{2n}$. Отже, рівність $\sqrt{a^{2n}}=a^n$ є правильною. •

Наприклад, $\sqrt{5^4}=5^2=25.$

4. Тотожність $\sqrt{a^2} = |a|$. Доведемо, що для будь-якого значення a виконується рівність:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Справді, вираз $|a|$ набуває невід'ємних значень, і квадрат цього виразу дорівнює a^2 (якщо $a \geq 0$, то $|a| = a$ і $(|a|)^2 = a^2$; якщо $a < 0$, то $|a| = -a$ і $(|a|)^2 = (-a)^2 = a^2$). Отже, рівність $\sqrt{a^2} = |a|$ є правильною.

Наприклад, $\sqrt{1{,}8^2} = |1{,}8| = 1{,}8$; $\sqrt{(-35)^2} = |-35| = 35$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти значення виразу:

а) $\sqrt{36 \cdot 0{,}16}$; б) $\sqrt{128 \cdot 18}$; в) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$.

• а) $\sqrt{36 \cdot 0{,}16} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{0{,}16} = 6 \cdot 0{,}4 = 2{,}4$;

б) $\sqrt{128 \cdot 18} = \sqrt{(2 \cdot 64) \cdot (2 \cdot 9)} = \sqrt{4 \cdot 64 \cdot 9} = 2 \cdot 8 \cdot 3 = 48$;

в) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$. •

Вправа 2. Знайти значення виразу $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$.

• $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}} = \sqrt{\dfrac{3}{75}} = \sqrt{\dfrac{1}{25}} = \dfrac{1}{5}$. •

Вправа 3. Знайти значення виразу:

а) $\sqrt{1{,}5^4}$; б) $\sqrt{0{,}1^6}$; в) $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{3^2}$.

• а) $\sqrt{1{,}5^4} = 1{,}5^2 = 2{,}25$;

б) $\sqrt{0{,}1^6} = 0{,}1^3 = 0{,}001$.

в) $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{3^2} = |-5| + |3| = 5 + 3 = 8$. •

Вправа 4. Спростити вираз $\sqrt{4a^2(-b)^2}$, де $a \leq 0$, $b \geq 0$.

• $\sqrt{4a^2(-b)^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{(-b)^2} = 2|a| \cdot |-b| = 2|a| \cdot |b|$, бо $|-b| = |b|$.

Оскільки $a \le 0$, $b \ge 0$, то $|a| = -a$, $|b| = b$. Тому $2|a||b| = 2(-a)b = -2ab$. •

Вправа 5. Знайти значення виразу $\sqrt{9a^2 + 6a + 1}$, якщо $a = -5$; $a = 0{,}7$.

• $\sqrt{9a^2 + 6a + 1} = \sqrt{(3a+1)^2} = |3a + 1|$.

Якщо $a = -5$, то $|3a + 1| = |3 \cdot (-5) + 1| = |-14| = 14$.

Якщо $a = 0{,}7$, то $|3a + 1| = |3 \cdot 0{,}7 + 1| = |3{,}1| = 3{,}1$. •

Усно

Знайдіть значення виразу:

465. а) $\sqrt{16 \cdot 25}$; б) $\sqrt{81 \cdot 4}$; в) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$; г) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$.

466. а) $\sqrt{\frac{36}{49}}$; б) $\sqrt{\frac{64}{81}}$; в) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$.

467. а) $\sqrt{2^2}$; б) $\sqrt{2^4}$; в) $\sqrt{2^6}$; г) $\sqrt{2^8}$.

468. а) $\sqrt{8^2}$; б) $\sqrt{5{,}1^2}$; в) $\sqrt{(-3)^2}$; г) $\sqrt{(-1{,}1)^2}$.

Рівень А

Знайдіть значення виразу:

469. а) $\sqrt{16 \cdot 49}$; б) $\sqrt{121 \cdot 81}$; в) $\sqrt{0{,}04 \cdot 36}$;

г) $\sqrt{2{,}25 \cdot 0{,}16}$; д) $\sqrt{1{,}44 \cdot 0{,}25}$; е) $\sqrt{441 \cdot 0{,}01}$;

є) $\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 64}$; ж) $\sqrt{4 \cdot 81 \cdot 625}$; з) $\sqrt{0{,}36 \cdot 225 \cdot 16}$.

470. а) $\sqrt{25 \cdot 81}$; б) $\sqrt{36 \cdot 144}$; в) $\sqrt{0{,}09 \cdot 49}$;

г) $\sqrt{3{,}24 \cdot 0{,}25}$; д) $\sqrt{9 \cdot 16 \cdot 25}$; е) $\sqrt{64 \cdot 0{,}04 \cdot 225}$.

471. а) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; б) $\sqrt{\frac{196}{225}}$; в) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

472. а) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{121}{289}}$; в) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$.

Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

473. а) $\sqrt{2\cdot 7}$; б) $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{5a}$.

474. а) $\sqrt{8\cdot 3}$; б) $\sqrt{35}$; в) $\sqrt{8b}$.

Подайте вираз у вигляді частки коренів:

475. а) $\sqrt{\frac{3}{5}}$; б) $\sqrt{\frac{8}{17}}$; в) $\sqrt{\frac{2}{a}}$.

476. а) $\sqrt{\frac{6}{7}}$; б) $\sqrt{\frac{11}{17}}$; в) $\sqrt{\frac{b}{5}}$.

Знайдіть значення виразу:

477. а) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; в) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{0,5}$;

г) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{0,03}$; д) $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{5}$; е) $\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot\sqrt{\frac{2}{15}}$.

478. а) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{99}}$; в) $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$.

479. а) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$; б) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{72}$; в) $\sqrt{2,5}\cdot\sqrt{40}$;

г) $\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$; д) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; е) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

480. а) $\sqrt{5^4}$; б) $\sqrt{3^6}$; в) $\sqrt{1,2^4}$.

481. а) $\sqrt{3^4}$; б) $\sqrt{2^8}$; в) $\sqrt{0,2^6}$.

482. а) $\sqrt{89^2}-48$; б) $\sqrt{107^2}+\sqrt{(-107)^2}$; в) $2\cdot\sqrt{3,8^2}-\sqrt{(-3,8)^2}$.

483. а) $100-\sqrt{99^2}$; б) $\sqrt{67^2}-\sqrt{(-67)^2}$; в) $\sqrt{1,9^2}+\sqrt{(-1,9)^2}$.

Рівень Б

Знайдіть значення виразу:

484. а) $\sqrt{18\cdot 32}$; б) $\sqrt{360\cdot 90}$; в) $\sqrt{27\cdot 75}$;

г) $\sqrt{250\cdot 0,036}$; д) $\sqrt{4,9\cdot 22,5}$; е) $\sqrt{15\cdot 21\cdot 35}$.

485. а) $\sqrt{250}\cdot\sqrt{160}$; б) $\sqrt{28}\cdot\sqrt{63}$; в) $\sqrt{0,08}\cdot\sqrt{0,72}$.

486. а) $\sqrt{45\cdot125}$; б) $\sqrt{48\cdot27}$; в) $\sqrt{0,4\cdot490}$;

г) $\sqrt{640}\cdot\sqrt{810}$; д) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{0,08}$; е) $\sqrt{22\cdot14\cdot77}$.

487. а) $\sqrt{29^2-20^2}$; б) $\sqrt{65^2-16^2}$; в) $\sqrt{20,5^2-4,5^2}$.

488. а) $\sqrt{20^2-16^2}$; б) $\sqrt{52^2-48^2}$; в) $\sqrt{6,5^2-2,5^2}$.

489. а) $\sqrt{28^4}-\sqrt{22^4}$; б) $\sqrt{2,5^2}+\sqrt{(-2,5)^2}$; в) $\sqrt{1,8^4}-\sqrt{(-1,8)^2}$.

г) $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{(-6)^2}}$; д) $\sqrt{(-8,4)^2}\cdot\sqrt{(-0,5)^2}-\left(\sqrt{4,5}\right)^2$.

490. а) $\sqrt{4^8}-\sqrt{1,6^4}$; б) $\sqrt{(-6,4)^2}\cdot\sqrt{(-5)^2}-\left(\sqrt{32}\right)^2$;

в) $\sqrt{\sqrt{(-7)^2}-\left(\sqrt{3}\right)^2}$; г) $\left(\sqrt{90}\right)^2+\sqrt{(-135)^2}\cdot\left(\sqrt{0,6}\right)^2$.

491. а) $\sqrt{16^3}$; б) $\sqrt{9^5}$; в) $\sqrt{8^2\cdot4^3}$.

492. а) $\sqrt{4^5}$; б) $\sqrt{25^3}$; в) $\sqrt{9^3\cdot3^2}$.

Спростіть вираз:

493. а) $\sqrt{a^2b^2}$, де $a\ge0$, $b\ge0$; б) $\sqrt{a^2b^2}$, де $a\ge0$, $b\le0$;

в) $\sqrt{4x^4y^6}$, де $y<0$; г) $\sqrt{\frac{25m^2}{n^8}}$, де $m\ge0$;

д) $\sqrt{(-a)^2b^4}$, де $a<0$; е) $\sqrt{0,04(-x)^2(-y)^2}$, де $x>0$, $y<0$.

494. а) $\sqrt{a^4b^2}$, де $b<0$: б) $\sqrt{36a^{10}b^6}$, де $a<0$, $b\ge0$;

в) $\sqrt{\frac{x^2}{y^8}}$, де $x\ge0$; г) $\sqrt{49(-x)^2y^2}$, де $x\ge0$, $y\ge0$.

Знайдіть значення виразу:

495. а) $\sqrt{(2b-3)^2}$, якщо $b=-6$; $b=1{,}6$; б) $\sqrt{a^2-2a+1}$, якщо $a=-8$; $a=2{,}7$.

496. а) $\sqrt{(b-7)^2}$, якщо $b=-1$; $b=9{,}2$; б) $\sqrt{x^2-4x+4}$, якщо $x=-3$; $x=1{,}4$.

497. а) $\sqrt{1\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{4\frac{4}{7}}-\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{7}}$; б) $\sqrt{\frac{8\cdot 98}{125\cdot 45}}-\sqrt{\frac{9\cdot 225}{425^2-200^2}}$.

498. а) $\sqrt{1{,}8}\cdot\sqrt{\frac{7}{9}}\cdot\sqrt{5\frac{3}{5}}$; б) $\sqrt{1\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{5\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{12{,}5^2-3{,}5^2}{2\cdot 128}}$.

Рівень В

499. Знайдіть значення кореня, не користуючись мікрокалькулятором:

а) $\sqrt{139876}$; б) $\sqrt{331776}$.

Вказівка. Розкладіть число, з якого потрібно добути корінь, на множники. Наприклад, $\sqrt{28224}=\sqrt{4\cdot 4\cdot 4\cdot 9\cdot 49}=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7=168$.

500. Подайте вираз $\sqrt{ab}$ у вигляді добутку коренів, а вираз $\sqrt{\frac{a}{b}}$ — у вигляді частки коренів, якщо $a<0$ і $b<0$.

501. Для яких значень a і натуральних значень n є правильною рівність $\sqrt{a^{2n}}=-a^n$?

502. Для яких значень x є правильною рівність:

а) $\sqrt{x^6}=x^3$; б) $\sqrt{x^6}=-x^3$; в) $\sqrt{x^8}=x^4$;

г) $\sqrt{x^2}=\left(\sqrt{x}\right)^2$; д) $x\sqrt{2}=\sqrt{2x^2}$; е) $x\sqrt{2}=-\sqrt{2x^2}$?

503. Доведіть тотожність:

а) $\sqrt{a^4+2a^2+1}=a^2+1$; б) $\sqrt{x^2+2|x|+1}=|x|+1$.

504. Спростіть вираз $\sqrt{4x^4+4x^2+1}-\sqrt{x^4+6x^2+9}$.

Вправи для повторення

505. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x + 1)(x - 2) + 3x = x^2$;

б) $3x(1 - 2x) + x(6x + 1) = 1$;

в) $\frac{x-3}{x^2-2x-3} = 0$;

г) $\frac{1}{x-1} + \frac{4}{x+2} = 1$.

506. Спростіть вираз:

а) $3(2a - 1) - 2(a + 5)$;

б) $(3x+5)^2 + (2-3x)(2+3x)$;

в) $\frac{2xz-2yz}{3xy-3y^2}$;

г) $\frac{a^2-2ab+a-2b}{a^2+2a+1}$.

507. Знайдіть значення виразу $|x| + |y|$, якщо:

а) $x = -3$; $y = -8$;

б) $x = 2$; $y = -1{,}8$.

508. Підкидають два гральні кубики.

а) Знайдіть імовірність того, що випадуть числа, сума яких дорівнює 4.

б)* Випадання чисел з якою сумою є найбільш імовірним?

509. Чи можна 85 туристів поділити на три групи так, щоб у другій групі було вдвічі більше туристів, ніж у першій, а в третій — удвічі більше, ніж у другій?

510. З міста A до міста B, відстань між якими дорівнює 42 км, виїхав вантажний автомобіль, а через 6 хв — легковий. До міста B автомобілі прибули одночасно. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість легкового в 1,2 разу більша від швидкості вантажного.

18. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені

1. Найпростіші перетворення. Розглянемо перетворення, пов'язані з додаванням, відніманням, множенням, діленням і піднесенням до степеня виразів, які містять квадратні корені:

$3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$;

$\sqrt{a} + 2\sqrt{a} = 3\sqrt{a}$;

$5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;

$2\sqrt{b} - 4\sqrt{b} = -2\sqrt{b}$;

$4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{6}$;

$4\sqrt{a} \cdot (-2\sqrt{b}) = -8\sqrt{ab}$;

$$15\sqrt{6}:\left(3\sqrt{2}\right)=\frac{15\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=5\sqrt{3};\qquad 10\sqrt{x}:\left(5\sqrt{x}\right)=\frac{10\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}=2;$$

$$\left(4\sqrt{2}\right)^2=4^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=16\cdot 2=32;\qquad \left(2\sqrt{a}\right)^2=2^2\cdot\left(\sqrt{a}\right)^2=4a.$$

2. Винесення множника з-під знака кореня. Розглянемо перетворення:

$$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$$

Виконане перетворення називають *винесенням множника з-під знака кореня.* У даному випадку винесено з-під знака кореня множник 3.

Винесемо множник з-під знака кореня у виразах $\sqrt{3b^2}$, де $b>0$, та $\sqrt{24a^2}$, де $a<0$:

$$\sqrt{3b^2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{b^2}=\sqrt{3}\cdot|b|=b\sqrt{3}\ \text{(якщо } b>0\text{, то } |b|=b\text{);}$$

$$\sqrt{24a^2}=\sqrt{4\cdot a^2\cdot 6}=2\cdot|a|\cdot\sqrt{6}=-2a\sqrt{6}\ \text{(якщо } a<0\text{, то } |a|=-a\text{).}$$

3. Внесення множника під знак кореня. Розглянемо перетворення:

$$3\sqrt{2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{18}.$$

Таке перетворення називають *внесенням множника під знак кореня.* Замінивши вираз $3\sqrt{2}$ на вираз $\sqrt{18}$, ми внесли під знак кореня множник 3.

Внесемо множник під знак кореня у виразі $a\sqrt{3}$, де $a>0$. Оскільки $a>0$, то $a=|a|=\sqrt{a^2}$. Тому $a\sqrt{3}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3a^2}$.

Внесемо множник під знак кореня у виразі $c\sqrt{2}$, де $c<0$. Оскільки $c<0$, то $|c|=-c$, звідки $c=-|c|=-\sqrt{c^2}$. Тому $c\sqrt{2}=-\sqrt{c^2}\cdot\sqrt{2}=-\sqrt{2c^2}$.

4. Звільнення від ірраціональності у знаменнику або чисельнику дробу. Розглянемо перетворення, які дозволяють позбутися коренів у знаменниках або чисельниках дробів:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5};\qquad \frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{6\cdot\sqrt{3}}=\frac{3}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}+2}{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)}=\frac{\sqrt{6}+2}{\left(\sqrt{6}\right)^2-2^2}=\frac{\sqrt{6}+2}{6-4}=\frac{\sqrt{6}+2}{2}.$$

Такі перетворення називають *звільненням від ірраціональності у знаменнику або чисельнику дробу.* Кожне таке перетворення зводиться до множення чисельника і знаменника дробу на певний вираз.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Спростити вираз:

а) $\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{50}$; б) $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)$; в) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}$.

а) $\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{50}=\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{25\cdot 2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-5\sqrt{2}=0$;

б) $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^2-3^2=4\cdot 3-9=3$;

в) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}=$

$$=3-2\sqrt{6}+2+2\sqrt{6}=5.$$

Вправа 2. Розкласти на множники:

а) $\sqrt{18}-\sqrt{6}$; б) $m+\sqrt{m}$; в) $a-b$, де $a>0$; $b>0$.

а) $\sqrt{18}-\sqrt{6}=\sqrt{6\cdot 3}-\sqrt{6}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}=\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

б) Вираз $m+\sqrt{m}$ має зміст, якщо $m\ge 0$. Для таких значень m справджується рівність $m=\left(\sqrt{m}\right)^2$, тому:

$$m+\sqrt{m}=\left(\sqrt{m}\right)^2+\sqrt{m}=\sqrt{m}\left(\sqrt{m}+1\right).$$

в) Урахувавши, що $a>0$, $b>0$, матимемо:

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right).$$

Вправа 3. Спростити вираз:

а) $\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)$; б) $\dfrac{b^2-3}{2b+2\sqrt{3}}$.

а) $\left(\sqrt{a}-4\right)\left(\sqrt{a}+4\right)-\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-16-\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}=\sqrt{a}-16$.

б) Розклавши чисельник і знаменник дробу на множники, матимемо:

$$\frac{b^2-3}{2b+2\sqrt{3}}=\frac{b^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2\left(b+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(b-\sqrt{3}\right)\left(b+\sqrt{3}\right)}{2\left(b+\sqrt{3}\right)}=\frac{b-\sqrt{3}}{2}. \bullet$$

Вправа 4. Спростити вираз $\frac{1}{\sqrt{3}-2}+\frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

• Звільнившись від ірраціональності у знаменниках дробів, матимемо:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2}+\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}+\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+2}{3-4}+\frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}=-\sqrt{3}-2+\sqrt{3}-1=-3. \bullet$$

Усно

511. Спростіть вираз:

а) $3\sqrt{7}+2\sqrt{7}$; б) $9\sqrt{3}-4\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}-2\sqrt{5}$;

г) $2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{5}$; д) $\left(2\sqrt{2}\right)^2$; е) $3\sqrt{2}:\sqrt{2}$.

Рівень А

Винесіть множник з-під знака кореня:

512. а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{48}$; в) $\sqrt{160}$; г) $\sqrt{300}$;

д) $\sqrt{108}$; е) $\sqrt{363}$; є) $\sqrt{375}$; ж) $\sqrt{147}$.

513. а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{45}$; в) $\sqrt{250}$; г) $\sqrt{192}$.

Внесіть множник під знак кореня:

514. а) $3\sqrt{2}$; б) $4\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{11}$; г) $9\sqrt{10}$;

д) $4\sqrt{0{,}1}$; е) $0{,}1\sqrt{3}$; є) $2\sqrt{\frac{1}{2}}$; ж) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

515. а) $4\sqrt{5}$; б) $3\sqrt{7}$; в) $0{,}2\sqrt{10}$; г) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Спростіть вираз:

516. а) $12\sqrt{3}+4\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{7}\cdot3\sqrt{2}$;

г) $\left(3\sqrt{3}\right)^2$; д) $4\sqrt{2}:\left(2\sqrt{2}\right)$; е) $18\sqrt{15}:\left(6\sqrt{5}\right)$.

517. а) $2\sqrt{5}+7\sqrt{5}-\sqrt{5}$; б) $3\sqrt{8}\cdot5\sqrt{2}-\left(4\sqrt{2}\right)^2$; в) $10\sqrt{10}:\left(2\sqrt{5}\right)$.

518. а) $2\sqrt{3}\cdot4\sqrt{2}-3\sqrt{6}$; б) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}-3\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)$; г) $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}$;

д) $2\sqrt{3}+\sqrt{75}$; е) $3\sqrt{6}-\sqrt{24}$;

є) $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-1\right)$; ж) $\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)$;

з) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2+2\sqrt{3}$; и) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2$.

519. а) $2\sqrt{8}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}$; б) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{20}\right)\cdot\sqrt{5}$;

в) $\sqrt{32}-2\sqrt{2}$; г) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+5\right)$;

д) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)$; е) $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}$.

520. а) $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}-\sqrt{a}$; б) $4\sqrt{x}-\sqrt{y}-3\sqrt{x}+2\sqrt{y}$;

в) $\sqrt{4c}-\sqrt{9c}+\sqrt{49c}$; г) $3\sqrt{2a}-\sqrt{18a}$.

521. а) $4\sqrt{b}-\sqrt{9b}$; б) $\sqrt{25x}+\sqrt{16x}-\sqrt{64x}$.

Звільніться від ірраціональності у знаменнику (чисельнику) дробу:

522. а) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{7}{\sqrt{7}}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{3}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; е) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; є) $\frac{\sqrt{a}}{2}$; ж) $\frac{a^2}{2\sqrt{a}}$.

523. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{10}}{5}$;

д) $\frac{2}{\sqrt{a}}$; е) $\frac{3b}{\sqrt{c}}$; є) $\frac{\sqrt{b}}{c}$; ж) $\frac{2b^2}{\sqrt{b}}$.

Рівень Б

Спростіть вираз:

524. а) $\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)+\sqrt{18}$; б) $\left(\sqrt{6}-1\right)^2+2\sqrt{12}:\sqrt{2}$;

в) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$; г) $\sqrt{(-5)^2}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$;

д) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1$; е) $6\sqrt{2}:\sqrt{8}-\sqrt{32}:\left(2\sqrt{2}\right)$.

525. а) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)+\sqrt{27}$; б) $\left(\sqrt{6}-3\right)^2+\sqrt{6^3}$;

в) $\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)$; г) $8\sqrt{50}:4\sqrt{2}-\left(\sqrt{7}\right)^2$.

526. а) $\sqrt{a}\left(2\sqrt{a}-3\right)+3\sqrt{a}$; б) $\left(\sqrt{x}+2\right)^2-\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$;

в) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{ab}$; г) $\left(a+\sqrt{a}\right)\left(a-\sqrt{a}\right)+\left(\sqrt{a}\right)^2$.

527. а) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{ab}+1\right)^2$; б) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)+n$.

Винесіть множник з-під знака кореня:

528. а) $\sqrt{48a^2b}$, де $a>0$; б) $\sqrt{0,09xy^2}$, де $y<0$;

в) $\sqrt{2a^4b^2}$, де $b>0$; г) $\sqrt{0,64b^3}$;

д) $\sqrt{8x^3z^6}$, де $z<0$; е) $\sqrt{32ab^3c^6}$, де $b>0$, $c>0$.

529. а) $\sqrt{49ab^2}$, де $b<0$; б) $\sqrt{1,44a^2b^3}$, де $a>0$;

в) $\sqrt{18x^4y^2}$, де $y<0$; г) $\sqrt{0,04x^3y^3}$, де $x>0$, $y>0$.

Внесіть множник під знак кореня:

530. а) $2a\sqrt{3}$, де $a>0$; б) $b\sqrt{\frac{1}{b}}$; в) $3x^2\sqrt{x}$;

г) $a\sqrt{ab}$, де $a>0$; д) $(c+1)\sqrt{c+1}$; е) $a\sqrt{a+b}$, де $a>0$.

531. а) $c\sqrt{5}$, де $c>0$; б) $n^2\sqrt{\frac{1}{n}}$; в) $b\sqrt{2b}$;

г) $ab\sqrt{a}$, де $b>0$; д) $x\sqrt{x+1}$, де $x>0$; е) $(n+k)\sqrt{n+k}$.

Звільніться від ірраціональності у знаменнику (чисельнику) дробу:

532. а) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; в) $\frac{14}{3-2\sqrt{2}}$; г) $\frac{2\sqrt{3}-1}{11}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; е) $\frac{a}{\sqrt{a}-3}$; є) $\frac{1}{x+\sqrt{x}}$; ж) $\frac{2}{2\sqrt{b}+3}$.

533. а) $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$; б) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$; г) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; е) $\frac{c}{1-\sqrt{c}}$; є) $\frac{2}{\sqrt{a}-a}$; ж) $\frac{\sqrt{b}-3}{c}$.

Розкладіть на множники:

534. а) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$; б) $5+\sqrt{5}$; в) $\sqrt{15}-\sqrt{35}$;

г) $\sqrt{2a}-\sqrt{a}$; д) $\sqrt{b}+b$; е) $2x-6\sqrt{x}$;

є) x^2-3; ж) $5-4a^2$; з) $x-6$, де $x \geq 0$.

535. а) $\sqrt{12}+\sqrt{3}$; б) $6-\sqrt{6}$; в) $\sqrt{21}-\sqrt{15}$;

г) $\sqrt{3x}-\sqrt{2x}$; д) $c-\sqrt{c}$; е) $4\sqrt{b}+2b$;

є) a^2-5; ж) $2-9n^2$; з) $7-b$, де $b \geq 0$.

Скоротіть дріб:

536. а) $\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-1}$; б) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$; в) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{21}+\sqrt{7}}$;

г) $\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$; д) $\frac{a+\sqrt{5}}{a^2-5}$; е) $\frac{2\sqrt{b}+2\sqrt{3}}{3-b}$.

537. а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2+2\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{2-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$;

г) $\frac{a+\sqrt{7}}{a^2-7}$; д) $\frac{x^2-2}{\sqrt{2}-x}$; е) $\frac{m-5}{\sqrt{m}+\sqrt{5}}$.

Доведіть, що:

538. а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$; б) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

539. а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{3}+2$; б) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

Спростіть вираз:

540. а) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; б) $\frac{1}{3\sqrt{3}-2}-\frac{1}{3\sqrt{3}+2}$;

в) $\dfrac{\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; г) $\dfrac{x-y}{(x-\sqrt{xy})(y+\sqrt{xy})}$ $(x>0;\ y>0)$.

541. а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$; б) $\dfrac{3\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}+1}-\sqrt{2}$;

в) $\dfrac{2\sqrt{m}-m}{\sqrt{m}-2}$; г) $\dfrac{x+\sqrt{xy}}{y+\sqrt{xy}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Рівень В

542. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{2b}{a-b}$;

д) $\left(\sqrt{xy}-\dfrac{xy}{x+\sqrt{xy}}\right):\dfrac{\sqrt{xy}-y}{x-y}$ $(x>0;\ y>0)$.

543. Доведіть тотожність:

$$\frac{m+n}{\sqrt{mn}}+\frac{n}{m-\sqrt{mn}}-\frac{m}{n+\sqrt{mn}}=\frac{m+n}{m-n}\quad (m>0;\ n>0).$$

544. Доведіть, що значення виразу є натуральним числом:

а) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

545. Внесіть множник під знак кореня:

а) $\dfrac{1}{3}a\sqrt{3}$, де $a<0$; б) $ab\sqrt{-\dfrac{1}{ab}}$, де $a>0$, $b<0$.

546. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}$.

Вправи для повторення

547. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{3}{8x} + \frac{1}{12x} = 1$; б) $\frac{2x-1}{x+5} - \frac{2x+1}{x-5} = 0$.

548. Спростіть вираз:

а) $\frac{5ab}{9c^2} : \left(\frac{4ac}{3b} : \frac{2c^2}{3ab^2} \right)$; б) $\left(-\frac{2m^2n^4}{5k} \right)^2 : \left(-\frac{8m^4n^6}{15k} \right)$.

549. Чи може значення виразу $\left(\frac{x}{x+4} - \frac{x}{x-4} \right) : \frac{4x}{x^2-16}$ дорівнювати 1?

550. Знайдіть координати точок перетину параболи $y = x^2$ і прямої, яка проходить через точки (0; 3) і (–1,5; 0).

551. Відстань між двома мостами плавець може пропливти за течією річки на 16 хв швидше, ніж проти течії. Знайдіть цю відстань, якщо швидкість плавця у стоячій воді дорівнює 60 м/хв, а швидкість течії річки — 40 м/хв.

552. Два поїзди вирушили одночасно з пунктів A і B назустріч один одному і зустрілися в пункті C, який розташований на 20 км ближче до A, ніж до B. Швидкість поїзда, що вийшов з A, на 10 км/год менша від швидкості поїзда, що вирушив з B. Знайдіть швидкість кожного поїзда, якщо відстань між пунктами A і B дорівнює 340 км.

553*. Сплав міді й цинку, загальна маса якого дорівнює 1,5 кг, містить 40% міді. Скільки грамів олова потрібно додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав, який містив би 30% міді?

Для тих, хто хоче знати більше

19. Наближені обчислення значень виразів, які містять квадратні корені, за допомогою мікрокалькулятора*

Ви знаєте, що для добування квадратного кореня із числа за допомогою мікрокалькулятора потрібно увести це число в мікрокалькулятор, а потім натиснути клавішу $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Розглянемо, як можна знайти значення виразів, які містять квадратні корені.

Приклад 1. Знайдемо значення виразу $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, якщо $a = 8{,}3$; $b = 9{,}2$.

Послідовність виконання дій може бути такою: добути квадратний корінь з числа a й помістити його в пам'ять, добути квадратний корінь з числа b і додати його до числа, що міститься в пам'яті (до $\sqrt{a}$).

Після очищення пам'яті (натискання клавішу $\boxed{\text{MC}}$ або $\boxed{\text{AC}}$) схема обчислень матиме вигляд:

$$a\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\text{M+}}\ b\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\text{M+}}\ \boxed{\text{MR}},$$

де клавіша $\boxed{\text{M+}}$ — додати до пам'яті, $\boxed{\text{MR}}$ — узяти з пам'яті.

Якщо $a = 8{,}3$; $b = 9{,}2$, то схема обчислень є такою:

$$\boxed{8}\ \boxed{,}\ \boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\text{M+}}\ \boxed{9}\ \boxed{,}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\text{M+}}\ \boxed{\text{MR}}.$$

Виконавши обчислення й округливши результат до сотих, матимемо:

$$\sqrt{8{,}3}+\sqrt{9{,}2}\approx 5{,}91.$$

Приклад 2. Знайдемо значення виразу $\sqrt{a^2+b^2}$, якщо $a = 8{,}3$; $b = 7{,}4$.

Послідовність виконання дій може бути такою: піднести до квадрата число a і занести результат у пам'ять; піднести до квадрата число b і додати його до числа a^2, що міститься в пам'яті; з одержаної суми добути квадратний корінь.

Після очищення пам'яті схема обчислень матиме вигляд:

$$a\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M+}}\ b\ \boxed{\times}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M+}}\ \boxed{\text{MR}}\ \boxed{\sqrt{\ }}.$$

---

* За наявності у школі мікрокалькуляторів інших типів послідовність виконання дій може бути іншою.

Виконавши обчислення за вказаною схемою для $a = 8{,}3$; $b = 7{,}4$ й округливши одержаний результат до десятих, одержимо: $\sqrt{8{,}3^2 + 7{,}4^2} \approx 11{,}1$.

Приклад 3. Знайдемо значення виразу $a\sqrt{b} + \sqrt{c}$, якщо $a = 1{,}72$; $b = 3{,}58$; $c = 5{,}63$.

Після очищення пам'яті схема обчислень матиме вигляд:

$$b \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{\times} a \boxed{=} \boxed{M+} c \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{M+} \boxed{MR}.$$

Виконавши обчислення за вказаною схемою для $a = 1{,}72$; $b = 3{,}58$; $c = 5{,}63$ й округливши одержаний результат до сотих, знайдемо, що $1{,}72 \cdot \sqrt{3{,}58} + \sqrt{5{,}63} \approx 5{,}63$.

Приклад 4. Знайдемо значення виразу $a\sqrt{b} + x\sqrt{y} - \sqrt{z}$, якщо $a = 5{,}7$; $b = 3{,}8$; $x = 11$; $y = 13{,}4$; $z = 7{,}2$.

Після очищення пам'яті схема обчислень матиме вигляд:

$$b \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{\times} a \boxed{=} \boxed{M+} y \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{\times} x \boxed{=} \boxed{M+} z \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{M-} \boxed{MR},$$

де клавіша $\boxed{M-}$ — відняти від пам'яті.

Виконавши обчислення за вказаною схемою для даних значень a, b, x, y та z й округливши одержаний результат до десятих, знайдемо, що

$$5{,}7 \cdot \sqrt{3{,}8} + 11 \cdot \sqrt{13{,}4} - \sqrt{7{,}2} \approx 48{,}7.$$

Рівень А

За допомогою мікрокалькулятора обчисліть значення виразу (відповідь округліть до сотих):

554. а) $\sqrt{a+1}$, якщо $a = 16{,}9$; $a = 256$; $a = 5$; $a = 0{,}7$;

б) $\sqrt{a-9}$, якщо $a = 15$; $a = 18{,}5$; $a = 13{,}8$.

555. а) $\sqrt{x+6}$, якщо $x = 19$; $x = 8$; $x = 0{,}72$;

б) $\sqrt{2x}$, якщо $x = 63$; $x = 11{,}3$; $x = 0{,}39$.

Складіть схему для обчислення за допомогою мікрокалькулятора значення виразу:

556. а) $\sqrt{a+b}$; б) $\sqrt{a-b}$; в) $\sqrt{a^2-b^2}$.

557. а) $\sqrt{a}+b$; б) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; в) $a\sqrt{b}$.

Відновіть вираз за поданою схемою обчислення його значення за допомогою мікрокалькулятора:

558. а) $b \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{-} a \boxed{=}$; б) $a \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{+} b \boxed{=}$.

559. а) $a \boxed{+} b \boxed{=} \boxed{\sqrt{\ }}$; б) $a \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{:} b \boxed{=}$.

Обчисліть за допомогою мікрокалькулятора (відповідь округліть до сотих):

560. **а)** $1,2\sqrt{15}$; **б)** $\sqrt{5}+\sqrt{7}$; **в)** $\sqrt{5,8\cdot 8,9}$.

561. **а)** $7\sqrt{2}$; **б)** $\sqrt{10}-\sqrt{5}$; **в)** $\sqrt{\dfrac{14,8}{2,9}}$.

Рівень Б

Обчисліть за допомогою мікрокалькулятора (відповідь округліть до тисячних):

562. **а)** $\sqrt{1,5^2+8,9^2}$; **б)** $\sqrt{5+\sqrt{2}}$; **в)** $\sqrt{\sqrt{3}}$.

563. **а)** $\sqrt{10,6^2-3,7^2}$; **б)** $\sqrt{10-\sqrt{3}}$; **в)** $\sqrt{\sqrt{7}}$.

Розв'яжіть рівняння і знайдіть за допомогою мікрокалькулятора наближені значення його коренів (відповідь округліть до сотих):

564. **а)** $x^2 = 42$; **б)** $11x^2 = 43$; **в)** $(x - 1,83)^2 = 14$.

565. **а)** $3x^2 = 29$; **б)** $(x + 3,82)^2 = 17$; **в)** $(3x - 7)^2 = 19$.

566. Складіть схему для обчислення за допомогою мікрокалькулятора значення виразу $a\sqrt{b}-\sqrt{c}$.

Рівень В

567. Складіть схему для обчислення за допомогою мікрокалькулятора значення виразу $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}+\sqrt{x}$.

Вправи для повторення

568. З міста в одному напрямі виїхали два автомобілі. Швидкість одного автомобіля 68 км/год, а іншого — 75 км/год. Запишіть у вигляді виразу відстань між автомобілями через t год. Знайдіть значення цього виразу, якщо $t = 1$; $t = 1,2$; $t = 2,5$.

569. Заповніть таблицю:

x	-4	-2	0	0,5	1	4
$2x$						
$-2x + 1$						
x^2						

570. Зі 100 кг соняшникового насіння отримують a кг олії. Скільки олії отримають з 450 кг такого насіння?

20. Функція $y = \sqrt{x}$

Якщо відома площа S квадрата, то його сторону a можна знайти за формулою $a = \sqrt{S}$. Оскільки кожному значенню площі S відповідає єдине значення сторони a, то a є функцією від S. Перейшовши до прийнятих позначень функції й аргументу, матимемо функцію $y = \sqrt{x}$.

Вираз $\sqrt{x}$ має зміст, якщо $x \geq 0$. Тому областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ є множина невід'ємних дійсних чисел.

Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$, склавши таблицю для кількох значень x та відповідних значень y:

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Позначимо на координатній площині точки, координати яких подані в таблиці (див. рис. 12). Якби для кожного невід'ємного значення x обчислили відповідне значення y й позначили б точки з такими координатами на координатній площині, то одержали б лінію, яка є графіком функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 13).

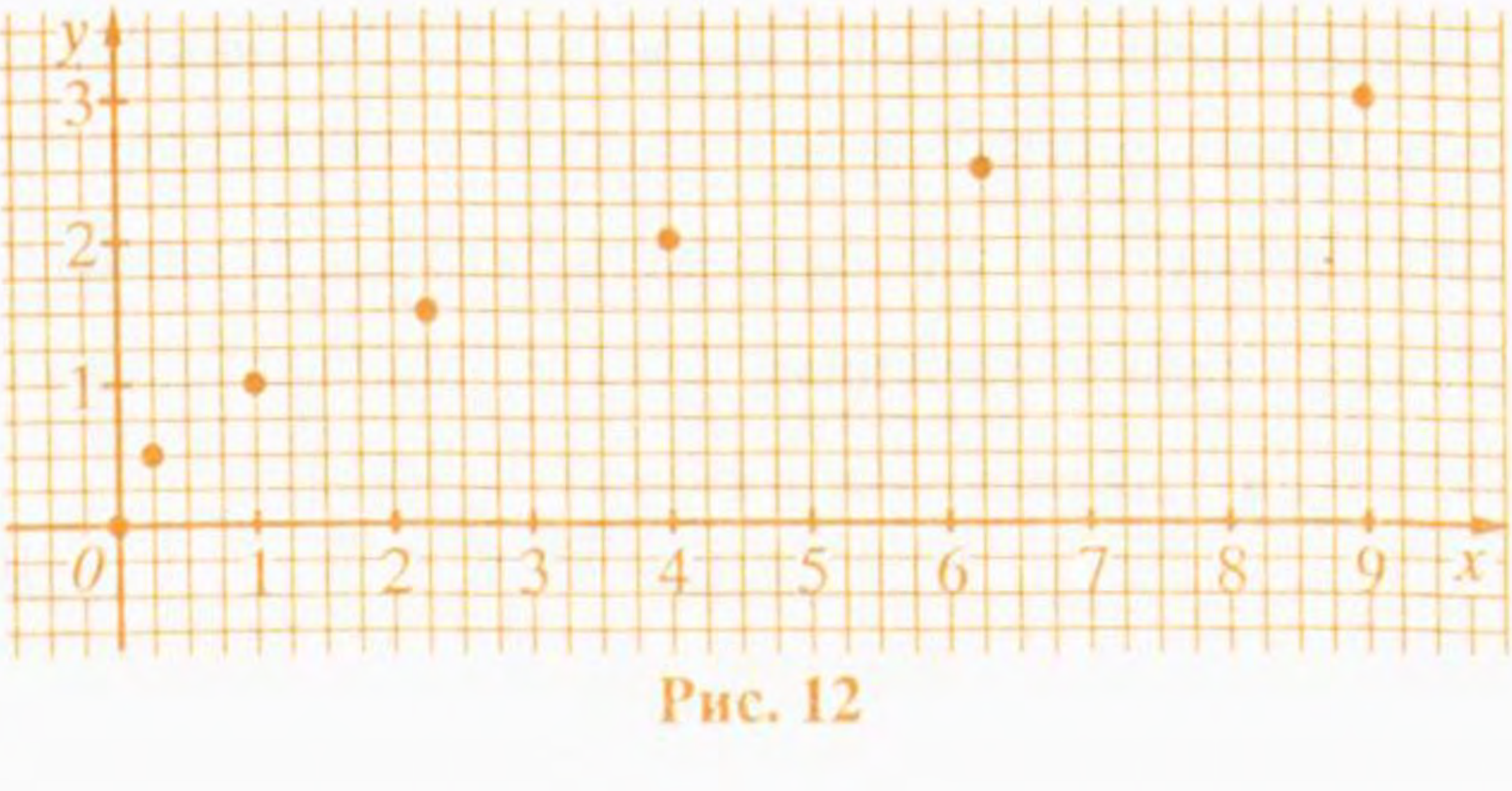


Рис. 12

Рис. 13

Графік функції $y = x^2$, де $x \geq 0$, називають правою віткою параболи. Графік функції $y = \sqrt{x}$ можна одержати, якщо цю вітку симетрично відобразити відносно прямої $y = x$ (рис. 14). Тому й графік функції $y = \sqrt{x}$ називають *віткою параболи*.

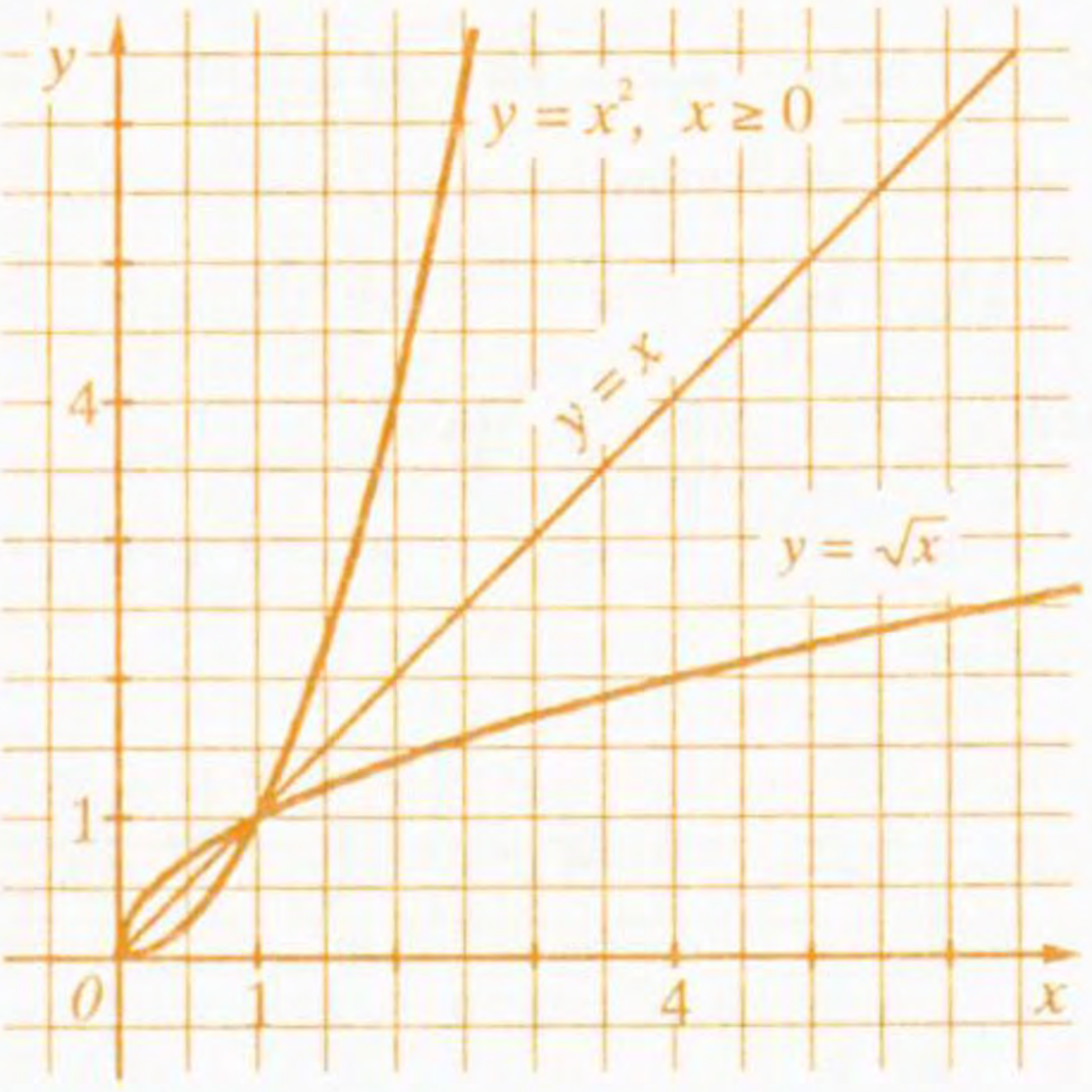


Рис. 14

Функція $y = \sqrt{x}$ має такі властивості:

1. *Областю визначення функції є множина невід'ємних дійсних чисел.*

2. *Областю значень функції теж є множина невід'ємних дійсних чисел.* Справді, значення функції $y = \sqrt{x}$ не можуть бути від'ємними. У той же час будь-яке невід'ємне число є значенням функції. Наприклад, число 10 є значенням функції $y = \sqrt{x}$ для значення аргументу $x = 100$.

3. *Графіком функції є вітка параболи.*

4. *Якщо* $x = 0$, *то* $y = 0$, тобто *графік проходить через початок координат*. Графік розміщений у першій чверті координатної площини.

Для тих, хто хоче знати більше

Рівняння $\sqrt{x} = a$

Розглянемо рівняння $\sqrt{x} = a$, де a — деяке число.

Якщо $a \geq 0$, то за означенням арифметичного квадратного кореня рівність $\sqrt{x} = a$ буде правильною лише за умови, що $x = a^2$. У даному випадку рівняння має єдиний корінь $x = a^2$.

Якщо $a < 0$, то рівняння коренів не має, бо арифметичний квадратний корінь не може дорівнювати від'ємному числу.

Отже, рівняння $\sqrt{x} = a$:

1) має єдиний корінь $x = a^2$, якщо $a \geq 0$;

2) не має коренів, якщо $a < 0$.

Наприклад, рівняння $\sqrt{x} = 5$ має єдиний корінь $x = 5^2 = 25$; рівняння $\sqrt{x} = -2$ не має коренів.

Рівняння $\sqrt{x} = a$ є прикладом ірраціонального рівняння (так називають усяке рівняння, в якому невідоме міститься під знаком кореня). Якщо $a \geq 0$, то його можна розв'язати шляхом піднесення обох частин рівняння до квадрата: $\left(\sqrt{x}\right)^2 = a^2$; $x = a^2$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати рівняння:

а) $3\sqrt{x} - 12 = 0$; б) $2\sqrt{x} + 4 = 0$; в) $\sqrt{3x+2} = 1$.

• а) $3\sqrt{x} - 12 = 0$; $3\sqrt{x} = 12$; $\sqrt{x} = 4$; $x = 16$.

Відповідь. 16.

б) $2\sqrt{x} + 4 = 0$; $2\sqrt{x} = -4$; $\sqrt{x} = -2$ — рівняння коренів не має.

Відповідь. Рівняння коренів не має.

в) $\sqrt{3x+2} = 1$; $3x + 2 = 1$; $3x = -1$; $x = -\frac{1}{3}$.

Відповідь. $-\frac{1}{3}$. •

Усно

571. Вкажіть правильні твердження:

а) областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є множина всіх додатних чисел;

б) функція $y = \sqrt{x}$ набуває лише невід'ємних значень;

в) графіком функції $y = \sqrt{x}$ є вітка параболи;

г) точка (16; 4) належить графіку функції $y = \sqrt{x}$.

572. Чи перетинає графік функції $y = \sqrt{x}$ прямі: $y = 3$; $y = -5$?

573. На рисунку 15 зображено графіки функцій $y = -x + 2$ та $y = \sqrt{x}$.

а) Для якого значення x функції набувають одного й того ж значення? Чому дорівнює це значення?

б) Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x} = -x + 2$? Вкажіть ці корені.

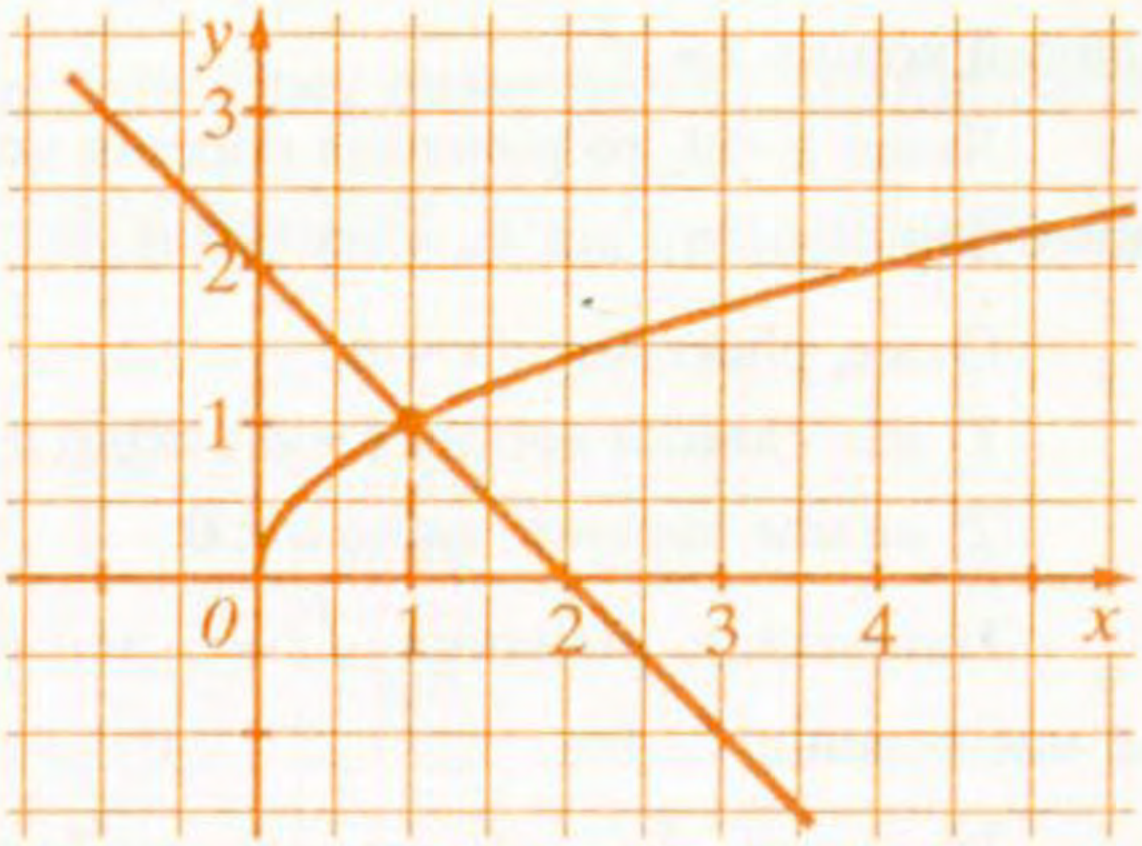


Рис. 15

Рівень А

574. Користуючись графіком функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 13), знайдіть значення функції, які відповідають таким значенням аргументу: 3; 2,5; 0,75; 5.

575. Функція задана формулою $y = \sqrt{x}$. Знайдіть x, якщо $y = 1$; $y = 2$; $y = 2{,}5$.

576. Функція задана формулою $y = \sqrt{x}$. Знайдіть y, якщо $x = 1$; $x = 4$; $x = 9$.

577. Користуючись графіком функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 13), знайдіть значення аргументу, яким відповідають такі значення функції: 1,5; 0,5; 2,25.

578. Чи належить графіку функції $y = \sqrt{x}$ точка: $A(50; 5)$; $B(36; 6)$; $D(3; 9)$?

579. Чи проходить графік функції $y = \sqrt{x}$ через точку: $A(225; 15)$; $B(4; -2)$; $C(12{,}25; 3{,}5)$?

580. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$, де $1 \le x \le 9$.

581. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$, де $0 \le x \le 4$.

Рівень Б

582. Користуючись графіком функції $y=\sqrt{x}$, порівняйте числа:

а) $\sqrt{3{,}5}$ і $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{5}$ і 2,5.

583. Графік функції $y=\sqrt{x}$ проходить через точку з абсцисою 25. Знайдіть ординату цієї точки.

584. Вкажіть усі цілі значення x, для яких значення функції $y=\sqrt{x}$ менші від 6.

Розв'яжіть графічно рівняння:

585. а) $3+\sqrt{x}=x+1$; б) $\sqrt{x}=\dfrac{8}{x}$.

586. а) $\sqrt{x}-0{,}5x=0$; б) $\sqrt{x}=x^2$.

Розв'яжіть рівняння:

587. а) $\sqrt{x}=8$; б) $\sqrt{x}=1$; в) $\sqrt{x}=-4$;

г) $\sqrt{x-1}=2$; д) $\sqrt{3x+2}=4$; е) $\sqrt{x}+9=7$;

є) $\sqrt{x-0{,}09}=0{,}9$; ж) $\sqrt{x^2-1}=1$; з) $\sqrt{x^2+5}=2$.

588. а) $\sqrt{x}=10$; б) $\sqrt{x}=-2$; в) $\sqrt{x+3}=2$;

г) $\sqrt{2x-5}=0{,}2$; д) $\sqrt{x^2+2}=1$; е) $\sqrt{x^2+3}=2$.

Рівень В

589. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

а) $y=\sqrt{x}$ і $y=x-12$; б) $y=\sqrt{x}$ і $y=2x-6$.

590. Побудуйте графік функції:

а) $y=\sqrt{x^2}$; б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$; в) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$.

591. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x}=x^2$.

592. Для яких значень a рівняння $\sqrt{x^2+1}=a$ має один корінь?

593. Доведіть, що рівняння не має коренів:

а) $\sqrt{x} = 2x - x^2 - 2$; б) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 1$.

594. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x-2)\sqrt{x+2} = 0$; б) $(x+1)\sqrt{x-2} = 0$;

в) $\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 2x} = 0$; г) $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^4 - 16} = 0$.

Вправи для повторення

595. Перетворіть у многочлен стандартного вигляду:

а) $(5x + y)(3x - y) + 4y^2$; б) $(a - 1)^2 - (2a - 3)(2a + 3)$.

596. Спростіть вираз:

а) $\left(a - \dfrac{1}{a}\right) \cdot \dfrac{a^2 - a}{a + 1}$; б) $\left(\dfrac{b-3}{b+2} - \dfrac{b-2}{b+3}\right) : \dfrac{5}{b+3}$.

597. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x - 5)(x + 5) + 3x = -x^2 - 25$; б) $(2x - 3)(x + 2) = x^2 + x$.

598. Дві бджоли, працюючи з однаковою продуктивністю, одночасно почали збирати нектар зі 100 квіток. Одна з них припинила роботу через 18 хв. Іншій бджолі, щоб закінчити цю роботу, потрібно ще 20 хв. Скільки часу потрібно одній бджолі, щоб зібрати нектар зі 100 квіток?

Цікаво знати

Число є одним з найзагальніших понять математики. Спочатку це поняття пов'язувалось тільки з процесами підрахунку або вимірювання. Саме на цій основі виникли і використовувались натуральні й дробові числа, до того ж дробові числа розглядались тільки як відношення натуральних.

Натуральні числа найбільше цікавили піфагорійців — учнів і послідовників легендарного давньогрецького математика і філософа **Піфагора**, який жив на межі VI–V ст. до н. е. Піфагорійці вважали, що все на світі підпорядковане законам, які можна описати натуральними числами та їхніми відношеннями. Звідси відразу ж випливало, що для пізнання світу потрібно вивчати натуральні числа. Проте згодом піфагорійці з'ясували, що відомі їм числа не такі вже й всесильні, бо за допомогою них не можна виразити, наприклад, довжину діагоналі квадрата зі стороною 1. Те інтуїтивне уявлення про число (натуральне і дробове), яке в людини сформувалося на основі віковічної практики, вимагало уточнення й узагальнення.

У подальшому розв'язання практичних і математичних проблем привело до двох найсуттєвіших узагальнень поняття числа. Спочатку китайці у II ст. до н. е. ввели поняття від'ємного числа. Другий напрямок узагальнення поняття числа привів до дійсних чисел і тим самим розв'язав проблему вимірювання довжини відрізка.

Якщо основи теорії натуральних чисел піфагорійці заклали ще у V ст. до н. е., то строгі теорії дійсних чисел були запропоновані лише у другій половині XIX ст.

Теорію дійсних чисел на основі десяткових дробів розробив німецький математик **К. Вейєрштрасс** (1815 – 1897). Свої теорії з іншими підходами до введення дійсних чисел запропонували німецькі математики **Р. Дедекінд** (1831 – 1916) і **Г. Кантор** (1845 – 1918).

Зазначимо, що з ірраціональними числами математики стикалися задовго до створення строгих теорій. Якою має бути сторона квадрата, щоб його площа дорівнювала заданому числу m? Таку задачу ставили й уміли розв'язувати ще 2 тис. років до н. е. вавилонські вчені. Щоб відповісти на запитання задачі, потрібно добути арифметичний квадратний корінь з числа m. Якщо число m було натуральним, але не було квадратом іншого натурального числа, то вавилоняни шукали наближене значення $\sqrt{m}$. Для цього вони записували m у вигляді суми $a^2 + b$, де b доволі мале порівняно з a^2, а потім використовували таке правило:

$$\sqrt{m} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Наприклад, якщо $m = 105$, то $\sqrt{105} = \sqrt{10^2 + 5} \approx 10 + \frac{5}{2 \cdot 10} = 10,25$. Перевіримо: $10,25^2 = 105,0625$. Це правило знаходження наближеного значення квадратного кореня використовували й у Давній Греції, його детальний опис дав давньогрецький учений Герон (I ст. н. е.).

До поняття ірраціонального числа близько підійшов український учений **Феофан Прокопович**, розглядаючи правило добування квадратного кореня. Добуваючи квадратні корені з чисел 2, 3, 5, 6 і т. д., які не є квадратами натуральних чисел, він характеризує їх так: «Деякі числа є настільки глухими, що вони взагалі позбавлені точного кореня». Як ви вже знаєте, квадратний корінь з таких чисел записують у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу, тому добування кореня із цих чисел є нескінченним процесом.

Запитання і вправи для повторення § 2

1. Які властивості має функція $y = x^2$?
2. Як називають графік функції $y = x^2$?
3. Що називають квадратним коренем з числа a?
4. Що називають арифметичним квадратним коренем з числа a? Для яких значень a має зміст вираз $\sqrt{a}$? Яких значень може набувати вираз $\sqrt{a}$?
5. Для яких значень a рівняння $x^2 = a$ має корені? Скільки коренів має це рівняння, якщо $a > 0$; $a = 0$; $a < 0$?
6. У вигляді яких дробів можна подати раціональні числа?
7. У вигляді яких дробів можна подати ірраціональні числа?
8. Які числа утворюють множину дійсних чисел?
9. Чому дорівнює квадратний корінь з добутку невід'ємних множників? Доведіть відповідну теорему.
10. Чому дорівнює квадратний корінь із дробу $\frac{a}{b}$, де $a \geq 0$, $b > 0$? Доведіть відповідну теорему.
11. Чому дорівнює квадратний корінь зі степеня a^{2n}, де $a \geq 0$? Доведіть відповідну теорему.
12. Чому дорівнює $\sqrt{a^2}$?
13. На прикладі виразу $2\sqrt{b}$ покажіть, як внести множник під знак кореня.
14. На прикладі виразу $\sqrt{16b}$ покажіть, як винести множник з-під знака кореня.
15. На прикладі виразів $\frac{1}{\sqrt{3}}$ і $\frac{1}{\sqrt{b}-\sqrt{2}}$ покажіть, як звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу.
16. Які властивості має функція $y = \sqrt{x}$?

599. Дано числа: -25; $3{,}8$; 8; 0; $-2{,}1$; $\sqrt{5}$; $\frac{2}{9}$; $0{,}(6)$; $-\sqrt{3}$; 1; $-2\frac{1}{3}$; π; $0{,}10110111011110\ldots$ (кількість одиниць послідовно збільшується на 1). Випишіть: **а)** усі натуральні числа; **б)** усі цілі числа; **в)** усі раціональні числа; **г)** усі ірраціональні числа.

600. Порівняйте числа:

а) 1,138 і 1,183; **б)** –3,4 і –3,5; **в)** $\frac{5}{24}$ і $\frac{2}{9}$; **г)** –0,3 і $-\frac{1}{3}$;

д) $\sqrt{5}$ і 2,5; **е)** $-\sqrt{10}$ і $-\pi$; **є)** 1,13745... і 1,1375... .

601. Знайдіть наближене значення виразу, округливши значення коренів до сотих:

а) $2,7-\sqrt{5}$; **б)** $5\sqrt{3,6}$; **в)** $\sqrt{10}-\sqrt{3}$; **г)** $\sqrt{4,5}+\sqrt{5,5}$.

602. Доведіть, що:

а) $\sqrt{441}=21$; **б)** $\sqrt{0,81}=0,9$.

603. Для яких значень x має зміст вираз?

а) $\sqrt{x}$; **б)** $-\sqrt{x}$; **в)** $\sqrt{-x}$; **г)** $\sqrt{x^2}$.

Знайдіть значення виразу:

604. **а)** $\sqrt{16}+\sqrt{625}$; **б)** $\sqrt{64}\cdot\sqrt{2,25}-10\sqrt{1,21}$;

в) $\frac{2}{3}\sqrt{81}+2\sqrt{\frac{9}{16}}$; **г)** $\sqrt{0,01}\cdot\sqrt{4900}-0,1\sqrt{90000}$;

д) $\left(\sqrt{361}-\sqrt{289}\right)\left(\sqrt{2,25}-\sqrt{6,25}\right)$; **е)** $\left(\sqrt{10000}-99\right):\left(\sqrt{1\frac{7}{9}}-1\right)$.

605. **а)** $\sqrt{9\cdot36}$; **б)** $\sqrt{160\cdot40}$; **в)** $\sqrt{15\cdot24\cdot40}$;

г) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{500}$; **д)** $\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}$; **е)** $\sqrt{0,02}\cdot\sqrt{0,32}$.

606. **а)** $\sqrt{\frac{25}{36}}-\sqrt{\frac{16}{81}}$; **б)** $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}}$; **в)** $\sqrt{4\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{25}}-\sqrt{\frac{8\cdot72}{21\cdot84}}$.

607. **а)** $\sqrt{2^{10}}-\sqrt{2^8}$; **б)** $\sqrt{41^2}+\sqrt{(-41)^2}$; **в)** $\sqrt{(-15)^2}\cdot\sqrt{(-1,2)^2}$.

Спростіть вираз:

608. **а)** $5\sqrt{6}-7\sqrt{6}+4\sqrt{6}$; **б)** $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)+3\sqrt{3}$;

в) $\left(\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)^2-3-4\sqrt{10}$; **г)** $\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)+\left(3\sqrt{3}\right)^2$.

609. а) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+3\right)-a$;   б) $\left(4\sqrt{b}-3\right)\left(\sqrt{b}+1\right)-\sqrt{b}$;

в) $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+1$;   г) $\left(2\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)^2-4\sqrt{a^2}-9b$.

Винесіть множник з-під знака кореня:

610. а) $\sqrt{28}$;   б) $\sqrt{200}$;   в) $\sqrt{243}$.

611. а) $\sqrt{3x^4}$;   б) $\sqrt{8a^2}$, де $a>0$;   в) $\sqrt{98ab^2}$, де $b<0$.

Внесіть множник під знак кореня:

612. а) $3\sqrt{2}$;   б) $5\sqrt{10}$;   в) $0{,}4\sqrt{30}$.

613. а) $c\sqrt{c}$;   б) $m\sqrt{7}$, де $m>0$;   в) $n\sqrt{19m}$, де $n<0$.

614. Розкладіть на множники:

а) $\sqrt{15}-\sqrt{10}$;   б) $10+\sqrt{10}$;   в) $\sqrt{7a}-\sqrt{3a}$;

г) $c-4$, де $c>0$;   д) m^2-6;   е) $n+\sqrt{2n}$.

615. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{\sqrt{21}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}-1}$;   б) $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{3}}{b-3}$;   в) $\dfrac{a-5}{\sqrt{a}+\sqrt{5}}$;

г) $\dfrac{c^2-10}{c-\sqrt{10}}$;   д) $\dfrac{\sqrt{2}-x}{x^2-2}$;   е) $\dfrac{b+\sqrt{ab}}{a-b}$ $(b>0)$.

616. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$;   б) $\dfrac{5}{2\sqrt{10}}$;   в) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$;   г) $\dfrac{1}{3\sqrt{m}-2\sqrt{n}}$.

617. Доведіть, що $\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{5}+2$.

Спростіть вираз:

618. а) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}-3}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}+3}$;   б) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

619. а) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{xy}}{x-y}$.

620*. Доведіть, що значення виразу є натуральним числом:

а) $\sqrt{6\sqrt{5}+14}-\sqrt{5}$; б) $\sqrt{11+2\sqrt{10}}-\sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

621. Доведіть тотожність: $\sqrt{a^8+4a^4+4}=a^4+2$.

Розв'яжіть рівняння:

622. а) $x^2=25$; б) $x^2=0{,}09$; в) $3x^2=21$; г) $2x^2=-0{,}2$.

623. а) $(2x-1)^2+(2x+1)^2=42$; б) $(5x-4)^2=9-40x$.

624. а) $(4x-3)^2=49$; б) $(x^2-4)^2=144$.

625*. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $(2x+a)^2+a^2=1$ має єдиний корінь.

Розв'яжіть рівняння:

626. а) $\sqrt{x}=4$; б) $\sqrt{x}=0$; в) $\sqrt{x}=-2$;

г) $\sqrt{x-1}=0{,}5$; д) $\sqrt{x^2+2}=1$; е) $\sqrt{x^2+8}=3$.

627*. а) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{x}$; б) $\sqrt{x}+\sqrt{2+x}=-1$; в) $\sqrt{x^2}+\sqrt{x}=0$.

628. Графік функції $y=x^2$ проходить через точку $(-5;\ 25)$. Знайдіть координати точки, симетричної даній відносно осі y. Чи належить знайдена точка графіку заданої функції?

629. Побудуйте графіки функцій та знайдіть координати точок їх перетину:

а) $y=x^2$ й $y=1{,}5-0{,}5x$; б) $y=0{,}5x$ й $y=\sqrt{x}$.

630. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $x^2=1{,}5x+1$; б) $x^2+2=-3x$;

в) $\sqrt{x}=-4x+5$; г) $\dfrac{1}{x}=\sqrt{x}$.

631. За допомогою графіків функцій встановіть, чи має корені рівняння $x^2=\dfrac{1}{5}x-2$.

632*. За допомогою графіків функцій встановіть, скільки коренів має рівняння $\sqrt{x}=-x-a$, якщо $a=-1$; $a=0$; $a=1$.

633*. Побудуйте графік функції:

а) $y = \dfrac{x^2 + x|x|}{2}$; б) $y = x\sqrt{x^2}$;

в) $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x < 0; \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$ г) $y = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$.

634*. Знайдіть значення a, для якого графіки функцій $y = 2x + a$ та $y = x^2$ перетинаються в точці (3; 9). Знайдіть координати іншої точки перетину цих графіків.

635*. Доведіть, що рівняння $\sqrt{x} = -x - 0{,}1$ не має коренів.

Завдання для самоперевірки № 4

Рівень 1

1. Вкажіть неправильне твердження:

а) 5 — раціональне число; б) $\frac{2}{3}$ — дійсне число;

в) $\sqrt{3}$ — ірраціональне число; г) $\sqrt{5}$ — раціональне число.

2. Яка з рівностей є правильною?

а) $\sqrt{36} = 4$; б) $\sqrt{49} = -7$; в) $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$; г) $\sqrt{0{,}4} = 0{,}2$.

3. Знайдіть значення виразу $\sqrt{36 \cdot 64} + \sqrt{\dfrac{9}{16}}$ та вкажіть правильну відповідь:

а) $24\frac{3}{4}$; б) $47\frac{1}{4}$; в) $48\frac{3}{4}$; г) 60.

4. Спростіть вираз $4\left(\sqrt{2} - 2\right) - \left(2\sqrt{2} - 4\right)$ та вкажіть правильну відповідь:

а) $6\sqrt{2} - 12$; б) $2\sqrt{2} - 12$; в) $6\sqrt{2} - 4$; г) $2\sqrt{2} - 4$.

5. Знайдіть значення виразу $3\sqrt{2} - \sqrt{3}$, округливши значення коренів до десятих, та вкажіть правильну відповідь:

а) 5,9; б) 2,5; в) 2,4; г) 2,8.

6. Яка з точок належить графіку функції $y = x^2$?

а) $A(16; 4)$; б) $B(4; 8)$; в) $C(4; 16)$; г) $D(-4; 8)$.

Рівень 2

7. Обчисліть:

а) $\sqrt{25\cdot 0,49}$; б) $\sqrt{\dfrac{9}{0,04}}$; в) $\sqrt{3^4}$.

8. Спростіть вираз:

а) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2\sqrt{3}-5\right)-16$; б) $\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)-a$.

9. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$; б) $\dfrac{4-\sqrt{80}}{1-\sqrt{5}}$.

10. Розв'яжіть рівняння:

а) $2(x^2-3)=12$; б) $(x-2)(x+2)=-1$.

11. Чи проходить графік функції, заданої формулою $y=\sqrt{x}$, через точку (1,69; 1,3)?

Рівень 3

12. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{28\cdot 63}$; б) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}-\sqrt{6\dfrac{1}{4}}$; в) $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2+4\sqrt{14}$.

13. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt{48}$; б) $\dfrac{11}{2\sqrt{5}-3}-\dfrac{11}{2\sqrt{5}+3}$.

14. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{x}{2\sqrt{x}+1}$.

15. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{a-b}{a+\sqrt{ab}}$, де $a>0$, $b\ge 0$.

16. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2=-0,5x+1,5$.

Рівень 4

17. Для яких значень x є правильною рівність?

а) $\sqrt{x^6} = x^3$; б) $x\sqrt{x^2} = -\sqrt{x^4}$; в) $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$.

18. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}} : \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$.

19. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x^2-2} = 2$; б) $(x-1)(x+2)\sqrt{2x+1} = 0$.

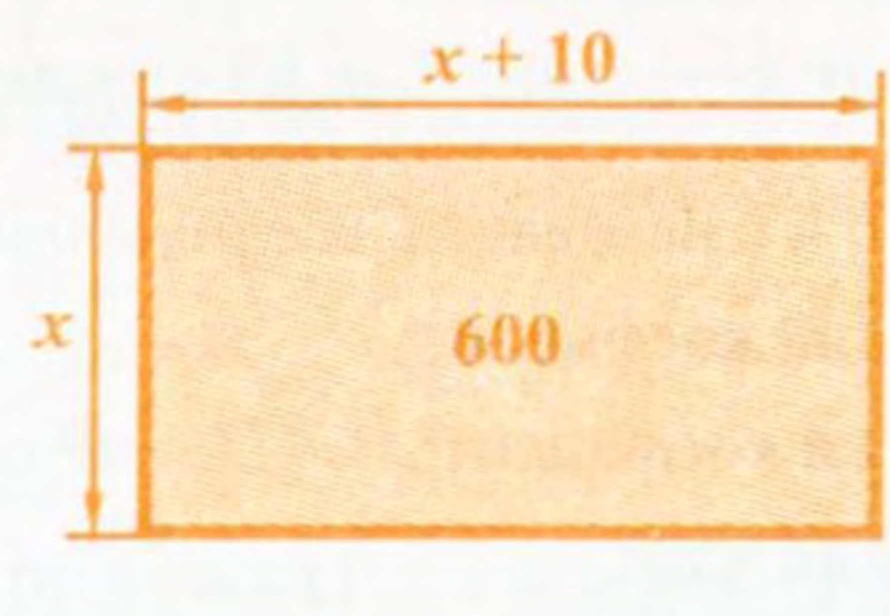
20. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{19+8\sqrt{3}}\cdot x-\left(4+\sqrt{3}\right)x$ не залежать від значень x.

21. За допомогою графіків функцій встановіть, чи має корені рівняння $\sqrt{x}+x = 0,5$.

§ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Є чимало задач, розв'язуючи які, одержують рівняння, що містять квадрат змінної.

У даному параграфі ми з'ясуємо: що таке квадратне рівняння; скільки коренів може мати квадратне рівняння та як їх знаходити. Ознайомимося також з рівняннями, які зводяться до квадратних, та задачами, які розв'язують за допомогою квадратних рівнянь і рівнянь, що зводяться до квадратних.



$x(x + 10) = 600;$

$x^2 + 10x - 600 = 0$ — квадратне рівняння

21. Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння

1. Квадратні рівняння. У 7 класі ми розглядали лінійні рівняння з однією змінною, тобто рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа (коефіцієнти рівняння). Рівняння $ax = b$ містить змінну x лише в першому степені, і якщо $a \neq 0$, то саме рівняння називають ще рівнянням першого степеня з однією змінною.

Розглянемо задачу, яка приводить до рівняння, що містить змінну в другому степені (у квадраті).

Задача. Площа ділянки прямокутної форми дорівнює 600 м^2. Довжина ділянки на 10 м більша від ширини. Знайти ширину ділянки.

Нехай ширина ділянки дорівнює x м. Тоді довжина ділянки дорівнює $(x + 10)$ м, а площа — $x(x + 10)$ м^2. За умовою задачі ця площа дорівнює 600 м^2, тому маємо рівняння $x(x + 10) = 600$, звідки

$$\mathbf{x^2 + 10x - 600 = 0.}$$

Одержане рівняння називають *квадратним*.

Означення

Квадратним рівнянням називають рівняння виду

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0,}$$

де x — змінна, a, b і c — деякі числа, до того ж $a \neq 0$.

Числа a, b й c називають *коефіцієнтами квадратного рівняння*:

a — перший коефіцієнт;

b — другий коефіцієнт;

c — вільний член.

Наприклад, $7x^2 - 3x + 5 = 0$ — квадратне рівняння, у якому перший коефіцієнт $a = 7$, другий коефіцієнт $b = -3$, вільний член $c = 5$.

Якщо у квадратному рівнянні перший коефіцієнт дорівнює 1, то таке рівняння називають *зведеним квадратним рівнянням*. Так, $x^2 + 10x - 600 = 0$ — зведене квадратне рівняння.

2. Неповні квадратні рівняння. Якщо в квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають *неповним квадратним рівнянням*.

Наприклад, рівняння

$x^2 + 9x = 0$, $\quad 5x^2 - 125 = 0$, $\quad 4x^2 = 0$

є неповними квадратними рівняннями. У першому рівнянні $c = 0$, у другому — $b = 0$, у третьому — $b = 0$ і $c = 0$.

Отже, є три види неповних квадратних рівнянь:

1) $ax^2 + bx = 0$ $(b \neq 0)$; 2) $ax^2 + c = 0$ $(c \neq 0)$; 3) $ax^2 = 0$.

Розв'язування неповних квадратних рівнянь

№	Вид рівняння	Приклад рівняння і його розв'язання
1.	$ax^2 + bx = 0$	$3x^2 - 6x = 0$. $3x(x - 2) = 0$. Звідси $x = 0$ або $x - 2 = 0$; $x = 2$.
2.	$ax^2 + c = 0$	1) $2x^2 - 8 = 0$. $2x^2 = 8$; $x^2 = 4$. Звідси $x = -2$ або $x = 2$. 2) $2x^2 + 8 = 0$. $2x^2 = -8$; $x^2 = -4$. Рівняння не має коренів.
3.	$ax^2 = 0$	$7x^2 = 0$. $x^2 = 0$. Звідси $x = 0$.

Зауваження. Рівняння $x^2 = 0$ можна записати у вигляді $x \cdot x = 0$. Перший множник дорівнює нулю, якщо $x = 0$, другий — теж, якщо $x = 0$. Тому інколи кажуть, що рівняння $x^2 = 0$ має два рівних корені $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати рівняння $9x^2 + 11x = 0$.

• $x(9x + 11) = 0$. Звідси $x = 0$ або $9x + 11 = 0$.

Розв'яжемо рівняння $9x + 11 = 0$: $9x = -11$; $x = -\frac{11}{9} = -1\frac{2}{9}$.

Отже, рівняння має два корені $x_1 = -1\frac{2}{9}$; $x_2 = 0$.

Відповідь. $-1\frac{2}{9}$; 0. •

Вправа 2. Розв'язати рівняння $2{,}5x(x - 2) - 7{,}5 = -5x$.

$$2{,}5x^2 - 5x - 7{,}5 = -5x;\ 2{,}5x^2 - 7{,}5 = 0;\ x^2 = 3;\ x_1 = -\sqrt{3};\ x_2 = \sqrt{3}.$$

Відповідь. $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. •

Усно

636. Яке з рівнянь є квадратним рівнянням?

а) $4x + 5^2 = 0$; б) $7x^2 - x - 3 = 0$; в) $\frac{1}{x^2} + 2x - 3 = 0$;

г) $9x^2 = 0$; д) $-x^2 + 2 = 0$; е) $-6y^2 - 24y = 0$.

637. Яке з рівнянь є неповним квадратним рівнянням? зведеним квадратним рівнянням?

а) $x^2 + 5x - 2 = 0$; б) $7x^2 + 1{,}8 = 0$; в) $-x^2 - 2x = 0$;

г) $x^2 + \sqrt{3}\,x = 0$; д) $3x^2 + 7x + 1 = 0$; е) $x^2 = 0$.

638. Розв'яжіть неповне квадратне рівняння:

а) $x^2 - 4 = 0$; б) $y^2 - 2y = 0$; в) $5x^2 = 0$.

Рівень А

639. Заповніть таблицю:

Квадратне рівняння	Коефіцієнти рівняння		
$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
	4	1	3
$-2x^2 - 3x + 1 = 0$			
	1	0	–24
	3	–5	0
$5x^2 - 8 = 0$			
	7	0	0

640. Запишіть квадратне рівняння, коефіцієнти якого дорівнюють:

а) $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$; б) $a = 3$; $b = 0$; $c = -7$;

в) $a = -1$; $b = 4$; $c = 5$; г) $a = 2$; $b = 0$; $c = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

641. а) $x^2 - 36 = 0$; б) $2x^2 - 4 = 0$; в) $x^2 + 49 = 0$.

642. а) $x^2 - 64 = 0$; б) $-6x^2 + 18 = 0$; в) $2x^2 + 8 = 0$.

643. а) $x^2 - 3x = 0$; б) $-5x^2 + 20x = 0$; в) $x^2 + 3{,}5x = 0$.

644. а) $4x^2 + 8x = 0$; б) $3x^2 - 81x = 0$; в) $2{,}2x^2 - 8{,}8x = 0$.

645. а) $7 - 2x^2 = 7 + 0{,}5x^2$; б) $2x^2 - 3x = 2x$; в) $2x(x - 3) = x^2$.

646. а) $5x^2 - 3 = x^2 - 3$; б) $x^2 + 15x = 8x$; в) $x(x - 2) = -x^2$.

Зведіть рівняння до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$:

647. а) $x(3x - 2) + 4 = 0$; б) $5x(x + 3) = 2x^2 + 1$; в) $x(x - 9) = 4x(x + 7)$.

648. а) $7x^2 - 2 = 4x + 5$; б) $(x + 1)x = 5$; в) $x^2 = 6x^2 - 3(x - 4)$.

Запишіть зведене квадратне рівняння, рівносильне рівнянню:

649. а) $2x^2 + 2x - 6 = 0$; б) $-4x^2 - 10x + 8 = 0$.

650. а) $5x^2 - 9x + 2 = 0$; б) $-x^2 + 12x + 6 = 0$.

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння:

651. а) $5x^2 - 7x + 3 = 3x^2 + 2x + 3$; б) $x^2 - 13x + 8 = 3x^2 - 13x$;

в) $2x^2 - (5x - 1) = 17 - 5x$; г) $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 3x^2 - 9$;

д) $6x^2 + 9x - 1 = (2x + 1)(2x - 1)$; е) $4(x^2 - 2) = x(1 - x) - 8$;

є) $0{,}2x^2 - x(0{,}5x - 1) = x - 9$; ж) $0{,}3x(x - 4) + 1{,}2x - 2{,}7 = 2{,}7$.

652. а) $2x^2 - 3x + 7 = 7x^2 + x + 7$; б) $3 - 2x = x(x - 2)$;

в) $(3x - 5)(3x + 5) = 6x^2 - 25 + 15x$; г) $\left(2x - \sqrt{5}\right)\left(2x + \sqrt{5}\right) = (x - 1)^2 - 6$;

д) $(x + 0{,}4)^2 + (x - 0{,}4)^2 = 0{,}64$; е) $3x(2x + 0{,}6) - 2x^2 - 0{,}64 = 1{,}8x$.

653. а) $(2x - 3)^2 = \dfrac{3(x+15)}{5}$; б) $\dfrac{(x+1)(x+2)}{3} = \dfrac{(x+3)(x+4)}{7}$.

654. а) $(x+1)(2x-5) = \dfrac{15-6x}{2}$; б) $\dfrac{(x-2)(x+2)}{4} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{3}$.

655. Знайдіть найменший корінь рівняння $(x^2 + 5x)(x^2 - 36) = 0$.

656. Знайдіть найбільший корінь рівняння $(x^2 - 49)(x^2 - 8x) = 0$.

657. Знайдіть значення x, для яких значення виразу $(2\sqrt{3}x - 1)(2\sqrt{3}x + 1)$ дорівнює 17.

658. Для яких значень x значення виразу $(2x - 7)(x + 4)$ дорівнює -28?

659. Для яких значень x значення виразу $x^2 - 5x + 7$ на 4 більше, ніж відповідне значення виразу $2x^2 + 4x + 3$?

660. Знайдіть усі числа, які у 17 разів менші від своїх квадратів.

Рівень В

661. Для яких значень a число 2 є коренем рівняння?

а) $a^2x^2 - 7x + 2a + 14 = 0$; б) $3x^2 + (a^2 - 1)x - 18 = 0$.

662. Для яких значень a рівняння має один корінь?

а) $2x^2 - (a^2 - 3a)x = 0$; б) $ax^2 + a^2 - 2 = 0$.

663. Розв'яжіть рівняння з параметром a:

а) $ax^2 + 1 = 0$; б) $x^2 - 2ax = 0$; в) $ax^2 - a^3 = 0$.

Вправи для повторення

664. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

а) $m^2 - 6m + 9$; б) $4x^2 + 12x + 9$; в) $49x^2 - 28xy + 4y^2$.

665. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

а) $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{x - 5}$, якщо $x = 12{,}5$; б) $\dfrac{2\sqrt{y} + 6}{y + 6\sqrt{y} + 9}$, якщо $y = 1{,}21$.

666*. Для якого значення m вираз $m^2 - 4m + 7$ набуває найменшого значення?

667. З пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 240 км, вирушають одночасно два автомобілі. Якщо автомобілі рухатимуться назустріч один одному, то зустрінуться через 2 год. Якщо ж вони їхатимуть в одному напрямку, то автомобіль, що виїхав з пункту B, наздожене автомобіль, який виїхав з пункту A, через 12 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

668. У фермерському господарстві пшениці зібрали на 40% більше, ніж ячменю. 20% зібраної пшениці й 30% зібраного ячменю продали, що разом становило 29 т. Скільки тонн пшениці й скільки тонн ячменю зібрали в господарстві?

22. Формула коренів квадратного рівняння

1. Приклад розв'язання квадратного рівняння. Розв'яжемо рівняння

$$2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Поділимо обидві частини рівняння на 2:

$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Перенесемо вільний член рівняння у праву частину:

$$x^2 - \frac{5}{2}x = \frac{3}{2}.$$

Виділимо у лівій частині рівняння квадрат двочлена. Для цього спочатку запишемо вираз $\frac{5}{2}x$ як подвоєний добуток змінної x та числа $\frac{5}{4}$:

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{2}.$$

Додамо до обох частин рівняння квадрат числа $\frac{5}{4}$, тобто $\frac{25}{16}$:

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{4} + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}.$$

Ліву частину рівняння запишемо як квадрат двочлена $x - \frac{5}{4}$:

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}.$$

Тоді:

$$x - \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \text{ або } x - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}, \quad \text{звідки } x = \frac{5}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{1}{2} \text{ або } x = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3.$$

Отже, коренями рівняння є $x_1 = -\frac{1}{2}$ та $x_2 = 3$.

Спосіб, за допомогою якого ми розв'язали рівняння $2x^2 - 5x - 3 = 0$, називають способом *виділення квадрата двочлена.*

2. Формула коренів квадратного рівняння. Розв'яжемо способом виділення квадрата двочлена рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Поділимо обидві частини рівняння на a ($a \neq 0$). Одержимо зведене квадратне рівняння

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Перенесемо вільний член рівняння у праву частину:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Вираз $\frac{b}{a}x$ запишемо як подвоєний добуток змінної x та числа $\frac{b}{2a}$:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}.$$

Додамо до обох частин рівняння квадрат числа $\frac{b}{2a}$, тобто $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Ліву частину рівняння запишемо як квадрат двочлена $x + \frac{b}{2a}$, а у правій частині віднімемо дроби:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (2)$$

Вираз $b^2 - 4ac$ називають *дискримінантом* квадратного рівняння (1) і позначають буквою D, тобто $D = b^2 - 4ac$. Тоді рівняння (2) можна записати так:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}. \quad (3)$$

Розглянемо можливі три випадки: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

1) Якщо $D > 0$, то з рівняння (3) маємо:

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \text{або} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

звідки

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{або} \quad x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Отже, якщо $D > 0$, то квадратне рівняння (1) має два різні корені

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Ці дві формули для коренів можна об'єднати в одну:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.}$$

Одержану формулу називають *формулою коренів квадратного рівняння.*

2) Якщо $D = 0$, то з рівняння (3) матимемо:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0; \quad x + \frac{b}{2a} = 0; \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

Одержаний корінь $x = -\frac{b}{2a}$ можна знайти і за формулою коренів квадратного рівняння, врахувавши, що коли $D = 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$. Тому іноді кажуть, що коли $D = 0$, то рівняння має два рівних корені, кожний з яких дорівнює $-\frac{b}{2a}$.

Отже, якщо $D = 0$, то квадратне рівняння (1) має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$ (*або два рівних корені, кожний з яких дорівнює* $-\frac{b}{2a}$).

3) Якщо $D < 0$, то рівняння (3) не має коренів, бо його ліва частина набуває невід'ємних значень, а права частина є від'ємним числом.

Отже, якщо $D < 0$, то квадратне рівняння (1) не має коренів.

Підсумок: корені квадратного рівняння

Квадратне рівняння	Дискримінант $D = b^2 - 4ac$	Корені рівняння
$ax^2 + bx + c = 0$	$D > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
	$D = 0$	$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$
	$D < 0$	Коренів немає

Розв'язувати квадратне рівняння доцільно так:

1. Обчислити дискримінант $D = b^2 - 4ac$ і порівняти його з нулем.

2. Якщо дискримінант додатний або дорівнює нулеві ($D \geq 0$), то скористатися формулою коренів квадратного рівняння: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Якщо дискримінант від'ємний, то записати, що рівняння не має коренів.

Для тих, хто хоче знати більше

3. Формула коренів зведеного квадратного рівняння. Розглянемо зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$. Для цього рівняння $D = p^2 - 4q = 4\left(\dfrac{p^2}{4} - q\right)$. Якщо $D \geq 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm 2\sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Отже, для зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ маємо таку формулу коренів:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Використовуючи цю формулу, знайдемо корені рівняння $x^2 + 7x + 6 = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 6} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{5}{2}; \quad x_1 = -6; \quad x_2 = -1.$$

4. Ще одна формула коренів квадратного рівняння. Поділимо обидві частини рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ на 2, одержимо: $\dfrac{a}{2}x^2 + \dfrac{b}{2}x + \dfrac{c}{2} = 0$. Тоді $D = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac$.

Якщо $D \geq 0$, то коренями рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ є:

$$x_{1,2} = \frac{-\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Одержана формула дозволяє пришвидшити знаходження коренів квадратних рівнянь, у яких коефіцієнт b є парним числом.

Наприклад, знайдемо за цією формулою корені рівняння $3x^2 - 16x + 5 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 3 \cdot 5}}{3} = \frac{8 \pm 7}{3}; \quad x_1 = \frac{1}{3}; \quad x_2 = 5.$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати рівняння $x^2 + 3x - 10 = 0$.

• $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$. $\sqrt{D} = 7$.

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$; $x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5$; $x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2$.

Відповідь. -5; 2.•

Вправа 2. Розв'язати рівняння $5x^2 - 3x + 7 = 0$.

• $D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 7 = 9 - 140 = -131 < 0$.

Оскільки $D < 0$, то дане рівняння не має коренів.

Відповідь. Коренів немає.•

Вправа 3. Довести, що рівняння $6x^2 + 9 = 4x + 10x(2 - x)$ має один корінь.

• $6x^2 + 9 - 4x - 10x(2 - x) = 0$; $6x^2 + 9 - 4x - 20x + 10x^2 = 0$;

$16x^2 - 24x + 9 = 0$.

$D = (-24)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 576 - 576 = 0$.

Оскільки $D = 0$, то дане рівняння має один корінь.•

Вправа 4. Розв'язати рівняння $5(x^2 + 2x) = 3 - 4x$.

• $5x^2 + 10x - 3 + 4x = 0$; $5x^2 + 14x - 3 = 0$. Використаємо формулу коренів квадратного рівняння, у якого коефіцієнт біля x є парним числом. Одержимо:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 5(-3)}}{5} = \frac{-7 \pm \sqrt{64}}{5} = \frac{-7 \pm 8}{5}.$$ Звідси $x_1 = -3$; $x_2 = \frac{1}{5}$.

Відповідь. -3; $\frac{1}{5}$.•

Вправа 5. Знайти три значення m, для яких рівняння $5x^2 - x - m + 4 = 0$ не має коренів.

• Перепишемо рівняння так: $5x^2 - x + (4 - m) = 0$.

Знайдемо дискримінант рівняння:

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (4 - m) = 1 - 80 + 20m = 20m - 79$.

Рівняння не має коренів, якщо $D < 0$, тобто $20m - 79 < 0$. Остання нерівність є правильною, якщо, наприклад, $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$. Отже, для значень $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ дане рівняння не має коренів.•

Усно

669. Чи правильно записаний дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного рівняння?

а) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3$;

б) $x^2 - 3x - 4 = 0$; $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$;

в) $3x^2 - x + 2 = 0$; $D = (-1)^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2$;

г) $-2x^2 + 5x + 7 = 0$; $D = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 7$.

670. Скільки коренів має рівняння?

а) $7x^2 - x + 1 = 0$; $D = -27$; б) $x^2 + 4x - 3 = 0$; $D = 28$;

в) $x^2 - 6x + 9 = 0$; $D = 0$.

Рівень А

Знайдіть дискримінант квадратного рівняння і вкажіть кількість коренів рівняння:

671. а) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; б) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; в) $-3x^2 + 6x - 4 = 0$.

672. а) $x^2 + 2x - 3 = 0$; б) $2x^2 - 5x + 4 = 0$; в) $-x^2 + 8x - 16 = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

673. а) $x^2 - 6x + 5 = 0$; б) $x^2 + 4x - 12 = 0$; в) $x^2 + 7x + 10 = 0$;
г) $x^2 - 3x + 4 = 0$; д) $x^2 - 10x + 25 = 0$; е) $x^2 - 4x - 21 = 0$.

674. а) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; б) $2x^2 + x - 1 = 0$; в) $3x^2 + 5x - 2 = 0$;
г) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; д) $2x^2 - 3x + 2 = 0$; е) $7x^2 - 6x - 1 = 0$.

675. а) $x^2 + 4x - 5 = 0$; б) $x^2 + 5x + 4 = 0$; в) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
г) $x^2 - 2x + 6 = 0$; д) $x^2 - 8x + 16 = 0$; е) $x^2 - 10x + 21 = 0$;
є) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; ж) $6x^2 - 5x + 1 = 0$; з) $2x^2 + x - 3 = 0$.

676. а) $x^2 = 5x - 4$; б) $2x^2 + 7x = 4$; в) $x^2 - 4x = 2 - 3x$.

677. а) $x^2 - 2x = 3$; б) $x^2 - 4x = 4x - 7$; в) $4x^2 + 3x = 1$.

Рівень Б

678. Не розв'язуючи рівняння, вкажіть ті з них, які мають один корінь:

а) $9x^2 + 6x + 1 = 0$; **б)** $3x^2 - x - 4 = 0$; **в)** $2x^2 - 16x + 32 = 0$.

679. Яке з рівнянь не має коренів?

а) $x^2 + 2x - 7 = 0$; **б)** $2x^2 - 3x + 8 = 0$; **в)** $3x^2 + 5x + 4 = 0$.

680. Не розв'язуючи рівняння, вкажіть ті з них, які мають один корінь або не мають жодного кореня:

а) $3x^2 + x + 1 = 0$; **б)** $25x^2 + 20x + 4 = 0$; **в)** $x^2 - 16x + 60 = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

681. **а)** $x^2 - 2x - 1 = 0$; **б)** $7x^2 - 18x + 8 = 0$; **в)** $3x^2 + 22x - 16 = 0$;

г) $x^2 + 21x + 90 = 0$; **д)** $3x^2 + 53x - 18 = 0$; **е)** $-25x^2 + 50x + 75 = 0$;

є) $x^2 + 0{,}5x - 1{,}5 = 0$; **ж)** $2x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$; **з)** $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9} = 0$.

682. **а)** $x^2 - 6x + 6 = 0$; **б)** $3x^2 + 20x + 12 = 0$; **в)** $4x^2 - 16x + 7 = 0$;

г) $x^2 - 16x - 161 = 0$; **д)** $4x^2 + 73x + 18 = 0$; **е)** $-12x^2 - 36x + 48 = 0$;

є) $x^2 + 1{,}2x + 0{,}2 = 0$; **ж)** $3x^2 - x - \frac{2}{3} = 0$; **з)** $5x^2 - \frac{1}{3}x - 2 = 0$.

683. Для яких значень a значення тричлена $24a^2 - 90a - 24$ дорівнює 0?

684. Для яких значень b значення тричлена $3b^2 - b + 2$ дорівнює 12?

Розв'яжіть рівняння:

685. **а)** $t^2 + 3t = -4t - 6 - t^2$; **б)** $5(y^2 + 3) = -24y + 20$;

в) $4x(x - 2) + x^2 = 6x + 3$; **г)** $6x^2 + 3x = 5(2x + 1)$;

д) $(x - 1)^2 + 4x^2 = 4$; **е)** $(3x - 2)(3x + 2) = 6x + 3$;

є) $5x^2 - \frac{1}{5}x = 0{,}1 - \frac{1}{2}x + 4x^2$; **ж)** $(\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{3}x - 2) + 7x = x^2 + 11$.

686. **а)** $2(12x^2 + x - 10) = -5$; **б)** $5(x^2 - 2) = x(1 - x) + 10x$;

в) $(2x + 3)^2 + 2x^2 = -12x - (x - 2)^2$; **г)** $6x^2 + 20x = (2x - 5)(2x + 5)$;

д) $2\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) + 1\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2}x + x^2$.

Знайдіть корені рівняння:

687. **а)** $\frac{t^2 + 3t}{2} = \frac{t + 7}{4}$; **б)** $\frac{y^2 + y}{4} = \frac{3 - 7y}{20} + 0{,}3$.

688. а) $\frac{x^2-x}{3}=\frac{x^2-1}{4}$; б) $\frac{y^2-3}{9}-\frac{y-3}{6}=3\frac{1}{6}$.

689. Для яких значень x значення різниці многочленів $3x^2+24x+48$ і $10x+30$ дорівнює 2?

690. Для яких значень x значення суми многочленів $3x^2-6x$ і $5x^2-x+2$ дорівнює 3?

Рівень В

691. Знайдіть значення b, для яких один з коренів рівняння дорівнює -3:

а) $20x^2+bx-b^2=0$; б) $\frac{b^2x^2}{49}-\frac{5}{7}bx-14=0$.

692. Для яких значень a рівняння має один корінь?

а) $x^2-16x+4a=0$; б) $ax^2+(a+1)x+1=0$.

693. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x^2-4x+3|=8$; б) $|x^2-3x-4|=6$.

694. Розв'яжіть рівняння з параметром b:

а) $x^2-4bx+3b^2=0$; б) $x^2+2x-b^2+2b=0$.

695. Знайдіть два значення m, для яких рівняння $x^2+7x+3m-7=0$:

а) має два різних корені; б) не має коренів.

696. Доведіть, що для будь-якого значення b:

а) рівняння $x^2+bx-3=0$ має два корені;

б) рівняння $x^2-bx+b^2+1=0$ не має коренів.

Вправи для повторення

697. Доберіть два числа, сума яких дорівнює 8, а добуток — 12. Перевірте, чи є ці числа коренями рівняння $x^2-8x+12=0$.

698. Знайдіть суму і добуток двох виразів:

а) $3+\sqrt{2}$ і $3-\sqrt{2}$; б) $x-\sqrt{x}$ і $x+\sqrt{x}$.

699. Побудуйте графік рівняння:

а) $2x-3y=1$; б)* $|x-y|=1$.

700. Число десятків деякого двоцифрового числа більше від числа одиниць на 4. Знайдіть це двоцифрове число, якщо сума його цифр дорівнює 14.

701*. На гуртівні два підприємці купили разом 300 кг товару за ціною 12,5 грн. за 1 кг. Перший підприємець перевозить товар на відстань 20 км від гуртівні, а другий — на відстань 30 км. Перевезення 100 кг товару на відстань 1 км коштує 50 к. Скільки товару закупив перший підприємець, якщо відомо, що він витратив на закупівлю і перевезення товару на 1270 грн. менше, ніж другий?

23. Теорема Вієта

1. Теорема Вієта. Розглянемо зведені квадратні рівняння:

$x^2 + 2x - 3 = 0;$ $x^2 - 7x + 10 = 0;$ $x^2 + 5x + 4 = 0.$

Знайдемо корені кожного із цих рівнянь, а також суму коренів та їх добуток. Результати занесемо в таблицю:

Рівняння	Корені рівняння: x_1; x_2	Сума коренів: $x_1 + x_2$	Добуток коренів: $x_1 \cdot x_2$
$x^2 + 2x - 3 = 0$	–3; 1	–2	–3
$x^2 - 7x + 10 = 0$	2; 5	7	10
$x^2 + 5x + 4 = 0$	–4; –1	–5	4

З таблиці видно, що сума коренів кожного з рівнянь дорівнює другому коефіцієнту рівняння, узятому із протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену. Це правильно для будь-якого зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, яке має корені.

Теорема (Вієта). **Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому із протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену.**

Доведення. Розглянемо зведене квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$. Дискримінант цього рівняння $D = p^2 - 4q$. Якщо $D \geq 0$, то рівняння має корені:

$$x_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}; \qquad x_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}.$$

Знайдемо суму і добуток коренів:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} + \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Теорему доведено. ●

Якщо x_1, x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то:

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Доведену теорему називають «теоремою Вієта» за прізвищем французького математика Франсуа Вієта (1540–1603), який першим помітив залежність між коренями та коефіцієнтами квадратного рівняння.

Розглянемо, наприклад, рівняння $x^2 - 5x + 3 = 0$. Воно має корені, бо $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13 > 0$. Якщо x_1 та x_2 — корені рівняння, то, за теоремою Вієта:

$$x_1 + x_2 = -(-5) = 5; \quad x_1 \cdot x_2 = 3.$$

Отже, на основі теореми Вієта можна, не обчислюючи коренів квадратного рівняння, знаходити їх суму та добуток. *Використовувати теорему Вієта можна лише для квадратних рівнянь, які мають корені.*

2. Сума та добуток коренів довільного квадратного рівняння. Ми довели теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння. Розглянемо тепер довільне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, яке має корені x_1 та x_2. Дане рівняння рівносильне рівнянню $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Одержане квадратне рівняння вже є зведеним, а тому для нього виконується теорема Вієта: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Отже, якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.}$$

3. Теорема, обернена до теореми Вієта.

***Теорема.* Якщо сума двох чисел дорівнює $-p$, а їх добуток дорівнює q, то ці числа є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$.**

Доведення теореми подано в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше».

На основі теореми, оберненої до теореми Вієта, можна:

1) перевірити, чи є деякі два числа коренями заданого квадратного рівняння;

2) розв'язати квадратне рівняння шляхом підбору його коренів;

3) скласти зведене квадратне рівняння, коренями якого є деякі задані два числа.

Розглянемо відповідні приклади.

Приклад 1. Чи є числа –3 і 5 коренями рівняння $x^2 - 2x - 15 = 0$?

• Знайдемо суму чисел –3 і 5 та їх добуток: $-3 + 5 = 2$; $(-3) \cdot 5 = -15$. Сума чисел дорівнює другому коефіцієнту рівняння, узятому із протилежним знаком, а добуток — вільному члену. Тому за теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа –3 і 5 є коренями даного рівняння. •

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$ шляхом добору його коренів.

• Нехай x_1 та x_2 — корені рівняння. Тоді

$$x_1 + x_2 = -2,$$
$$x_1 \cdot x_2 = -8.$$

Перевіримо, чи можуть коренями рівняння бути цілі числа. Рівність $x_1 \cdot x_2 = -8$ є правильною для таких пар цілих чисел: –1 і 8; –2 і 4; –4 і 2; –8 і 1. Із цих пар лише сума чисел третьої пари дорівнює –2. Тому за теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа –4 і 2 є коренями даного квадратного рівняння. Отже, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Відповідь. –4; 2. •

Приклад 3. Скласти зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа –11 і 4.

• Шукане рівняння повинно мати вигляд $x^2 + px + q = 0$, де

$$p = -(x_1 + x_2) = -(-11 + 4) = 7; \quad q = x_1 \cdot x_2 = -11 \cdot 4 = -44.$$

Отже, маємо рівняння $x^2 + 7x - 44 = 0$.

Відповідь. $x^2 + 7x - 44 = 0$. •

Для тих, хто хоче знати більше

Доведемо теорему, обернену до теореми Вієта.

Доведення. Нехай числа m і n такі, що $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$, тоді $p = -(m + n)$, $q = mn$. Підставимо значення p і q в рівняння

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1}$$

одержимо рівносильне йому рівняння

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння так:

$$x^2 - mx - nx + mn = 0;$$

$$x(x - m) - n(x - m) = 0;$$

$$(x - m)(x - n) = 0, \qquad (2)$$

звідки $x = m$ або $x = n$. Числа m і n є коренями рівняння (2), а тому й коренями рівняння (1). Теорему доведено. •

Зауваження. Якщо коефіцієнти рівняння $x^2 + px + q = 0$ є цілими числами, то з рівності $x_1 \cdot x_2 = q$ випливає, що *цілими коренями* такого рівняння можуть бути лише числа, на які ділиться (націло) вільний член q.

Наприклад, цілими коренями рівняння $x^2 + px + 5 = 0$ можуть бути лише числа 1, 5, –1 або –5.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Не розв'язуючи рівняння $6x^2 - 7x + 2 = 0$, знайти суму та добуток його коренів.

• Обчислимо дискримінант рівняння: $D = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 49 - 48 = 1$. Оскільки $D > 0$, то дане рівняння має корені. Якщо x_1 та x_2 — корені рівняння, то за формулами $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ знаходимо:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-1}{6} = \frac{7}{6}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \ •$$

Вправа 2. Знайти значення виразу $5\sqrt{x_1x_2} - (x_1 + x_2)^2$, де x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 - 9x + 16 = 0$.

• За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 9$, $x_1x_2 = 16$. Тоді:

$$5\sqrt{x_1x_2} - (x_1 + x_2)^2 = 5\sqrt{16} - 9^2 = -61.$$

Відповідь. –61. •

Вправа 3. Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 + 10x + a = 0$ задовольняють умову $3x_1 - x_2 = -6$. Знайти ці корені та коефіцієнт a.

• За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -10$. Урахувавши умову $3x_1 - x_2 = -6$, матимемо систему $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -6; \\ x_1 + x_2 = -10, \end{cases}$ звідки: $\begin{cases} 4x_1 = -16; \\ x_1 + x_2 = -10; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -4; \\ x_2 = -6. \end{cases}$

Отже, $x_1 = -4$, $x_2 = -6$ — корені рівняння. Тоді $a = x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot (-6) = 24$.

Відповідь. –4; –6 — корені рівняння; $a = 24$. •

Усно

702. Кожне з наступних рівнянь має корені. Знайдіть суму і добуток цих коренів:

а) $x^2 - 6x + 5 = 0$; б) $x^2 + 6x - 27 = 0$; в) $3x^2 - 16x + 5 = 0$.

703. Які числа є коренями рівняння?

Рівняння	Числа	
а) $x^2 - 11x + 10 = 0$	2 і 5	1 і 10
б) $x^2 + 9x - 22 = 0$	–2 і 11	–11 і 2
в) $x^2 + 4x - 21 = 0$	–3 і 7	–7 і 3

704. Один з коренів рівняння дорівнює 3. Знайдіть інший корінь рівняння:

а) $x^2 - 10x + 21 = 0$; б) $x^2 - 2x - 3 = 0$; в) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

705. Знайдіть корені рівняння за теоремою, оберненою до теореми Вієта:

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 + 3x + 2 = 0$; в) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Рівень А

Чи є дані числа коренями рівняння?

706. а) $x^2 - 2{,}5x + 1 = 0$; числа 2 і 0,5; б) $x^2 + 20x - 125 = 0$; числа –5 і 25.

707. а) $x^2 - 15x + 56 = 0$; числа –7 і –8; б) $x^2 - 18x - 40 = 0$; числа –2 і 20.

Знайдіть за формулою корені рівняння і виконайте перевірку за теоремою, оберненою до теореми Вієта:

708. а) $x^2 - 13x + 40 = 0$; б) $x^2 + 6x + 5 = 0$.

709. а) $x^2 + 3x - 18 = 0$; б) $x^2 - 5x - 14 = 0$.

710. Знайдіть вільний член q зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа: 5 і –3; –2 і –6.

711. Знайдіть коефіцієнт p зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа: 1 і 4; –1 і 2.

Числа x_1 та x_2 — корені зведеного квадратного рівняння. Запишіть це рівняння, якщо:

712. а) $x_1 + x_2 = 4$; $x_1 \cdot x_2 = 3$; б) $x_1 + x_2 = -7$; $x_1 \cdot x_2 = 10$.

713. а) $x_1 + x_2 = 1$; $x_1 \cdot x_2 = -6$; б) $x_1 + x_2 = -3$; $x_1 \cdot x_2 = 2$.

Рівень Б

Кожне з наступних рівнянь має корені. Знайдіть суму і добуток цих коренів:

714. а) $3x^2 - 4x + 1 = 0$; б) $10x^2 + x - 3 = 0$.

715. а) $3x^2 - 16x + 5 = 0$; б) $6x^2 - x - 1 = 0$.

Знайдіть корені рівняння за теоремою, оберненою до теореми Вієта:

716. а) $x^2 + 4x + 3 = 0$; б) $x^2 - 5x + 4 = 0$; в) $x^2 + 7x + 12 = 0$;
г) $x^2 - 2x - 3 = 0$; д) $x^2 - 10x + 21 = 0$; е) $x^2 - 8x - 9 = 0$;
є) $x^2 + 5x + 4 = 0$; ж) $x^2 - 2x - 8 = 0$; з) $x^2 + 2x - 15 = 0$.

717. а) $x^2 - 9x + 14 = 0$; б) $x^2 + x - 6 = 0$; в) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
г) $x^2 - 4x - 21 = 0$; д) $x^2 + 7x - 18 = 0$; е) $x^2 + 10x + 16 = 0$.

718. Знайдіть коефіцієнти p і q зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа:
а) 5 і –3; б) –2 і –6.

Запишіть зведене квадратне рівняння, яке має корені:

719. а) 1 і 3; б) –4 і 1,5; в) –4 і –5; г) $\frac{2-\sqrt{5}}{2}$ і $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

720. а) 2 і 4; б) –2 і –3,5; в) $1-\sqrt{3}$ і $1+\sqrt{3}$.

721. Число –9 є коренем рівняння $x^2 + 10x + q = 0$. Знайдіть інший корінь рівняння і коефіцієнт q.

722. Число –2 є коренем рівняння $x^2 + px - 6 = 0$. Знайдіть інший корінь рівняння і коефіцієнт p.

723. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння:
а) $x^2 - 7x + 9 = 0$; б) $3x^2 - 7x + 2 = 0$.

724. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $7x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння:
а) $x^2 - x - 4 = 0$; б) $2x^2 + 11x + 5 = 0$.

725. Знайдіть значення виразу $\sqrt{(x_1 + x_2)^2}$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння:
а) $x^2 - 5x - 14 = 0$; б) $2x^2 - x - 1 = 0$.

726. Для яких значень m добуток коренів рівняння:
а) $x^2 + 8x + 4m + 7 = 0$ дорівнює 15; б) $x^2 + 3x + m^2 - 14 = 0$ дорівнює 2?

Рівень В

727. Рівняння $x^2 + px + 8 = 0$ має додатні корені, один з яких у 4 рази більший від іншого. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт p.

728. Один з коренів рівняння $x^2 + px - 33 = 0$ більший від іншого на 14. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт p.

729. Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 - 10x + b = 0$ задовольняють умову $x_1 - 3x_2 = 2$. Знайдіть ці корені та коефіцієнт b.

730. Доведіть, що рівняння $5x^2 - 3x - a^2 - 2 = 0$ для будь-якого значення a має корені різних знаків.

731. Якими можуть бути цілі корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо:

а) $q = 7$; **б)** $q = -5$; **в)** $q = 9$; **г)** $q = -8$?

732. Знайдіть усі значення b, для яких рівняння $x^2 - bx + 3 = 0$ має лише натуральні корені.

733. Не розв'язуючи рівняння $10x^2 + 3x - 4 = 0$, знайдіть:

а) суму квадратів його коренів; **б)** суму кубів його коренів.

Вправи для повторення

734. Розкладіть на множники:

а) $8x^2y^3 - 12x^3y$; **б)** $3a + 6b - ca - 2cb$;

в) $(a - b)^2 - 2(a^2 - b^2)$; **г)** $m^2 - 8m + 7$.

735. Спростіть вираз:

а) $\frac{m+4}{m^2-2m} - \frac{m+10}{m^2-4}$; **б)** $\frac{5a-a^2}{a^2-10a+25} - \frac{a+1}{5-a}$.

736. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} x - 3y = 10; \\ 3x + 8y = -4; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + y = 3; \\ 2x - y = x^2 + 2xy + y^2. \end{cases}$

737. Є три різні ключі, кожний з яких підходить до одного з трьох замків. Яка ймовірність того, що навмання взятий ключ підійде до навмання взятого замка?

738. Із двох полів було зібрано 1900 ц пшениці, до того ж з першого поля зібрали по 45 ц з гектара, а з другого — по 40 ц з гектара. Торік у зв'язку з посухою урожайність першого поля була меншою на 20%, другого — на 15%, а весь зібраний урожай становив 1570 ц. Знайдіть площу кожного поля.

24. Квадратний тричлен

1. Квадратний тричлен та його корені. Розглянемо вирази $2x^2 - 3x + 1$, $x^2 + 4x + 5$, $-x^2 + x + 1$. Кожний з цих виразів є многочленом другого степеня і містить три члени. Такі вирази називають *квадратними тричленами*.

Означення **Квадратним тричленом називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b і c — деякі відомі числа, до того ж $a \neq 0$.**

Значення квадратного тричлена $2x^2 - 3x + 1$ для $x = 1$ дорівнює нулю. Кажуть, що число 1 є коренем цього тричлена. Взагалі, *коренем квадратного тричлена називають значення змінної, для якого значення тричлена дорівнює нулю.*

Щоб знайти всі корені квадратного тричлена $2x^2 - 3x + 1$, потрібно розв'язати рівняння $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Матимемо:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1; \quad x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}; \; x_2 = \frac{3+1}{4} = 1.$$

Отже, даний квадратний тричлен має два корені: $\frac{1}{2}$ і 1.

Дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ називають і дискримінантом квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Якщо $D > 0$, то квадратний тричлен має два корені, якщо $D = 0$, — один корінь, якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має.

2. Розкладання квадратного тричлена на множники. Знаючи корені квадратного тричлена, його можна розкласти на множники на основі такої теореми.

Теорема. **Якщо x_1 та x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то**

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Доведення. Корені x_1 та x_2 даного тричлена є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Тому за теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a},$$

звідки

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \qquad \frac{c}{a} = x_1x_2.$$

Урахувавши ці рівності, матимемо:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right)=$$

$$=a\left(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2\right)=a\left(x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right)=a(x-x_1)(x-x_2). \bullet$$

Оскільки коренями квадратного тричлена $2x^2-3x+1$ є числа $\frac{1}{2}$ й 1, то

$$2x^2-3x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)=(2x-1)(x-1).$$

Ми розклали квадратний тричлен $2x^2-3x+1$ на два множники, кожний з яких є многочленом першого степеня. Якщо квадратний тричлен не має коренів, то його не можна розкласти на множники, які є многочленами першого степеня.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники квадратний тричлен $-6x^2-7x+3$.

• Розв'яжемо рівняння $-6x^2-7x+3=0$:

$D=(-7)^2-4\cdot(-6)\cdot 3=121$; $\quad x_1=\dfrac{7-11}{-12}=\dfrac{1}{3}$; $x_2=\dfrac{7+11}{-12}=-\dfrac{3}{2}$.

Отже,

$$-6x^2-7x+3=-6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\left(x+\frac{3}{2}\right)=-(3x-1)(2x+3).$$

Відповідь. $-(3x-1)(2x+3)$ або $-6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$. •

Вправа 2. Скоротити дріб $\dfrac{4x+2}{2x^2-5x-3}$.

• Розкладемо квадратний тричлен $2x^2-5x-3$ на множники:

$2x^2-5x-3=0$; $D=(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=49$; $\quad x_1=\dfrac{5-7}{4}=-\dfrac{1}{2}$; $x_2=\dfrac{5+7}{4}=3$.

Тому $2x^2-5x-3=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-3)=(2x+1)(x-3)$.

Отже, $\dfrac{4x+2}{2x^2-5x-3}=\dfrac{2(2x+1)}{(2x+1)(x-3)}=\dfrac{2}{x-3}$.

Відповідь. $\dfrac{2}{x-3}$. •

Усно

739. Які з чисел 1, 3, –2 є коренями квадратного тричлена $x^2 - 2x - 3$?

740. Коренями квадратного тричлена $2x^2 + 4x - 6$ є числа 1 і –3. Який з виразів є розкладом цього тричлена на множники?

а) $2(x + 1)(x - 3)$; **б)** $(x - 1)(x + 3)$; **в)** $2(x - 1)(x + 3)$.

Рівень А

Знайдіть корені квадратного тричлена:

741. **а)** $x^2 - 8x - 9$; **б)** $4x^2 - 8x + 3$; **в)** $3x^2 + 2x + 3$.

742. **а)** $x^2 + 3x - 4$; **б)** $3x^2 - 8x - 3$; **в)** $x^2 - 8x + 16$.

743. Знайдіть кількість коренів квадратного тричлена:

а) $2x^2 - 4x + 2$; **б)** $5x^2 + 2x + 2$; **в)** $3x^2 + 8x + 4$.

Розкладіть на множники квадратний тричлен:

744. **а)** $x^2 - 6x + 8$; **б)** $x^2 + 2x - 8$; **в)** $x^2 + 8x + 15$;

г) $2x^2 - 5x + 2$; **д)** $3x^2 - x - 2$; **е)** $3x^2 - 6x + 3$.

745. **а)** $x^2 - 4x + 3$; **б)** $x^2 + x - 12$; **в)** $2x^2 + 3x - 5$.

Рівень Б

Розкладіть на множники квадратний тричлен:

746. **а)** $4x^2 - 6x + 2$; **б)** $-x^2 - 2x + 8$;

в) $-0,3x^2 + 3$; **г)** $1,2y^2 - 0,5y - 0,7$;

д) $\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$; **е)** $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4$.

747. **а)** $9x^2 - 12x + 4$; **б)** $-5x^2 - 2x + 3$;

в) $0,6m^2 - 1,3m + 0,6$; **г)** $\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 1$.

748. Чи можна розкласти квадратний тричлен на множники, які є многочленами першого степеня?

а) $3x^2 - 8x + 3$; **б)** $-2x^2 + 5x - 4$.

Скоротіть дріб:

749. а) $\dfrac{2x^2+x-6}{4x+8}$; б) $\dfrac{6x^2-5x+1}{4x^2-1}$; в) $\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+3x-2}$.

750. а) $\dfrac{3x-3}{x^2+3x-4}$; б) $\dfrac{4x^2+4x-3}{4x^2-8x+3}$.

Рівень В

751. Розкладіть на множники:

а) $x^2-ax-2a^2$; б) $2x^2+5ax+2a^2$.

Вказівка. **а)** Розгляньте вираз $x^2-ax-2a^2$ як квадратний тричлен з коефіцієнтами 1, $-a$ та $-2a^2$ і розкладіть цей тричлен на множники.

752. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{2a^2+3ab+b^2}{2a^2-ab-b^2}+1$; б) $\dfrac{x}{x^2-3xy+2y^2}+\dfrac{3y}{x^2+xy-2y^2}$.

Вправи для повторення

753. Розв'яжіть рівняння:

а) $\dfrac{2x-5}{3x+1}=0$; б) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=1$.

754. Від міста *A* до міста *B* автомобіль рухався деякий час зі швидкістю 60 км/год. Решту шляху він проїхав за такий же час, але зі швидкістю 80 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля.

755. Першу половину шляху автомобіль їхав зі швидкістю 60 км/год, а другу — зі швидкістю 80 км/год. Знайдіть середню швидкість автомобіля.

756*. Яких значень може набувати вираз $x-\dfrac{1}{x}$, якщо $x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$?

25. Рівняння, які зводяться до квадратних

1. Дробові раціональні рівняння. Розв'язування деяких дробових раціональних рівнянь зводиться до розв'язування квадратних рівнянь. Розглянемо приклад.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{x+1}{x-1}=\frac{12}{x+2}$.

• Перенесемо дріб $\frac{12}{x+2}$ у ліву частину рівняння і запишемо одержану різницю одним дробом:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{12}{x+2}=0; \qquad \frac{(x+1)(x+2)-12(x-1)}{(x-1)(x+2)}=0;$$

$$\frac{x^2+2x+x+2-12x+12}{(x-1)(x+2)}=0; \qquad \frac{x^2-9x+14}{(x-1)(x+2)}=0.$$

Знайдемо значення x, для яких чисельник дробу дорівнює нулю:

$$x^2-9x+14=0; \quad D=(-9)^2-4\cdot1\cdot14=25; \quad \sqrt{D}=5;$$

$$x_1=\frac{9-5}{2}=2; \quad x_2=\frac{9+5}{2}=7.$$

Якщо $x=2$ або $x=7$, то знаменник $(x-1)(x+2)$ не дорівнює нулю. Отже, $x_1=2$, $x_2=7$ — корені рівняння.

Відповідь. 2; 7. •

2. Біквадратні рівняння.

Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$, де $a\neq0$, називають *біквадратним рівнянням*. За допомогою заміни $x^2=y$ (тоді $x^4=y^2$) його можна звести до квадратного рівняння $ay^2+by+c=0$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2x^4-11x^2+12=0$.

• Зробимо заміну: $x^2=y$. Одержимо квадратне рівняння:

$$2y^2-11y+12=0.$$

Для цього рівняння:

$$D=(-11)^2-4\cdot2\cdot12=121-96=25; \quad \sqrt{D}=5;$$

$$y_1=\frac{11-5}{4}=1{,}5; \qquad y_2=\frac{11+5}{4}=4.$$

Повертаючись до заміни $x^2=y$, матимемо:

1) $x^2=1{,}5$; звідки $x_1=-\sqrt{1{,}5}$; $x_2=\sqrt{1{,}5}$;

2) $x^2 = 4$; звідки $x_3 = -2$; $x_4 = 2$.

Відповідь. -2; $-\sqrt{1,5}$; $\sqrt{1,5}$; 2. ●

Для тих, хто хоче знати більше

Шляхом заміни $x^2 = y$ розв'язування біквадратного рівняння зводиться до розв'язування квадратного рівняння. Використовуючи подібні заміни, аналогічним способом можна розв'язувати й деякі інші рівняння. Розглянемо приклади.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(x^2 - 3x)^2 + x^2 - 3x - 20 = 0$.

● Нехай $x^2 - 3x = y$. Одержимо квадратне рівняння $y^2 + y - 20 = 0$. Його коренями є числа $y_1 = -5$, $y_2 = 4$.

Урахувавши заміну, матимемо:

1) $x^2 - 3x = -5$; $\quad x^2 - 3x + 5 = 0$; $\quad D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$.

Оскільки дискримінант від'ємний, то рівняння коренів не має.

2) $x^2 - 3x = 4$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

Відповідь. -1; 4. ●

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$.

● Нехай $\sqrt{x} = y$, тоді $x = y^2$. Маємо рівняння:

$$y^2 - 2y - 8 = 0,$$

коренями якого є числа $y_1 = -2$, $y_2 = 4$.

Урахувавши заміну, матимемо:

1) $\sqrt{x} = -2$ — рівняння коренів не має; $\quad$ 2) $\sqrt{x} = 4$; $x = 16$.

Відповідь. 16. ●

Рівень А

Розв'яжіть рівняння:

757. а) $\dfrac{x^2 - x}{x + 4} = 0$; $\quad$ б) $\dfrac{3y^2 - 5y - 2}{4 - y} = 0$; $\quad$ в) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = 0$;

г) $\dfrac{x^2 - 3x}{x - 3} = 0$; $\quad$ д) $\dfrac{4y^2 + 11y - 3}{y + 3} = 0$; $\quad$ е) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 0$.

758. а) $\dfrac{x^2 - 49}{x + 3} = 0$; $\quad$ б) $\dfrac{2x^2 - 8x}{x} = 0$; $\quad$ в) $\dfrac{2x^2 + 9x - 11}{x - 1} = 0$.

759. а) $\frac{x^2}{3x-4} - \frac{100}{3x-4} = 0$; б) $\frac{5z^2}{z-4} = \frac{20z}{z-4}$; в) $\frac{y^2}{y+3} = \frac{y+12}{y+3}$.

760. а) $\frac{6t}{t+6} + \frac{t^2}{t+6} = 0$; б) $\frac{x^2+7x}{4+x} = \frac{2x-6}{4+x}$; в) $\frac{x^2-12}{x-6} - \frac{4x}{x-6} = 0$.

761. а) $\frac{x^2-5x}{x^2+3} = 2$; б) $\frac{2+3x}{x+2} = x$; в) $-\frac{32}{y} = y-12$;

г) $\frac{18-4x^2}{x-x^2} = 3$; д) $\frac{x^2-7}{x-4} = 2x$; е) $y-1 = \frac{20}{y}$.

762. а) $\frac{x^2+9x}{x+1} = 14$; б) $\frac{2x-15}{x-6} = x$; в) $y+6 = \frac{7}{y}$.

763. а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $x^4-7x^2-18=0$; в) $x^4+x^2-6=0$.

764. а) $x^4-3x^2-4=0$; б) $x^4-10x^2+9=0$; в) $x^4-7x^2+12=0$.

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння:

765. а) $\frac{x^2+x-12}{x^2-16} = 0$; б) $\frac{3x^2+8x-3}{x^2-\frac{1}{9}} = 0$;

в) $\frac{2x^2+9x-5}{x^2+6x+5} = 0$; г) $\frac{2x^2-5x+2}{(2x-1)(x-2)} = 0$.

766. а) $\frac{4x^2-1}{x+\frac{1}{2}} = 0$; б) $\frac{x^2-11x+10}{x^2-1} = 0$.

767. а) $\frac{8x-5}{x} = \frac{9x}{x+2}$; б) $\frac{5+23x}{2x+1} = \frac{12x-6}{x}$;

в) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} = 1$; г) $\frac{x}{x-3} - \frac{x-10}{x+2} = 5$.

768. а) $\frac{22(x-1)}{x} = \frac{21x-9}{x+1}$; б) $\frac{27x+17}{28} = x + \frac{x+1}{x}$;

в) $\frac{x+3}{2x-6} + \frac{29}{x+4} = 3$.

769. а) $\frac{22}{1-4x^2}-\frac{4}{2x-1}+\frac{28}{1+2x}=-2;$ б) $\frac{7}{x-4}+\frac{27}{x+4}-\frac{18}{x^2-16}=8;$

в) $\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x^2-9}+\frac{2}{x^2-3x}=0;$ г) $\frac{18}{6x+x^2}-\frac{9}{x-6}+\frac{27}{x^2-36}=0.$

770. а) $\frac{12}{x+1}+\frac{8}{1-x^2}+\frac{x-9}{x-1}=-1;$ б) $\frac{3}{x-9}+\frac{5}{x^2+9x}-\frac{10}{81-x^2}=0.$

771. а) $x^3-5x=0;$ б) $4x^3-3x^2-x=0.$

772. а) $2x^3+4x=0;$ б) $x^3-11x^2+30x=0.$

773. а) $2x^4-9x^2+4=0;$ б) $36x^4-7x^2-4=0;$

в) $(x^2-1)^2-11(x^2-1)+24=0.$

774. а) $4x^4-17x^2+4=0;$ б) $(x^2-x)^2+2(x^2-x)-8=0.$

775. Знайдіть найменший корінь рівняння $(x^2+2x)^2-2(x^2+2x)-3=0.$

776. Знайдіть найбільший корінь рівняння $2x^4+5x^2-3=0.$

Рівень В

777. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x+4}{4x^2+4x+1}-\frac{10}{1-2x}=\frac{15}{2x+1};$ б) $\frac{2}{x-5}+\frac{7x}{x+3}+\frac{14}{x^2-2x-15}=0;$

в) $\frac{6+x}{x^2-3x-10}-\frac{8+x}{x+2}+\frac{1}{x-5}=2;$ г) $\frac{y-3}{2}+\frac{y^2+2}{y^2}=\frac{1-y-y^2}{y}+\frac{2}{y^2};$

д) $\frac{3y-y^2}{y-2}+\frac{y-2}{3y-y^2}=-2{,}5;$ е) $\frac{x^2+4x+9}{x-3}+\frac{x-3}{x^2+4x+9}=-2.$

778. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-(a+1)x+a}{x-2}=0$ з параметром a.

779. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(x^2+5x\right)\left(x^2+5x-2\right)=24;$ б) $\left(2x^2+x+1\right)\left(2x^2+x+3\right)=8;$

в) $\left(x^2-5x+7\right)^2-(x-2)(x-3)=1;$ г) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=120;$

д) $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$; е) $(x+3)^2(x+2)(x+4)=12$.

780. Розкладіть на множники:

а) a^4-10a^2+9; б) $(b^2+2b)^2-2(b^2+2b)-3$.

Розв'яжіть рівняння:

781. а) $\sqrt{x^2-3x+5}=3$; б) $\sqrt{3x^2-14x+9}=1$.

782. а) $x-6\sqrt{x}+5=0$; б) $x+\sqrt{x}-6=0$;

в) $\sqrt{x-1}+2x=12$; г) $x+\sqrt{x+20}=22$;

д) $x^2-3x-7=-\sqrt{x^2-3x+5}$; е) $(x+1)(x+4)=3\sqrt{x^2+5x+2}+6$.

Вправи для повторення

783. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{24a^2c^6}{32a^3c^4}$; б) $\dfrac{4x^4-y^2}{2x^2y+y^2}$.

784. Доведіть тотожність $\left(a-\dfrac{4ab}{a+b}+b\right):\dfrac{a-b}{a+b}=a-b$.

785. Спростіть вираз:

а) $5\sqrt{8}+3\sqrt{16}-6\sqrt{32}-6\sqrt{64}$; б) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{12}-\sqrt{8}\right)$.

786. Морська вода містить 5% солі (за масою). Скільки прісної води потрібно додати до 30 кг морської, щоб одержати розчин, у якому відсотковий уміст солі дорівнював би 1,5%?

787. Із двох сіл назустріч один одному одночасно вирушили пішохід і велосипедист. Пройшовши 2 км, пішохід зустрів велосипедиста, який на цей час проїхав 6 км. Знайдіть швидкість пішохода, якщо вона на 8 км/год менша від швидкості велосипедиста.

788. У Вищій лізі чемпіонату України з футболу кожна із 16 команд має зіграти з іншими командами по 2 матчі. Скільки всього матчів буде зіграно протягом чемпіонату?

26. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до квадратних

Розглянемо задачі.

Задача 1. Довжина класної дошки на 1,3 м більша від ширини. Знайти розміри дошки, якщо її площа дорівнює 3 м^2.

• Нехай ширина дошки дорівнює x м. Тоді довжина дошки дорівнює $(x + 1,3)$ м, а площа — $x(x + 1,3)$ м^2. За умовою задачі площа дошки дорівнює 3 м^2. Маємо рівняння: $x(x + 1,3) = 3$, звідки $x^2 + 1,3x - 3 = 0$. Коренями одержаного рівняння є числа $x_1 = -2,5$ та $x_2 = 1,2$. Перший корінь не задовольняє умову задачі. Отже, ширина дошки дорівнює 1,2 м, а довжина — $1,2 + 1,3 = 2,5$ (м).

Відповідь. 1,2 м; 2,5 м. •

Задача 2. Моторний човен 15 км за течією річки і 14 км проти течії пройшов за 2 год. Знайти швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

• Нехай швидкість човна у стоячій воді дорівнює x км/год ($x > 3$, оскільки швидкість човна має бути більшою від швидкості течії річки), тоді швидкість човна за течією річки дорівнює $(x + 3)$ км/год, а проти течії — $(x - 3)$ км/год.

Шлях 15 км за течією річки човен пройшов за $\frac{15}{x+3}$ год, а шлях 14 км проти течії — за $\frac{14}{x-3}$ год. На весь шлях човен затратив $\left(\frac{15}{x+3}+\frac{14}{x-3}\right)$ год, що за умовою задачі дорівнює 2 год. Маємо рівняння:

$$\frac{15}{x+3}+\frac{14}{x-3}=2.$$

Розв'яжемо одержане рівняння. Спільним знаменником дробів, які входять до рівняння, є $(x + 3)(x - 3)$. Помноживши обидві частини рівняння на спільний знаменник, матимемо:

$15(x-3)+14(x+3)=2(x-3)(x+3)$; $\quad 15x-45+14x+42=2x^2-18$;

$2x^2-29x-15=0$; $\quad x_1=-0,5$; $x_2=15$.

Число $-0,5$ не задовольняє нерівність $x > 3$. Отже, швидкість човна у стоячій воді дорівнює 15 км/год.

Відповідь. 15 км/год. •

Задача 3. Дві бригади робітників, працюючи разом, виконали замовлення за 4 дні. За скільки днів може виконати замовлення кожна бригада, працюючи окремо, якщо перша може це зробити на 6 днів швидше, ніж друга?

● За умовою задачі складаємо таблицю:

Бригади	*Кількість днів*	*Частина замовлення, яку виконують за один день (продуктивність праці)*
I	x	$\frac{1}{x}$
II	$x+6$	$\frac{1}{x+6}$
I і II	4	$\frac{1}{4}$ або $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}$

Маємо рівняння: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$.

Розв'язавши рівняння, знайдемо його корені: $x_1=-4$; $x_2=6$.

Число –4 не задовольняє умову задачі. Отже, перша бригада може виконати замовлення за 6 днів, а друга — за 6 + 6 = 12 (днів).

Відповідь. 6 днів; 12 днів. ●

Задача 4. Поїзд був затриманий у дорозі на 20 хв. Для того щоб прибути на станцію призначення вчасно, він за 160 км від цієї станції збільшив свою швидкість на 16 км/год. Знайти початкову швидкість поїзда.

● За умовою задачі складаємо таблицю:

Умова руху	*Шлях*, км	*Швидкість*, км/год	*Час*, год	
Без запізнення	160	x	$\frac{160}{x}$	більше на 20 хв
Ліквідовуючи запізнення на 20 хв	160	$x+16$	$\frac{160}{x+16}$	

20 хв = $\frac{1}{3}$ год.

Маємо рівняння: $\frac{160}{x}-\frac{160}{x+16}=\frac{1}{3}$.

Розв'яжемо рівняння, помноживши обидві його частини на $3x(x+16)$:

$480(x+16)-480x=x(x+16)$; $480x+7680-480x=x^2+16x$;

$x^2 + 16x - 7680 = 0$; $x_1 = -96$; $x_2 = 80$.

Число –96 не задовольняє умову задачі. Отже, початкова швидкість поїзда дорівнювала 80 км/год.

Відповідь. 80 км/год. •

Рівень А

789. Добуток двох чисел дорівнює 135. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 6 більше від іншого.

790. Одне число менше від іншого на 20, а їх добуток дорівнює –91. Знайдіть ці числа.

791. Різниця двох додатних чисел дорівнює 23, а їх добуток — 420. Знайдіть ці числа.

792. Знайдіть сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 30 см, а площа — 56 см^2.

793. Площа ділянки прямокутної форми дорівнює 32 м^2. Довжина ділянки на 4 м більша від її ширини. Знайдіть розміри ділянки.

794. Відстань між двома містами дорівнює 180 км. Пасажирський поїзд пройшов шлях між цими містами на 1 год швидше, ніж товарний, бо його швидкість була на 30 км/год більша від швидкості товарного. Знайдіть швидкості поїздів.

795. Щоб потрапити з міста до села, потрібно проїхати 40 км по шосе, а потім ще 8 км по ґрунтовій дорозі. На шлях від міста до села мотоцикліст затратив 1 год. Знайдіть швидкість мотоцикліста на шосе, якщо вона на 10 км/год більша від швидкості на ґрунтовій дорозі.

796. Токар за певний час мав виготовити 96 деталей. Виготовляючи щогодини на 2 деталі більше, ніж планувалося, він виконав завдання на 4 год швидше. Скільки деталей токар планував виготовляти щогодини?

797. Андрій набрав на комп'ютері 20 сторінок тексту за певний час. Якби він набирав щогодини на 1 сторінку більше, то завершив би набір на 1 год швидше. Скільки сторінок набирав Андрій за 1 год?

798. Катер за 1 год пройшов 12 км за течією річки і 9 км проти течії. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість катера у стоячій воді дорівнює 21 км/год.

799. Моторний човен за 2 год пройшов 24 км за течією річки і 6 км проти течії. Знайдіть швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

Рівень Б

800. Одне число більше від іншого на 3. Якщо від квадрата більшого числа відняти менше число, помножене на 10, то одержимо 69. Знайдіть ці числа.

801. Знайдіть два послідовні натуральні числа, квадрат суми яких більший від суми їхніх квадратів на 180.

802. Знаменник звичайного дробу на 2 більший від чисельника. Якщо від чисельника дробу відняти 1, а до знаменника додати 3, то одержимо дріб, який на $\frac{7}{20}$ менший від даного. Знайдіть даний дріб.

803. Чисельник дробу більший від знаменника на 5. Якщо до чисельника дробу додати 3, а від знаменника відняти 1, то одержимо дріб, який на 6,5 більший від даного. Знайдіть даний дріб.

804. Школі виділили 48 тис. грн. на придбання певної кількості однакових комп'ютерів. На час придбання комп'ютерів ціна кожного з них зменшилась на 200 грн., тому купили на один комп'ютер більше. Скільки купили комп'ютерів?

805. Два екскаватори, працюючи разом, вирили канаву за 3 год 45 хв. Перший екскаватор, працюючи сам, може вирити канаву на 4 год швидше, ніж другий. За який час може вирити канаву кожний екскаватор, працюючи окремо?

806. Два робітники, працюючи разом, виготовили партію деталей за 6 год. Перший робітник, працюючи сам, може виготовити цю партію деталей на 5 год швидше, ніж другий. За який час кожний робітник може виготовити партію деталей, працюючи окремо?

807. Два трактори, працюючи разом, зорали за 1 день половину поля. За скільки днів може зорати все поле кожний трактор окремо, якщо один з них може це зробити на 3 дні швидше, ніж інший?

808. Перша бригада може прокласти дорогу на 3 дні швидше, ніж друга. Якщо перша бригада пропрацює 6 днів, а потім друга 4 дні, то вони прокладуть усю дорогу. За скільки днів може прокласти дорогу одна перша бригада?

809. За 4 дні спільної роботи два токарі виконали $\frac{3}{5}$ усього завдання. Перший токар може виконати все завдання на 3 дні швидше, ніж другий. За який час може виконати завдання кожний токар, працюючи окремо?

810. Моторний човен проплив 15 км по озеру і 30 км по річці, яка впадає в озеро. На шлях по озеру він затратив на 1 год 10 хв менше, ніж на шлях по річці. Знайдіть швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

811. Катер проплив 9 км за течією річки і 14 км проти течії, затративши на весь шлях стільки часу, скільки йому потрібно для подолання 24 км у стоячій воді. Знайдіть швидкість катера у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

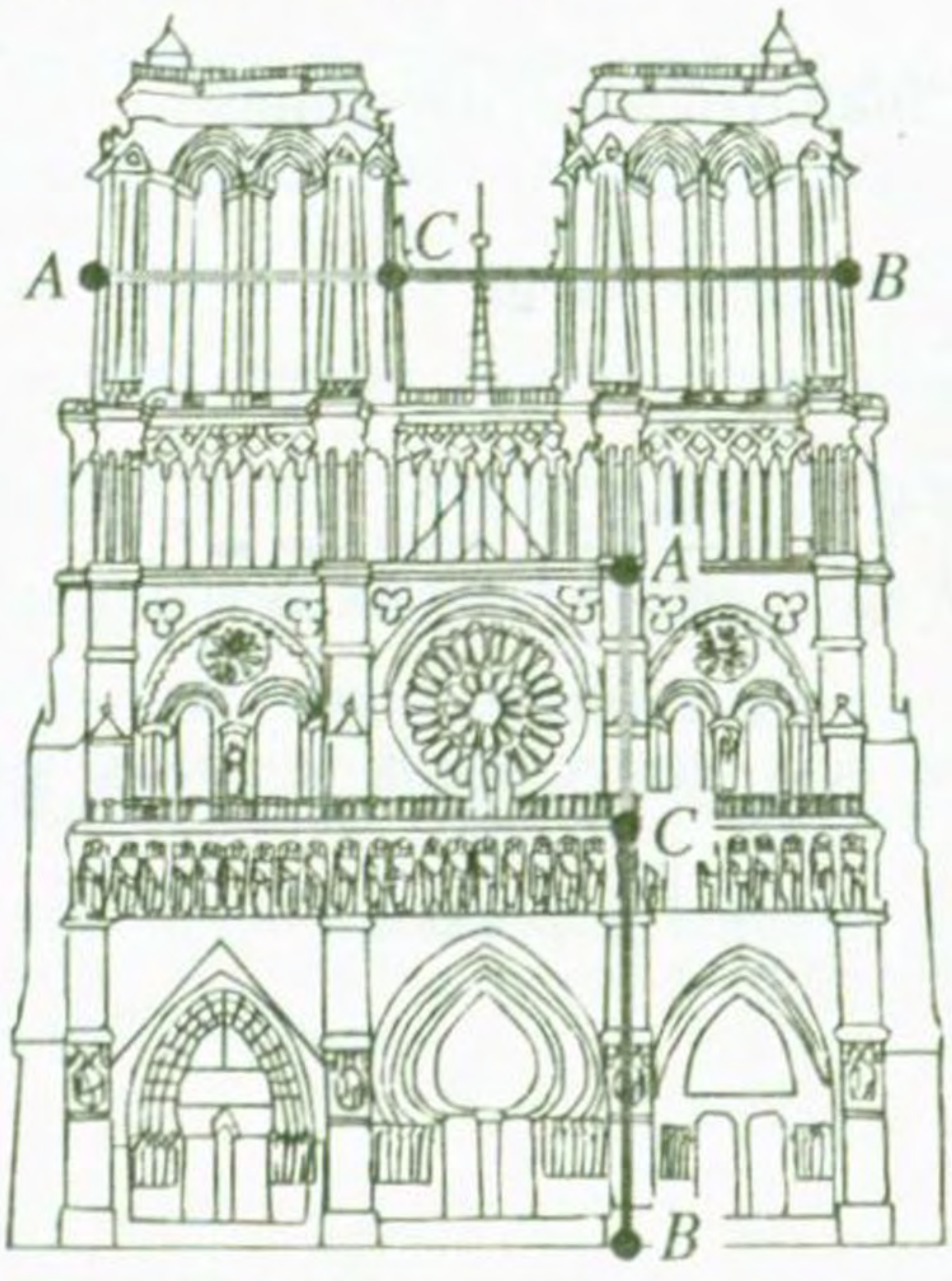
812. З одного села в інше, відстань між якими дорівнює 24 км, виїхав мотоцикліст, а через 12 хв услід за ним виїхав автомобіль. У друге село мотоцикліст та автомобіль прибули одночасно. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 20 км/год більша від швидкості мотоцикліста.

813. Поїзд був затриманий на станції на 6 хв. Збільшивши швидкість на 10 км/год, він на перегоні завдовжки 90 км ліквідував відставання від графіка. Знайдіть швидкість поїзда за розкладом.

Рівень В

814. Кожна дівчина 8 класу подарувала свою фотографію кожній іншій дівчині класу. Скільки дівчат у цьому класі, якщо вони обмінялися 210 фотографіями?

815. Точка C ділить відрізок AB на дві частини так, що $AC : CB = CB : AB$. (Такий поділ відрізка називають «золотим поділом», або «золотим перерізом».) Знайдіть відношення $AC : CB$.



Собор Паризької Богоматері (Нотр-Дам де Парі)

816. Щоб зібрати пшеницю з поля, першому комбайну потрібно на 9 год менше часу, ніж другому, і на 3 год більше, ніж обом при спільній роботі. За який час кожний комбайн, працюючи окремо, може зібрати всю пшеницю?

817. Автомобіль за певний час мав подолати шлях 250 км, рухаючись зі сталою швидкістю. Але через 2 год після початку руху він був затриманий на 5 хв і, щоб прибути до місця призначення вчасно, збільшив швидкість на 5 км/год. Знайдіть швидкість автомобіля протягом перших двох годин руху.

818. Бригада із 5 токарів й одного учня за певний термін мала виготовити 700 деталей. Коли бригада пропрацювала 5 днів, учневі, який виготовляв за день на 2 деталі менше, ніж кожний з токарів, доручили іншу роботу, тому за визначений термін було виготовлено лише 650 деталей. Скільки деталей виготовляв за 1 день учень?

Вправи для повторення

819. Обчисліть:

а) $\sqrt{2,25}\cdot\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{0,04}\cdot\sqrt{3600}$; б) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{50}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}$.

820. Спростіть вираз:

а) $\frac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$; б) $\left(\sqrt{5-\sqrt{21}}+\sqrt{5+\sqrt{21}}\right)^2$.

821. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

а) $\frac{b+1}{b-1}+\frac{4}{1-b}\cdot\frac{b}{1+b}$, якщо $b=2$;

б) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$, якщо $m=0,8$.

822. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу $\frac{a}{a-b}-\frac{b^2}{a^2-b^2}:\left(1-\frac{a}{a+b}\right)$ дорівнює 1.

823. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^4-7x^2+12=0$; б) $x-15\sqrt{x}-16=0$.

Цікаво знати

Вавилонські вчені вміли розв'язувати квадратні рівняння окремих видів ще близько 2 тис. років до н. е. Пізніше давньогрецькі та індійські математики розв'язували деякі види квадратних рівнянь геометрично (з використанням побудов). У IX ст. арабський математик **Мухаммед бен Муса ал-Хорезмі** зібрав і систематизував способи розв'язування квадратних рівнянь. У трактаті «Кітаб ал-джебр ал-мукабала» він пояснив прийоми розв'язування рівнянь виду $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, де a, b, c — додатні числа. Поділ квадратних рівнянь на такі види обумовлений тим, що на той час не визнавали від'ємних чисел, тому коефіцієнти у рівнянні мали бути додатними. Зрозуміло, що й від'ємних коренів тоді не знаходили.

Математики середньовічного Сходу шукали також способи розв'язування кубічних рівнянь — рівнянь виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де $a \neq 0$. Проте вивести загальну формулу для коренів таких рівнянь їм не вдалося.

Розв'язали цю проблему в Європі. Отримана в XVI ст. формула для коренів кубічного рівняння стала першим великим відкриттям європейської математики.

У XVI ст. в Італії були поширені математичні турніри, на яких переможцем визнавали того, хто розв'яже більше задач, запропонованих суперником. Учасник турніру міг пропонувати лише ті задачі, які сам міг розв'язати. Тому коли математик знаходив метод розв'язування задач певного типу, він не поспішав розкривати свій секрет. Володіючи таємницею, він міг викликати на математичні турніри інших математиків і, перемагаючи їх, здобути славу неперевершеного математика. Коли одному з італійських математиків став відомий спосіб розв'язування рівнянь виду $x^3 + px = q$, де p і q — додатні числа, він викликав на математичний турнір математика-самоучку **Нікколо Тарталью** (1499–1557). За кілька днів до турніру Тарталья знайшов загальний метод розв'язування кубічних рівнянь і переміг, швидко розв'язавши всі 30 задач, запропонованих йому суперником.

Джероламо Кардано
(1501–1576),
італійський математик,
філософ, лікар

Нільс Генріх Абель
(1802–1829),
норвезький математик

Знайдена Тартальєю формула для коренів кубічного рівняння була опублікована не ним, а італійським ученим **Джероламо Кардано** (1501–1576), який дізнався її від Тартальї. Зараз ця формула відома як формула Кардано[1]. Згодом **Луїджі Феррарі** (1522–1565), учень Кардано, знайшов корені рівняння 4-го степеня.

Формули для коренів рівнянь від 1-го до 4-го степенів виражають ці корені через коефіцієнти рівняння. Якщо всі корені рівняння можна виразити через його коефіцієнти за допомогою скінченного числа дій додавання, віднімання, множення, ділення і добування кореня, то кажуть, що це рівняння можна *розв'язати алгебраїчно*, або *розв'язати в радикалах*.

Чи можна розв'язати в радикалах рівняння п'ятого і вищих степенів? Протягом майже трьох століть спроби математиків відповісти на це питання були невдалими. Лише на початку XIX століття норвезький математик **Нільс Генріх Абель** (1802–1829) довів, що такі рівняння в загальному випадку розв'язати в радикалах неможливо.

Проте це не означає, що коренів рівнянь вище четвертого степеня не можна знайти. Не існує лише загальних формул, які виражали б корені через коефіцієнти рівняння.

---

[1] Кардано відомий також як великий винахідник: до його доробку належать добре відомі водіям та механікам карданний вал, карданна муфта, карданна передача.

Запитання і вправи для повторення § 3

1. Яке рівняння називають квадратним?
2. Вкажіть типи неповних квадратних рівнянь.
3. Як розв'язати квадратне рівняння виду $ax^2 + bx = 0$?
4. Як розв'язати квадратне рівняння виду $ax^2 + c = 0$?
5. Вкажіть корінь квадратного рівняння $ax^2 = 0$.
6. Яке рівняння називають зведеним квадратним рівнянням?
7. За якою формулою обчислюють дискримінант квадратного рівняння?
8. Скільки коренів має квадратне рівняння, якщо $D > 0$? $D < 0$? $D = 0$?
9. За якою формулою знаходять корені квадратного рівняння? Виведіть цю формулу.
10. Як формулюють теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння? Доведіть цю теорему.
11. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта.
12. Чому дорівнює сума та добуток коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?
13. Який многочлен називають квадратним тричленом?
14. Як розкласти квадратний тричлен на множники? Наведіть приклад.

Розв'яжіть рівняння:

824. а) $0{,}3x^2 - 4{,}8 = 0$; б) $20{,}5 - 4{,}1x^2 = 0$;

в) $5\frac{1}{3}x^2 - 2 = 10$; г) $2{,}4x^2 - \frac{3}{8} = 4{,}425$;

д) $6x^2 - 3{,}6x = 0$; е) $5{,}3x^2 - 1{,}06x = 0$.

825. а) $2x^2 - x - 1 = 0$; б) $4x^2 - 11x - 3 = 0$;

в) $5x^2 - 21x + 4 = 0$; г) $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

826. Знайдіть за формулою корені рівняння і виконайте перевірку за теоремою, оберненою до теореми Вієта:

а) $x^2 - 5x - 14 = 0$; б) $x^2 + 4x - 60 = 0$.

827. Знайдіть корені рівняння (усно):

а) $x^2 + 3x - 4 = 0$; б) $x^2 + 7x + 10 = 0$.

Розкладіть на множники:

828. а) $x^2-10x+21$; б) $2x^2+3x-5$; в) $x^2-8x+16$.

829*. а) x^4-7x^2+12; б) $x^2-4ax+3a^2$; в) $2m^2-mn-10n^2$.

830. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{x^2+3x-18}{3-x}$; б) $\dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+6x+5}$; в) $\dfrac{a^2+2ab-15b^2}{2a^2-9ab+9b^2}$.

Розв'яжіть рівняння:

831. а) $(x-4)^2-36=0$; б) $(2x+3)^2-25=0$;

в) $(x+4)(x-1)-5x=2x^2-4$; г) $(x-5)^2-(3x+2)^2=(4x-1)(x-4)$;

д) $(x-3)^2-(3x-5)^2=0$; е) $(7x-1)^2-(x+9)^2=0$.

832. а) $x^3-3x=0$; б) $x^3-0{,}64x=0$.

833. а) $x^4-3x^2+2=0$; б) $x^4-8x^2-9=0$.

834*. а) $\left(x^2-x\right)^2+x^2-x=6$; б) $\left(3x^2+2x\right)^2-4\left(3x^2+2x\right)-5=0$;

в) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)=12$; г) $(x^2-4x+1)(x^2-4x-3)=12$.

835*. а) $x+3\sqrt{x}-4=0$; б) $\sqrt{x^2-7x+7}=5$.

836. а) $\dfrac{z^2+5z-24}{3-z}=0$; б) $\dfrac{x^2-5}{x+2}+\dfrac{5x+11}{x+2}=0$;

в) $\dfrac{x+7}{2x-3}=\dfrac{13-x}{x}$; г) $\dfrac{x}{x+5}=\dfrac{1+2x}{3-x}$;

д) $\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x^2+x-4}{(x-3)(x+1)}$; е) $\dfrac{2x+3}{x-4}-\dfrac{x}{x^2-16}+\dfrac{5(x+2)}{x+4}=0$;

є) $\dfrac{2x-1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-5}=\dfrac{12-5x}{x^2-3x-10}$; ж) $\dfrac{2x^2-1}{3x+2}-\dfrac{3x+2}{2x^2-1}=1{,}5$.

837. Чи може значення виразу $x^2-5x+15$ дорівнювати 5?

838. Знайдіть найбільший корінь рівняння $x^4-17x^3+72x^2=0$.

839. Знайдіть суму коренів рівняння $(x^2-5x-24)(2x^2-5x+3)=0$.

840. Знайдіть добуток коренів рівняння $\dfrac{11x-3}{2x-1}-3=\dfrac{x+3}{x-1}$.

841*. Корені рівняння $x^2 - 16x + m = 0$ відносяться як 1 : 7. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт m.

842*. Для яких значень a сума коренів рівняння $x^2 + (2 - a - a^2)x - a^2 = 0$ дорівнює нулю?

843*. Знайдіть значення k, для яких рівняння $(k - 3)x^2 + (k^2 - 4k + 3)x + 1 = 0$ має корені, що є протилежними числами.

844*. Для яких натуральних значень k рівняння $kx^2 - 2(k - 3)x + k - 4 = 0$ має корені?

845*. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x - 7 = 0$, знайдіть значення виразу $x_1^{-2} + x_2^{-2}$, де x_1 та x_2 — корені даного рівняння.

846. Одна сторона прямокутника на 3 см довша від іншої, а його площа дорівнює 130 см^2. Знайдіть периметр прямокутника.

847. Знайдіть натуральне число, яке менше від свого квадрата на 12.

848. Добуток двох послідовних натуральних чисел більший від їх суми на 5. Знайдіть ці числа.

849. Знайдіть такі три послідовні непарні числа, щоб сума квадратів перших двох чисел була більшою від квадрата третього числа на 9.

850. Один катет прямокутного трикутника на 1 см коротший від гіпотенузи і на 1 см довший від іншого катета. Знайдіть сторони трикутника.

851. Знаменник звичайного дробу на 7 більший від чисельника. Якщо до чисельника і знаменника дробу додати 2, то одержимо дріб, більший від даного на $\frac{1}{12}$. Знайдіть даний дріб.

852. Сума чисельника і знаменника звичайного дробу дорівнює 13. Якщо до чисельника дробу додати 7, а від знаменника відняти 9, то одержимо дріб, який у добутку з даним дробом дає 3. Знайдіть даний дріб.

853. Пароплав проплив 18 км за течією річки і 16 км проти течії. На шлях за течією річки він затратив часу на 15 хв менше, ніж на шлях проти течії. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість пароплава у стоячій воді дорівнює 20 км/год.

854. Від пристані відплив пліт, а через 9 год — моторний човен, який наздогнав пліт на відстані 21 км від пристані. Знайдіть швидкість плоту, якщо вона на 12 км/год менша від швидкості човна за течією річки.

855. Відстань між залізничними станціями A і B дорівнює 230 км. Зі станції A до станції B вирушив товарний поїзд, а через 1 год назустріч йому зі станції B — пасажирський. Поїзди зустрілися на відстані 140 км від станції A. Знайдіть швидкість пасажирського поїзда, якщо вона на 20 км/год більша від швидкості товарного.

856. Автомобіль подолав шлях між містами A і B завдовжки 132 км. Повертаючись назад, він зменшив швидкість на 6 км/год, тому затратив на зворотний шлях на 10 хв більше, ніж на шлях від A до B. Знайдіть швидкість автомобіля під час руху від міста A до міста B.

857. Вантажний автомобіль перевіз вантаж з пункту A в пункт B, відстань між якими дорівнює 48 км. Повертаючись назад, автомобіль проїхав $\frac{1}{4}$ шляху з тією ж швидкістю, з якою їхав від A до B, а потім збільшив швидкість на 12 км/год. Знайдіть швидкість автомобіля під час руху від A до B, якщо на шлях від A до B і на зворотний шлях він затратив 1 год 30 хв.

858. Два екскаватори різної потужності можуть вирити котлован за 4 дні. Третину котловану перший екскаватор може вирити на 2 дні швидше, ніж другий. За скільки днів може вирити котлован кожний екскаватор, працюючи окремо?

859. Два робітники можуть виконати $\frac{3}{5}$ завдання за 4 дні. За скільки днів зможе виконати завдання кожний робітник, працюючи окремо, якщо половину завдання один з них виконує на 5 днів швидше, ніж інший?

860*. У першому кварталі підприємство виготовило 2000 одиниць продукції, а у другому збільшило випуск на $x\%$. У третьому ж кварталі підприємство виготовило 3000 одиниць продукції, що на $(x + 5)\%$ більше, ніж у другому. Знайдіть x.

Завдання для самоперевірки № 5

Рівень 1

1. Знайдіть корені рівняння $x^2 - 2x = 0$ і вкажіть правильну відповідь:

а) 1; –2; **б)** 0; –2; **в)** 0; 2; **г)** –1; 2.

2. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 64 = 0$ і вкажіть правильну відповідь:

а) –64; 64; **б)** 0; 64; **в)** –2; 2; **г)** –8; 8.

3. Дискримінант квадратного рівняння $3x^2 + 2x - 1 = 0$ дорівнює:

а) $2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)$; **б)** $2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$;

в) $3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)$; **г)** $1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$.

4. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 7x - 8 = 0$ і вкажіть правильну відповідь:

а) 1; 8; **б)** 7; 8; **в)** –8; 1; **г)** –1; 8.

5. Сума і добуток коренів рівняння $x^2 + 11x + 30 = 0$ відповідно дорівнюють:

а) 11; 30; **б)** –11; 30; **в)** 11; –30; **г)** –11; –30.

6. Коренями квадратного тричлена $x^2 - x - 6$ є числа –2 і 3. Який з виразів є розкладом цього тричлена на множники?

а) $(x - 2)(x + 3)$; **б)** $(x - 1)(x + 6)$; **в)** $(x + 2)(x - 3)$; **г)** $(x - 2)(x - 3)$.

Рівень 2

7. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2 - 12 = 0$; **б)** $2x^2 - 6x = 0$.

8. Розкладіть на множники:

а) $x^2 + 6x + 8 = 0$; **б)** $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

9. Знайдіть суму та добуток коренів рівняння $x^2 - 10x + 24 = 0$.

10. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x + 3)(2x - 1) = x^2 + 5x - 7$; **б)** $\dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} = 0$.

11. Добуток двох чисел дорівнює –24. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 11 більше від іншого.

Рівень 3

12. Розв'яжіть рівняння:

а) $6x^2 - 3x + \frac{1}{3} = 0$; **б)** $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$.

13. Знайдіть значення виразу $3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

14. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x}{x-1} - \frac{3}{x+2} = \frac{5}{4}$; **б)** $\frac{8x}{x+3} - \frac{x+3}{x^2-9} = -\frac{5}{x-3}$.

15. Знайдіть значення b, для яких один з коренів рівняння $2x^2 - 4x + b = 0$ утричі більший від іншого.

16. З міста A до міста B виїхав мотоцикліст. Через 18 хв услід за ним виїхав автомобіль, який, проїхавши 40 км, наздогнав мотоцикліста. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 30 км/год більша від швидкості мотоцикліста.

Рівень 4

17. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(x^2 + 2x - 1\right)\left(x^2 + 2x - 2\right) = 2$; **б)** $x - 7\sqrt{x} - 8 = 0$.

18. Для яких значень a рівняння $x^2 - (a + 2)x + a + 5 = 0$ має один корінь?

19. Знайдіть усі значення b, для яких корені рівняння $3x^2 - bx - 2 = 0$ задовольняють умову $x_1 + 6x_2 = 0$, де x_1 — менший корінь, а x_2 — більший корінь.

20. Розв'яжіть рівняння $\frac{y+1}{y+3} + \frac{y-14}{y-7} = \frac{20y+47}{21+4y-y^2}$.

21. Два трактори готують землю під озимину. Протягом 3 год вони працювали разом, після чого ще 1 год працював лише другий трактор. За весь цей час трактори підготували половину поля. За який час може підготувати все поле кожний трактор, працюючи окремо, якщо перший може це зробити на 4 год швидше, ніж другий?

ЗАДАЧІ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 8 КЛАСУ

861. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

а) $\frac{3b}{5b+1}$; б) $\frac{x+2}{x^2+3x}$; в) $\frac{-5}{a^2-3}$; г) $\frac{4}{x^2-7x+12}$.

862. Скоротіть дріб:

а) $\frac{42x^2y^5}{36x^4y^3}$; б) $\frac{6xy+6y^2}{x^2-y^2}$; в) $\frac{a^2-6a+9}{(a-2)^2-1}$;

г) $\frac{a^2-2a+1}{a^2+ab-a-b}$; д) $\frac{x^{15}-1}{x^{10}+x^5+1}$; е) $\frac{x^{10}-5}{x^5-\sqrt{5}}$.

863. Перетворіть у дріб вираз:

а) $\frac{1+a}{a^2b}+\frac{1+b}{ab^3}$; б) $\frac{1-2x}{15x^3y^4}-\frac{3+y}{9x^4y^3}$;

в) $\frac{1}{2(a-2b)}+\frac{3}{16(a+2b)}$; г) $\frac{b+1}{ab-b^2}-\frac{a+1}{a^2-b^2}$.

864. Виконайте множення:

а) $\frac{24(a+1)^3}{5b^3}\cdot\frac{25b^2a}{18(a+1)^2}$; б) $\frac{27x}{xy+y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{36xy}$.

865. Виконайте ділення:

а) $\frac{x^3}{12yz^2}:\frac{yx^4}{16z^3}$; б) $\frac{a^2+2ab+b^2}{ab-b^2}:\frac{a^2-b^2}{3a^2}$.

Спростіть вираз:

866. а) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a+2}$; б) $\frac{x-y}{y}+\frac{y}{x+y}$;

в) $\frac{xb}{2y^2}\cdot\frac{6y}{x}+\frac{b}{y}$; г) $\frac{2b}{a}+\frac{a+b}{a-b}:\frac{a^2+ab}{ab-b^2}$;

д) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{x-6}{x^2-4}$; е) $\frac{2}{y-2}+\frac{2}{y+2}+\frac{4y-34}{4-y^2}$.

867. а) $\frac{3}{a+b}-\frac{3a-3b}{2a-3b}\cdot\left(\frac{2a-3b}{a^2-b^2}-2a+3b\right)$;

б) $\left(m+\frac{m-n}{m+n}-n\right):\left(\frac{2m+1}{m^2-n^2}+1\right)$;

в) $\left(\frac{x-y}{xy}-\frac{3x+y}{xy-y^2}+\frac{3y+x}{xy-x^2}\right):\frac{2x+2y}{xy}-\frac{2x}{y-x}$;

г) $\frac{a^2+ax+ab+bx}{a^2-ax-ab+bx}\cdot\frac{a^2-ax-bx+ab}{a^2+ax-bx-ab}$.

868. Доведіть тотожність:

а) $\left(x-\frac{xy}{x+y}\right):\left(y-\frac{y^2}{x+y}\right)=\frac{x}{y}$;

б) $\left(\frac{1}{a-2b}+\frac{1}{a+2b}\right):\left(\frac{4(a^2+b^2)}{a^2-4b^2}+1\right)=\frac{2}{5a}$;

в) $\frac{1}{a-2b}+\frac{6b}{4b^2-a^2}-\frac{2}{a+2b}=-\frac{1}{2a}\cdot\left(\frac{a^2+4b^2}{a^2-4b^2}+1\right)$.

869. Спростіть вираз і знайдіть його значення для даного значення змінної:

а) $\frac{a+1}{a^2+2a+1}-\frac{1}{a-1}$; $a=15$; б) $\frac{(b-2)^2}{b^2-4}-1$; $b=-1{,}9$.

870. Доведіть, що вираз $\frac{2^m\cdot 3^{n-1}-2^{m-1}\cdot 3^n}{2^m\cdot 3^n}$ набуває одного й того ж значення для всіх натуральних значень m і n.

871. Обчисліть:

а) $\frac{2^{-3}\cdot 2^{-8}}{2^{-10}}$; б) $\frac{5^{-3}\cdot 25^4}{125^2}$; в) $\frac{6^{-5}}{2^{-6}\cdot 3^{-5}}$.

Спростіть вираз:

872. а) $\left(a^{-2}-a^{-1}+1\right):\left(a^{-2}+a\right)$; б) $\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}+1}+1\right):\left(1-\frac{3x^{-4}}{1-x^{-4}}\right)$.

873*. $\frac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$.

874. Яких значень може набувати вираз $a^{12}\cdot a^3+a^{30}:a^{15}-2a^{18}\cdot a^{-3}+a^0$?

875. Подайте у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу число:

а) $\frac{7}{16}$; б) $-\frac{7}{36}$; в) $\frac{5}{27}$; г) $\frac{13}{40}$.

876. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

а) $\sqrt{x^2+1}$; б) $\sqrt{|x|}$; в) $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$; г) $\frac{5}{\sqrt{x}-4}$.

877. Обчисліть:

а) $3\sqrt{625}-8\sqrt{\frac{25}{36}}$; б) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}+\frac{\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$.

878. Доведіть, що $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

879. Спростіть вираз:

а) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}-3\sqrt{32}$; б) $4\left(\sqrt{12}+\frac{1}{2}\sqrt{18}-\sqrt{3}\right):\sqrt{3}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{12}\right)\cdot 2\sqrt{3}$; г) $\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt{36x^3}-\frac{2x}{3}\sqrt{9x}$.

880. Скоротіть дріб:

а) $\frac{\sqrt{20}-4}{\sqrt{5}-2}$; б) $\frac{c-3}{\sqrt{c}+\sqrt{3}}$; в) $\frac{x-\sqrt{3}}{x^2-3}$.

881. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу:

а) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}+3}$; в) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2a}-\sqrt{a}}$.

882. Спростіть вираз:

а) $\frac{1}{\sqrt{8}-3}-\frac{1}{\sqrt{8}+3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

в) $\left(2+\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$.

883*. Знайдіть значення виразу:

а) $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}+\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^2$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-4\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{7}+4\right)^2}$;

в) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$; г) $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{11}+\sqrt{2}}{\sqrt{11}-\sqrt{2}}$.

884*. Спростіть вираз:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}{a-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}\right).$$

885*. Доведіть тотожність:

$$\frac{(a-b)^3\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}-\frac{3\left(\sqrt{ab}-b\right)}{a-b}=3\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Розв'яжіть рівняння:

886. а) $x^2=8$; б) $x^2=-8$; в) $4x^2=1$; г) $12-3x^2=0$.

887. а) $x^2 - 2x - 15 = 0$; б) $2x^2 - 5x - 7 = 0$;

в) $15x^2 + 75x - 90 = 0$; г) $3x^2 - 4x - 8 = 0$;

д) $(x-2)^2 = (7-2x)^2$; е) $(2x-1)^2 + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$;

є) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$; ж) $(x-1)x + x(x^2-5) = 0$.

888*. а) $(x^2-3x)^2 + 3(x^2-3x) - 28 = 0$; б) $(x^2-2x-4)(x^2-2x-3) = 2$;

в) $(x^2+2x+1)^2 + (x^2+2x+2)^2 - (x^2+2x+3)^2 = 60$.

889. Знайдіть найбільший корінь рівняння $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

890. Знайдіть найменший корінь рівняння $(3x^2 - 4x - 4)(4x^2 - 4x - 3) = 0$.

891. Знайдіть суму та добуток коренів рівняння:

а) $x^2 - 4x - 7 = 0$; б) $3x^2 + 6x + 1 = 0$.

892. Знайдіть значення виразу $2(x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 - 11x + 2 = 0$.

893. Знайдіть значення виразу $x_1^3 + x_2^3$, якщо x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 + 7x + 3 = 0$.

894. Один з коренів рівняння $12x^2 + x + c = 0$ дорівнює 0,25. Знайдіть число c та інший корінь рівняння.

895. Частка коренів рівняння $3x^2 + bx + 2 = 0$ дорівнює 6. Знайдіть ці корені та число b.

896*. Чому дорівнює сума квадратів коренів рівняння $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$?

897*. Для яких значень a рівняння має один корінь?

а) $ax^2 - (2a-1)x - 2 = 0$; б) $a^2x^2 + (a-1)x + 1 = 0$.

898*. Для яких значень a рівняння $(a-3)x^2 - (a^2-9)x + 7 = 0$ має корені, що є протилежними числами?

899*. Доведіть, що рівняння $x^2 - 3mx - m^2 - 1 = 0$ для будь-якого значення m не має двох додатних коренів.

Розв'яжіть рівняння:

900. а) $\dfrac{2x-1}{4x^2-2x+1} = 0$; б) $\dfrac{x^2+12x+35}{x+7} = 0$.

901. а) $x - \frac{3x}{x+3} = \frac{9}{x+3}$; б) $\frac{x+5}{x+2} - 1 = \frac{2}{3-x}$;

в) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+3} = 1$; г) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 2{,}5$;

д) $\frac{3}{1+5x} - \frac{12}{1-5x} - \frac{6}{1-25x^2} = 3$; е) $\frac{2}{x+2} - \frac{35}{2x-x^2} - \frac{7}{x^2-4} = 0$;

є) $\frac{2x+6}{1+3x} - \frac{4x+8}{3x-1} - \frac{3x^2+30x-1}{1-9x^2} = 0$.

902*. Для яких значень a рівняння $\frac{(a+1)x^2 - x - a}{x^2+1} = 0$ має один корінь?

903*. Розв'яжіть рівняння з параметром a:

а) $\frac{x-2a+1}{x-3} = 0$; б) $\frac{x}{x-a} + \frac{1}{x-2} = 1$.

Розв'яжіть рівняння:

904. а) $|x^2 - 2x| = 3$; б) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 1$.

905. а) $\sqrt{x} = 0{,}3$; б) $\sqrt{x} = -8$; в) $2(\sqrt{x}-1) = 4 - \sqrt{x}$.

906*. а) $\sqrt{x-5} = 1$; б) $\sqrt{x^2-2x+1} = 2$;

в) $x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$; г) $x^2 + 3x + \sqrt{x^2+3x} - 6 = 0$.

907. Побудуйте графіки функцій і знайдіть значення аргументу, для яких функції набувають одного й того ж значення:

а) $y = x^2$ і $y = 6x - 5$; б) $y = -\frac{2}{x}$ і $y = -8x$.

908. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

а) $y = -2x + 35$ і $y = x^2$; б) $y = 2x$ і $y = \sqrt{x}$.

909. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $x^2 = 1{,}5x + 1$; б) $\frac{4}{x} = x - 3$; в) $\sqrt{x} = -0{,}5x + 4$.

910. Графік оберненої пропорційності проходить через точку $A(-3; 2)$. Чи проходить цей графік через точку $B(-4; 1{,}5)$?

911*. Побудуйте графік функції:

а) $y = \frac{-x}{|x|}$; б) $y = \frac{12}{|x|}$; в) $y = -\frac{6}{\sqrt{x^2}}$; г) $y = \sqrt{x^2} + 2$.

912*. Знайдіть значення x, для яких значення функції $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ дорівнює нулю. Побудуйте графік цієї функції.

913. Добуток двох послідовних цілих чисел більший від їх суми на 11. Знайдіть ці числа.

914. Знайдіть п'ять послідовних цілих чисел, якщо відомо, що сума квадратів трьох перших чисел дорівнює сумі квадратів двох останніх.

915. Гіпотенуза прямокутного трикутника на 4 см довша від одного катета і на 2 см — від іншого. Знайдіть периметр трикутника.

916. Ширина прямокутника на 2 см менша від довжини і на 4 см менша від його діагоналі. Знайдіть площу прямокутника.

917. Знаменник звичайного дробу на 4 більший від чисельника. Якщо до чисельника дробу додати 1, а від знаменника відняти 1, то одержимо дріб, який на $\frac{3}{10}$ більший від даного. Знайдіть даний дріб.

918. Токар повинен виготовити за певний час 70 деталей. Щодня він виготовляв на 2 деталі більше, ніж планував, і виконав завдання на 4 дні раніше строку. Скільки деталей за день виготовляв токар?

919. Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати завдання за 12 год. Перша бригада, працюючи сама, може виконати це завдання на 10 год швидше, ніж друга. Скільки годин потрібно першій бригаді, щоб виконати завдання?

920. Два насоси, працюючи разом, можуть наповнити водою $\frac{7}{8}$ басейну за 3 год. За який час може наповнити басейн кожний насос, працюючи окремо, якщо один з них зможе це зробити на 2 год швидше, ніж інший?

921. Щоб виконати замовлення, два токарі пропрацювали разом 2 год, після чого перший з них пропрацював ще 1 год. За який час може виконати замовлення кожний токар, працюючи окремо, якщо другий може це зробити на 2 год швидше, ніж перший?

922. В озеро впадають дві річки. Катер відплив від пристані A, яка розміщена на першій річці, проплив 12 км до озера, потім 7 км озером і 10 км другою річкою до пристані B. На весь шлях катер затратив 1 год 20 хв. Знайдіть швидкість течії кожної річки, якщо швидкість течії першої на 2 км/год більша від швидкості течії другої, а швидкість катера у стоячій воді дорівнює 21 км/год.

923. З пункту A до пункту B, відстань між якими дорівнює 30 км, виїхав мотоцикліст, а через 6 хв услід за ним виїхав автобус, швидкість якого на 15 км/год більша від швидкості мотоцикліста. Знайдіть швидкість автобуса, якщо в пункт B він прибув на 4 хв раніше, ніж мотоцикліст.

924*. Дві точки рівномірно обертаються по двох колах. Перша точка здійснює повний оберт на 5 с швидше, ніж друга, і тому встигає виконати за хвилину на 2 оберти більше, ніж друга. Скільки обертів за хвилину здійснює друга точка?

925*. На змаганнях з волейболу було зіграно 28 ігор. Скільки команд брало участь у змаганнях, якщо кожна команда зіграла по одному разу з усіма іншими?

926*. У посудині було 10 л концентрованої сульфатної кислоти. Частину її відлили і посудину доповнили такою ж кількістю води. Потім знову відлили таку ж кількість суміші й доповнили посудину такою ж кількістю води. Скільки води доливали щоразу, якщо в результаті в посудині утворився 64% розчин сульфатної кислоти?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

До § 1. Раціональні вирази

927. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{(x^2+x)^2-(x^2+x)-2}{x^2+x+1}$; б) $\dfrac{x^4+x^2a^2+a^4}{x^3+a^3}$.

928. Спростіть вираз:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}.$$

929. Доведіть тотожність:

$$(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)=\frac{x^{32}+x^{16}+1}{x^2+x+1}.$$

930. Знайдіть значення виразу $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$, якщо $n=100$.

931. Для яких натуральних значень n значення дробу $\dfrac{n^3-n+2}{n-1}$ є цілим числом?

932. Доведіть: якщо $xyz=1$, то $\dfrac{1}{1+x+xy}+\dfrac{1}{1+y+yz}+\dfrac{1}{1+z+zx}=1$.

933. Про числа x, y, z відомо, що $\dfrac{x}{y+z-x}=\dfrac{y}{x+z-y}=\dfrac{z}{x+y-z}$. Яких значень може набувати дріб $\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$?

934. Для деякого не цілого значення a число $a+\dfrac{1}{a}$ є цілим. Доведіть, що для того ж значення a цілим є число $a^3+\dfrac{1}{a^3}$.

935. Значення якого виразу є більшим і на скільки більшим:

$$\left(4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-4}\right)\cdot\left(16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3n}\right) \text{ чи } \left(9\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{5m-5}\right)\cdot\left(27\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{4-5m}\right),$$ де n і m — цілі числа?

936. Побудуйте графік функції:

а) $y = x - \frac{|x|}{x}$; б) $y = \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$.

До § 2. Квадратні корені. Дійсні числа

937. Доведіть, що число 0,123456789101112... (після коми записано підряд усі натуральні числа) є ірраціональним.

938. Відомо, що a, b, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — раціональні числа. Доведіть, що числа $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ теж раціональні.

939. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{6666^{15}+2}$ не є натуральним числом.

940. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{\left(\sqrt{a}-1\right)^2+4\sqrt{a}}$; б) $\sqrt{a+2\sqrt{a+1}+2}$.

941. Звільніться від ірраціональності у знаменнику дробу $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+1}$.

942. Доведіть, що значення виразу є натуральним числом:

а) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;

б) $\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3-8\sqrt{35-8\sqrt{19}}}}$; в) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

943. Доведіть тотожність:

$$\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}=2.$$

944. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}+1=0$; б) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}=3$;

в) $\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}=3$; г) $\sqrt{x+4-4\sqrt{x+2}}=\sqrt{2}$.

945. Знайдіть усі числа x та y, для яких виконується рівність:

$$x^2-8x+y-4\sqrt{y}+20=0.$$

946. а) Доведіть: якщо $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=a$, то $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{a}$.

б) Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=2$.

947. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x^2}-x+1$.

948. Доведіть, що графіки функцій $y=\sqrt{x+9}$ і $y=2-\sqrt{x}$ не перетинаються.

949. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x}=a-|x|$ залежно від значень a?

950. Для яких значень a рівняння $x^2=a-|x|$ має два корені?

951. Доведіть, що для $a>0$ система рівнянь $\begin{cases} y=x^2; \\ |x|+|y|=a \end{cases}$ має два розв'язки.

До § 3. Квадратні рівняння

952. Дискримінант квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ дорівнює нулю і $a>0$. Доведіть, що ліва частина рівняння є повним квадратом.

953. Доведіть, що для будь-яких дійсних значень a, b і c рівняння $x^2-(a+b)x+ab-c^2=0$ має корені.

954. Доведіть, що для раціональних значень a, b і c, де $a+b+c\neq 0$, рівняння $(a+b+c)x^2+2(a+b)x+a+b-c=0$ має корені й ці корені є раціональними числами.

955. Для яких значень a сума квадратів коренів рівняння $x^2+ax+a-1=0$ є найменшою?

956. Для яких значень c рівняння $x^2 - 8x + 5c = 0$ і $2x^2 + 6x - c = 0$ мають спільний корінь?

957. Рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені x_1 та x_2. Запишіть квадратне рівняння, коренями якого є числа $x_1^2 + x_2^2$ та $x_1^3 + x_2^3$.

958. Корені a і b квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ є додатними числами. Виразіть $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ через p і q.

959. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(2x^2 + 3x + 4\right)^2 = \left(x^2 + x + 7\right)^2$; б) $(2x - 1)^2 + \left(2x^2 + 5x - 3\right)^2 = 0$;

в) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+5}{x-5} = \frac{x+3}{x-3} + \frac{x+4}{x-4}$; г) $\frac{x^2+1}{3x^2+2} = \frac{4x^2-5}{x^2+6}$;

д) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2$; е) $\frac{2x}{x^2+1} + \frac{x^2+1}{2x} = 2$.

960. Знайдіть суму квадратів коренів рівняння $(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) + 3 = 0$.

961. Знайдіть найбільший корінь рівняння:

$$(x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 3)(x^4 + 4x^2 - 5) = 0.$$

962. Скільки коренів має рівняння $x + 1 = x|x|$?

963. Розв'яжіть рівняння з параметром a:

а) $x^4 + 3ax^2 - 4a^2 = 0$; б) $\frac{1}{ax+2a} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{2(a+3)}{x^3-4x}$.

964. Для яких значень a графіки функцій $y = x^3 + ax + 1$ й $y = x^4 + ax^2 + 1$ мають три спільних точки?

965. Знайдіть усі цілі числа a, для яких вираз $(x - a)(x - 10) + 1$ розкладається в добуток $(x - b)(x - c)$ із цілими числами b і c.

966. Корені рівняння $x^2 + mx + n + 1 = 0$ є натуральними числами. Доведіть, що число $m^2 + n^2$ є складеним.

967. Знайдіть чотири послідовних натуральних числа, добуток яких дорівнює 1680.

968. Йдучи вздовж трамвайної колії одного маршруту, учень помітив, що через кожних 12 хв його наздоганяє трамвай, а через кожних 4 хв він зустрічає трамвай. Трамваї рухаються з однаковою швидкістю. Через скільки хвилин один після іншого вони залишають кінцеві зупинки?

969. З міста A до міста B, відстань між якими дорівнює 100 км, на мотоциклі виїхав кур'єр. Через 24 хв услід за ним на автомобілі виїхав другий кур'єр, який наздогнав першого, передав йому додаткове доручення й одразу ж вирушив назад. Другий кур'єр повернувся до міста A в той момент, коли перший прибув до міста B. Знайдіть швидкість першого кур'єра, якщо швидкість другого дорівнює 75 км/год.

970. Пасажир метро сходить униз нерухомим ескалатором за 42 с. Якщо пасажир ітиме з тією ж швидкістю ескалатором, що рухається, то він зійде за 24 с. За який час зійде униз пасажир, стоячи на ескалаторі, який рухається?

971. Колона автобусів завдовжки 93 м рухається зі швидкістю 60 км/год. З початку колони в її кінець вирушив легковий автомобіль, який супроводжує колону. Згодом він повернувся на початок колони. Швидкість автомобіля, коли він рухався в кінець колони, а потім на її початок, була однаковою. Знайдіть цю швидкість, якщо час руху автомобіля вздовж колони (в обох напрямах разом) дорівнює 1,44 хв.

972. З пункту A до пункту B вийшов пішохід і рухався зі швидкістю 4 км/год. Через деякий час з пункту A вийшов другий пішохід, а ще через такий же проміжок часу — третій. Третій пішохід наздогнав другого на півшляху від A до B, і далі вони пішли разом зі швидкістю, що дорівнює середньому арифметичному їхніх попередніх швидкостей. Усі три пішоходи одночасно прибули в пункт B. Знайдіть початкову швидкість другого пішохода, якщо початкова швидкість третього дорівнює 6 км/год.

973. З бака, наповненого спиртом, відлили частину спирту і долили доцента водою. Потім з бака відлили стільки ж літрів розчину, після чого в ньому залишилося 49 л спирту. Скільки літрів спирту відлили першого разу, якщо місткість бака дорівнює 64 л? (Вважати, що при змішуванні 1 л спирту з 1 л води утвориться 2 л розчину.)

974. У двох посудинах, місткість яких дорівнює по 30 л, було разом 30 л сиропу. Першу посудину долили дощенту водою й одержаним розчином доповнили другу посудину, потім із другої посудини відлили в першу 12 л розчину. Скільки сиропу було в першій посудині спочатку, якщо у другій посудині після усіх переливань сиропу стало на 2 л менше, ніж у першій?

Логічні задачі

975. На березі річки лежить купа гравію, в якій є 1001 камінець. Із купи викидають у річку один камінець, а потім купу ділять на дві довільні купи. Далі з якої-небудь купи викидають у річку один камінець, відтак одну з куп ділять на дві і т. д. Чи можна добитися того, щоб на березі залишилися лише купи із трьох камінців?

976. На кожній клітинці дошки, розміри якої дорівнюють 5×5, сидить жук. У деякий момент часу кожний жук переповзає на сусідню (по стороні) клітинку. Доведіть, що після цього:

а) хоча б в одній клітинці буде не менше двох жуків;

б) залишиться хоча б одна порожня клітинка.

977. На одній із вулиць у будинках № 7 і № 9 разом проживають 255 мешканців. Кожен мешканець будинку № 7 знайомий з 8 мешканцями будинку № 9, а кожен мешканець будинку № 9 — з 9 мешканцями будинку № 7. Скільки мешканців проживає в кожному будинку?

978. Є купа з n сірників. Оля, а за нею Іра, по черзі беруть з купи від 1 до 10 сірників. Перемагає той, хто візьме останній сірник. Для яких значень n перемагає Оля за правильної гри?

979. По колу розставлені 100 натуральних чисел. Відомо, що кожне число дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх чисел. Доведіть, що усі числа рівні між собою.

980. В урні лежать кулі: 10 чорних, 10 білих і 10 синіх. Яку найменшу кількість куль потрібно вийняти, не заглядаючи в урну, щоб серед них обов'язково було дві кулі: а) одного кольору; б) різних кольорів; в) синього кольору?

981. Чи можна за один раз вивезти з каменоломні 50 каменів, маси яких відповідно дорівнюють 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг, маючи сім автомобілів, вантажність кожного з яких дорівнює 3 т?

982. У кожній вершині куба записано число, як показано на рисунку 16. За один крок до двох чисел будь-якого ребра можна додати по 1. Чи можна за кілька таких кроків добитися того, щоб усі числа були рівними між собою?

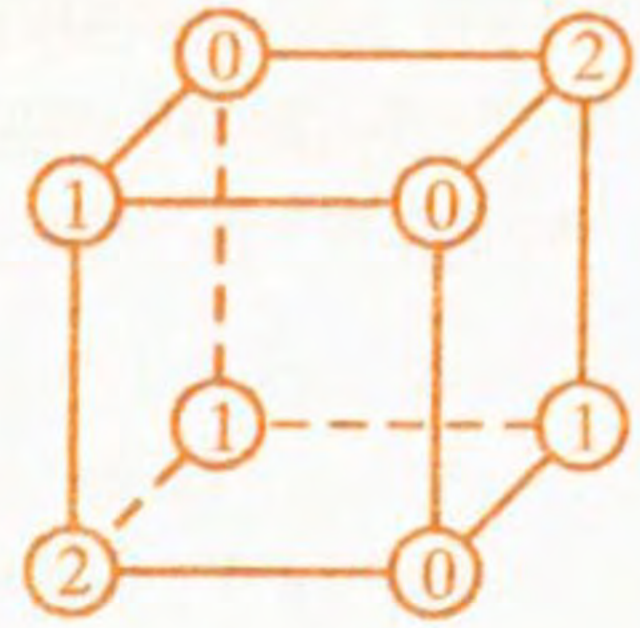


Рис. 16

983. У клітинки таблиці 3 × 3 записані числа так, що добуток чисел у кожному рядку і в кожному стовпці дорівнює 1, а добуток чисел у кожному квадраті 2 × 2 дорівнює 2. Яке число записане у центральній клітинці?

984. Кожну грань кубика розбили на 4 рівні квадрати. Усі утворені квадрати розмалювали у синій, червоний та білий кольори так, що квадрати, які мають спільну сторону, мають різний колір. Скільки квадратів кожного кольору може містити кубик?

985. Дано три числа: 2, $1-\sqrt{2}$ і $1+\sqrt{2}$. За один крок дозволяється написати нові три числа, замінивши кожне з початкових чисел півсумою двох інших. Чи можна за кілька таких кроків одержати набір чисел: 1, $2-\sqrt{2}$ і $2+\sqrt{2}$?

986. Із квадратним рівнянням $ax^2 + bx + c = 0$ можна здійснювати такі перетворення:

1) замінити в ньому x на $x - k$, де k — будь-яке дійсне число;

2) замінити його на рівняння $cx^2 + (b + 2c)x + (a + b + c) = 0$.

Чи можна за допомогою деякої послідовності таких перетворень від рівняння $x^2 - 3x - 4 = 0$ перейти до рівняння $x^2 - 5x - 5 = 0$?

ВІТЧИЗНЯНІ МАТЕМАТИКИ

Георгій Феодосійович Вороний
(1868–1908)

Георгій Вороний визнаний фахівцями як один з найяскравіших талантів у галузі теорії чисел на межі XIX–XX століть. Сьогодні з розвитком комп'ютерної графіки, молекулярної біології, творенням штучного інтелекту, його наукові праці набули особливого значення. Зараз Г. Вороний — один з найцитованіших математиків світу. Це — унікальне явище, зокрема в математиці, де будь-які відкриття вже через 2–3 роки вважають застарілими.

Народився Г. Вороний у селі Журавка (тепер Чернігівська область). Його дід замолоду чумакував, а потім займався селянською справою. Батько ж пішов у науку, закінчив Київський університет, був професором Ніжинської та директором Прилуцької гімназій.

У 1885 році Георгій закінчив Прилуцьку гімназію, де «здобув знання дуже добрі, а з математики, до якої має особливий нахил і покликання, здобув знання, що виділяються з ряду учнівських успіхів з математики». Цього ж року він вступив до Петербурзького університету на фізико-математичний факультет. Математика все більше захоплювала юнака. Він прагнув не тільки оволодівати знаннями, а й самому робити відкриття. Тому, пройшовши за 4 роки курс навчання, Г. Вороний залишився для вдосконалення своїх знань в університеті.

У 1894 році після успішного захисту магістерської дисертації Г. Вороного було призначено професором Варшавського університету. У 1897 році він захистив докторську дисертацію, у 1907 році обраний членом-кореспондентом Петербурзької Академії наук.

Упродовж свого життя Г. Вороний був тісно пов'язаний зі своєю родиною. Разом із батьком і двома братами вони перетворили рідну Журавку в певний осередок культури — побудували школу, відкрили бібліотеку. Один із синів Г. Вороного — Юрій — став ученим-хірургом, він першим у світі зробив пересадку нирки людині (1934 рік).

Володимир Йосипович Левицький
(1872–1956)

«Основоположник математичної культури нашого народу», — так сказав про Володимира Левицького академік Михайло Кравчук.

Саме професор В. Левицький першим написав українською мовою фахову статтю з математики, був незмінним редактором першого українського наукового часопису з природничих наук.

Народився Володимир Левицький 31 грудня 1872 року в Тернополі у родині священика, навчався в Тернопільській гімназії та польській гімназії Франца Йосифа, яку закінчив з відзнакою. У 1890 році В. Левицький вступив до Львівського університету на філософський факультет, де слухав лекції з математики і фізики. Ще в студентські роки плідно займався науковою роботою, входив до складу секції Наукового товариства імені Тараса Шевченка, почав розробляти українську фізичну і математичну термінологію.

Після закінчення навчання В. Левицький іде на рік до війська, а потім починає викладацьку діяльність у Тернопільській гімназії, згодом переходить на роботу до гімназії у Львові, друкує багато статей, чимало сил і часу віддає Науковому товариству імені Тараса Шевченка, яке очолює з 1932 до 1934 року. З 1940 року він працює у Львівському університеті імені І. Франка, де в 1941 році йому було присвоєно звання професора.

В. Левицький написав понад 100 наукових праць, підручники з алгебри та фізики для середньої школи. Свої праці він друкував українською, польською, німецькою, французькою, англійською та іспанською мовами.

Вагомою заслугою В. Левицького є те, що він упорядкував і систематизував українську математичну термінологію, що стала основою математичних праць, які видавалися Академією наук УРСР.

Віктор Михайлович Глушков
(1923–1982)

Віктор Глушков розв'язав одну з найскладніших алгебраїчних задач, яку поставив відомий німецький математик Д. Гільберт. Важливі результати отримав у теорії цифрових автоматів, у галузі застосувань обчислювальної техніки в керівництві виробничими процесами та економіці. Був першим директором Інституту кібернетики АН УРСР. Під його керівництвом створювалися універсальні електронно-обчислювальні машини «Київ», «Дніпро» та інші.

Народився Віктор Глушков у 1923 році в сім'ї вчителя в м. Ростов-на-Дону (Росія). Його молодість припала на роки Великої Вітчизняної війни. У повоєнні роки В. Глушков працював у шахті й навчався одночасно у Новочеркаському політехнічному інституті та Ростовському університеті на механіко-математичному факультеті. Діапазон його захоплень був надзвичайно широкий: філософія, математика, фізика, література, ботаніка. Він самотужки вивчав окремі дисципліни в обсязі університетських курсів. Улюбленим предметом В. Глушкова була математика, заради якої в нього вистачило сили відмовитися від ще одного захоплення — гри в шахи.

Після закінчення навчання В. Глушков працював викладачем Уральського лісотехнічного інституту в м. Свердловську і паралельно займався дослідницькою роботою — шукав нові шляхи в розвитку техніки швидких обчислень. На той час, уже кандидат фізико-математичних наук, В. Глушков захистив дисертацію на вчений ступінь доктора фізико-математичних наук.

1956 року в Інституті математики Академії наук УРСР було організовано лабораторію обчислювальної техніки із 60 науковців на чолі з В. Глушковим, а 1957 року на базі цієї лабораторії — Обчислювальний центр АН УРСР, реорганізований згодом в Інститут кібернетики АН УРСР. Його керівником було призначено В. Глушкова. В інституті створювалися все потужніші й досконаліші електронно-обчислювальні машини (ЕОМ), яких вимагало виробництво. За допомогою ЕОМ «Київ» уперше в світі здійснювалось керування з Києва технологічними процесами на відстані 500 км — виплавлянням сталі на Дніпродзержинському металургійному заводі.

Міжнародна популярність Інституту кібернетики була неабиякою. Лише протягом одного 1969 року В. Глушков одержав понад сто запрошень, у яких йому пропонували прочитати лекції з різних питань кібернетики.

Віктор Глушков написав понад 400 праць, з них 10 — спеціальних монографій, він виховав багато молодих учених, які продовжують його справу.

ВІДПОВІДІ

§ 1

16. б) Усі числа, крім –4 і 0; **в)** усі числа, крім –2, 0 і 1. **17. б)** Усі числа, крім –6 і 0; **в)** усі числа, крім –2, 0 і 2. **20. а)** 400; **б)** 0; **в)** 4. **21. а)** 0; **б)** 17. **22.** $\left(\frac{25}{v+u}+\frac{20}{v-u}\right)$ год.

23. $\frac{48}{n}+\frac{64}{m}$ деталей. **24. а)** Усі числа, крім –3 і 3; **б)** усі від'ємні числа; **в)** усі числа, крім –2, 0 і 2; **г)** усі числа. **25.** 0,55. **26.** $\frac{250}{a}-\left(2+\frac{250-2a}{a+25}\right)$ годин. **27. в)** $(y+8)(x+9)$; **г)** $(a+2b)(a-2b+1)$. **30. а)** 5 способами; **б)** 16 способами. **31.** 4,8 карбованців.

36. а) $\frac{4}{5y}$; **б)** $\frac{2bc}{3}$; **в)** $-\frac{3}{8m}$; **г)** $-\frac{2m}{3k^2}$. **37. а)** $\frac{3c^2}{2n}$; **б)** $\frac{9y}{7}$; **в)** $-\frac{5}{3ab}$; **г)** $\frac{a}{3b}$. **38. а)** a; **б)** $\frac{1}{3}$; **в)** $\frac{k}{3k+4}$; **г)** $\frac{m-n}{n}$. **39. а)** $\frac{ab}{c}$; **б)** $\frac{x-2y}{x-y}$; **в)** 3; **г)** $\frac{7x}{x-5}$. **43. а)** $\frac{3}{4}$; **б)** 4; **в)** $a+b$; **г)** $\frac{1+x}{1-y}$; **д)** $\frac{a-3}{7}$; **е)** $\frac{7(x+2)}{10}$; **є)** $\frac{4}{y-2}$; **ж)** $\frac{x-3}{x+3}$. **44. а)** $\frac{3}{5}$; **б)** $\frac{c+2}{c-2}$; **в)** $m-n$; **г)** $\frac{a}{b}$; **д)** $\frac{x-y}{5}$; **е)** $\frac{10}{b}$; **є)** $\frac{3}{m-2}$; **ж)** $\frac{a+5}{a-5}$. **47. а)** $\frac{3b}{2a+3b}$; **б)** $\frac{2c-5x}{2c+5x}$; **в)** $-2(x+2y)$. **48. а)** x^2-2x+4; **б)** $\frac{1}{3-z}$; **в)** $-(y^4+y^2+1)$. **49. а)** $\frac{a+c}{c}$; **б)** $\frac{a+b}{a-x}$; **в)** $\frac{4}{b-d}$. **50. а)** $\frac{7}{2b+9c}$; **б)** $\frac{3n}{k-4}$; **в)** $\frac{2}{3n-m}$; **г)** $-\frac{5}{c^2+3c+9}$; **д)** $\frac{x+y}{y-1}$; **е)** $\frac{a+b}{ab}$.

53. а) $\frac{7x}{x^2+xy}$; **б)** $\frac{2(x+y)}{x^2+2xy+y^2}$; **в)** $\frac{c(a+b)}{a^2-b^2}$; **г)** $\frac{n(m^2+mn+n^2)}{m^3-n^3}$. **54. а)** $\frac{2a(x-y)}{x^2-y^2}$; **б)** $\frac{a^2-ac+c^2}{a^3+c^3}$. **55. а)** $\frac{8x^2}{9}$; **б)** $\frac{409}{351x^n}$. **56. а)** $\frac{x+2y}{x-2y}$; **б)** $y+1$. **60. б)** 0,4; **в)** –4; **г)** $2\frac{1}{3}$.

62. 8 грн.; 4 грн. **63.** 7 кг; 21 кг. **68. а)** $\frac{12x}{4x+1}$; **б)** –2; **в)** 2; **г)** 6; **д)** 1; **е)** $\frac{4x}{x-2y}$. **69. а)** 5;

б) 8; в) 8; г) 8. **70.** а) $1\frac{1}{3}$; б) 0,56. **71.** а) 0,4; б) 8,5. **72.** а) $c-1$; б) $a^3(a+1)$; в) $\frac{b+3}{b-3}$; г) $\frac{4a^2}{b}$. **73.** а) $6(y+2)$; б) $\frac{1}{x-y}$; в) $\frac{1}{a-1}$; г) $2(3a+b^2)$. **74.** а) 4; б) x. **77.** а) x^2-x+1; б) $\frac{a^2+x^2+ax}{a+x}$. **80.** 75 км/год. **81.** 11 год 15 хв. **88.** а) $\frac{7y+10x}{xy}$; б) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; в) $-\frac{a^2}{c(a+c)}$; г) $\frac{4z}{z^2-1}$; д) $\frac{a}{(2a+1)(3a+2)}$; е) $-\frac{1}{x(x-1)}$. **89.** а) $\frac{4b+3a}{ab}$; б) $\frac{x^2-y^2}{xy}$; в) $\frac{3}{(y-2)(y+1)}$. **90.** а) $\frac{4n}{2n-1}$; б) $\frac{2y}{x}$; в) $\frac{2y}{y-2}$. **91.** а) $\frac{7}{y+1}$; б) $\frac{3}{2x+3}$; в) $\frac{3c+2}{c-1}$. **92.** а) $\frac{5}{c^2}$; б) $\frac{b+1}{b}$; в) $\frac{7}{24x}$; г) $-\frac{5}{18}$; д) $\frac{2x+3y}{6x^2y}$; е) $\frac{7a}{6(a+b)}$; є) $\frac{7}{x+y}$; ж) $-\frac{15}{a(a+5)}$; з) $\frac{3}{b}$. **93.** а) $\frac{2}{a^2}$; б) $\frac{y+3}{3y}$; в) $\frac{1}{12b}$; г) $\frac{b+2}{6b}$; д) $\frac{1}{m(m-1)}$; е) $\frac{8}{15}$. **94.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{5m}{m^2-n^2}$; в) $\frac{2k}{k^2-4}$. **95.** а) 0; б) $\frac{1}{x-1}$; в) $\frac{3}{8}$. **96.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{y}{y^2-x^2}$; в) 0. **103.** а) $\frac{a+bc}{a^2b^2c^2}$; б) $\frac{3y+4x}{36x^4y^3}$; в) $\frac{d-c}{cd(m+n)}$; г) $\frac{5x^2+xy}{36(x^2-y^2)}$; д) $\frac{1}{ab}$; е) $\frac{2b}{(a^2-b^2)(a-b)}$. **104.** а) $\frac{3b-2a}{48a^3b^3}$; б) $\frac{7b+5a}{ab(x-y)}$; в) $\frac{b^2}{a(a^2-b^2)}$; г) $\frac{3x-y}{2(x+y)^2}$. **105.** а) $\frac{5-m}{m^2}$; б) $\frac{2b}{a}$; в) $\frac{b^3-a^3}{a^2b^2}$; г) $\frac{x^2+3x+5}{(x+1)(x+2)}$. **106.** а) $\frac{k^2n^2-1}{kn^2}$; б) $-\frac{2}{ab^2}$. **107.** а) $\frac{7-x}{6(x-4)}$; б) $\frac{4}{x-4}$; в) $\frac{4}{a}$; г) $\frac{ab}{b^2-a^2}$; д) $\frac{b}{y}$; е) $-\frac{b+2a}{ab}$; є) $\frac{2xy}{x+y}$; ж) $\frac{2}{1-a^2}$. **108.** а) $\frac{a}{15(a+1)}$; б) $\frac{5}{4(b+8)}$; в) $\frac{4mn}{m+n}$; г) $\frac{a-12}{a-10}$; д) $\frac{5a^2}{(a-9)^2}$; е) $\frac{9}{2(3-x)}$. **109.** а) $\frac{1}{5(a+5)}$; б) $\frac{6x^2+4}{(x-2)^2(x+2)}$; в) $-\frac{a^2+6a}{a^3+27}$; г) $\frac{1}{b^3+1}$. **110.** а) $\frac{a+20}{a^2-25}$; б) $\frac{a}{4b^2-a^2}$. **113.** а) –0,125;

б) 14,3. **114.** 22. **115. а)** $\frac{1}{2}-\frac{5}{a}$; **б)** $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$; **в)** $\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^4}$; **г)** $\frac{x}{2y}+\frac{4y}{x}$. **116. а)** $a=1$; $b=-1$; **б)** $a=\frac{5}{7}$; $b=1\frac{2}{7}$. **117. а)** 0; **б)** $\frac{16}{1-x^{16}}$; **в)** $\frac{16x^{15}}{1-x^{16}}$; **г)** $\frac{4}{a(a+4)}$; **д)** $\frac{b}{b^2-1}$.

120. а) (3; 2); **б)** (4; –2). **121.** 2000 грн. **122.** 150 г; 450 г. **123.** 5 л; 5 л.

Завдання для самоперевірки № 1

1. а). **2.** в). **3.** в). **4.** б). **5.** г). **6.** в). **7.** $x=0$ і $x=5$. **8. а)** $\frac{3b}{4a}$; **б)** $\frac{5}{3}$. **9.** 14. **10. а)** $\frac{5bx-3a^2y}{a^3b^2}$; **б)** $\frac{7a+4b}{28(x+y)}$. **11. а)** $\frac{3x}{x-y}$; **б)** $\frac{8}{m+n}$. **12.** Усі значення, крім $k=0$ і $k=4$. **13. а)** $\frac{28y^4}{5x}$; **б)** $-\frac{a}{b^2(1+3a)}$. **14. а)** $\frac{4}{a^2-1}$; **б)** $\frac{3m^2n+mn^2}{(m+n)^2(m-n)}$. **15.** $-4\frac{2}{7}$. **16. а)** $\frac{a^2+b^2}{a+b}$; **б)** $\frac{a^2}{b(a-b)^2}$. **17. а)** $a=-5$ і $a=3$; **б)** вираз має зміст для всіх значень x. **18. а)** $4-x^2$; **б)** $x-a-8$. **19. а)** $\frac{x+11}{30(x+1)^2}$; **б)** $\frac{4a^2b}{(a-b)(a+b)^2}$. **20.** $\frac{1}{2a}$.

128. а) $\frac{25}{6a^3b}$; **б)** $-\frac{5a^2}{3b}$; **в)** $\frac{y^2}{2x^3}$. **129. а)** $\frac{3}{2x}$; **б)** $\frac{4a^2}{b}$; **в)** $-\frac{9m}{4n^3}$. **130. в)** $\frac{3}{b}$; **г)** $\frac{1}{x}$; **д)** $m+3$; **е)** $\frac{a-2}{a+2}$. **131. в)** $\frac{a}{k}$; **г)** $b-1$; **д)** $\frac{b(y+4)}{a}$; **е)** $\frac{c^2(c+1)}{c-1}$. **134. а)** $\frac{10by}{3ax}$; **б)** $-\frac{2n}{3m^3}$; **в)** $\frac{b^2}{2a^2y}$; **г)** $\frac{1}{axy^2}$; **д)** $\frac{4a}{3x^2}$; **е)** $\frac{a}{3b}$. **135. а)** $\frac{m^3n}{2a^3}$; **б)** $\frac{x}{3}$; **в)** $\frac{12}{5m^2y}$.

136. а) $\frac{1}{(a-1)(3a+1)}$; **б)** $-\frac{x(a+b)}{9}$; **в)** $\frac{y}{8(x+y)}$; **г)** $\frac{5y(a+y)}{2(a-y)}$; **д)** $-\frac{(2x+1)(a+b)}{14}$; **е)** $\frac{2}{(m+n)^2}$; **є)** $\frac{(n-m)(x+y)}{2}$; **ж)** $\frac{3(c-2a)}{a^2-ab+b^2}$. **137. а)** $\frac{5}{x-y}$; **б)** $-\frac{3}{5}$; **в)** $\frac{(4-x)(x-y)}{3y}$;

г) $\frac{y+1}{6(a+b)}$; д) $\frac{3(a+b)}{10ab}$; е) $\frac{a-1}{(x-1)(a+1)}$. **138.** 1,2; –14,4; $1\frac{19}{30}$. **139.** –20; 160; 55.

140. а) 1; б) 1. **141.** $\frac{1}{9}$. **144.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{5}{6}$. **145.** 12 днів. **146.** 1,5 год; 18 км/год. **148.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{9a}{c}$; в) x^3; г) $\frac{3}{d}$; д) $\frac{5p^2n^2}{2}$; е) $\frac{c^2}{4m}$; є) $\frac{2c^2}{a^2}$; ж) $\frac{4ax}{5b}$.

149. а) $\frac{3x}{2y}$; б) $\frac{21ab^2}{2}$; в) $\frac{2xy}{5}$; г) $\frac{m}{14k^3}$. **150.** а) $\frac{9}{ab^3}$; б) $-\frac{n}{16b}$; в) $-\frac{5z}{2xy}$.

151. а) $-\frac{2y}{3}$; б) $-\frac{20}{3mn}$; в) $\frac{4}{xy}$. **152.** а) $\frac{6}{c^2}$; б) $\frac{n}{a^2}$; в) $k(c-d)$; г) $\frac{x^2}{x+4}$; д) $\frac{b^2}{b-3}$; е) $\frac{y-2}{y+2}$. **153.** а) $\frac{x^2}{a}$; б) $\frac{2+a}{c}$; в) $\frac{mn}{y^4}$; г) $k(k-5)$; д) $\frac{5(x-y)}{2}$; е) $\frac{a-1}{a+1}$.

154. а) $\frac{2a(5-x^2)}{x}$; б) $\frac{a(1-b)}{bc}$; в) $\frac{a}{2(a-b)}$; г) $\frac{3(x-1)}{2(x^2+1)}$; д) $\frac{3b(1-x)}{4a(1+x)}$; е) $c(a+b)$.

155. а) $\frac{2a^2(7c-1)}{b^2}$; б) $\frac{x+2}{x^2}$; в) $\frac{(m-n)(m-1)}{6m}$. **156.** а) $\frac{3(a-b)}{7(a+b)}$; б) $\frac{(2c+1)(x+y)}{3(1-2c)}$; в) $\frac{n}{4m(m+n)}$; г) $\frac{9a}{a-b}$; д) $\frac{2}{x^2-y^2}$; е) $\frac{(3-a)(1+2a)}{a}$. **157.** а) $\frac{2(1-b)}{a}$; б) $\frac{x+y}{6(x+2y)}$; в) $\frac{b(a-b)}{a+b}$; г) $-\frac{a(a+2)}{c+b}$. **160.** а) $\frac{x+0,5}{(x^2+1)(x-0,5)}$; б) 1. **162.** На причалі A. **163.** а) 0; б) 0,5. **166.** 12 кг; 10 кг. **167.** 4 т; 8 т. **168.** а) $\frac{3}{a(a-1)}$; б) $-\frac{2}{a-5}$; в) $-\frac{7}{a^2}$; г) $\frac{1}{2(2b-1)}$; д) $\frac{a^3}{a-4}$; е) $\frac{2}{x-y}$. **169.** а) $\frac{4}{b(b-1)}$; б) $\frac{25-20a}{a(a-5)}$; в) $-\frac{12x}{x-4}$; г) $\frac{1}{4(c+1)}$.

172. $\frac{18x}{x+3}$; 12. **173.** $\frac{2}{x-9}$; –0,4. **174.** а) $\frac{2m}{n-m}$; б) –1; в) $\frac{2a(b-2a)}{b+2a}$; г) $\frac{1}{ab}$; д) $\frac{x-1}{x(x+1)}$. **175.** а) $\frac{-y^2}{x^2+y^2}$; б) $\frac{2}{x-2}$; в) $\frac{2(3-x)}{5}$; г) 10. **176.** а) a; б) $-\frac{m}{n}$.

177. а) $-a-b$; **б)** $\frac{1}{c}$. **180. а)** $\frac{b^2+3b+9}{b-a}$; **б)** $\frac{x-4y}{x(x-5y)}$; **в)** $\frac{32mn^5}{m^8-16n^8}$. **182.** $\frac{x}{2x-1}$.

183. а) –1; **б)** –4; 0; **в)** 14; **г)** 13. **184.** Рівняння не має коренів, якщо $a=0$; має один корінь, якщо $a \neq 0$ і $a \neq 3$. **185.** 150 км. **186.** 45 кг; 15 кг. **187.** 11 м/с; 9 м/с. **193. а)** –1; **б)** –2; **в)** –5. **194. а)** $\frac{7}{12}$; **б)** $\frac{19}{40}$; **в)** $\frac{5}{6}$. **195. д)** –3; **е)** 10; **є)** 1; **ж)** $\frac{1}{2}$; **з)** $\frac{1}{6}$. **196. а)** 0; **б)** –10; **в)** $-\frac{9}{11}$. **197. а)** 0; 3; **б)** –1; 0; **в)** $\frac{5}{22}$. **200.** 3. **201.** 5. **204. а)** $-\frac{1}{9}$; **б)** –0,8; **в)** $-2\frac{1}{3}$; **г)** 0; $\frac{5}{6}$; **д)** –0,8; **е)** 0,3. **205. а)** Коренів немає; **б)** 2; **в)** –1,5; **г)** 0,125. **206.** 360 км/год; 60 км/год. **207.** 6 год; 12 год. **208.** 22,5 хв. **209.** Усі значення a, крім $a=1$ і $a=2$. **210. а)** –5; **б)** 7; **в)** –3; 0; **г)** 0; 2. **211. а)** Якщо $a \neq 2$, то $x=a$; якщо $a=2$, то коренем є будь-яке число; **б)** якщо $a \neq -1$ і $a \neq 1$, то $x=\frac{1}{a-1}$; якщо $a=-1$, то коренем є будь-яке число; якщо $a=1$, то коренів немає; **г)** якщо $a \neq -0{,}5$ і $a \neq 4$, то $x=a-1$; якщо $a=-0{,}5$ або $a=4$, то коренів немає. **212.** $a=0$ і $a=2$. **213.** $a=-7$, $a=-1$ і $a=5$. **215. б)** a. **216.** 3 способами. **217.** Так. **218.** 10 год. **219. а)** –1,85; **б)** 1; **в)** 1; **г)** 0. **220. а)** 1; **б)** 1.

Завдання для самоперевірки № 2

1. в). **2.** в). **3.** б). **4.** б). **5.** б). **6.** а). **7. а)** $\frac{0{,}001a^9}{b^6}$; **б)** $-\frac{64x^3y^6}{27z^{12}}$. **8. а)** $\frac{6a^4}{b^2c}$; **б)** $\frac{3}{20xz^3}$.

9. а) $\frac{2}{x-3}$; **б)** $\frac{1}{a}$. **10.** 4,2. **11. а)** –2; 0; **б)** –4,5. **12. а)** $\frac{3a^4c^4}{16b^3}$; **б)** $-\frac{28y^2z}{5x}$. **13. а)** $\frac{a-1}{2a-1}$; **б)** $\frac{2-6a}{3a}$. **14** $-\frac{3}{4}$. **15. а)** $\frac{11}{24}$; **б)** 0. **16.** 10 год. **17. а)** $\frac{a(a+10)}{a+4}$; **б)** 1. **20. а)** 2; **б)** 0,4. **21.** 15 км/год.

237. **б)** 101; **в)** $1\frac{23}{27}$; **е)** $5\frac{29}{64}$. **238.** **а)** $2\frac{1}{12}$; **б)** $-7\frac{1}{12}$; **в)** 0; **г)** $-\frac{64}{225}$. **239.** **б)** 121; **в)** $-3\frac{29}{32}$; **г)** $1\frac{1}{3}$; **д)** 19,2; **е)** 15. **240.** **а)** $\frac{3}{a+5}$; **б)** $\frac{b-a}{a^2b^2}$; **в)** $\frac{8}{b^2-16}$; **г)** $\frac{y-x}{x^3y^3}$; **д)** $\frac{1}{(x-1)(y-1)}$; **е)** $x^2(1-x^2)$. **241.** **а)** $\frac{a+b}{a-b}$; **б)** $\frac{2}{a+7}$; **в)** $-\frac{m^2n^2}{m+n}$; **г)** $\frac{2x^6y^3}{y^6-x^6}$. **243.** Ні. **244.** Не існують. **245.** **а)** 1; **б)** коренів немає. **248.** 20, 10 і 15 програм. **249.** 70 сторінок. **250.** 8 косарів. **258.** **а)** $\frac{1}{8}$; **б)** 125; **в)** 243; **г)** 27; **д)** 1; **е)** $\frac{3}{4}$. **259.** **а)** 1; **б)** 6; **в)** $\frac{5}{8}$. **260.** **а)** 27; **б)** 4; **в)** $\frac{1}{7}$; **г)** $\frac{1}{512}$; **д)** 9; **е)** 4. **261.** **а)** $\frac{2}{x^3y^2}$; **б)** $\frac{25}{x^3}$; **в)** $0{,}4m^4n^2$; **г)** $81a^2b^5$; **д)** $\frac{5a^{12}}{4b^2}$; **е)** $\frac{m^7}{32n^6}$. **262.** **а)** $0{,}5ab$; **б)** $\frac{12a}{25b^3}$; **в)** $\frac{125a}{b^3}$; **г)** $\frac{a^2}{3b^7}$. **265.** **а)** -1; **б)** $-\frac{9b^3+2}{b^3}$; **в)** $-\frac{4}{xy^2}$; **г)** $4c^4+c^2-2$; **д)** $\frac{b^3-a^3}{a^3b^3}$; **е)** $\frac{b^4+a^4}{b^4-a^4}$. **266.** **а)** $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$; **б)** a^4; **в)** $\frac{2(a^2+b^2)}{a^2b^2}$; **г)** $\frac{n^2+m^2}{n^2-m^2}$. **267.** **а)** $(a^3b^4)^m$; **б)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{3n+3}$. **268.** 511. **270.** **а)** $\frac{2(y^{10}-x^{10})}{3(y^{10}+x^{10})}$; **б)** $\frac{3a^2-1}{a^2}$; **в)** $\frac{b-b^2}{1+b}$. **272.** $(1; -1)$. **273.** 120 і 130 деталей. **274.** 58 і 30 книжок. **275.** 30 км. **284.** **а)** $1{,}9 \cdot 10^9$ т; **б)** $2{,}8 \cdot 10^2$ кг; **в)** $5{,}2 \cdot 10^{-1}$ см; **г)** $6{,}12 \cdot 10^3$ дм. **285.** **а)** 7,3 дм; **б)** $1{,}1 \cdot 10^4$ кг; **в)** $9{,}3 \cdot 10^5$ г; **г)** $8{,}6 \cdot 10^3$ см. **286.** **а)** $2{,}76 \cdot 10^{-3}$; **б)** $3{,}468 \cdot 10^{-11}$; **в)** $7{,}2 \cdot 10^{-7}$; **г)** $4{,}838 \cdot 10$. **287.** **а)** $1{,}89 \cdot 10^5$; **б)** $2 \cdot 10^{-8}$. **288.** **а)** $9 \cdot 10^{18}$; **б)** $2 \cdot 10^9$; **в)** $4{,}5 \cdot 10^{-7}$; **г)** $1{,}71875 \cdot 10^7$. **289.** **а)** $5 \cdot 10^{-8}$; **б)** $5 \cdot 10^{-5}$. **290.** 7,9 км/с; $1{,}12 \cdot 10$ км/с; $1{,}667 \cdot 10$ км/с. **291.** $2{,}844 \cdot 10^7$ м. **293.** **а)** -2; 2; **б)** $-0{,}25$; **в)** $-0{,}5$; **г)** 0,3. **294.** 585 т; 195 т. **310.** $a = 1$. **311.** -8. **312.** **а)** $y = -\frac{36}{x}$; **б)** $y = \frac{32}{x}$. **313.** **а)** $(2; -2{,}5)$ і $(2{,}5; -2)$; **б)** графіки не перетинаються. **314.** **а)** -1; 1; **б)** $-0{,}8$. **317.** $x < -1$; $0 < x < 1$. **320.** 1. **321.** Три корені. **322.** $-m$.

323. а) (1; 3); **б)** (3; –1). **324.** 46. **325.** 75 км. **328. а)** $\frac{3}{4}$; **б)** $\frac{1}{c}$; **в)** $\frac{a-3}{3}$; **г)** $\frac{c-4}{c+4}$;

д) $\frac{b-3}{b+3}$; **е)** $x-2y$; **є)** $\frac{5x-2}{x-2y}$. **331.** 625; 3,24. **333. а)** $\frac{2x}{x^2-1}$; **б)** $\frac{a^2}{b(a+b)}$; **в)** $\frac{b}{xy}$.

334. а) –1; **б)** $\frac{4a+13}{a^2-16}$; **в)** $\frac{17y}{10(2y+1)}$; **г)** $\frac{2(a^2+b^2)}{a^3-b^3}$. **335. а)** $1+\frac{9}{a}$; **б)** $a+4+\frac{1}{a}$;

в) $x+2+\frac{3}{x+2}$. **336. а)** 1; 2; 4; 8; **б)** 1; 11; **в)** 1. **337. б)** $\frac{2a}{15x}$; **в)** $\frac{3c}{4ab}$; **г)** $-\frac{1}{x+y}$;

д) $\frac{2(1-x)}{x}$; **е)** $\frac{-x(x+y)}{y}$. **339. а)** $\frac{2ax}{3}$; **б)** $\frac{(2-b)(1+b)}{b}$; **в)** $\frac{x(x-y)}{4}$. **340.** 90.

341. а) $\frac{1}{a+b}$; **б)** 1; **в)** $\frac{4a}{3(a-4)}$. **343.** $\frac{2a}{(a-1)^2}$; 4. **346. а)** $\frac{x+1}{3x+1}$; **б)** $\frac{x+1}{x+2}$. **347. б)** 127;

в) –0,9; **г)** $2\frac{1}{3}$; **д)** 4; **е)** $\frac{4}{7}$. **348. а)** $\frac{a}{b^2c}$; **б)** $\frac{a}{a^2-b^2}$; **в)** $2x^2y^3$; **г)** $\frac{c^3}{(c^2+1)^2}$.

349. а) $\frac{27x^{12}}{y^{10}}$; **б)** $\frac{a^{15}c}{3}$; **в)** $\frac{2}{2x+3}$; **г)** $\frac{a+b}{ab}$; **д)** 1; **е)** $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2}$. **350. а)** 2^{n+2}; **б)** 2^{n+7};

в) 2^{7-n}; **г)** 2^{n-8}. **351.** $x^{-3}(x^{-4}+x^{-2})$; $x^{-5}(x^{-2}+1)$; $x(x^{-8}+x^{-6})$. **353. а)** –1; **б)** 0;

в) коренів немає; **г)** –2. **354. а)** 0,6; **б)** 0; 3; **в)** $-4\frac{1}{3}$; **г)** –2,8. **355.** Якщо $a \neq -2$, то $x=-a-3$; якщо $a=-2$, то коренів немає. **356.** $a=-1$; $a=3$. **357.** $3{,}6 \cdot 10^3$ с; $8{,}64 \cdot 10^4$ с; $2{,}592 \cdot 10^6$ с. **358.** $5{,}11 \cdot 10^5$ г; $1{,}2 \cdot 10^6$ г; $2{,}3 \cdot 10^7$ г.

Завдання для самоперевірки № 3

1. а); г). **2.** в). **3.** в). **4.** а). **5.** г). **6.** б). **7. а)** $-\frac{1}{8}$; **б)** 2000. **8. а)** 250; **б)** $3\frac{1}{9}$. **9. а)** $12a$;

б) $\frac{b}{b-3}$. **10. а)** $\frac{a^{10}}{9b^4}$; **б)** $\frac{27n^6}{m^{12}}$. **12. а)** 65,5; **б)** $\frac{1}{27}$. **13. а)** $4ab^3c^3$; **б)** $\frac{n^3}{9m^2}$. **14. а)** $\frac{5}{a+2}$;

б) $-\frac{a+b}{ab}$. **15.** а) $1{,}403\cdot10^0$; б) $3\cdot10^{-5}$. **16.** (1; –8). **17.** а) 1,5; б) $2\frac{2}{3}$. **18.** а) $\frac{y}{x^{m+3}}$; б) $\frac{b^{3n-2}}{2y^{2n-1}}$. **19.** а) $\frac{1}{x^2-y^2}$; б) –2. **20.** а) $x=2\cdot10^3$; б) $x=10^{-3}$. **21.** Так.

§ 2

383. $k=3$. **384.** $-3<x<2$. **385.** б) $-\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$. **386.** а) $\frac{b-a}{a^3b^3}$; б) $-\frac{2}{(m-1)(n-1)}$. **387.** 60 м. **388.** а) 68°; б) –40°. **414.** а) 3,5; б) $1\frac{1}{6}$; в) 7,1; г) –6; д) –1,2; е) –0,99. **415.** а) 0,18; б) 2,5; в) 0,32; г) 50. **417.** а) $x=0$; б) $x=0$; в) таких значень не існує. **420.** а) 2; б) –1; в) 0. **421.** 72 книжки. **422.** $\frac{2}{5}$. **427.** 6 дм; 3 дм. **428.** 18 м; 6 м. **429.** а) –1; 1; б) $-\sqrt{1{,}5}$; $\sqrt{1{,}5}$; в) $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$. **430.** а) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; б) –1; 1; в) –8; 8; г) $-\sqrt{32}$; $\sqrt{32}$. **431.** а) –1,5; 2,5; б) 1,5; 4,5. **432.** а) –9; 5; б) –5; 6. **433.** –7; 7. **434.** –2 і –1; 2 і 3. **435.** а) $-\sqrt{3}$; –1; 1; $\sqrt{3}$; б) 1. **436.** $a=0$; $a=2$. **437.** а) коренів немає; б) 3. **438.** (–1; 3). **439.** $a=-6$. **440.** 60 деталей. **459.** *Вказівка.* Скористайтеся методом від супротивного. **460.** Так. Наприклад, $-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$; $\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}=-2$. **463.** 20,5 км/год. **464.** 7,2 год. **484.** а) 24; б) 180; в) 45; г) 3; д) 10,5; е) 105. **485.** а) 200; б) 42; в) 0,24. **486.** а) 75; б) 36; в) 14; г) 720; д) 1,6; е) 154. **487.** а) 21; б) 63; в) 20. **488.** а) 12; б) 20; в) 6. **489.** а) 300; б) 5; в) 1,44; г) 3; д) –0,3. **490.** а) 253,44; б) 0; в) 2; г) 171. **491.** а) 64; б) 243; в) 64. **492.** а) 32; б) 125; в) 81. **493.** а) ab; б) $-ab$; в) $-2x^2y^3$; г) $\frac{5m}{n^4}$; д) $-ab^2$; е) $-0{,}2xy$. **494.** а) $-a^2b$; б) $-6a^5b^3$; в) $\frac{x}{y^4}$; г) $7xy$. **497.** а) 2; б) $\frac{19}{75}$. **498.** а) 2,8; б) 2. **499.** а) 374; б) 576. **500.** $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$; $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$. **501.** $a\le0$; n — непарне. **502.** а) $x\ge0$; б) $x\le0$; в) для всіх значень x; **г)** $x \geq 0$; **д)** $x \geq 0$; **е)** $x \leq 0$. **504.** $x^2 - 2$. **505. а)** 1; **б)** 0,25; **в)** коренів немає; **г)** 0; 4. **506. в)** $\frac{2z}{3y}$; **г)** $\frac{a-2b}{a+1}$. **508. а)** $\frac{1}{12}$; **б)** із сумою 7. **509.** Ні. **510.** 84 км/год; 70 км/год. **518. а)** $5\sqrt{6}$; **б)** -26; **в)** 9; **г)** 0; **д)** $7\sqrt{3}$; **е)** $\sqrt{6}$; **є)** $3+\sqrt{5}$; **ж)** 9; **з)** 4; **и)** $7-2\sqrt{10}$. **519. а)** $2\sqrt{6}$; **б)** 15; **в)** $2\sqrt{2}$; **г)** $4\sqrt{3}-2$; **д)** 5; **е)** 9. **524. а)** $6\sqrt{2}-2$; **б)** 7; **в)** 6; **г)** $-2\sqrt{6}$; **д)** 0; **е)** 1. **525. а)** $5+2\sqrt{3}$; **б)** 15; **в)** -19; **г)** 3. **526. а)** $2a$; **б)** $4\sqrt{x}+8$; **в)** a; **г)** a^2. **527. а)** $a+b+ab+1$; **б)** m. **528. а)** $4a\sqrt{3b}$; **б)** $-0{,}3y\sqrt{x}$; **в)** $a^2b\sqrt{2}$; **г)** $0{,}8b\sqrt{b}$; **д)** $-2xz^3\sqrt{2x}$; **е)** $4bc^3\sqrt{2ab}$. **529. а)** $-7b\sqrt{a}$; **б)** $1{,}2ab\sqrt{b}$; **в)** $-3x^2y\sqrt{2}$; **г)** $0{,}2xy\sqrt{xy}$. **530. а)** $\sqrt{12a^2}$; **б)** $\sqrt{b}$; **в)** $\sqrt{9x^5}$; **г)** $\sqrt{a^3b}$; **д)** $\sqrt{(c+1)^3}$; **е)** $\sqrt{a^3+a^2b}$. **531. а)** $\sqrt{5c^2}$; **б)** $\sqrt{n^3}$; **в)** $\sqrt{2b^3}$; **г)** $\sqrt{a^3b^2}$; **д)** $\sqrt{x^3+x^2}$; **е)** $\sqrt{(n+k)^3}$. **532. а)** $\sqrt{3}+1$; **б)** $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$; **в)** $14(3+2\sqrt{2})$; **г)** $\frac{1}{2\sqrt{3}+1}$; **д)** $\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{m-n}$; **е)** $\frac{a(\sqrt{a}+3)}{a-9}$; **є)** $\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; **ж)** $\frac{4\sqrt{b}-6}{4b-9}$. **533. а)** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; **в)** $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$; **г)** $4\left(3\sqrt{2}-4\right)$; **д)** $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$; **е)** $\frac{c(1+\sqrt{c})}{1-c}$; **є)** $\frac{2(\sqrt{a}+a)}{a-a^2}$; **ж)** $\frac{b-9}{c\left(\sqrt{b}+3\right)}$. **534. в)** $\sqrt{5}(\sqrt{3}-\sqrt{7})$; **е)** $2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)$. **535. в)** $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$; **е)** $2\sqrt{b}(2+\sqrt{b})$. **536. а)** $\sqrt{2}$; **б)** $\frac{\sqrt{8}-1}{2}$; **в)** $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; **г)** $x+\sqrt{2}$; **д)** $\frac{1}{a-\sqrt{5}}$; **е)** $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{b}}$. **537. а)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **б)** $1-\sqrt{5}$; **в)** $-\sqrt{2}$; **г)** $\frac{1}{a-\sqrt{7}}$; **д)** $-x-\sqrt{2}$; **е)** $\sqrt{m}-\sqrt{5}$. **540. а)** $2\sqrt{2}$; **б)** $\frac{4}{23}$; **в)** $\sqrt{b}$; **г)** $\frac{1}{\sqrt{xy}}$. **541. а)** 4; **б)** 2; **в)** $-\sqrt{m}$; **г)** 0. **542. а)** $2+\sqrt{5}$; **б)** $\sqrt{3}-1$; **в)** 9; **г)** 1; **д)** x. **545. а)** $-\sqrt{\frac{a^2}{3}}$; **б)** $-\sqrt{-ab}$. **546. а)** $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$;

б) $\frac{\sqrt{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}}{3}$. **547.** **а)** $\frac{11}{24}$; **б)** 0. **549.** Ні. **550.** (–1; 1); (3; 9). **551.** 400 м. **552.** 80 км/год; 90 км/год. **553.** 500 г. **570.** 4,5a кг. **587.** **г)** 5; **д)** $4\frac{2}{3}$; **е)** коренів немає; **є)** 0,9; **ж)** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; **з)** коренів немає. **588.** **в)** 1; **г)** 2,52; **д)** коренів немає; **е)** –1; 1. **589.** **а)** (16; 4); **б)** (4; 2). **591.** 0; 1. **592** $a = 1$. **594.** **а)** –2; 2; **б)** 2; **в)** 0. *Вказівка.* Вирази $\sqrt{x}$ і $\sqrt{x^2+2x}$ набувають лише невід'ємних значень. Тому сума $\sqrt{x}+\sqrt{x^2+2x}$ може дорівнювати нулю лише тоді, коли одночасно виконуються рівності $\sqrt{x}=0$ і $\sqrt{x^2+2x}=0$, тобто $x=0$ і $x^2+2x=0$. **г)** 2. **596.** **а)** $(a-1)^2$; **б)** $-\frac{1}{b+2}$. **598.** 56 хв. **604.** **б)** 1; **в)** 7,5; **г)** –23; **д)** –2; **е)** 3. **606.** **а)** $\frac{7}{18}$; **б)** 6; **в)** $\frac{1}{35}$. **607.** **а)** 16; **б)** 82; **в)** 18. **608.** **в)** 10; **г)** 30. **609.** **б)** $4b-3$; **г)** $-12\sqrt{ab}$. **611.** **б)** $2a\sqrt{2}$; **в)** $-7b\sqrt{2a}$. **613.** **б)** $\sqrt{7m^2}$; **в)** $-\sqrt{19mn^2}$. **614.** **б)** $\sqrt{10}(\sqrt{10}+1)$; **г)** $(\sqrt{c}-2)(\sqrt{c}+2)$; **д)** $(m-\sqrt{6})(m+\sqrt{6})$. **615.** **а)** $\sqrt{7}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{3}}$; **в)** $\sqrt{a}-\sqrt{5}$; **г)** $c+\sqrt{10}$; **д)** $-\frac{1}{x+\sqrt{2}}$; **е)** $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. **616.** **а)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$; **б)** $\frac{\sqrt{10}}{4}$; **в)** $2(\sqrt{5}+2)$; **г)** $\frac{3\sqrt{m}+2\sqrt{n}}{9m-4n}$. **618.** **а)** –6; **б)** $\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$. **619.** **а)** $\frac{2\sqrt{b}}{a-b}$; **б)** $\frac{x}{x-y}$. **623.** **а)** $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; **б)** коренів немає. **625.** $a=-1$; $a=1$. **626.** **г)** 1,25; **д)** коренів немає; **е)** –1; 1. **627.** **а)** 0; **б)** коренів немає; **в)** 0. **629.** **а)** (1; 1); (–1,5; 2,25); **б)** (0; 0); (4; 2). **631.** Не має. **632.** Якщо $a=-1$ або $a=0$, то рівняння має 1 корінь; якщо $a=1$, то рівняння коренів не має. **634.** (–1; 1).

Завдання для самоперевірки №4

1. г). **2.** в). **3.** в). **4.** г). **5.** б). **6.** в). **7. а)** 3,5; **б)** 15; **в)** 9. **8. а)** $-9\sqrt{3}$; **б)** –1. **9. а)** $\sqrt{2}$; **б)** 4. **10. а)** –3; 3; **б)** $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **11.** Так. **12. а)** 42; **б)** 1,5; **в)** 30. **13. а)** $\sqrt{3}$; **б)** 6. **14. а)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; **б)** $\frac{x(2\sqrt{x}-1)}{4x-1}$. **15. а)** $\sqrt{a}-\sqrt{3}$; **б)** $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. **16.** –1,5; 1. **17. а)** $x \ge 0$; **б)** $x \le 0$; **в)** $x = 0$. **18. а)** 1; **б)** 6. **19. а)** $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; **б)** –0,5; 1. **20.** *Вказівка.* $19+8\sqrt{3}=\left(4+\sqrt{3}\right)^2$. **21.** Має.

§ 3

651. а) 0; 4,5; **б)** –2; 2; **в)** $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; **г)** $-\sqrt{17}$; $\sqrt{17}$; **д)** –4,5; 0; **е)** 0; 0,2; **є)** $-\sqrt{30}$; $\sqrt{30}$; **ж)** $-3\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$. **652. а)** –0,8; 0; **б)** $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; **в)** 0; 5; **г)** $-\frac{2}{3}$; 0; **д)** –0,4; 0,4; **е)** –0,4; 0,4. **653. а)** 0; 3,15; **б)** $-\sqrt{5,5}$; $\sqrt{5,5}$. **654. а)** –2,5; 2,5; **б)** –8; 0. **655.** –6. **656.** 8. **657.** $-\sqrt{1,5}$; $\sqrt{1,5}$. **658.** –0,5; 0. **659.** –9; 0. **660.** 0; 17. **661. а)** –0,5; 0; **б)** –2; 2. **662. а)** 0; 3; **б)** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **663. а)** Якщо $a<0$, то $x_1=-\sqrt{-\frac{1}{a}}$; $x_2=\sqrt{-\frac{1}{a}}$; якщо $a \ge 0$, то коренів немає; **б)** $x_1=0$; $x_2=2a$ для будь-якого a; **в)** якщо $a=0$, то коренем є будь-яке число; якщо $a \ne 0$, то $x_1=-a$; $x_2=a$. **666.** $m=2$. **667.** 70 км/год; 50 км/год. **668.** 70 т; 50 т. **673. а)** 1; 5; **б)** –6; 2; **в)** –5; –2; **г)** коренів немає; **д)** 5; **е)** –3; 7. **674. а)** 1; 1,5; **б)** –1; 0,5; **в)** –2; $\frac{1}{3}$; **г)** 0,5; **д)** коренів немає; **е)** $-\frac{1}{7}$; 1. **675. а)** –5; 1; **б)** –1; –4; **в)** 2; 3; **г)** коренів немає; **д)** 4; **е)** 3; 7; **є)** –1; –0,5; **ж)** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; **з)** –1,5; 1. **676. а)** 1; 4; **б)** –4; 0,5; **в)** –1; 2. **677. а)** –1; 3; **б)** 1; 7; **в)** –1; 0,25. **681. а)** $1-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$; **б)** $\frac{4}{7}$; 2; **в)** –8; $\frac{2}{3}$; **г)** –15; –6;

д) -18; $\frac{1}{3}$; е) -1; 3; є) $-1{,}5$; 1; ж) $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; з) $-\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{3}$. **682.** а) $3-\sqrt{3}$; $3+\sqrt{3}$; б) -6; $-\frac{2}{3}$; в) 0,5; 3,5; г) -7; 23; д) -18; $-0{,}25$; е) -4; 1; є) -1; $-0{,}2$; ж) $-\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; з) $-\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$. **683.** $-0{,}25$; 4. **684.** $-1\frac{2}{3}$; 2. **685.** а) -2; $-1{,}5$; б) -5; 0,2; в) $-0{,}2$; 3; г) $-\frac{1}{2}$; $1\frac{2}{3}$; д) $-0{,}6$; 1; е) $\frac{1-2\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1+2\sqrt{2}}{3}$; є) $-0{,}5$; 0,2; ж) -5; 1,5. **686.** а) $-\frac{5}{6}$; $\frac{3}{4}$; б) $-\frac{2}{3}$; 2,5; в) $-1\frac{6}{7}$; -1; г) $\frac{-10-5\sqrt{2}}{2}$; $\frac{-10+5\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$. **687.** а) $-3{,}5$; 1; б) -3; 0,6. **688.** а) 1; 3; б) $-4{,}5$; 6. **689.** $-2\frac{2}{3}$; -2. **690.** $-\frac{1}{8}$; 1. **691.** а) -15; 12; б) $-16\frac{1}{3}$; $4\frac{2}{3}$. **692.** а) 16; б) 0; 1. **693.** а) -1; 5; б) -2; 1; 2; 5. **694.** а) $x_1 = b$; $x_2 = 3b$; б) $x_1 = -b$; $x_2 = b-2$. **700.** 95. **701.** 100 кг. **718.** а) $p = -2$, $q = -15$; б) $p = 8$, $q = 12$. **721.** -1 — інший корінь рівняння; $q = 9$. **722.** 3 — інший корінь рівняння; $p = -1$. **723.** а) 22; б) $3\frac{4}{9}$. **724.** а) -29; б) $-12\frac{3}{4}$. **725.** а) 5; б) 0,5. **726.** а) $m = 2$; б) $m = -4$; $m = 4$. **727.** $\sqrt{2}$ і $4\sqrt{2}$ — корені рівняння; $p = -5\sqrt{2}$. **728.** -11 і 3 — корені рівняння; $p = 8$. **729.** 8 і 2 — корені рівняння; $b = 16$. **732.** $b = 4$. **733.** а) 0,89; б) $-0{,}387$. **734.** б) $(a+2b)(3-c)$; в) $-(a-b)(a+3b)$; г) $(m-1)(m-7)$. **735.** а) $-\frac{4}{m(m+2)}$; б) $\frac{1}{a-5}$. **736.** а) $(4; -2)$; б) $(4; -1)$. **737.** $\frac{1}{3}$. **738.** 20 га; 25 га. **742.** а) -4; 1; б) $-\frac{1}{3}$; 3; в) 4. **744.** г) $(2x-1)(x-2)$; д) $(3x+2)(x-1)$; е) $3(x-1)^2$. **745.** а) $(x-1)(x-3)$; б) $(x+4)(x-3)$; в) $(2x+5)(x-1)$. **746.** а) $(2x-1)(2x-2)$; б) $-(x+4)(x-2)$; в) $-0{,}3(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})$; г) $(y-1)(1{,}2y+0{,}7)$; д) $\frac{1}{3}(x+1)(x+2)$; е) $-\frac{1}{4}(x-4)^2$. **747.** а) $(3x-2)^2$;

б) $-(x+1)(5x-3)$; в) $0{,}1(3m-2)(2m-3)$; г) $\frac{1}{8}(x-2)(x-4)$. **749.** а) $\frac{2x-3}{4}$; б) $\frac{3x-1}{2x+1}$; в) $\frac{x-1}{2x-1}$. **750.** а) $\frac{3}{x+4}$; б) $\frac{2x+3}{2x-3}$. **751.** а) $(x+a)(x-2a)$; б) $(2x+a)(x+2a)$. **752.** а) $\frac{2a}{a-b}$; б) $\frac{x+6y}{x^2-4y^2}$. **753.** б) 0. **754.** 70 км/год. **755.** $68\frac{4}{7}$ км/год. **756.** –2; 2. **757.** а) 0; 1; б) $-\frac{1}{3}$; 2; в) 1; 4; г) 0; д) 0,25; е) –3. **758.** а) –7; 7; б) 4; в) –5,5. **759.** а) –10; 10; б) 0; в) 4. **760.** а) 0; б) –3; –2; в) –2. **761.** а) –3; –2; б) –1; 2; в) 4; 8; г) –6; 3; д) 1; 7; е) –4; 5. **762.** а) –2; 7; б) 3; 5; в) –7; 1. **763.** а) –2; –1; 1; 2; б) –3; 3; в) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **764.** а) –2; 2; б) –3; –1; 1; 3; в) –2; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 2. **765.** а) 3; б) –3; в) 0,5; г) коренів немає. **766.** а) 0,5; б) 10. **767.** а) 1; 10; б) –1; 6; в) –2; 1; г) 0; 4. **768.** а) –11; 2; б) –7; –4; в) 1,8; 10. **769.** а) –7; 1; б) –0,75; 5; в) 1,5; 2; г) коренів немає. **770.** а) –5; 3; б) –15; 1. **771.** а) $-\sqrt{5}$; 0; $\sqrt{5}$; б) –0,25; 0; 1. **772.** а) 0; б) 0; 5; 6. **773.** а) –2; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 2; б) $-\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}$; в) –3; –2; 2; 3. **774.** а) –2; –0,5; 0,5; 2; б) –1; 2. **775.** –3. **776.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **777.** а) $-\frac{7}{18}$; 3; б) $\frac{5}{7}$; 4; в) –4; $5\frac{2}{3}$; г) –1; $\frac{2}{3}$; д) 1; $\frac{7-\sqrt{33}}{4}$; $\frac{7+\sqrt{33}}{4}$; 4; е) –3; –2. **778.** Якщо $a = 1$ або $a = 2$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 2$, то $x_1 = 1$; $x_2 = a$. **779.** а) –6; –4; –1; 1; б) –1; 0,5; в) 2; 3; г) –1; 6; д) –3; 2; е) –5; –1. **780.** а) $(a-3)(a-1)(a+1)(a+3)$; б) $(b+3)(b-1)(b+1)^2$. **781.** а) –1; 4; б) $\frac{2}{3}$; 4. **782.** а) 1; 25; б) 4; в) 5; г) 16; д) –1; 4; е) –7; 2. **783.** а) $\frac{3c^2}{4a}$; б) $\frac{2x^2-y}{y}$. **785.** а) $-36-14\sqrt{2}$; б) 2. **786.** 70 кг. **787.** 4 км/год. **788.** 240 матчів. **789.** –15 і –9; 9 і 15. **790.** –13 і 7; –7 і 13. **791.** 12; 35. **792.** 7 см; 8 см. **793.** 4 м; 8 м. **794.** 60 км/год; 90 км/год. **795.** 50 км/год. **796.** 6 деталей. **797.** 4 сторінки.

798. 3 км/год. **799.** 14 км/год. **800.** –6 і –3; 10 і 13. **801.** 9; 10. **802.** $\frac{3}{5}$. **803.** $\frac{7}{2}$.

804. 16 комп'ютерів. **805.** 6 год; 10 год. **806.** 10 год; 15 год. **807.** 3 дні; 6 днів.

808. 9 днів. **809.** 12 днів; 15 днів. **810.** 18 км/год. **811.** 16 км/год. **812.** 60 км/год.

813. 90 км/год. **814.** 15 дівчат. **815.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **816.** 9 год; 18 год. **817.** 75 км/год.

818. 10 деталей. **820. б)** 14. **821. а)** $\frac{b-1}{b+1}$; $\frac{1}{3}$; **б)** $-m$; –0,8. **823. а)** –2; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 2;

б) 256. **824. а)** –4; 4; **б)** $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; **в)** –1,5; 1,5; **г)** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; **д)** 0; 0,6; **е)** 0; 0,2.

825. а) –0,5; 1; **б)** –0,25; 3; **в)** 0,2; 4; **г)** –1; $-\frac{2}{3}$. **826. а)** –2; 7; **б)** –10; 6.

828. а) $(x-3)(x-7)$; **б)** $(2x+5)(x-1)$; **в)** $(x-4)^2$. **829. а)** $(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x+2)$;

б) $(x-a)(x-3a)$; **в)** $(m+2n)(2m-5n)$. **830. а)** $-x-6$; **б)** $\frac{4x-1}{x+5}$; **в)** $\frac{a+5b}{2a-3b}$.

831. а) –2; 10; **б)** –4; 1; **в)** –2; 0; **г)** $-1\frac{5}{12}$; 1; **д)** 1; 2; **е)** –1; $1\frac{2}{3}$. **832. а)** $-\sqrt{3}$; 0; $\sqrt{3}$;

б) –0,8; 0; 0,8. **833. а)** $-\sqrt{2}$; –1; 1; $\sqrt{2}$; **б)** –3; 3. **834. а)** –1; 2; **б)** $-1\frac{2}{3}$; 1; **в)** –2; 1;

г) –1; 1; 3; 5. **835. а)** 1; **б)** –2; 9. **836. а)** –8; **б)** –3; **в)** 3; $4\frac{1}{3}$; **г)** $-1\frac{2}{3}$; –1; **д)** –4; **е)** –2; 2;

є) –1; 11; **ж)** $-\frac{3}{4}$; $\frac{3-\sqrt{19}}{2}$; 0; $\frac{3+\sqrt{19}}{2}$. **838.** 9. **839.** 7,5. **840.** 1. **841.** 2, 14 — корені рівняння; $m = 28$. **842.** –2; 1. **843.** 1. **844.** 1; 2; 3; 4. **846.** 46 см. **847.** 4. **848.** 3; 4. **849.** 7; 9; 11.

850. 3 см; 4 см; 5 см. **851.** $\frac{5}{12}$. **852.** $\frac{3}{10}$. **853.** 4 км/год. **854.** 2 км/год. **855.** 90 км/год.

856. 72 км/год. **857.** 60 км/год. **858.** 6 днів; 12 днів. **859.** 10 днів; 20 днів. **860.** 20.

Завдання для самоперевірки № 5

1. в). **2.** г). **3.** а). **4.** в). **5.** б). **6.** в). **7.** **а)** –2; 2; **б)** 0; 3. **8.** **а)** $(x+2)(x+4)$; **б)** $(x-1)(2x-3)$. **9.** $x_1 + x_2 = 10$; $x_1x_2 = 24$. **10.** **а)** коренів немає; **б)** –6. **11.** –3 і 8; –8 і 3. **12.** **а)** $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; **б)** –1; 1. **13.** $3\frac{1}{3}$. **14.** **а)** –11; 2; **б)** 1; 1,5. **15.** $b = 1{,}5$. **16.** 80 км/год. **17.** **а)** –3; –2; 0; 1; **б)** 64. **18.** $a = -4$; $a = 4$. **19.** $b = -5$. **20.** –2; 0,5. **21.** 12 год; 16 год.

Задачі за курс алгебри 8 класу

862. **а)** $\frac{7y^2}{6x^2}$; **б)** $\frac{6y}{x-y}$; **в)** $\frac{a-3}{a-1}$; **г)** $\frac{a-1}{a+b}$; **д)** $x^5 - 1$; **е)** $x^5 + \sqrt{5}$. **866.** **а)** $\frac{4}{a^2-4}$; **б)** $\frac{x^2}{y(x+y)}$; **в)** $\frac{4b}{y}$; **г)** $\frac{3b}{a}$; **д)** $\frac{1}{x+2}$; **е)** $\frac{34}{y^2-4}$. **867.** **а)** $3(a-b)$; **б)** $\frac{(m-n)^2}{m-n+1}$; **в)** 1; **г)** $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$. **869.** **а)** $\frac{2}{1-a^2}$; $-\frac{1}{112}$; **б)** $-\frac{4}{b+2}$; –40. **871.** **а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $\frac{1}{5}$; **в)** 2. **872.** **а)** $\frac{1}{a+1}$; **б)** $\frac{x^2-1}{x^2-2}$. **873.** $\frac{1}{2bc}$. **874.** 1. **876.** **в)** $x \geq 0$; **г)** $x \geq 0$; $x \neq 16$. **879.** **а)** 0; **б)** $4+2\sqrt{6}$; **в)** $46+4\sqrt{6}$; **г)** $2x\sqrt{x}$. **880.** **а)** 2; **б)** $\sqrt{c}-\sqrt{3}$; **в)** $\frac{1}{x+\sqrt{3}}$. **882.** **а)** –6; **б)** 5; **в)** $4\sqrt{3}$. **883.** **а)** 10; **б)** 8; **в)** 4; **г)** $2\frac{8}{9}$. **884.** $\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{ab}}$. **887.** **а)** –3; 5; **б)** –1; 3,5; **в)** –6; 1; **г)** $\frac{2-2\sqrt{7}}{3}$; $\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$; **д)** 3; 5; **е)** 0,5; **є)** –3; 3; **ж)** –3; 0; 2. **888.** **а)** –1; 4; **б)** $1-\sqrt{6}$; $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$; $1+\sqrt{6}$; **в)** –4; 2. **889.** 3. **890.** $-\frac{2}{3}$. **892.** 232. **893.** –280. **894.** $c = -1$; $-\frac{1}{3}$ — другий корінь. **895.** 2 і $\frac{1}{3}$ — корені, $b = -7$ або –2 і $-\frac{1}{3}$ — корені, $b = 7$. **896.** 6. **897.** **а)** –0,5; 0; **б)** –1; 0; $\frac{1}{3}$. **898.** –3. **901.** **а)** 3; **б)** 1; **в)** –4; 1; **г)** –2; 1; **д)** 1,2; **е)** –7; –5;

є) 1; 5. **902.** $a = -1$; $a = -0{,}5$. **903. а)** Якщо $a \neq 2$, то $x = 2a - 1$; якщо $a = 2$, то коренів немає; **б)** якщо $a \neq -1$, $a \neq 0$ і $a \neq 2$, то $x = a^2 - a$; якщо $a = -1$, $a = 0$ або $a = 2$, то коренів немає. **904. а)** –1; 3; **б)** 0. **905. в)** 4. **906. а)** 6; **б)** –1; 3; **в)** 25; **г)** –4; 1. **908. а)** (–7; 49); (5; 25); **б)** (0; 0); (0,25; 0,5). **909. а)** –0,5; 2; **б)** –1; 4; **в)** 4. **910.** Так. **913.** –3 і –2 або 4 і 5. **914.** –2, –1, 0, 1, 2 або 10, 11, 12, 13, 14. **915.** 24 см. **916.** 48 см^2. **917.** $\frac{1}{5}$. **918.** 7 деталей. **919.** 20 год. **920.** 6 год; 8 год. **921.** 6 год; 4 год. **922.** 3 км/год; 1 км/год. **923.** 60 км/год. **924.** 4 оберти. **925.** 8 команд. **926.** 2 л.

Задачі підвищеної складності

927. а) $x^2 + x - 2$; **б)** $\frac{x^2 + ax + a^2}{x + a}$. **928.** $\frac{32}{1 - x^{32}}$. **930.** $\frac{100}{101}$. **931.** $n = 2$; $n = 3$. **932.** *Вказівка.* Помножте чисельник і знаменник першого дробу на z, а другого — на xz. Тоді на основі умови $xyz = 1$ усі три дроби матимуть однакові знаменники. **933.** –1; 8. **939.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що запис квадрата натурального числа не може закінчуватися цифрою 8. **940. а)** $\sqrt{a} + 1$; **б)** $\sqrt{a+1} + 1$. **941.** $\frac{(\sqrt{5} - \sqrt{7} + 1)(2\sqrt{5} + 1)}{19}$.

944. а) Коренів немає; **б)** 0; **в)** 4; **г)** –2; 14. **945.** $x = 4$; $y = 4$. **946. б)** $\frac{9}{16}$. **949.** Якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a \geq 0$ — 1 корінь. **950.** $a > 0$. **955.** $a = 1$. **956.** $c = 0$; $c = -4$. **957.** $x^2 + (p^3 - p^2 - 3pq + 2q)x - p(p^2 - 2q)(p^2 - 3q) = 0$. **958.** $\sqrt{2\sqrt{q} - p}$. **959. а)** –3, 1; **б)** 0,5; **в)** 0; $7 - 2\sqrt{3}$; $7 + 2\sqrt{3}$; **г)** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; **д)** 1; **е)** 1. **960.** 18. **961.** 1. **962.** Один корінь. **963. а)** Якщо $a > 0$, то $x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a}$; якщо $a = 0$, то $x = 0$; якщо $a < 0$, то $x_1 = -2\sqrt{-a}$, $x_2 = 2\sqrt{-a}$; **б)** якщо $a \neq -4$, $a \neq -2$, $a \neq 0$ і $a \neq 1$, то $x_1 = -2a$, $x_2 = a + 2$; якщо $a = -4$, то $x = 8$; якщо $a = -2$, то $x = 4$; якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a = 1$, то

$x = 3$. **964.** $a = -1$. **965.** $a = 8$; $a = 12$. **967.** 5; 6; 7; 8. **968.** 6 хв. **969.** 50 км/год. **970.** 56 с. **971.** 64 км/год. **972.** $3\sqrt{2}$ км/год. **973.** 8 л. **974.** 20 л. **975.** Ні. **977.** 135 і 120 жителів. **978.** Оля перемагає, якщо число сірників не кратне 11. **980. а)** 4; **б)** 11; **в)** 22. **981.** Ні. **982.** Ні. **983.** 16. **984.** По 8 квадратів. **985.** Ні. **986.** Ні. *Вказівка.* Після виконання кожного з даних перетворень дискримінант квадратного рівняння не змінюється.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

§ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Федоренко Валерія
8-Б кл.
2011-2012 н.р.

Навчальне видання

Василь Ростиславович Кравчук
Марія Василівна Підручна
Галина Михайлівна Янченко

Алгебра

Підручник для 8 класу

Затверджено Міністерством освіти і науки України
(протокол №1/11-2550 від 29.07.2002 р.)

Редактори: *Ярослав Гап'юк, Ярослав Гринчишин, Сергій Мартинюк*
Літературне редагування *Людмили Олійник*
Обкладинка *Світлани Демчак*

Підписано до друку 1.07.2008. Формат 60×90/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. 14 ум. др. арк., 12,96 обл.-вид. арк. Тираж 3 000.
Замовлення №08-262.

Редакція газети «Підручники і посібники». Свідоцтво ТР 189 від 10.01.96.
46020, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел. 8-(0352)-43-10-31, 43-15-15, 43-10-21.
Факс 8-(0352)-43-10-31. E-mail: pp@pp.utel.net.ua
www.pp.utel.net.ua