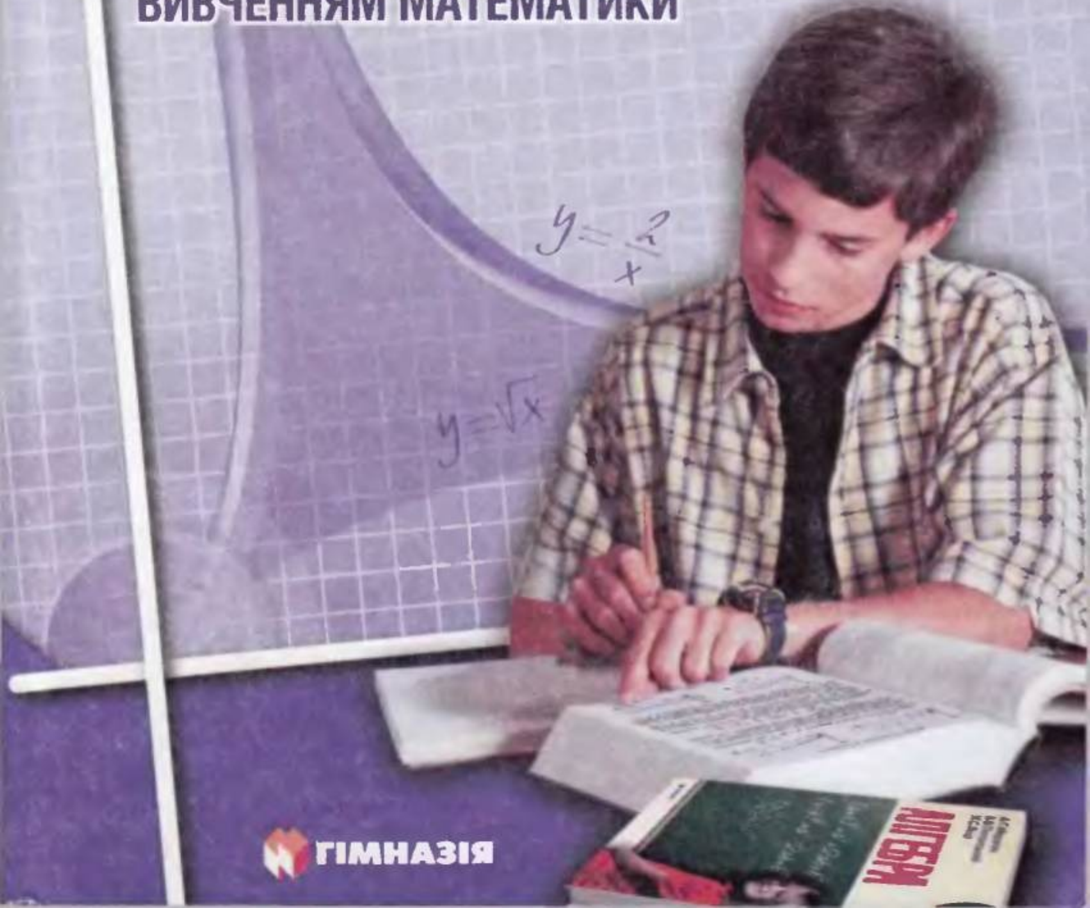
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

8

АЛГЕБРА

ПІДРУЧНИК ДЛЯ КЛАСІВ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ



ГІМНАЗІЯ

УДК 373:512
ББК 22.141я721
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1-11/2526 від 13.06.2008 р.)

Відповідальний за випуск
Головний спеціаліст Міністерства освіти і науки України
Н. С. Прокопенко

Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.
М52 Алгебра: Підруч. для 8 кл. з поглибл. вивч. математики.— Х.: Гімназія, 2008.— 368 с.
ISBN 978-966-474-009-9.

УДК 373:512
ББК 22.141я721

ISBN 978-966-474-009-9

ЛЮБІ ВОСЬМИКЛАСНИКИ!

Ви зробили серйозний життєвий крок: вирішили продовжити освіту в класі з поглибленим вивченням математики. Ми вітаємо вас з цим вибором і сподіваємося, що ви не розчаруєтеся в своєму рішенні.

Навчатися в математичному класі не просто. Потрібно бути наполегливим і завзятим, уважним і акуратним, при цьому найголовніше — не бути байдужим до математики, а любити цю красиву науку.

Протягом навчального року ви продовжуватимете вивчати алгебру. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Не залишайте також поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)).

Також у підручнику ви зможете прочитати оповідання про важливі математичні об'єкти, історію їх виникнення і розвитку. Назви цих оповідань надруковано зеленим кольором.

Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтам, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано численний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте **за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби**. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, які рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Оповідання, назви яких надруковано **зеленим** кольором, можуть бути використані для роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

🔑 задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

▲ закінчення доведення теореми.

§ 1. ПОВТОРЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

1. Лінійне рівняння з однією змінною. Цілі вирази

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 1–7 на с. 325–328.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $(a - 3)x = a - 3$.

Розв'язання. При $a = 3$ рівняння набуває вигляду $0x = 0$. У цьому випадку його коренем є будь-яке число.

При $a \neq 3$ маємо, що $a - 3 \neq 0$. Тоді $x = \frac{a-3}{a-3}$, тобто $x = 1$.

Відповідь: якщо $a = 3$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 3$, то $x = 1$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $|2x - 3| = 5$.

Розв'язання. Ураховуючи, що модуль лише чисел 5 і −5 дорівнює числу 5, маємо:

$$2x - 3 = 5 \text{ або } 2x - 3 = -5;$$
$$2x = 8 \text{ або } 2x = -2;$$
$$x = 4 \text{ або } x = -1.$$

Відповідь: 4; −1.

ПРИКЛАД 3 Порівняйте значення виразів 127^{23} і 513^{18}.

Розв'язання. Маємо: $127^{23} < 128^{23} = (2^7)^{23} = 2^{161} < 2^{162} = (2^9)^{18} = 512^{18} < 513^{18}$.

Отже, $127^{23} < 513^{18}$.

ПРИКЛАД 4 Знайдіть значення виразу

$$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64}.$$

Розв'язання. Очевидно, що даний вираз дорівнює такому:

$(2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64} =$
$= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64} =$
$= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64} = \dots =$
$= 2^{64} - 1 - 2^{64} = -1$.

Відповідь: −1.

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ є квадратом натурального числа.

Розв'язання. Маємо: $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 =$
$= (n(n+3))((n+1)(n+2)) + 1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 =$
$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2$.

ПРИКЛАД 6 Розкладіть на множники многочлен

$$x^2 + 2x - 9y^2 + 12y - 3.$$

Розв'язання. Маємо:
$x^2 + 2x - 9y^2 + 12y - 3 = x^2 + 2x + 1 - 9y^2 + 12y - 4 =$
$= (x+1)^2 - (9y^2 - 12y + 4) = (x+1)^2 - (3y-2)^2 =$
$= (x + 1 - 3y + 2)(x + 1 + 3y - 2) = (x - 3y + 3)(x + 3y - 1)$.

ПРИКЛАД 7 Розкладіть на множники двочлен $n^4 + 4$.

Розв'язання. Маємо: $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2+2)^2 - 4n^2 =$
$= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.

Задача. Доведіть тотожності:

$$\boxed{\begin{array}{c}(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{array}}$$

Ці формули називають відповідно **кубом суми** і **кубом різниці двох виразів**.

Розв'язання. Маємо: $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 =$
$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 =$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Формулу куба різниці доведіть самостійно.

ПРИКЛАД 8 Розкладіть на множники многочлен

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Розв'язання. Маємо: $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x +$
$+ 1 = x^3 + (x+1)^3 = (x + x + 1)(x^2 - x(x+1) + (x+1)^2) =$
$= (2x+1)(x^2 - x^2 - x + x^2 + 2x + 1) = (2x+1)(x^2 + x + 1)$.

ПРИКЛАД 9 Розкладіть на множники тричлен $a^5 + a + 1$.

Розв'язання

I спосіб

Маємо: $a^5 + a + 1 = a^5 + a^4 - a^4 + a^3 - a^3 + a^2 - a^2 + a + 1 =$
$= a^5 + a^4 + a^3 - a^4 - a^3 - a^2 + a^2 + a + 1 = a^3(a^2 + a + 1) -$
$- a^2(a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 = (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1)$.

II спосіб

Маємо: $a^5 + a + 1 = a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = a^2 (a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) = a^2 (a - 1) (a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1) \times (a^3 - a^2 + 1)$.

1.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{7} + \frac{3x-1}{14} = \frac{x}{3}$;
2) $\frac{2x-1}{8} - \frac{x+2}{4} = x$.

1.2.° Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{2x+3}{5} + \frac{3x-1}{2} = 2x$;
2) $\frac{8x-5}{3} - \frac{4x+3}{4} + \frac{2-9x}{2} = -3$.

1.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(7x - 1)(x + 5) = (3 + 7x)(x + 3)$;
2) $(6x - 1)^2 - (3 - 8x)(3 + 8x) = (10x + 1)^2$;
3) $(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 = x^2 (x + 1) - 2x$.

1.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(5x + 1)(2x - 3) = (10x - 9)(x + 2)$;
2) $(4x + 1)^2 - (1 - 3x)(1 + 3x) = (5x + 2)^2$;
3) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3x^2 = x^2 (x + 3) - 2x$.

1.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(0{,}6x - 3)(2x + 1) = 0$;
2) $x^2 - 16 = 0$;
3) $3x^2 + 15x = 0$;
4) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;
5) $x (x + 2)(5x - 1) = 0$;
6) $(3x - 1)^2 - 25x^2 = 0$;
7) $(2x + 1)^2 = (x + 2)^2$;
8) $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 = 2 (1 - x)(x - 2)$.

1.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(0{,}8x - 2)(3x + 1) = 0$;
2) $x^2 - 25 = 0$;
3) $18x^3 - 9x^2 = 0$;
4) $1 - 6x + 9x^2 = 0$;
5) $x (x + 4)(4x - 3) = 0$;
6) $(2x + 3)^2 - 64x^2 = 0$;
7) $(3x - 2)^2 = (x - 3)^2$;
8) $(x + 3)^2 + (4 - x)^2 = 2 (x - 4)(x + 3)$.

1.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| = 3$;
2) $|x - 1| = 5$;
3) $|x + 2| + 6 = 5$;
4) $3|x| - 4 = 0$.

1.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $|3x - 1| = 2$;
2) $4|x| + 3 = 0$.

1.9.° Спростіть вираз:

1) $(-a^3b^2)^3 \cdot 7a^5b^4$;
2) $(3m^6n^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}m^8n^2\right)$;
3) $-2\frac{2}{5}c^6d^{11} \cdot \left(-\frac{1}{2}cd^2\right)^2$;
4) $-(-3m^4n^2)^5 \cdot \left(-\frac{1}{3}mn^3\right)^6$.

1.10.° Спростіть вираз:

1) $1\frac{11}{25}a^7b^2 \cdot \left(-\frac{5}{6}a^2b^7\right)^2$;
2) $(-0{,}2x^2y^5z^3)^2 \cdot 10y^4z$;

3) $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right)^3 \cdot (-4a^5b)^2$;   4) $\left(-\frac{4}{3}xy^2\right)^2 \left(-\frac{3}{2}x^2y\right)^5$.

1.11.° Доведіть тотожність

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

1.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $ax = 1$;   2) $bx = b$.

1.13.• Розв'яжіть рівняння:

1) $bx = 2$;   2) $(a-1)x = a-1$.

1.14.• При яких натуральних значеннях a корінь рівняння є натуральним числом:

1) $(a+2)x = 5$;   2) $(a+3)x = 6$?

1.15.• При яких цілих значеннях a коренем рівняння $(a+1)x = 7$ є ціле число?

1.16.• При яких значеннях b число 3 є коренем рівняння

$$(b+2)(x-1) = 2(x+b-1)?$$

1.17.• Замініть зірочки такими одночленами, щоб виконувалась рівність:

1) $(*)^2 \cdot (*)^3 = 72m^7n^{11}$;   3) $(*)^2 \cdot (*)^5 = -288a^9b^{11}c^{12}$.

2) $(*)^3 \cdot (*)^4 = -81x^{10}y^{17}z^{13}$;

1.18.• Відомо, що $4x^2y = 3$. Знайдіть значення виразу:

1) $6x^2y$;   2) $4x^4y^2$;   3) $-3x^6y^3$.

1.19.• Відомо, що $2a^3b^2 = -3$. Знайдіть значення виразу:

1) $-3a^3b^2$;   2) $-2a^6b^4$;   3) $-8a^9b^6$.

1.20.• Відомо, що $3x^3y = 4$ і $x^2z^3 = -3$. Знайдіть значення виразу:

1) $4x^5yz^3$;   2) $\frac{1}{2}x^8y^2z^3$;   3) $-x^9z^9y$.

1.21.• Відомо, що $2a^4b = 3$ і $5ac^2 = -2$. Знайдіть значення виразу:

1) $5a^5bc^2$;   2) $-4a^6bc^4$;   3) $10a^{10}b^2c^4$.

1.22.• Доведіть, що не існує таких значень x і y, при яких многочлени $-5x^2 + 3xy + 4y^2$ і $6x^2 - 3xy - y^2$ одночасно набували б від'ємних значень.

1.23.• Спростіть вираз (n — натуральне число):

1) $x^{n+1}(x^{n+6} - 1) - x^{n+2}(x^{n+5} - x^3)$;

2) $x(4x^{n+1} + 2x^{n+4} - 7) - x^{n+2}(4 + 2x^3 - x^n)$.

1.24.• Спростіть вираз (n — натуральне число):

1) $x^n(x^{n+4} + 2x) + x(3x^n - x^{2n+3})$;

2) $x^{n+2}(x^2 - 3) - x^n(x^{n+2} - 3x^2 - 1)$.

1.25.• Доведіть, що коли $a - 2b = 3$, то $2ab^2 - a^2b + 3ab = 0$.

1.26.• Доведіть, що коли $a + b = c$, то $a^3b^3c + a^2b^4c - a^2b^3c^2 = 0$.

1.27.• Винесіть за дужки спільний множник (n — натуральне число):

1) $x^{n+3} + x^n$;
2) $y^{n+2} - y^{n-2}$, $n > 2$;
3) $z^{3n} - z^n$;
4) $5^{n+4} + 2 \cdot 5^{n+2} - 3 \cdot 5^{n+1}$;
5) $49^{n+2} - 7^{n+3}$;
6) $27^{n+1} + 9^{n+1} - 3^{n+1}$.

1.28.° Розкладіть на множники (n — натуральне число):
1) $a^{n+4} - a^{n-5}$, $n > 5$;
2) $b^{2n} + b^{3n}$;
3) $3^{n+3} - 5 \cdot 3^{n+2} + 2 \cdot 3^n$;
4) $64^{n+2} - 32^{n+2} + 16^{n+2}$.

1.29.° Розкладіть на множники вираз (n — натуральне число):
1) $x^{n+2} + x^n - x^2 - 1$;
2) $4y^{n+4} + y^{n+2} + 4y^3 + y$.

1.30.° Розкладіть на множники тричлен:
1) $x^2 - 5x + 4$;
2) $y^2 + 5y + 6$;
3) $a^2 - a - 2$;
4) $b^2 + 7b + 12$;
5) $2x^2 - x - 1$;
6) $3x^2 + 4x + 1$.

1.31.° Розкладіть на множники тричлен:
1) $x^2 + x - 2$;
2) $t^2 - 9t + 18$;
3) $5y^2 - 6y + 1$;
4) $6z^2 - 5z + 1$.

1.32.° Доведіть, що даний вираз набуває додатних значень при всіх значеннях x; укажіть, якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x:
1) $x^2 - 10x + 27$; 2) $9x^2 + 12x + 7$; 3) $2x^2 - x + 1$.

1.33.° Доведіть, що рівняння не має коренів:
1) $x^2 - 8x + 17 = 0$;
2) $x^2 - x + 1 = 0$.

1.34.° Доведіть, що даний вираз набуває від'ємних значень при всіх значеннях x; укажіть, якого найбільшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x:
1) $-x^2 + 4x - 6$; 2) $24x - 16x^2 - 25$; 3) $8x - 8x^2 - 3$.

1.35.° Доведіть, що вираз $(a + 2b)(a + 2b + 4) + 4$ набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінних.

1.36.° Доведіть, що вираз $(6 + 3x - 2y)(3x - 2y) + 9$ набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінних.

1.37.° Подайте у вигляді суми квадратів двох виразів многочлен:
1) $5a^2 - 2a + 1$;
2) $10x^2 + 2xy + y^2$;
3) $2x^2 + 6xy + 9y^2 - 6x + 9$;
4) $2a^2 + 2b^2$.

1.38.° Чи існують такі значення x і y, при яких дорівнює нулю значення многочлена (у випадку позитивної відповіді вкажіть ці значення):
1) $x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2$;
2) $9x^2 + y^2 - 12x + 8y + 21$?

1.39.° Розкладіть на множники:
1) $x^4 - 5x^2 + 4$; 2) $x^4 - 7x^2 - 18$; 3) $x^4 + 9x^2 + 18$.

1.40.° Розкладіть на множники:
1) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9$;
2) $y^8 - y^4 + 4y^2 - 4$;

3) $x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$;
4) $(x + 2y)(x + 2y + 2) - (y - 1)(y + 1)$;
5) $x^4y^2 + 2x^2y - x^2 + 6x - 8$;
6) $8x^2 - 12x + 2xy - y^2 + 4$.

1.41.* Розкладіть на множники:
1) $x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 25$;
2) $a^2 + 6a - b^2 + 4b + 5$;
3) $(a + 3b)(a + 3b - 6) - (b + 3)(b - 3)$;
4) $3x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 4$.

1.42.* Поставте замість зірочок такі одночлени, щоб справджувалася тотожність:
1) $(7k - p)(* + * + *) = 343k^3 - p^3$;
2) $(* + *)(25a^4 - * + 36b^2) = 125a^6 + 216b^3$;
3) $(mn + *)(* - * + k^6) = m^3n^3 + k^9$.

1.43.* Доведіть тотожність
$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

1.44.** Відомо, що $a + b = 5$, $ab = 3$. Знайдіть значення виразу $a^2 + b^2$.

1.45.** Відомо, що $a^2 + b^2 = 31$, $ab = 9$. Знайдіть значення виразу $a + b$.

1.46.** Відомо, що $b^2 + \frac{a^2}{4} = 1$ і $ab = 3$. Знайдіть значення виразу $a + 2b$.

1.47.** Відомо, що $a^2 + b^2 = 37$, $ab = 6$. Знайдіть значення виразу $a - b$.

1.48.** Відомо, що $x_1 - x_2 = 4$, $x_1x_2 = -1$. Знайдіть значення виразу:
1) $x_1x_2^2 - x_1^2x_2$;
2) $x_1^2 + x_2^2$;
3) $(x_1 + x_2)^2$;
4) $x_1^3 - x_2^3$.

1.49.** Відомо, що $a + b = 6$, $ab = 7$. Знайдіть значення виразу:
1) $a^3b^2 + a^2b^3$;
2) $(a - b)^2$;
3) $a^4 + b^4$.

1.50.** Відомо, що числа x і y такі, що $x^2 + y^2 = 1$. Знайдіть значення виразу $x^6 + 3x^2y^2 + y^6$.

1.51.** Відомо, що числа x і y такі, що $x^3 - y^2 = 2$. Знайдіть значення виразу $x^9 - 6x^3y^2 - y^6$.

1.52.** Відомо, що $a + 2b = 1$. Доведіть, що $a^3 + 8b^3 = 1 - 6ab$.

1.53.** Доведіть, що коли $a + 3b = 2$, то $a^3 + 27b^3 = 8 - 18ab$.

1.54.** Розкладіть на множники многочлен $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^3$.

1.55.** Розкладіть на множники многочлен $28a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

1.56.** Відомо, що $x^3 + y^3 = 9$ і $x^2y + xy^2 = 6$. Знайдіть значення двочлена $x + y$.

1.57.** Відомо, що $a^3 - b^3 = 4$ і $a^2b - ab^2 = 1$. Знайдіть значення двочлена $a - b$.

1.58.** Відомо, що сума $8 + 8 + 8 + ... + 8$ дорівнює 4^{87}. Знайдіть кількість доданків.

1.59.** Подайте число 171 у вигляді дробу, чисельник якого є дев'ятим степенем натурального числа, а знаменник — десятим.

1.60.** Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):

1) 9^{200}; 2) 7^{500}; 3) $2^n \cdot 3^{n+1}$?

1.61.** Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):

1) 4^{100}; 2) 3^{300}; 3) $3^{n+2} \cdot 7^n$?

1.62.* Порівняйте значення виразів:

1) 3^{200} і 2^{300}; 2) 126^{12} і 24^{18}; 3) 31^{11} і 17^{14}.

1.63.* Відомо, що $x^2 + y^2 = 1$. Знайдіть значення виразу $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$.

1.64.* Відомо, що $a^2 - b^2 = 2$. Знайдіть значення виразу $a^6 - a^4b^2 - 2b^4 - 8b^2$.

1.65.* Чи існує таке натуральне число n, при якому значення виразу $2^8 + 2^{11} + 2^n$ є квадратом натурального числа?

1.66.* Доведіть, що значення виразу $999 \cdot 1001 \cdot 1003 \cdot 1005 + 16$ є квадратом натурального числа.

1.67.* Доведіть, що значення виразу $1000^2 + 1000^2 \cdot 1001^2 + 1001^2$ є квадратом натурального числа.

1.68.* Відомо, що $a = b + 1$. Спростіть вираз

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})(a^{32} + b^{32}).$$

1.69.* Доведіть, що

$$(1 - 2 + 2^2)(1 - 2^2 + 2^4)(1 - 2^4 + 2^8)(1 - 2^8 + 2^{16}) \times$$
$$\times (1 - 2^{16} + 2^{32}) = \frac{1 + 2^{32} + 2^{64}}{7}.$$

1.70.* Розкладіть на множники:

1) $a^3 + 2a^2 - 3$; 3) $x^3 - 7x - 6$; 5) $m^5 + m^4 + 1$.
2) $b^3 + b^2 + 4$; 4) $a^3 - 2ab^2 - b^3$;

1.71.* Розкладіть на множники:

1) $x^3 - 3x + 2$; 3) $x^3 + x^2 + 18$; 5) $x^8 + x^7 + 1$.
2) $x^3 - 3x^2 + 2$; 4) $a^3 - 3ab^2 - 2b^3$;

1.72.* Розкладіть на множники:

1) $x^4 - 8x^2 + 4$; 2) $4x^4 - 12x^2 + 1$; 3) $a^4 + a^2 + 1$.

1.73.* Розкладіть на множники:

1) $x^4 - 7x^2 + 9$; 2) $9x^4 - 3x^2 + 1$; 3) $a^4 + 64$.

1.74.* Доведіть, що значення виразу $2^{10} + 5^{12}$ є складеним числом.

1.75.* Числа a, b і c такі, що $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$. Чому дорівнює значення виразу $a + b - 2c$?

1.76.* Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ і $ax + by + cz = 1$. Доведіть, що $a = x$, $b = y$, $c = z$.

1.77.* Доведіть, що рівняння $x^4 - x + \frac{1}{2} = 0$ коренів не має.

1.78.* Обчисліть значення виразу $a^2 + b^2 + c^2$, якщо $a + b + c = 7$ і $ab + bc + ac = -5$.

1.79.* Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = 30$ і $a - b - c = 4$. Доведіть, що $bc - ab - ac = -7$.

1.80.* Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = 26$ і $ab - ac - bc = -11$. Знайдіть значення виразу $a + b - c$.

1.81.* Розкладіть на множники вираз

$$a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ab + 4ac + 4bc.$$

1.82.* Розкладіть на множники вираз

$$a^2 + 8b^2 + c^2 - 6ab - 6bc + 2ac.$$

1.83.* Доведіть, що коли $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

1.84.* Використовуючи результат задачі 1.83, розкладіть на множники вираз $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.

2. Функція. Графік функції. Лінійна функція

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 8–11 на с. 328–330.

ПРИКЛАД 1 Функція f, областю визначення якої є всі числа, має такі властивості:

1) для будь-якого x $f(x)$ — ціле число;
2) для будь-якого x $f(x) \leqslant x$;
3) для будь-якого x $f(x) > x - 1$.

Знайдіть $f(3{,}2)$, $f(5)$, $f(-3{,}2)$. Знайдіть область значень функції f. Побудуйте її графік.

Розв'язання. З властивостей 1–3 випливає, що функція f — це правило, за яким кожному числу x ставиться у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує x. Звідси, наприклад, $f(3{,}2) = 3$, $f(-3{,}2) = -4$. Зрозуміло, що $f(5) = 5$, $f(-2) = -2$, $f(0) = 0$. Узагалі, для будь-якого цілого числа c $f(c) = c$. З цього випливає, що областю значень функції f є всі цілі числа.

Побудуємо графік функції f.

Нехай $0 \leqslant x < 1$, тоді $f(x) = 0$.

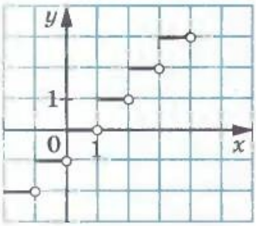


Рис. 2.1

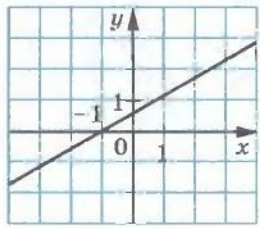


Рис. 2.2

Нехай $1 \leqslant x < 2$, тоді $f(x) = 1$.

Нехай $2 \leqslant x < 3$, тоді $f(x) = 2$.

Нехай $-1 \leqslant x < 0$, тоді $f(x) = -1$.

Нехай $-2 \leqslant x < -1$, тоді $f(x) = -2$.

Узагалі, якщо $m \leqslant x < m + 1$, де m — ціле число, то $f(x) = m$.

Графік функції f зображено на рисунку 2.1.

Для цієї функції використовують позначення: $f(x) = [x]$. Запис $[x]$ читають: **«ціла частина числа x»**.

ПРИКЛАД 2 Відомо, що точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Доведіть, що точка $B(x_0 - 5; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x + 5)$.

Розв'язання. Оскільки точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то значення цієї функції при $x = x_0$ дорівнює y_0, тобто $f(x_0) = y_0$.

Знайдемо значення функції $y = f(x + 5)$ при $x = x_0 - 5$. Маємо: $f(x_0 - 5 + 5) = f(x_0) = y_0$.

Звідси отримуємо, що точка $B(x_0 - 5; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x + 5)$.

ПРИКЛАД 3 На рисунку 2.2 зображено графік функції $f(x) = ax + b$. Знайдіть значення виразу $b - a$.

Розв'язання. Маємо: $f(-1) = a \cdot (-1) + b = b - a$. З рисунка видно, що $f(-1) = 0$. Отже, $b - a = 0$.

2.1.° Учні школи поїхали автобусом на екскурсію і за один день відвідали два старовинних замки. На рисунку 2.3 зображено графік зміни відстані від автобуса до школи залежно від часу (*графік руху автобуса*). Користуючись графіком, визначте:

1) яку відстань проїхав автобус за першу годину;
2) на якій відстані від школи знаходиться перший замок; другий замок;

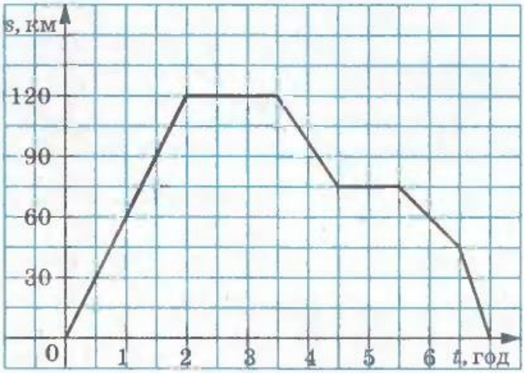


Рис. 2.3

3) скільки часу тривав огляд першого замку; другого замку;
4) на якій відстані від школи були учні через 6 год після виїзду;
5) з якою швидкістю рухався автобус останні півгодини.

2.2.° Кожному числу поставили у відповідність відстань від точки, що зображає це число на координатній прямій, до початку відліку. Поясніть, чому описане правило є функцією. Знайдіть її область визначення і область значень. Позначивши цю функцію буквою f, знайдіть $f(2)$, $f(-5)$, $f(0)$. Яка з даних формул задає функцію f:

1) $y = x$; 2) $y = -x$; 3) $y = |x|$; 4) $y = x^2$?

2.3.° Розглянемо правило, за яким кожному натуральному числу ставиться у відповідність перша цифра його десяткового запису. Чи є це правило функцією? У разі позитивної відповіді вкажіть її область значень.

2.4.° Розглянемо правило, за яким кожному натуральному числу ставиться у відповідність сума цифр його десяткового запису (одноцифровому числу відповідає саме це число). Чи є це правило функцією? У випадку позитивної відповіді вкажіть її область значень.

2.5.° Задайте формулою функцію, якщо значення функції:
1) протилежні відповідним значенням аргументу;
2) дорівнюють подвоєним відповідним значенням аргументу;
3) на 2 менші від квадратів відповідних значень аргументу.

2.6.° Дано функцію $f(x) = x^3$. Задайте формулою функцію, усі значення якої при тих самих значеннях аргументу:
1) на 7 більші за значення функції f;
2) дорівнюють кубу значення функції f.

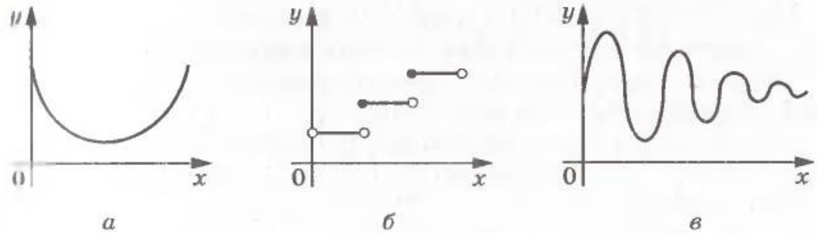


Рис. 2.4

2.7.° Функцію задано формулою $f(x) = 3x - 8$. При якому значенні x значення функції дорівнює значенню аргументу?

2.8.° Функції задано формулами $y = 6x + 25$ і $y = x + 24$. При яких значеннях аргументу ці функції набувають рівних значень?

2.9.• Придумайте яку-небудь функцію f, областю визначення якої є всі натуральні числа, а областю значень — чотири числа: 0, 1, 2, 3. Знайдіть $f(9)$, $f(18)$, $f(39)$, $f(1000)$.

2.10.• Який з наведених графіків (рис. 2.4) ілюструє залежність змінної y від змінної x, подану нижче:

1) вартість проїзду в автобусі зростає на 1 грн. через кожні 10 км шляху (x — довжина шляху в кілометрах, y — вартість проїзду в гривнях);
2) металеву пружину розтягнули й відпустили (x — час у секундах, y — довжина пружини в сантиметрах);
3) ціна полуниці на ринку протягом травня–червня (x — кількість днів, y — ціна полуниці в гривнях)?

2.11.• Від квадратного листа картону розміром 40×40 см відрізали смужку завширшки x см (рис. 2.5). Запишіть формулу, яка задає функціональну залежність площі S смуги картону, що залишилася, від x. Знайдіть область визначення цієї функції.

2.12.• З квадратного листа жерсті розміром 1×1 м у кутах вирізали квадрати зі стороною x см (рис. 2.6) і з отриманої заго-

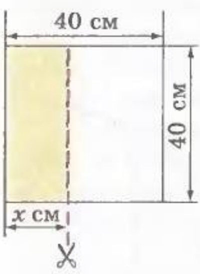


Рис. 2.5

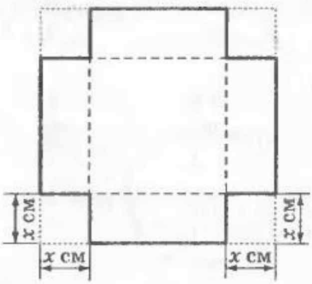


Рис. 2.6

товки зігнули коробку у формі прямокутного паралелепіпеда. Запишіть формулу, яка задає функціональну залежність об'єму V коробки від x. Знайдіть область визначення цієї функції.

2.13.° Кожній точці графіка функції $f(x) = 3x + 1$ ставиться у відповідність сума координат цієї точки. Чи є це правило функцією? У випадку позитивної відповіді задайте цю функцію формулою.

2.14.° Кожній точці графіка функції $f(x) = x^2 + 1$ ставиться у відповідність добуток координат цієї точки. Чи є це правило функцією? У випадку позитивної відповіді задайте цю функцію формулою.

2.15.° Дано функцію

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 4, \\ 8, & \text{якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$$

Знайдіть: 1) $f(-3)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(2)$; 4) $f(4)$; 5) $f(3{,}9)$; 6) $f(8{,}1)$.

2.16.° Дано функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & -3 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x - 1, & 1 < x < 2, \\ x^2 - 2, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Складіть таблицю значень функції для цілих значень аргументу.

2.17.° На якому з рисунків (рис. 2.7) задано функціональну залежність:

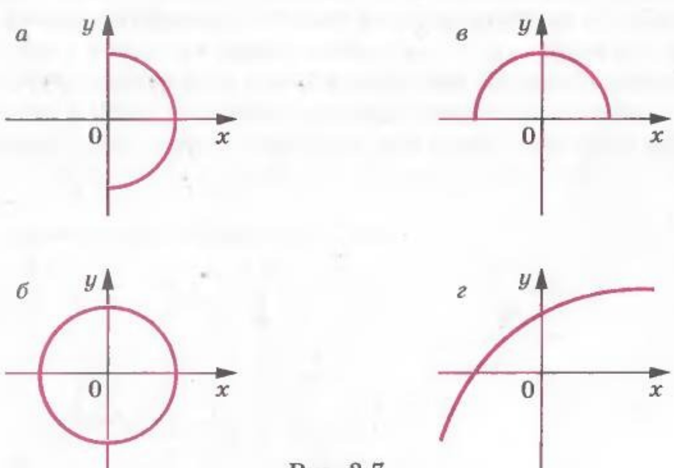


Рис. 2.7

1) змінної y від змінної x;
2) змінної x від змінної y;
3) змінної y від змінної x і змінної x від змінної y?

2.18.° На рисунку 2.8 зображено графік функції. Знайдіть:

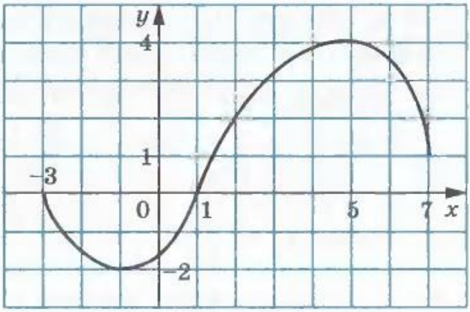


Рис. 2.8

1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю;
4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;
5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

2.19.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 7x - x^2$;
2) $y = |x| - 3$;
3) $y = |x| + 3$;
4) $y = x^3$.

2.20.° Задано функцію $y = 2 - x$, областю визначення якої є всі одноцифрові натуральні числа. Побудуйте графік цієї функції.

2.21.° Побудуйте графік функції, областю визначення якої є всі натуральні числа і яка набуває значення −1 при парних значеннях аргументу і значення 1 при непарних значеннях аргументу.

2.22.° Побудуйте графік функції, якщо відомо, що для всіх цілих значень аргументу значення функції дорівнює 1, а для нецілих дорівнює −1.

2.23.° Відомо, що точка $A\ (x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f\ (x)$. Доведіть, що точка $B\ (x_0;\ y_0 - 3)$ належить графіку функції $y = f\ (x) - 3$.

2.24.° Відомо, що точка $A\ (x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f\ (x)$. Доведіть, що точка $B\ (x_0;\ 2y_0)$ належить графіку функції $y = 2\,f\ (x)$.

2.25.° Відомо, що точка $A\ (x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f\ (x)$. Доведіть, що точка $B\ (2x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

2.26.$^{\bullet}$ Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку M (3; −2).

2.27.$^{\bullet}$ Знайдіть значення b, при якому графік функції $y = -\frac{1}{5}x + b$ проходить через точку A (−15; 3).

2.28.$^{\bullet}$ При якому значенні k графік функції $y = kx + 8$ проходить через точку B (2; −4)?

2.29.$^{\bullet}$ Графік функції $y = kx + b$ перетинає осі координат у точках M (2; 0) і N (0; −3). Знайдіть значення k і b.

2.30.$^{\bullet}$ Усі точки графіка функції $y = kx + b$ мають однакову ординату, яка дорівнює −5. Знайдіть значення k і b.

2.31.$^{\bullet}$ Графік функції $y = kx + b$ паралельний осі абсцис і проходить через точку A (−4; 3). Знайдіть значення k і b.

2.32.$^{\bullet}$ При якому значенні змінної x функції $f(x) = 4x - 3$ і $g(x) = 3x - 2$ набувають рівних значень? Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій f і g. При яких значеннях x:
1) $f(x) > g(x)$; 2) $f(x) < g(x)$?

2.33.$^{\bullet}$ Графіки функцій $y = 2x - 5$, $y = x - 9$ і $y = kx$ перетинаються в одній точці. Знайдіть значення k. Побудуйте в одній системі координат графіки цих функцій.

2.34.$^{\bullet}$ При якому значенні b графіки функцій $y = 1{,}5x - 2$, $y = 2{,}5x + 2$ і $y = 3x + b$ перетинаються в одній точці?

2.35.$^{\bullet}$ Доведіть, що не існує такого значення a, при якому пряма $y = ax - 5$ проходить через початок координат.

2.36.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x - 3, & x \geqslant 0, \\ -2x - 3, & x < 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 4x - 2, & \text{якщо } x \leqslant 2, \\ 3, & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \neq -1, \\ 1, & \text{якщо } x = -1. \end{cases}$

2.37.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:
1) $y = |x|$; 2) $y = |x| - x$; 3) $y = 2x + |x| - 1$.

2.38.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:
1) $y = -|x|$; 2) $y = |x| + x$; 3) $y = 3x - |x| + 2$.

2.39.$^{\bullet\bullet}$ На рисунку 2.9 зображено графік функції $f(x) = ax + b$. Знайдіть значення виразу $a + b$.

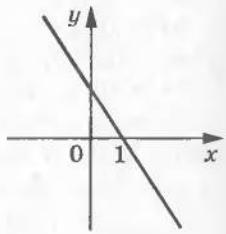


Рис. 2.9

2.40.* Графіки функцій $y = -(2k + 3)x - 1 - 2k$ і $y = kx + k + 2$, де $k > 0$, перетинають вісь ординат у точках A і B відповідно. Точку перетину цих графіків позначено буквою M. Чи можна, стерши осі координат і графіки, відновити систему координат за точками A, B і M?

2.41." Графіки функцій $y = ax + b$ і $y = bx + a$, де $a > 0$ і $b > 0$, перетинають вісь ординат у точках A і B відповідно. Точку перетину цих графіків позначено буквою M. Чи можна, стерши осі координат і графіки, відновити систему координат за точками A, B і M?

3. Рівняння з двома змінними. Системи лінійних рівнянь з двома змінними

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 12–15 на с. 330–332.

ПРИКЛАД 1 Яка фігура є графіком рівняння:

1) $|x| + |y - 2| = 0$; 2) $x^2 + y - yx - x = 0$; 3) $x^2 + y = y + x^2$?

Розв'язання

1) Оскільки $|x| \geqslant 0$ і $|y - 2| \geqslant 0$, то ліва частина рівняння дорівнюватиме нулю тільки при одночасному виконанні умов: $x = 0$ і $y - 2 = 0$. Звідси пара чисел $(0; 2)$ — єдиний розв'язок даного рівняння. Отже, шуканим графіком є точка з координатами $(0; 2)$.

2) Розклавши на множники ліву частину рівняння, отримаємо $(x - y)(x - 1) = 0$. Звідси $y = x$ або $x = 1$. Отже, графіком даного рівняння є пара прямих (рис. 3.1).

3) Зрозуміло, що будь-яка пара $(x; y)$ є розв'язком даного рівняння. Отже, його графіком є вся координатна площина.

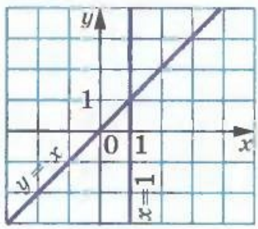


Рис. 3.1

ПРИКЛАД 2 Графіком рівняння є пряма AB, де $A(1; 3)$, $B(-1; -7)$. Знайдіть ординату точки цієї прямої, якщо її абсциса дорівнює: 1) 1,2; 2) −0,6.

Розв'язання. Оскільки абсциси точок A і B не рівні, то пряма AB не є вертикальною, тому шукатимемо її рівняння у вигляді $y = kx + b$.

Координати точок A і B є розв'язками цього рівняння. Звідси отримуємо систему:

$$\begin{cases} 3 = k + b, \\ -7 = -k + b. \end{cases}$$

Цю систему зручно розв'язувати методом додавання. Маємо: $2b = -4$; $b = -2$. Звідси $k = 5$.

Отже, рівняння прямої AB має вигляд $y = 5x - 2$.

При $x = 1{,}2$ маємо $y = 5 \cdot 1{,}2 - 2 = 4$.

При $x = -0{,}6$ маємо $y = 5 \cdot (-0{,}6) - 2 = -5$.

3.1.° Графік рівняння $3x + 2y = 14$ проходить через точку $A\ (a;\ 4)$. Чому дорівнює значення a?

3.2.° Графік рівняння $5x + y = 16$ проходить через точку $B\ (b;\ 3b)$. Чому дорівнює значення b?

3.3.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

1) $x + y = 4$;
2) $x^3 - y = 1$;
3) $x^2 + y^2 = 16$;
4) $|x| - y = 6$.

3.4.° При якому значенні a пара чисел $(-4;\ 3)$ є розв'язком рівняння:

1) $3x + 5y = a$;
2) $ax + 5y = 19$?

3.5.° При якому значенні a графік рівняння $11x - 13y = a + 6$ проходить через початок координат?

3.6.° Чи належать графіку рівняння $y^6 - x^3 = -8$ точки, що мають від'ємну абсцису?

3.7.• Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 0$;
2) $|y| + (x + 2)^2 = 0$;
3) $(x - 2)(y - 1) = 0$;
4) $3x - xy = 0$.

3.8.• Побудуйте графік рівняння:

1) $(x + 3)^2 + y^2 = 0$;
2) $xy = 0$;
3) $|x - 3| + |y - 3| = 0$;
4) $xy + y = 0$.

3.9.• Знайдіть розв'язок рівняння $5x + 3y = 24$, який є парою рівних чисел.

3.10.• Знайдіть розв'язок рівняння $-12x + 13y = -100$, який є парою протилежних чисел.

3.11.• При якому значенні a точка перетину прямих $2x - 3y = -6$ і $4x + y = a$ належить осі абсцис?

3.12.• При якому значенні b точка перетину прямих $9x + 7y = 35$ і $x + by = -20$ належить осі ординат?

3.13.• При яких значеннях a і b пряма $ax + by = 21$ перетинає осі координат у точках $A\ (3;\ 0)$ і $B\ (0;\ -7)$?

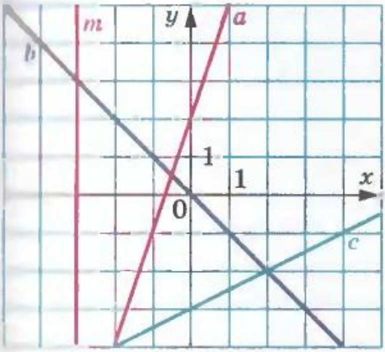


Рис. 3.2

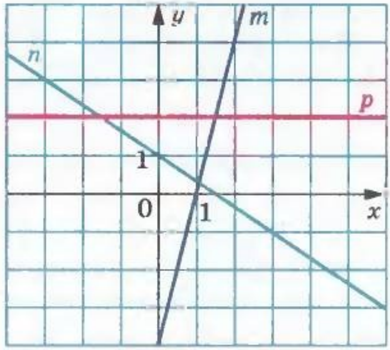


Рис. 3.3

3.14.° Складіть рівняння прямих, які зображено на рисунку 3.2.

3.15.° Складіть рівняння прямих, які зображено на рисунку 3.3.

3.16.° Знайдіть значення a і b, при яких пара чисел (6; 4) є розв'язком системи рівнянь:

1) $\begin{cases} ax + 2y = 26, \\ 4x + by = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + by = 6, \\ ax + by = 0. \end{cases}$

3.17.° При яких значеннях a і b пара чисел (−2; 3) є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax - 2y = -12, \\ 7x + by = 1? \end{cases}$

3.18.° До рівняння $3x - 5y = 8$ підберіть друге лінійне рівняння так, щоб отримати систему рівнянь, яка:

1) має єдиний розв'язок;
2) має безліч розв'язків;
3) не має розв'язків.

3.19.° При яких значеннях a система рівнянь:

1) $\begin{cases} 5x - 6y = 17, \\ 5x - 6y = a \end{cases}$ не має розв'язків;

2) $\begin{cases} 8x + ay = 6, \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

3.20.° Підберіть такі значення a і b, при яких система рівнянь $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ ax + 4y = b: \end{cases}$

1) має безліч розв'язків;

2) має один розв'язок;
3) не має розв'язків.

3.21.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} |x| - y = 0, \\ x + 3y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - |y| = 0, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

3.22.° Розв'яжіть систему рівнянь методом підстановки:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2, \\ 5x - y = 34; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6y - 5x = 1, \\ \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{3y - x}{4} = -4\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

3.23.° Розв'яжіть систему рівнянь методом підстановки:

1) $\begin{cases} 6x + 3 = 5x - 4\ (5y + 4), \\ 3\ (2x - 3y) - 6x = 8 - y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 4, \\ \dfrac{3x+y}{4} - \dfrac{2x-5y}{3} = 5. \end{cases}$

3.24.° Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} 2\ (4x - 5) - 3\ (3 + 4y) = 5, \\ 7\ (6y - 1) - (4 + 3x) = 21y - 86; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{6} - \dfrac{y-3}{15} = 1, \\ \dfrac{x+2,5}{9} - \dfrac{y+3}{6} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

3.25.° Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} 0,2x - 0,3\ (2y + 1) = 1,5, \\ 3\ (x + 1) + 3y = 2y - 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{15x - 3y}{4} + \dfrac{3x + 2y}{6} = 3, \\ \dfrac{3x + y}{3} - \dfrac{x - 3y}{2} = 6. \end{cases}$

3.26.° При яких значеннях a і b графік рівняння $ax + by = 8$ проходить через точки $A\ (1;\ 3)$ і $B\ (2;\ -4)$?

3.27.° Запишіть рівняння прямої $y = kx + b$, яка проходить через точки:

1) $N\ (2;\ 1)$ і $D\ (-3;\ 3)$; 2) $R\ (-4;\ 6)$ і $S\ (4;\ -2)$.

3.28.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + y)^2 + (x - 3)^2 = 0$;
2) $(x + 2y - 3)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
3) $|x - 3y - 6| + (9x + 6y - 32)^2 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 0$;
5) $25x^2 + 10y^2 - 30xy + 8y + 16 = 0$.

3.29.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2y)^2 + (y - 5)^2 = 0$;
2) $(4x + 2y - 5)^2 + |4x - 6y + 7| = 0$;
3) $50x^2 + 4y^2 - 28xy + 16x + 64 = 0$.

§ 2. МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

4. Множина та її елементи

Ми часто говоримо: косяк риб; зграя птахів; рій бджіл; колекція марок; зібрання картин; набір ручок; букет квітів; компанія друзів; парк машин; отара овець.

Якщо в цих парах перетасувати перші слова, то може вийти смішно. Наприклад, букет овець, косяк картин, колекція друзів тощо. Водночас такі словосполучення, як колекція риб, колекція картин, колекція ручок, колекція машин тощо, достатньо прийнятні. Справа в тому, що слово «колекція» досить універсальне. Однак у математиці є більш всеосяжне слово, яким можна замінити будь-яке з перших слів у наведених парах. Це слово **множина**.

Наведемо ще кілька прикладів множин:

- множина учнів вашого класу;
- множина учнів вашої школи, які є призерами Всеукраїнської олімпіади юних математиків;
- множина планет Сонячної системи;
- множина двоцифрових чисел;
- множина пар чисел $(x; y)$, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Окремі найважливіші множини мають загальноприйняті назви та позначення:

- множина точок площини — **геометрична фігура**;
- множина точок, яким притаманна певна властивість, — **геометричне місце точок (ГМТ)**;
- множина значень аргументу функції f — **область визначення функції f**, яку позначають $D(f)$;
- множина значень функції f — **область значень функції f**, яку позначають $E(f)$;
- множина натуральних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{N}$;
- множина цілих чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$;
- множина раціональних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Q}$.

Як правило, множини позначають прописними латинськими буквами: A, B, C, D тощо.

Об'єкти, які складають дану множину, називають **елементами цієї множини**. Зазвичай елементи позначають малими латинськими літерами: a, b, c, d тощо.

Якщо елемент a належить множині A, то пишуть $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо елемент b не належить множині A, то пишуть $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

Наприклад, $12 \in \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Якщо множина A складається, наприклад, з трьох елементів a, b, c, то пишуть $A = \{a, b, c\}$.

Наприклад, якщо M — множина натуральних дільників числа 6, то пишуть $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множина дільників числа 6, які є складеними числами, має такий вигляд: $\{6\}$. Це приклад **одноелементної** множини.

Позначення множини за допомогою фігурних дужок, у яких указано список її елементів, є зручним у тих випадках, коли множина складається з невеликої кількості елементів. Це зрозуміло. Наприклад, спробуйте перелічити всі елементи множини натуральних дільників числа 6^{1000}.

Означення. Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B, і навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$.

З означення випливає, що ***множина однозначно визначається своїми елементами***. Наприклад, якщо множину записують за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення. Так, множина, яка складається з трьох елементів a, b, c, припускає шість видів запису:

$$\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}.$$

Оскільки з означення рівних множин випливає, що, наприклад, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то надалі будемо розглядати множини, які складаються з різних елементів. Так, множина букв слова «шаровари» має вигляд {ш, а, р, о, в, и}.

Зауважимо, що $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Справді, множина $\{a\}$ складається з одного елемента — a; множина $\{\{a\}\}$ складається з одного елемента — множини $\{a\}$.

Множина вважається заданою, якщо можна встановити, чи належить елемент, що розглядається, даній множині.

Найчастіше множину задають одним із двох таких способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Ми вже використовували цей спосіб, записуючи множину за допомогою фігурних дужок, у яких зазначали список її елементів. Зрозуміло, що не будь-яку множину можна задати в такий спосіб. Наприклад, множину парних чисел так задати не можна.

Другий спосіб полягає в тому, що задається **характеристична властивість** елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини і тільки їм.

Якщо x — довільний елемент множини A, яку задано за допомогою характеристичної властивості її елементів, то пишуть $A = \{x \mid ...\}$. Тут після вертикальної риси вказують умову, якій має задовольняти елемент x, щоб належати множині A.

Розглянемо кілька прикладів.

- $\{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$ — множина натуральних чисел, кратних 3.
- $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ — множина коренів рівняння $x(x^2 - 1) = 0$. Ця множина дорівнює множині $\{-1; 0; 1\}$, яку, у свою чергу, можна задати за допомогою іншої характеристичної властивості:
$$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 2\}.$$
Маємо: $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 2\}$.
- $\{x \mid [x] = 0\}$[1] — множина чисел таких, що $0 \leqslant x < 1$. Тому $\{x \mid [x] = 0\} = \{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$.
- Нехай $(x; y)$ — координати точки. Тоді множина точок $\{(x; y) \mid y = 2x - 1, x$ — будь-яке число$\}$ — пряма, яка є графіком функції $y = 2x - 1$.

  Узагалі, для точок координатної площини множина $\{(x; y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ — це графік функції f.

  У геометрії, задаючи множину точок за допомогою характеристичної властивості, тим самим задають ГМТ.
- Якщо A, B — задані точки площини, X — довільна точка цієї площини, то множина $\{X \mid XA = XB\}$ — серединний перпендикуляр відрізка AB.

Якщо задавати множину характеристичною властивістю її елементів, то може статися, що жодний об'єкт такої властивості не має.

[1] Див. приклад 1 п. 2.

Розглянемо приклади.

- Множина трикутників, сторони яких пропорційні числам 1, 2, 5. З нерівності трикутника випливає, що ця множина не містить жодного елемента.
- Позначимо через A множину учнів вашого класу, які є майстрами спорту з шахів. Може виявитися, що множина A також не містить жодного елемента.
- Розглядаючи множину коренів довільного рівняння, слід передбачити ситуацію, коли рівняння коренів не має.

Наведені приклади вказують на те, що зручно до сукупності множин віднести ще одну особливу множину, яка не містить жодного елемента. Її називають **порожньою множиною** і позначають символом $\varnothing$.

Наприклад, $\{x \mid 0x = 2\} = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x < 1\} = \varnothing$.

Зазначимо, що множина $\{\varnothing\}$ не є порожньою. Вона містить один елемент — порожню множину.

ПРИКЛАД Доведіть, що множина A всіх парних натуральних чисел дорівнює множині B чисел, які можна подати у вигляді суми двох непарних натуральних чисел.

Розв'язання. Нехай $x \in A$. Тоді можна записати, що $x = 2m$, де m — натуральне число. Маємо $x = 2m = (2m - 1) + 1$. Отже, $x \in B$.

Тепер припустимо, що $x \in B$. Тоді $x = (2n - 1) + (2k - 1)$, де n і k — натуральні числа. Маємо $x = 2n - 1 + 2k - 1 = 2(n + k - 1)$. Отже, $x \in A$.

Маємо: якщо $x \in A$, то $x \in B$, і навпаки, якщо $x \in B$, то $x \in A$. Звідси $A = B$.

?

1. Наведіть приклади множин.
2. Як позначають множину та її елементи?
3. Як позначають множини натуральних, цілих і раціональних чисел?
4. Як записати, що елемент a належить (не належить) множині A?
5. Які множини називають рівними?
6. Які існують способи задання множин?
7. Яку множину називають порожньою? Як її позначають?

4.1.° Як називають множину точок кута, рівновіддалених від його сторін?

4.2.° Як називають множину вовків, які підкорюються одному ватажку?

4.3.° Назвіть яку-небудь множину запорізьких козаків.

4.4.° Як називають множину вчителів, які працюють в одній школі?

4.5.° Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $5 * \mathbb{N}$; 3) $-5 * \mathbb{Q}$; 5) $3{,}14 * \mathbb{Q}$;

2) $0 * \mathbb{N}$; 4) $-\frac{1}{2} * \mathbb{Z}$; 6) $\pi * \mathbb{Q}$.

4.6.° Дано функцію $f(x) = x^2 + 1$. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $3 * D(f)$; 3) $0 * E(f)$; 5) $1{,}01 * E(f)$.

2) $0 * D(f)$; 4) $\frac{1}{2} * E(f)$;

4.7.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$; 3) $\{1\} \in \{1, 2\}$;

2) $1 \notin \{1\}$; 4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$?

4.8.° Запишіть множину коренів рівняння:

1) $x(x - 1) = 0$; 3) $x = 2$;

2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$; 4) $x^2 + 3 = 0$.

4.9.° Задайте переліком елементів множину:

1) правильних дробів зі знаменником 7;

2) правильних дробів, знаменник яких не перевищує 4;

3) множину букв у слові «математика»;

4) множину цифр числа 5555.

4.10.° Задайте переліком елементів множину:

1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x^2 - 1 = 0\}$;

2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 3\}$;

3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 15,\ x = 7k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4.11.° Задайте переліком елементів множину:

1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x(2|x| - 1) = 0\}$;

2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ -3 \leqslant x < 2\}$.

4.12.° Нехай O — задана точка площини. Що являє собою множина точок M цієї площини:

1) $\{M \mid OM = 3 \text{ см}\}$; 3) $\{M \mid OM \leqslant 5 \text{ см}\}$?

2) $\{M \mid OM > 5 \text{ см}\}$;

4.13.° Нехай A, B, C — три задані точки площини. Що являє собою множина точок M цієї площини $\{M \mid MA = MB = MC\}$?

4.14.° Чи рівні множини A і B:

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$;
3) $A = \{(0; 1)\}$, $B = \{(1; 0)\}$;
4) $A = \{x \mid x \leqslant 3, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x < 4, x \in \mathbb{Z}\}$;
5) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ кратне 2 і 3$\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ кратне 6$\}$;
6) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leqslant 15, x = 19k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 4\}$.

4.15.° Укажіть рівні множини:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 6n - 3, n \in \mathbb{N}\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x$ кратне 3 і не кратне 2$\}$;
$D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 6n + 3, n \in \mathbb{N}\}$.

4.16.° Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:

1) $A = \{x \mid x \neq x\}$;
2) $B = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2}x - 2 = 0\right\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 1\}$;
4) $D = \{x \mid 3x^4 + 5x^2 + 7 = 0\}$;
5) $E = \{x \mid x > |x|\}$?

4.17.° Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:

1) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 181°;
2) множина гірських вершин заввишки 8800 м;
3) множина гострокутних трикутників, медіана яких дорівнює половині сторони, до якої вона проведена;
4) множина функцій, графіком яких є коло?

4.18.** Доведіть, що $\{x \mid x = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \mid x = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$.

4.19.** Доведіть, що $\{x \mid x = 4n - 1, n \in \mathbb{Z}\} = \{x \mid x = 4m + 3, m \in \mathbb{Z}\}$.

5. Підмножина. Операції над множинами

Розглянемо множину цифр десяткової системи числення $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Виокремимо з множини A ті її елементи, які є парними цифрами. Отримаємо множину $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, усі елементи якої є елементами множини A.

Означення. **Множину B називають *підмножиною* множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.**

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина B міститься в множині A»).

Розглянемо приклади:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$;
- множина учнів вашого класу є підмножиною множини учнів вашої школи;
- множина ссавців є підмножиною множини хребетних;
- множина точок променя CB є підмножиною множини точок прямої AB (рис. 5.1).

Рис. 5.1

Для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 5.2 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$ (або $A \supset B$).

На рисунку 5.3 за допомогою діаграм Ейлера показано співвідношення між множинами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Q}$.

Якщо $B \subset A$, то за допомогою рисунка 5.2 можна зробити такі висновки:

1) для того щоб елемент x належав множині A, достатньо, щоб він належав множині B;
2) для того щоб елемент x належав множині B, необхідно, щоб він належав множині A.

Наприклад, якщо A — множина всіх натуральних чисел, кратних 5, а B — множина всіх натуральних чисел, кратних 10, то очевидно, що $B \subset A$. Тому для того, щоб натуральне число n було кратним 5 ($n \in A$), достатньо, щоб воно було кратним 10 ($n \in B$). Для того щоб натуральне число n було кратним 10 ($n \in B$), необхідно, щоб воно було кратним 5 ($n \in A$).

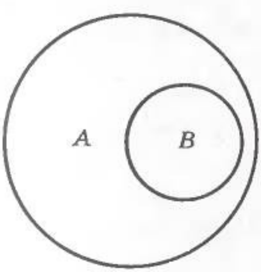


Рис. 5.2

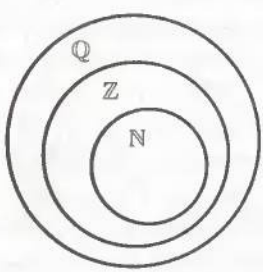


Рис. 5.3

З означень підмножини і рівності множин випливає, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Якщо в множині B немає такого елемента, який не належить множині A, то множина B є підмножиною множини A. У силу цих міркувань порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини. Справді, порожня множина не містить жодного елемента, отже, у ній немає елемента, який не належить даній множині A. Тому для будь-якої множини A справедливе твердження: $\varnothing \subset A$.

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

Означення. **Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то множину B називають власною підмножиною множини A.**

Наприклад, множина $\mathbb{Z}$ є власною підмножиною множини $\mathbb{Q}$.

ПРИКЛАД 1 Випишіть усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання. Маємо: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$. Усього отримали 8 підмножин. У 9 класі буде доведено, що кількість підмножин n-елементної множини дорівнює 2^n.

Нехай A — множина розв'язків рівняння $x + y = 5$, а B — множина розв'язків рівняння $x - y = 3$. Тоді множина C розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3 \end{cases}$$

складається з усіх елементів, які належать і множині A, і множині B. У такому випадку кажуть, що множина C є **перетином** множин A і B.

Означення. **Перетином множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B.**

Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$.

З означення випливає, що

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Легко переконатися, що розв'язком системи, яка розглядалася, є пара чисел (4; 1). Цей факт можна записати так:

$$\{(x; y) \mid x + y = 5\} \cap \{(x; y) \mid x - y = 3\} = \{(4; 1)\}.$$

Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їх перетином є порожня множина, тобто $A \cap B = \varnothing$. Також зазначимо, що $A \cap \varnothing = \varnothing$.

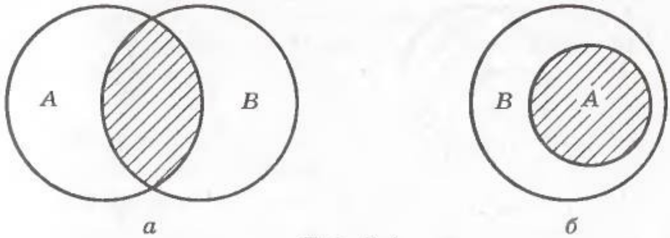


Рис. 5.4

З означення перетину двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap B = A$.

Перетин множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 5.4 заштрихована фігура зображає множину $A \cap B$.

Для того щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати кожне з рівнянь $x^2 - x = 0$ і $x^2 - 1 = 0$.

$A = \{0, 1\}$ — множина коренів першого рівняння, $B = \{-1, 1\}$ — множина коренів другого рівняння. Зрозуміло, що множина $C = \{-1, 0, 1\}$, кожний елемент якої належить або множині A, або множині B, є множиною коренів заданого рівняння. Множину C називають **об'єднанням** множин A і B.

Означення. Об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B.

Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$. З означення випливає, що

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Зауважимо, що $A \cup \varnothing = A$.

З означення об'єднання двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup B = B$.

Об'єднання множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 5.5 заштрихована фігура зображає множину $A \cup B$.

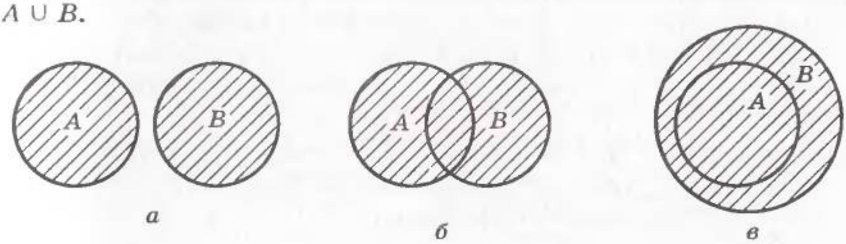


Рис. 5.5

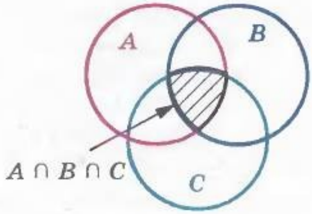


Рис. 5.6

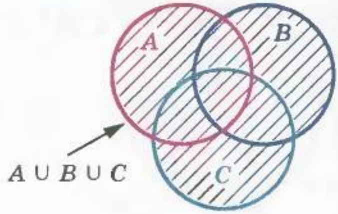


Рис. 5.7

Часто доводиться розглядати перетин і об'єднання трьох і більше множин.

Перетин множин A, B і C — це множина всіх елементів, які належать і множині A, і множині B, і множині C (рис. 5.6).

Наприклад, щоб розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17, \end{cases}$$

треба знайти перетин трьох множин: $\{(x, y) \mid x + y = 5\}$, $\{(x, y) \mid x - y = 3\}$ і $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 17\}$.

Об'єднання множин A, B і C — це множина всіх елементів, які належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B, або множині C (рис. 5.7).

Наприклад, об'єднання множин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників — це множина всіх трикутників.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x = 5k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
2) A — множина всіх ромбів, B — множина всіх прямокутників;
3) $A = \{x \mid x > 3\}$, $B = \{x \mid x \leqslant 4\}$;
4) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x = 2m,\ m \in \mathbb{N}\}$, B — множина простих чисел.

Розв'язання

1) A — множина всіх натуральних чисел, кратних 5.
   B — множина всіх натуральних чисел, кратних 3.
   Тоді множина $A \cap B$ складається з усіх натуральних чисел, кратних 5 і 3 одночасно, тобто з усіх натуральних чисел, кратних 15. Отже, $A \cap B = \{x \mid x = 15k,\ k \in \mathbb{N}\}$.
2) Множина $A \cap B$ складається з усіх чотирикутників, які одночасно є і ромбами, і прямокутниками. Отже, шукана множина — це множина всіх квадратів.
3) $A \cap B = \{x \mid 3 < x \leqslant 4\}$.

4) A — множина всіх парних натуральних чисел. Оскільки у множині простих чисел є тільки одне парне число (число 2), то $A \cap B = \{2\}$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
2) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$;
3) $A = \{X \mid OX < 3\}$, $B = \{X \mid OX = 3\}$, де O і X — точки площини, O — задана точка.

Розв'язання

1) A — множина всіх непарних натуральних чисел, B — множина всіх парних натуральних чисел. Тоді $A \cup B$ — це множина всіх натуральних чисел, тобто $A \cup B = \mathbb{N}$.
2) A — множина всіх непарних натуральних чисел. Елементами множини B є тільки непарні числа. Отже, $B \subset A$. Тоді $A \cup B = A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$.
3) Очевидно, що $A \cup B = \{X \mid OX \leqslant 3\}$. Отже, $A \cup B$ — це круг з центром O і радіусом 3.

?

1. Яку множину називають підмножиною даної множини?
2. Як наочно ілюструють співвідношення між множинами?
3. Яка множина є підмножиною будь-якої множини?
4. Яку множину називають власною підмножиною даної множини?
5. Що називають перетином двох множин?
6. Що називають об'єднанням двох множин?
7. Як за допомогою діаграм Ейлера ілюструють перетин (об'єднання) двох множин?
8. Як знаходять перетин (об'єднання) трьох і більше множин?

5.1.° Назвіть кілька підмножин учнів вашого класу.

5.2.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок прямої.

5.3.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок круга.

5.4.° Нехай A — множина букв у слові «координата». Множина букв якого слова є підмножиною множини A:

1) кора;	4) крокодил;	7) тин;	10) дорога;
2) дірка;	5) нитки;	8) криниця;	11) дар;
3) картина;	6) нирки;	9) сокирка;	12) кардинал?

5.5.° Нехай A — множина цифр числа 1958. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини A, якщо:

1) $x = 98$; 3) $x = 519$; 5) $x = 195\ 888$;
2) $x = 9510$; 4) $x = 5858$; 6) $x = 91\ 258$?

5.6.° Нехай $A \neq \varnothing$. Які дві різні підмножини завжди має множина A?

5.7.• Доведіть, що коли $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

5.8.• Яке з наступних тверджень є правильним:

1) $\{a\} \in \{a, b\}$; 3) $a \subset \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$; 4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

5.9.• Розмістіть дані множини у такій послідовності, щоб кожна наступна множина була підмножиною попередньої:

1) A — множина восьмикласників вашої школи;
   B — множина восьмикласників вашої школи, які навчаються в математичному класі;
   C — множина учнів вашої школи, які не молодші від 10 років;
   D — множина учнів 8-го математичного класу, які є призерами районної математичної олімпіади;
2) A — множина всіх прямокутників;
   B — множина всіх чотирикутників;
   C — множина всіх квадратів;
   D — множина всіх паралелограмів;
3) A — множина всіх ссавців;
   B — множина всіх собачих;
   C — множина всіх хребетних;
   D — множина всіх вовків;
   E — множина всіх хижих ссавців.

5.10.• Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера співвідношення між множинами:

1) A — множина всіх невід'ємних раціональних чисел;
   $B = \{0\}$;
   $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;
2) $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;
   A — множина натуральних чисел, кратних 6;
   B — множина натуральних чисел, кратних 3.

5.11.• Запишіть за допомогою символу $\subset$ співвідношення між множинами:

$A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$; $C = \{x \mid x = 10n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
$B = \{x \mid x = 50n,\ n \in \mathbb{N}\}$; $D = \{x \mid x = 5n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

5.12.• Яка з множин A або B є підмножиною другої, якщо:

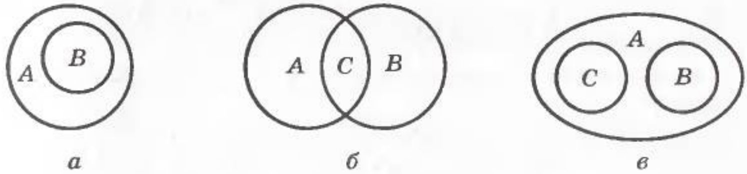


Рис. 5.8

$A = \{x \mid x = 4n + 2, n \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \mid x = 8n + 2, n \in \mathbb{N}\}$?

5.13.° Дано множини $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7, 11\}$, $\{7, 19\}$, $\{11, 19\}$, $\varnothing$, які є всіма власними підмножинами деякої множини A. Запишіть множину A.

5.14.° Запишіть усі підмножини множини $\{1, 2\}$.

5.15.° Опишіть мовою «необхідно і достатньо» належність елемента x множинам A, B і C (рис. 5.8).

5.16.° Замість крапок поставте слово «необхідно» або «достатньо»:

1) для того щоб трикутник був рівностороннім, ..., щоб два його кути були рівні;
2) для того щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб дві його сторони були паралельні;
3) для того щоб число ділилося націло на 3, ..., щоб воно ділилося націло на 9;
4) для того щоб остання цифра десяткового запису числа була нулем, ..., щоб число було кратне 5.

5.17.° Відомо, що для будь-якої множини B множина A є її підмножиною. Знайдіть множину A.

5.18.° Яке з наступних тверджень є правильним:

1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$;
3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

5.19.° Знайдіть перетин множин цифр, які використовуються в запису чисел:

1) 555 288 і 82 223;
2) 470 713 і 400 007.

5.20.° Нехай A — множина двоцифрових чисел, B — множина простих чисел. Чи належить множині $A \cap B$ число: 5, 7, 11, 31, 57, 96?

5.21.° Знайдіть множину спільних дільників чисел 30 і 45.

5.22.° Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) A — множина всіх рівнобедрених трикутників, B — множина всіх рівносторонніх трикутників;
2) A — множина всіх прямокутних трикутників, B — множина всіх рівносторонніх трикутників;

3) A — множина двоцифрових чисел, B — множина натуральних чисел, кратних 19;

4) A — множина одноцифрових чисел, B — множина простих чисел.

5.23.° Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x < 19\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x > 11\}$;

2) $A = \{x \mid x = 4n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6n,\ n \in \mathbb{N}\}$;

3) $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$.

5.24.° Накресліть два трикутники так, щоб їх перетином була така геометрична фігура: 1) відрізок; 2) точка; 3) трикутник; 4) п'ятикутник; 5) шестикутник.

5.25.° Які фігури можуть бути перетином двох променів, що лежать на одній прямій?

5.26.° Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cap B = A$. Знайдіть множину A.

5.27.° Яке з наступних тверджень є правильним:

1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;

2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;

3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;

4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

5.28.° Знайдіть об'єднання множин цифр, які використовуються в запису чисел:

1) 27 288 і 56 383;

2) 55 555 і 777 777.

5.29.° Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) A — множина всіх рівнобедрених трикутників, B — множина всіх рівносторонніх трикутників;

2) A — множина простих чисел, B — множина складених чисел;

3) A — множина простих чисел, B — множина непарних чисел.

5.30.° Знайдіть об'єднання множин A і B:

1) $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$;

2) $A = \{x \mid 2x + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3 = 2\}$;

3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x < 7\}$.

5.31.° Накресліть два трикутники так, щоб їх об'єднанням був: 1) чотирикутник; 2) трикутник; 3) шестикутник. Чи може об'єднання трикутників бути відрізком?

5.32.° Які фігури можуть бути об'єднанням двох променів, що лежать на одній прямій?

5.33.° Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cup B = B$. Знайдіть множину A.

5.34.° Наведіть приклад такої одноелементної множини, що її елемент є одночасно підмножиною даної множини.

6. Скінченні множини. Взаємно однозначна відповідність

Якщо множина містить скінченну кількість елементів, то її називають **скінченною**, а якщо в ній нескінченно багато елементів — то **нескінченною**. Порожню множину вважають скінченною.

Наприклад, множина учнів вашого класу — скінченна множина, а множина натуральних чисел — нескінченна множина.

Якщо A — скінченна множина, то кількість її елементів позначатимемо так: $n(A)$.

Наприклад, якщо A — це множина днів тижня, то $n(A) = 7$; якщо B — це множина двоцифрових чисел, то $n(B) = 90$. Зрозуміло, що $n(\varnothing) = 0$.

Нехай A і B — такі скінченні множини, що $A \cap B = \varnothing$. Тоді очевидно, що

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B). \qquad (1)$$

Якщо A і B — скінченні множини, причому $A \cap B \neq \varnothing$ (рис. 6.1), то до суми $n(A) + n(B)$ двічі входить кількість елементів їх перетину, тобто двічі враховується число $n(A \cap B)$. Отже, у цьому випадку

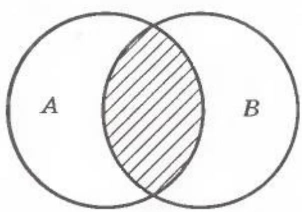


Рис. 6.1

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).} \qquad (2)$$

Оскільки для випадку, коли $A \cap B = \varnothing$, $n(A \cap B) = 0$, то формула (2) є узагальненням формули (1).

ПРИКЛАД 1 У математичному класі 25 учнів, і всі вони люблять математику. Відомо, що 23 учня люблять алгебру, а 21 — геометрію. Скільки учнів цього класу люблять і алгебру, і геометрію?

Розв'язання. Нехай A — множина учнів, які люблять алгебру, B — множина учнів, які люблять геометрію. Тоді $n(A) = 23$, $n(B) = 21$, $n(A \cup B) = 25$. $A \cap B$ — множина учнів, які люблять і алгебру, і геометрію. З формули (2) отримуємо $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 23 + 21 - 25 = 19$.

З'ясуємо, як знайти кількість елементів множини $A \cup B \cup C$, де A, B і C — скінченні множини.

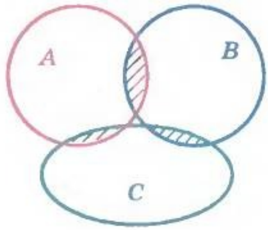


Рис. 6.2

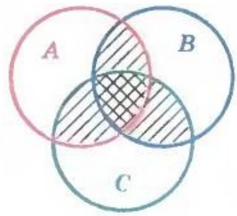


Рис. 6.3

Якщо $A \cap B \cap C = \varnothing$ (рис. 6.2), то зрозуміло, що

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A). \quad (3)$$

Якщо $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ (рис. 6.3), то права частина формули (3) не враховує кількість спільних елементів множин A, B і C. Отже, у цьому випадку формула набуває вигляду:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C). \quad (4)$$

Аналогічну формулу можна отримати для будь-якої кількості множин. Її називають «формулою включення-виключення».

ПРИКЛАД 2 У школі є три спортивні секції: акробатики, баскетболу, волейболу. Відомо, що школу відвідують 200 школярів, а кожну із секцій — 80 школярів. Доведіть, що знайдуться 14 школярів, які відвідують одні й ті самі дві секції.

Розв'язання. Позначимо множини школярів, які відвідують секції акробатики, баскетболу й волейболу, буквами A, $Б$ і $В$ відповідно. Тоді $n(A \cup Б \cup В) = 200$, $n(A) = n(Б) = n(В) = 80$. Підставимо ці значення у формулу (4):

$$200 = 80 + 80 + 80 - n(A \cap Б) - n(Б \cap В) - n(В \cap A) + n(A \cap Б \cap В).$$

Звідси

$$n(A \cap Б) + n(Б \cap В) + n(В \cap A) = 40 + n(A \cap Б \cap В) \geqslant 40.$$

Якщо припустити, що кожне з чисел $n(A \cap Б)$, $n(Б \cap В)$, $n(В \cap A)$ не перевищує 13, то їх сума не перевищує 39. Отримали суперечність.

Нам доволі часто доводиться порівнювати скінченні множини за кількістю їх елементів.

Як дізнатися, чи вистачить у шкільній бібліотеці підручників з алгебри для восьмикласників? Звичайно, можна порахувати окремо учнів і підручники, а можна видати підручники учням. Якщо, наприклад, усім підручників вистачить, а в бібліотеці не залишиться жодного підручника, то це означатиме, що восьмикласників і підручників з алгебри однакова кількість.

Так само, щоб дізнатися, чи вистачить стільців у класі, зовсім не обов'язково їх перераховувати. Достатньо запросити учнів сісти на стільці. Якщо, наприклад, місць вистачить не всім, то це означатиме, що кількість учнів більша, ніж кількість стільців.

У цих прикладах, порівнюючи кількість елементів двох множин, ми *кожному елементу однієї множини поставили у відповідність єдиний елемент другої множини*. Скористаємося цією ідеєю в наступному прикладі.

ПРИКЛАД 3 Порівняйте кількість елементів множини A двоцифрових чисел і множини B трицифрових чисел, десятковий запис яких закінчується цифрою 1.

Розв'язання. Поставимо у відповідність кожному двоцифровому числу те трицифрове число, яке отримаємо з нього, приписавши справа одиницю. Дістанемо:

$$\begin{array}{cccccc} 10, & 11, & 12, & \ldots, & 98, & 99 \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \Updownarrow \\ 101, & 111, & 121, & \ldots, & 981, & 991 \end{array}$$

Зазначимо, що за такої відповідності всі елементи множини B виявляться «задіяними». Справді, якщо в числі виду $\overline{ab1}$ закреслити останню цифру, то отримаємо двоцифрове число $\overline{ab}$.

На підставі відповідності між елементами множин A і B можна зробити висновок, що $n(A) = n(B)$.

Означення. **Якщо кожному елементу множини A поставлено у відповідність єдиний елемент множини B і при цьому будь-який елемент множини B є відповідним деякому єдиному елементу множини A, то кажуть, що між множинами A і B встановлено взаємно однозначну відповідність.**

У прикладі 3 кожному двоцифровому числу було поставлено у відповідність єдине трицифрове число зазначеного вигляду, і навпаки, кожне таке трицифрове число є відповідним єдиному двоцифровому числу. Отже, між множинами, що розглядаються, було встановлено взаємно однозначну відповідність.

Зазначимо, що коли в класі всі учні сидять і при цьому є вільні стільці, то між множиною учнів і множиною стільців взаємно однозначної відповідності не встановлено.

Цікаво, що з дитинства кожному з нас неодноразово доводилося встановлювати взаємно однозначні відповідності. Дитина, промовляючи «один», «два», «три» і при цьому послідовно показуючи на машинку, м'ячик і коника, тим самим встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною своїх іграшок і множиною $\{1, 2, 3\}$. Рахуючи іграшки, дитина ніби прив'язує до кожного з предметів ярлики з написами «1», «2», «3». Зауважимо, що, показуючи іграшки в іншому порядку, наприклад, «м'ячик», «коник», «машинка», одержуємо іншу взаємно однозначну відповідність між цими множинами.

Якщо між скінченними множинами A і B встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) = n(B)$. І навпаки, якщо $n(A) = n(B)$, то між скінченними множинами A і B можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Отже, між скінченними множинами з різною кількістю елементів неможливо встановити взаємно однозначну відповідність. Це дозволяє сформулювати таке правило.

Якщо $C \subset B$ і $C \neq B$, а між множинами A і C встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) < n(B)$.

ПРИКЛАД 4 Яких шестицифрових чисел більше: непарних, сума цифр яких дорівнює 47, або парних, сума цифр яких дорівнює 45?

Розв'язання. Позначимо множини чисел, про які йдеться в умові, буквами A і B відповідно.

Зауважимо, що коли в запису шестицифрового числа є цифра 0, то сума його цифр не більша за $9 \cdot 5 = 45$. Отже, якщо $a \in A$, то в запису числа a немає цифри 0.

Кожному числу $a \in A$ поставимо у відповідність число $b \in B$ за таким правилом: зменшимо на 1 дві останні цифри числа a (це можна зробити, оскільки в десятковому запису числа a немає нулів). Зрозуміло, що при такій відповідності різним числам множини A відповідатимуть різні числа множини B, тобто кожному елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B.

Тепер розглянемо число 999 990, яке належить множині B. Зрозуміло, що це число не може бути отримано з елемента множини A за допомогою зазначеного правила.

Таким чином, ми встановили взаємно однозначну відповідність між множиною A і власною підмножиною множини B. Отже, $n(B) > n(A)$.

1. Як знайти кількість елементів множини $A \cup B$?
2. Як знайти кількість елементів множини $A \cup B \cup C$?
3. У яких випадках кажуть, що між двома множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

6.1.° У класі 32 учні. 20 з них вивчають англійську мову і 18 — французьку. Скільки учнів вивчають і англійську, і французьку мови?

6.2.° Відомо, що 26 мешканців будинку тримають котів і собак, 16 з них мають котів, а 15 — собак. Скільки мешканців мають і собаку, і кота?

6.3.° З анкети, проведеної в класі, з'ясувалося, що з 30 учнів класу 18 мають брата, 14 — сестру, а у 10 є сестра і брат. Чи є в цьому класі учні, у яких немає ні сестри, ні брата?

6.4.° У грудні було 10 ясних і затишних днів, 15 днів був вітер і 12 днів ішов сніг. Скільки днів у грудні була хуртовина (сніг і вітер)?

6.5.° Чи встановлено взаємно однозначну відповідність між множинами A і B (рис. 6.4)? Точками на рисунку зображено елементи множин.

6.6.° Одинадцять гравців футбольної команди отримали футболки з номерами від 1 до 11. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

6.7.° У результаті жеребкування кожна з 20 пар фігуристів отримала порядковий номер її виступу. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

6.8.° Кожний глядач, який прийшов до кінотеатру, купив квиток із зазначеними рядом і місцем. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

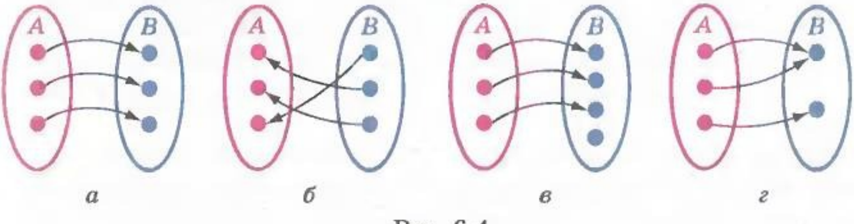


Рис. 6.4

6.9.° Між першими n натуральними числами і правильними дробами зі знаменником 7 встановлено взаємно однозначну відповідність. Знайдіть n.

6.10.° Кожному елементу множини $\{n,\ n + 1,\ n + 2\}$, де $n \in \mathbb{N}$, поставили у відповідність остачу від ділення цього елемента на 3. Чи встановлено таким чином взаємно однозначну відповідність між множинами $\{n,\ n + 1,\ n + 2\}$ і $\{0,\ 1,\ 2\}$?

6.11.• Яких п'ятицифрових чисел більше: усі цифри яких парні чи всі цифри яких непарні?

6.12.• В опуклому n-кутнику ($n \geqslant 4$) жодні три діагоналі не перетинаються[1] в одній точці. Доведіть, що кількість усіх точок перетину діагоналей дорівнює кількості чотирикутників, усі вершини яких є вершинами даного n-кутника.

6.13.• Розглядаються всі прямокутники, довжини сторін яких виражено натуральними числами. Яких прямокутників більше: з периметром, який дорівнює 1000, чи з периметром, який дорівнює 1002?

6.14.•• Множина A містить 101 елемент. Доведіть, що кількість її підмножин, які містять парну кількість елементів, дорівнює кількості підмножин, які містять непарну кількість елементів.

6.15.•• В олімпіаді взяли участь 46 учнів. Їм було запропоновано розв'язати 3 задачі. Після підведення підсумків з'ясувалося, що першу і другу задачі розв'язали 11 учасників, другу і третю — 8 учасників, першу і третю — 5 учасників, а всі три задачі розв'язали тільки 2 учасники. Доведіть, що одну із задач розв'язали не менше ніж половина учасників.

6.16.•• Яких трицифрових чисел більше: тих, у яких друга цифра в десятковому запису більша за першу і третю, або тих, у яких друга цифра менша від першої і третьої?

6.17.•• Автобусні квитки мають номери від 000 000 до 999 999. Квиток називають «щасливим», якщо сума перших трьох цифр його номера дорівнює сумі останніх трьох цифр. Доведіть, що:
1) кількість усіх «щасливих» квитків парна;
2) сума номерів усіх «щасливих» квитків кратна 999.

6.18.* Розглядаються трикутники, довжини сторін яких виражено натуральними числами. Яких трикутників більше: з периметром, який дорівнює 997, чи з периметром, який дорівнює 1000?

---

[1] Вважають, що діагоналі опуклого многокутника перетинаються, якщо вони мають спільну точку, відмінну від вершини многокутника.

6.19.* На колі позначено 100 точок: A_1, A_2, ..., A_{100}. Яких многокутників з вершинами в позначених точках більше: тих, у яких точка A_1 є вершиною, чи тих, у яких точка A_1 не є вершиною?

6.20.* Яких п'ятицифрових чисел більше: тих, у яких кожна наступна цифра більша за попередню (рахуючи зліва направо), чи тих, у яких кожна наступна цифра не більша за попередню і кожна цифра не більша за 5?

6.21.* Доведіть, що кількість пар цілих чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = n$ $(n \in \mathbb{N})$, дорівнює кількості пар цілих чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 2n$.

6.22.* Множина A містить 100 елементів. Доведіть, що кількість її підмножин, які містять парну кількість елементів, дорівнює кількості підмножин, які містять непарну кількість елементів.

7. Нескінченні множини. Зліченні множини

У попередньому пункті ми розглядали скінченні множини, між якими встановлено взаємно однозначну відповідність, і з'ясували, що такі множини мають однакову кількість елементів.

Керуючись принципом «частина менша від цілого», доходимо висновку, що коли B — власна підмножина скінченної множини A, то $n(B) < n(A)$. Отже, між скінченною множиною та її власною підмножиною неможливо встановити взаємно однозначну відповідність.

Оскільки $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, то, здавалося б, природно вважати, що цілих чисел більше, ніж натуральних. Проте це не так.

Нескінченні множини в цьому сенсі поводяться незвично.

Розглянемо множину $\mathbb{N}$ і підмножину M парних чисел. Множина M є власною підмножиною множини $\mathbb{N}$. Кожному елементу $n \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність єдиний елемент $2n \in M$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots, \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, & \ldots . \end{array}$$

При цьому кожне парне число відповідатиме єдиному натуральному числу. Тим самим між множинами $\mathbb{N}$ і M встановлено взаємно однозначну відповідність, а тому не можна вважати, що в множині $\mathbb{N}$ міститься більше елементів, ніж в її власній підмножині — множині парних чисел.

Цей приклад показує, що звичні для нас уявлення про скінченні множини не можна переносити на нескінченні множини.

Узагалі, математиками було доведено, що в будь-якій нескінченній множині A можна виокремити власну підмножину A_1 таким чином, що між множинами A і A_1 можна встановити взаємно однозначну відповідність. Це принципова відмінність нескінченних множин від скінченних.

Якщо множини A і B є скінченними і між ними встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) = n(B)$. Якщо ж взаємно однозначну відповідність установлено між нескінченними множинами A і B, то в математиці не прийнято говорити, що ці множини мають однакову кількість елементів, а кажуть, що множини A і B мають однакову **потужність**.

Означення. **Дві множини називають *рівнопотужними*, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність.**

Для нескінченних множин слово «потужність» означає те саме, що для скінченних множин «кількість елементів».

Доведемо ще один дивовижний факт: множина точок прямої рівнопотужна множині точок **відкритого відрізка** (відрізка, у якого «виколото» кінці), тобто пряма містить стільки ж точок, скільки їх містить відкритий відрізок.

На рисунку 7.1 зображено пряму MN, яка дотикається півкола з центром в точці O і діаметром AB, паралельним прямій MN. Вилучимо з півкола точки A і B. Таке півколо називають **відкритим**.

Кожній точці X відкритого півкола поставимо у відповідність точку X_1 прямої MN, яка лежить на промені OX. Зрозуміло, що точці X відповідає єдина точка прямої MN, і навпаки, кожна точка прямої MN є відповідною єдиній точці відкритого півкола. Отже, установлено взаємно однозначну відповідність між множиною точок прямої і множиною точок відкритого півкола.

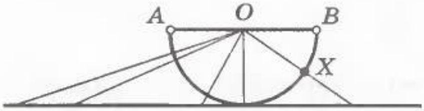


Рис. 7.1

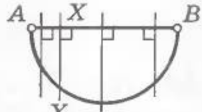


Рис. 7.2

На рисунку 7.2 показано, як встановити взаємно однозначну відповідність між множиною точок відкритого відрізка і множиною точок відкритого півкола. Отже, множина точок відкритого відрізка AB рівнопотужна множині точок прямої MN.

У розповіді на с. 48 ви дізнаєтесь ще про один несподіваний факт, в який важко повірити, керуючись лише інтуїцією: множина точок сторони квадрата рівнопотужна множині точок квадрата.

Означення. Множину, рівнопотужну множині натуральних чисел, називають зліченною множиною.

Вище ми показали, що множина парних чисел є зліченною. Зрозуміло, що жодна скінченна множина не є зліченною.

Натуральне число n, яке відповідає елементу a зліченної множини A, називають *номером цього елемента*. Якщо елемент a має номер n, то пишуть: a_n. Коли встановлюють взаємно однозначну відповідність між множинами A і $\mathbb{N}$, кожний елемент множини A отримує свій номер, і ці елементи можна розмістити послідовно:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Так, якщо елементи множини P простих чисел[1] розмістити в порядку зростання 2, 3, 5, 7, 11, ..., то всі елементи цієї множини можна пронумерувати:

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 3, & 5, & 7, & 11, & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots . \end{array}$$

Тим самим встановлено взаємно однозначну відповідність між множинами P і $\mathbb{N}$.

У такий спосіб можна показати, що будь-яка нескінченна підмножина множини $\mathbb{N}$ є зліченною (зробіть це самостійно).

На перший погляд здається, що елементи множини $\mathbb{Z}$ пронумерувати неможливо: адже множина $\mathbb{N}$ є власною підмножиною множини $\mathbb{Z}$, а отже, чисел для нумерації не вистачить: усі вони будуть «витрачені» на множину $\mathbb{N}$.

Проте якщо елементи множини $\mathbb{Z}$ розмістити у вигляді послідовності 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, ..., то тим самим можна кожному цілому числу надати свій номер:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots . \end{array}$$

[1] У п. 43 буде доведено, що множина простих чисел є нескінченною.

Доведемо, що множина $\mathbb{Q}$ є зліченною.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Назвемо число $h = |m| + |n|$ висотою цього раціонального числа. Наприклад, $\left\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}\right\}$ — множина раціональних чисел, висота яких дорівнює 4.

Зрозуміло, що множина раціональних чисел із заданою висотою h є скінченною.

Тепер будемо послідовно нумерувати всі нескоротні дроби (тобто раціональні числа), беручи спочатку дроби з висотою $h = 1$, потім дроби з висотою $h = 2$, висотою $h = 3$ тощо:

$$\mathbb{Q} = \underbrace{\left\{\frac{0}{1}\right\}}_{h=1} \cup \underbrace{\left\{\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}\right\}}_{h=2} \cup \underbrace{\left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}\right\}}_{h=3} \cup \underbrace{\left\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}\right\}}_{h=4} \cup \dots$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}$$

Ми показали, що всі елементи множини $\mathbb{Q}$ можна пронумерувати, отже, ця множина є зліченною.

Не будь-яка нескінченна множина є зліченною.

Розглянемо множину A, елементами якої є всі нескінченні послідовності, складені з нулів і одиниць. Ось кілька елементів множини A:

1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
0, 1, 1, 1, 0, 0, ...
0, 0, 1, 0, 1, 1, ...

Покажемо, що множина A є незліченною. Припустимо, що це не так. Тоді елементи цієї множини можна пронумерувати. Розмістимо елементи множини A в стовпчик у порядку зростання номерів. Наприклад:

перший елемент:	1,	1,	0,	1,	0,	...
другий елемент:	0,	0,	0,	1,	1,	...
третій елемент:	0,	0,	0,	0,	0,	...
четвертий елемент:	1,	1,	1,	1,	1,	...
п'ятий елемент:	1,	0,	1,	0,	1,	...
...						

Цей запис має містити всі елементи множини A. Якщо вдасться побудувати послідовність з нулів та одиниць, якої в цьому запису немає, то тим самим спростується припущення про зліченність множини A.

Виділимо цифри, які стоять на «діагоналі». Отримаємо послідовність:

$$1, 0, 0, 1, 1, \ldots .$$

Замінимо в цій послідовності одиниці на нулі, а нулі — на одиниці:

$$0, 1, 1, 0, 0, \ldots .$$

Цієї послідовності в запису немає. Справді, вона відрізняється від першої послідовності числом, яке стоїть на першому місці, від другої послідовності — числом, яке стоїть на другому місці, від третьої — числом, яке стоїть на третьому місці, і т. д.

1. Які множини називають рівнопотужними?
2. Яку множину називають зліченною?

7.1.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною натуральних чисел, кратних 3.

7.2.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною чисел виду $4n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

7.3.° Доведіть, що множини парних і непарних чисел рівнопотужні.

7.4.° Доведіть, що множина чисел виду 2^n ($n \in \mathbb{N}$) зліченна.

7.5.° Доведіть, що множина чисел виду $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) зліченна.

7.6.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною чисел виду 2^n ($n \in \mathbb{N}$) і множиною десяткових дробів виду 0,1; 0,01; 0,001; ... .

7.7.° Покажіть, що множини точок сторони і діагоналі квадрата рівнопотужні.

7.8.° Покажіть, що множини точок будь-яких двох концентричних кіл рівнопотужні.

7.9.° Укажіть спосіб, який дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між множиною чисел виду 2^n ($n \in \mathbb{N}$) і множиною натуральних чисел, у десятковому запису яких використовуються тільки цифри 1 і 0.

7.10.•• Доведіть, що будь-яка підмножина зліченної множини є або скінченною, або зліченною.

7.11.•• Розглянемо множину відрізків, які належать координатній прямій, попарно не перетинаються і довжини їх не менші від 1. Доведіть, що ця множина є або скінченною, або зліченною.

7.12.** Покажіть, що множина точок прямої і множина точок кола з «виколотою» точкою рівнопотужні.

7.13.** На координатній прямій позначили точки $O(0)$, $A(1)$, $B(5)$. Доведіть, що:

1) множина точок відрізка OA рівнопотужна множині точок відрізка OB;
2) множина точок відрізка OA з «виколотою» точкою O рівнопотужна множині точок променя AB.

7.14.** Покажіть, що множини точок будь-яких двох відрізків рівнопотужні.

7.15.* Укажіть спосіб, який дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною натуральних чисел, у десятковому запису яких використовуються тільки цифри 1 і 0.

7.16.* Доведіть, що множина точок $(x; y)$ координатної площини таких, що числа x і y — цілі, є зліченною.

7.17.* На площині є деяка множина квадратів, сторона кожного з яких дорівнює 10, причому квадрати не перетинаються. Доведіть, що ця множина скінченна або зліченна.

7.18.* На площині є деяка множина кіл, які не перетинаються і радіуси яких дорівнюють 1. Доведіть, що ця множина скінченна або зліченна.

«Я бачу це, але ніяк не можу цьому повірити!»

Ці слова належать видатному математику, засновнику теорії множин Георгу Кантору. Вони свідчать про те, що навіть генію часом буває складно примирити свою інтуїцію з формальним результатом.

Георг Кантор (1845–1918)

Мабуть, і ви зазнавали подібного дискомфорту, коли логіка міркувань вимушувала вас погодитися з тим, що на будь-якому, навіть дуже маленькому, відрізку стільки ж точок, скільки їх на всій прямій.

А чи можна повірити в те, що множина точок квадрата рівнопотужна множині точок його сторони? Мабуть, ні. Цьому не вірив і сам великий Кантор.

У 1874 році в одному зі своїх листів до видатного математика Р. Дедекінда (1831–1916) Кантор писав: «Чи можна зіставити поверхню (наприклад, квадратну площадку, включаючи її межі) з відрізком прямої таким чином, щоб кожній точці поверхні відповідала одна точка на цьому відрізку і навпаки?»

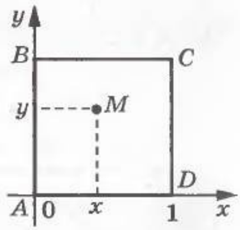


Рис. 7.3

Кантор думав, що відповідь має бути негативною, і намагався це довести протягом трьох років. Проте в 1877 році він отримує несподіваний результат: будує взаємно однозначну відповідність між множиною точок квадрата і множиною точок його сторони.

Ознайомимося з ідеєю доведення Кантора.

Розглянемо на координатній площині квадрат з вершинами A (0; 0), B (0; 1), C (1; 1), D (1; 0) (рис. 7.3).

Нехай точка M (x; y) належить квадрату. Координати x і y задовольняють нерівностям $0 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тому числа x і y можна подати у вигляді нескінченних десяткових дробів:

$$x = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3...,$$
$$y = 0{,}\beta_1\beta_2\beta_3... .$$

Зауважимо, що коли $x = 1$ або $y = 1$, то координату можна записати у вигляді дробу 0,999... [1].

За допомогою цих записів сконструюємо новий десятковий дріб, «перемішуючи» десяткові знаки в запису чисел x і y через один:

$$z = 0{,}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3... .$$

Точці M (x; y) поставимо у відповідність точку K (z; 0). Очевидно, що ця точка належить стороні AD квадрата.

Зрозуміло, що різні точки квадрата мають різні координати. Тому при зазначеній відповідності різним точкам квадрата відповідають різні точки його сторони AD[2].

Після викладеного ви, мабуть, уже не дивуватиметесь тому, що, наприклад, множина точок куба рівнопотужна множині точок його ребра.

Множини, рівнопотужні множині точок відрізка, називають множинами потужності **континууму** (від латинського *continuum* — неперервний).

---

[1] Про можливість такого подання ви дізнаєтесь у 9 класі.

[2] Деякі числа можуть мати два десяткових записи. Наприклад, дробам 0,7000... і 0,6999... відповідає одне й те саме число. Оскільки ідея доведення Кантора пов'язана з десятковим записом числа, то в строгому доведенні має бути показано, як вирішується проблема неоднозначності запису числа при встановленні взаємно однозначної відповідності.

§ 3. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

8. Формули для розкладання на множники виразів виду $a^n - b^n$ і $a^n + b^n$

Вам добре знайомі такі дві формули:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad (1)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \quad (2)$$

Розкладемо на множники двочлен $a^4 - b^4$. Маємо:

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) =$$
$$= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Отже,

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3). \quad (3)$$

У структурі формул (1)–(3) можна помітити певну закономірність: якщо степені одночленів у лівій частині формули дорівнюють n, то права частина — добуток двочлена $a - b$ на многочлен, що складається з усіх одночленів степеня $n - 1$, коефіцієнти яких дорівнюють одиниці.

Можна припустити, що формула розкладання двочлена $a^5 - b^5$ має такий вигляд:

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Щоб довести цю тотожність, достатньо перемножити многочлени, які записані в правій частині:

$$(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) =$$
$$= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 -$$
$$- a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 =$$
$$= a^5 - b^5.$$

Розглянуті приклади підказують, що формула для розкладання на множники різниці n-х степенів має такий вигляд:

$$\boxed{a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})} \quad (4)$$

Переконаємось у справедливості цієї тотожності, перемноживши многочлени, які записані в правій частині:

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}) =$$
$$= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + ... + ab^{n-1} -$$
$$- a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 - ... - ab^{n-1} - b^n =$$
$$= a^n - b^n.$$

Якщо у формулі (2) замінити b на $-b$, то отримаємо відому формулу для розкладання на множники суми кубів:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Скористаємося цією ідеєю для розкладання на множники двочлена $a^n + b^n$, де n — непарне натуральне число. Маємо:

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n =$$
$$= (a - (-b))(a^{n-1} + a^{n-2}(-b) + a^{n-3}(-b)^2 + \dots + a(-b)^{n-2} + (-b)^{n-1}) =$$
$$= (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Отже, якщо n — непарне натуральне число, то справедлива така формула:

$$\boxed{a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $3^{2n} \cdot 7^n - 2^{5n}$ кратне 31.

Розв'язання. Маємо: $3^{2n} \cdot 7^n - 2^{5n} = (3^2)^n \cdot 7^n - (2^5)^n = 9^n \cdot 7^n - 32^n = 63^n - 32^n = (63 - 32)(63^{n-1} + 63^{n-2} \cdot 32 + \dots + 63 \cdot 32^{n-2} + 32^{n-1})$.

Перший множник отриманого добутку дорівнює 31, а другий набуває натуральних значень. Отже, значення даного виразу кратне 31.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$(1 + x + \dots + x^7)(1 + x + \dots + x^5) = (1 + x + \dots + x^6)^2.$$

Розв'язання. Перевіркою встановлюємо, що число 1 не є коренем даного рівняння. Помножимо обидві частини рівняння на вираз $(1 - x)^2$:

$$(1 - x)(1 + x + \dots + x^7)(1 - x)(1 + x + \dots + x^5) =$$
$$= ((1 - x)(1 + x + \dots + x^6))^2;$$
$$(1 - x^8)(1 - x^6) = (1 - x^7)^2;$$
$$1 - x^6 - x^8 + x^{14} = 1 - 2x^7 + x^{14};$$
$$x^8 - 2x^7 + x^6 = 0;$$
$$x^6(x - 1)^2 = 0;$$
$$x = 0 \text{ або } x = 1.$$

На початку розв'язання було встановлено, що число 1 не є коренем заданого рівняння.

Відповідь: 0.

1. Запишіть формулу для розкладання на множники різниці n-х степенів двох виразів.
2. Запишіть формулу для розкладання на множники суми непарних n-х степенів двох виразів.

8.1.° Розкладіть на множники:

1) $a^7 - b^7$; 3) $x^9 - 1$; 5) $y^5 - 32$; 7) $x^7y^{14} + 1$;
2) $a^7 + b^7$; 4) $x^5 + 1$; 6) $m^{10} + n^5$; 8) $a^5b^{10} + c^{15}$.

8.2.° Розкладіть на множники:

1) $a^5 + b^5$; 3) $y^7 - 128$;
2) $a^{11} - 1$; 4) $m^7n^{14}k^{21} + 1$.

8.3.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $7^n - 1$ кратне 6; 3) $16^n - 11^n$ кратне 5.
2) $19^{2n+1} + 1$ кратне 20;

8.4.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $17^n - 1$ кратне 16; 3) $13^{2n+1} + 1$ кратне 14.
2) $23^{2n+1} + 1$ кратне 24;

8.5.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $15^n + 13$ кратне 7; 3) $5 \cdot 25^n + 13 \cdot 13^{2n}$ кратне 9;
2) $9^n + 5^n - 2$ кратне 4; 4) $21^n + 4^{n+2}$ кратне 17.

8.6.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $27^n + 12$ кратне 13; 3) $8^n + 15^n - 2$ кратне 7;
2) $17^n + 15$ кратне 16; 4) $3 \cdot 9^n + 7 \cdot 7^{2n}$ кратне 10.

8.7.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $2^{2n} \cdot 5^n - 3^{2n}$ кратне 11; 2) $7^n \cdot 3^{3n} - 2^{2n}$ кратне 37.

8.8.• Доведіть, що число є складеним:

1) $2^{1234} + 1$; 2) $1\underbrace{000...0}_{16}1$.

8.9.• Доведіть тотожність:

1) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;
2) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^5 =$
$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$.

8.10.• Спростіть вираз:

1) $3^{99} + 3^{98} \cdot 2 + 3^{97} \cdot 2^2 + ... + 3 \cdot 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}$;
2) $4^{20} - 4^{19} \cdot 3 + 4^{18} \cdot 3^2 - ... - 4 \cdot 3^{19} + 3^{20}$.

8.11.•• Відомо, що n і a — натуральні числа ($n > 1$), а значення виразу $a^n - 1$ є простим числом. Знайдіть a.

8.12.•• Відомо, що значення виразу $2^n + 1$ є простим числом, $n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що або $n = 1$, або n — степінь числа 2.

8.13.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = (1 + x + x^2 + x^3)^2$;

2) $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + ... + x^7) =$
$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2.$

8.14.** Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ ділиться націло на 19;
2) $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ ділиться націло на 57;
3) $13^{n+2} + 14^{2n+1}$ ділиться націло на 183;
4) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ ділиться націло на 11.

9. Раціональні дроби

У курсі алгебри 7 класу було розглянуто цілі вирази, тобто такі, що складаються з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення й ділення на відмінне від нуля число.

Ось приклади цілих виразів: $x - y$, $\frac{a+b}{5}$, $m^2 + 2m + n^2$, $\frac{1}{3}x - 4$, $x^n - y^n$, $\frac{c}{4} + \frac{d}{7}$, $x : 5$, y, 7.

У 8 класі ми розглянемо **дробові вирази.**

Дробові вирази відрізняються від цілих тим, що вони *містять дію ділення на вираз зі змінними.*

Наведемо приклади дробових виразів:

$$2x + \frac{a}{b};\ (x - y) : (x + y);\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}};\ \frac{5}{x}.$$

Об'єднанням множин цілих і дробових виразів є множина **раціональних виразів.**

Якщо в раціональному виразі замінити змінні числами, то отримаємо числовий вираз. Проте *ця заміна можлива лише тоді, коли вона не призводить до ділення на нуль.*

Наприклад, вираз $2 + \frac{a+2}{a-1}$ при $a = 1$ не має змісту, тобто числового значення цього виразу не існує. При всіх інших значеннях a цей вираз має зміст.

Означення. Областю визначення виразу з однією змінною називають множину значень змінної, при яких цей вираз має зміст. Елементи цієї множини називають допустимими значеннями змінної.

Рис. 9.1

Наприклад, у розглянутому вище прикладі областю визначення виразу є множина $\{a \mid a \neq 1\}$.

Підмножиною множини раціональних виразів є множина **раціональних дробів**. Це дроби, чисельниками і знаменниками яких є многочлени[1]. Ось приклади раціональних дробів:

$$\frac{x}{7};\ \ \frac{x^2-2xy}{x+y};\ \ \frac{12}{a};\ \ \frac{a+b}{5}.$$

Зазначимо, що раціональний дріб може бути як цілим виразом, так і дробовим.

Знаменником раціонального дробу не може бути многочлен, який тотожно дорівнює нулю.

Схема, зображена на рисунку 9.1, ілюструє зв'язок між поняттями, що розглядаються в цьому пункті.

ПРИКЛАД Знайдіть область визначення виразу $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-5}$.

Розв'язання. Дріб $\frac{1}{x}$ має зміст при всіх значеннях x, крім $x = 0$, а дріб $\frac{3}{x-5}$ має зміст при всіх значеннях x, крім $x = 5$.

Отже, областю визначення виразу є множина $\{x \mid x \neq 0 \text{ і } x \neq 5\}$.

1. Чим відрізняються дробові вирази від цілих?
2. Що називають областю визначення виразу?
3. Опишіть, що являє собою множина раціональних дробів.

[1] Нагадаємо, що числа і одночлени вважають окремими видами многочленів (див. п. 5 на с. 327).

4. Яка множина є об'єднанням множин цілих і дробових виразів?
5. Який многочлен не може бути знаменником раціонального дробу?

9.1.° Які з виразів $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4}+\frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a-\frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2-6t+15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3+\frac{1}{y}$, $\frac{m^2-3mn}{18}$ є:

1) цілими виразами;
2) дробовими виразами;
3) раціональними дробами?

9.2.° Чому дорівнює значення дробу $\frac{c^2-4c}{2c+1}$, якщо:

1) $c=-3$;   2) $c=0$?

9.3.° Знайдіть значення виразу $\frac{2m-n}{3m+2n}$, якщо:

1) $m=-1$, $n=1$;   2) $m=4$, $n=-5$.

9.4.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\frac{a^2-1}{a-5}$ при $a=-4$;

2) $\frac{x+3}{y}-\frac{y}{x+2}$ при $x=-5$, $y=6$?

9.5.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\frac{x-5}{9}$;   4) $\frac{5}{x^2-4}$;   7) $\frac{x+4}{x(x-6)}$;

2) $\frac{9}{x-5}$;   5) $\frac{5}{|x|-4}$;   8) $\frac{x}{|x|+1}$;

3) $\frac{1}{x^2+4}$;   6) $\frac{2}{x-2}+\frac{3x}{x+1}$;   9) $\frac{7}{x^3-25x}$.

9.6.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\frac{9}{y}$;   3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;   5) $\frac{4}{x-8}+\frac{1}{x-1}$;

2) $\frac{x+7}{x+9}$;   4) $\frac{x}{|x|-3}$;   6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$.

9.7.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\frac{1}{4-\frac{4}{x}}$;   2) $y=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$;   3) $y=\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$;

4) $y = \dfrac{9}{\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-2}}$; 5) $y = \dfrac{2}{|x| + x}$; 6) $y = \dfrac{2}{x^2 + \dfrac{1}{x}}$.

9.8.° При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\dfrac{x}{x - \dfrac{9}{x}}$;

2) $\dfrac{10}{2 + \dfrac{6}{x}}$;

3) $\dfrac{x+2}{|x| - x} + \dfrac{1}{x+1}$;

4) $\dfrac{1}{x^2 - \dfrac{1}{x}}$?

9.9.° Запишіть раціональний дріб, областю визначення якого є множина:

1) $\{x \mid x \neq 7\}$;

2) $\{y \mid y \neq -1\}$;

3) $\{a \mid a \neq 2$ і $a \neq -2\}$;

4) усіх чисел.

9.10.° Запишіть раціональний дріб, областю визначення якого є множина:

1) $\{x \mid x \neq 5\}$;

2) $\{x \mid x \neq -2$ і $x \neq 0\}$;

3) $\{x \mid x \neq 3,\ x \neq -3$ і $x \neq 6\}$;

4) усіх чисел.

9.11.° Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної x значення дробу:

1) $\dfrac{x^2+1}{6x - 9 - x^2}$ від'ємне;

2) $\dfrac{2}{x^2 + 2x + 2}$ додатне;

3) $\dfrac{1}{2x - x^2 - 2}$ від'ємне;

4) $\dfrac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + x + 1}$ невід'ємне.

9.12.° Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної x значення дробу:

1) $\dfrac{-x^2}{x^2 + 5}$ недодатне;

2) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 2x + 1}$ невід'ємне;

3) $\dfrac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^2 - 14x + 49}$ додатне;

4) $\dfrac{1}{x - |x|}$ від'ємне.

9.13.° Відомо, що $5x - 15y = 1$. Знайдіть значення виразу:

1) $x - 3y$;

2) $\dfrac{7}{2x - 6y}$;

3) $\dfrac{18y - 6x}{11}$;

4) $\dfrac{1}{x^2 - 6xy + 9y^2}$.

9.14.° Відомо, що $4a + 8b = 10$. Знайдіть значення виразу:

1) $2b + a$; 2) $\dfrac{5}{a + 2b}$; 3) $\dfrac{a^2 + 4ab + 4b^2}{2a + 4b + 5}$.

10. Основна властивість раціонального дробу

Рівність $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ є тотожністю, оскільки вона виконується при всіх значеннях a.

Рівність $\frac{3a - 1 + 2a + 5}{a + 1} = \frac{5a + 4}{a + 1}$ також природно вважати тотожністю. Але вона виконується при всіх значеннях a, крім $a = -1$. При $a = -1$ раціональні дроби, які утворюють дану рівність, не мають змісту. Отже, треба уточнити прийняті в 7 класі означення тотожно рівних виразів і тотожності.

Означення. **Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких допустимих значеннях змінних, називають тотожно рівними.**

Означення. **Рівність, яка виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних, називають тотожністю.**

Наприклад, рівність $\frac{a-2}{a-2} = 1$ є тотожністю, оскільки вона виконується при всіх допустимих значеннях a, тобто при всіх a, крім $a = 2$.

У 7 класі розглядалися тотожні перетворення цілих виразів. Тепер розглянемо тотожні перетворення дробових виразів.

Згідно з основною властивістю відношення виконується рівність:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm},$$

де a, b і m — деякі числа, причому $b \neq 0$ і $m \neq 0$.

Раціональні дроби мають властивість, аналогічну основній властивості відношення:

якщо чисельник і знаменник раціонального дробу помножити на один і той самий многочлен, який тотожно не дорівнює нулю, то отримаємо дріб, тотожно рівний даному.

Цю властивість називають **основною властивістю раціонального дробу** і записують:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C},$$

де A, B і C — многочлени, причому многочлени B і C тотожно не дорівнюють нулю.

Відповідно до цієї властивості вираз $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ можна замінити на тотожно рівний дріб $\frac{A}{B}$. Таке тотожне перетворення називають **скороченням дробу** на множник C.

ПРИКЛАД 1 Скоротіть дріб:

1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x+15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$.

Розв'язання

1) Одночлени $6a^3b^2$ і $24a^2b^4$ мають спільний множник $6a^2b^2$. Тоді маємо:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}=\frac{a\cdot 6a^2b^2}{4b^2\cdot 6a^2b^2}=\frac{a}{4b^2}.$$

2) Розкладемо чисельник даного дробу на множники:

$$\frac{3x+15y}{3x}=\frac{3(x+5y)}{3x}.$$

Отже, чисельник і знаменник даного дробу мають спільний множник 3, скоротивши на який, отримуємо:

$$\frac{3x+15y}{3x}=\frac{3(x+5y)}{3x}=\frac{x+5y}{x}.$$

3) Розклавши попередньо чисельник і знаменник даного дробу на множники і скоротивши на спільний множник $y+2$, маємо:

$$\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}=\frac{(y+2)^2}{y(y+2)}=\frac{y+2}{y}.$$

З основної властивості дробу випливає, що

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B} \text{ і } \frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}.$$

Кожен з дробів $\frac{-A}{B}$ і $\frac{A}{-B}$ можна записати у вигляді виразу $-\frac{A}{B}$, тобто

$$\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}.$$

ПРИКЛАД 2 Скоротіть дріб $\frac{4a-20}{5a-a^2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{4a-20}{5a-a^2}=\frac{4(a-5)}{a(5-a)}=\frac{4(a-5)}{-a(a-5)}=-\frac{4}{a}.$$

ПРИКЛАД 3 Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{2m}{9a^2b^6}$ і $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$; 2) $\frac{1}{a+b}$ і $\frac{1}{a-b}$; 3) $\frac{4a^2}{a^2-36}$ і $\frac{6}{a^2+6a}$.

Розв'язання

1) Добуток знаменників даних дробів, який дорівнює $9a^2b^6\cdot 6a^4b^3=54a^6b^9$, можна прийняти за їх спільний знаменник. Проте

зручніше за спільний знаменник узяти одночлен $18a^4b^6$, коефіцієнт якого 18 є найменшим спільним кратним коефіцієнтів 9 і 6 даних знаменників, а кожну зі змінних a і b взято у степені з найбільшим показником степеня, з яким вона міститься у знаменниках даних дробів.

Оскільки $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, то додатковим множником до дробу $\frac{2m}{9a^2b^6}$ є одночлен $2a^2$. Ураховуючи, що $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3b^3$, маємо, що додатковим множником до дробу $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$ є одночлен $3b^3$. Отже,

$$\frac{2m}{9a^2b^6} = \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6};$$

$$\frac{5n^2}{6a^4b^3} = \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}.$$

2) Спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їх знаменників. Маємо:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2},$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}.$$

3) Для знаходження спільного знаменника раціональних дробів буває корисним попередньо розкласти їх знаменники на множники:

$$a^2 - 36 = (a+6)(a-6),\ a^2 + 6a = a(a+6).$$

Отже, за спільний знаменник можна взяти вираз $a(a+6)(a-6)$. Тоді

$$\frac{4a^2}{a^2-36} = \frac{{}^{a/}4a^2}{(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a^3-36a};$$

$$\frac{6}{a^2+6a} = \frac{{}^{a-6/}6}{a(a+6)} = \frac{6a-36}{a(a+6)(a-6)} = \frac{6a-36}{a^3-36a}.$$

ПРИКЛАД 4 Відомо, що $\frac{3a+4b}{2a-b} = 2$. Знайдіть значення дробу $\frac{a^3-6a^2b-ab^2+12b^3}{18b^3+a^3-6a^2b}$.

Розв'язання. Якщо $b = 0$, то $\frac{3a+4b}{2a-b} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}$, що суперечить умові. Отже, $b \neq 0$. Поділимо чисельник і знаменник дробу, значення якого ми шукаємо, на b^3:

$$\frac{a^3 - 6a^2b - ab^2 + 12b^3}{18b^3 + a^3 - 6a^2b} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 6\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 12}{18 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 6\left(\frac{a}{b}\right)^2}.$$

З умови $\frac{3a + 4b}{2a - b} = 2$ випливає, що $3a + 4b = 4a - 2b$, $a = 6b$, $\frac{a}{b} = 6$. Тоді шукане значення дорівнює $\frac{6^3 - 6 \cdot 6^2 - 6 + 12}{18 + 6^3 - 6 \cdot 6^2} = \frac{1}{3}$.

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

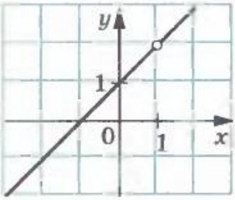


Рис. 10.1

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина $D(y) = \{x \mid x \neq 1\}$. Маємо

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Отже, шуканим графіком є пряма $y = x + 1$ за винятком однієї точки, абсциса якої дорівнює 1 (рис. 10.1).

ПРИКЛАД 6 Для кожного значення a розв'яжіть рівняння

$$(a^2 - 9)\, x = a + 3.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $(a + 3)(a - 3)\, x = a + 3$ і розглянемо три випадки.

1) $a = 3$.
Тоді отримуємо рівняння $0x = 6$, яке не має коренів.

2) $a = -3$.
У цьому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$, коренем якого є будь-яке число.

3) $a \neq 3$ і $a \neq -3$.
Тоді $x = \frac{a + 3}{(a + 3)(a - 3)} = \frac{1}{a - 3}$.

Відповідь: якщо $a = 3$, то рівняння не має коренів; якщо $a = -3$, то коренем є будь-яке число; якщо $a \neq 3$ і $a \neq -3$, то $x = \frac{1}{a - 3}$.

1. Які вирази називають тотожно рівними?
2. Що називають тотожністю?
3. Сформулюйте основну властивість раціонального дробу.

10.1.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{14a^3}{21a}$; 3) $\frac{4abc}{16ab^4}$; 5) $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$;

2) $\frac{24x^2y^2}{32xy}$; 4) $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$; 6) $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

10.2.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x}{21y}$; 3) $\frac{5c^4}{10c^5}$; 5) $\frac{12a^8}{-42a^2}$;

2) $\frac{5x^2}{6x}$; 4) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$; 6) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

10.3.° Спростіть вираз:

1) $\frac{-a}{-b}$; 2) $-\frac{-a}{b}$; 3) $-\frac{a}{-b}$; 4) $-\frac{-a}{-b}$.

10.4.° Відновіть рівності:

1) $\frac{a}{3}=\frac{\quad}{6a}=\frac{\quad}{9a^3}=\frac{\quad}{15b}=\frac{4a^2c^3}{\quad}$;

2) $\frac{m}{n}=\frac{4m}{\quad}=\frac{\quad}{2n^2}=\frac{\quad}{mnp}=\frac{3m^4n^3}{\quad}$.

10.5.° Зведіть дріб:

1) $\frac{a}{b^3}$ до знаменника b^5; 3) $\frac{6}{7x^2y}$ до знаменника $35x^3y^2$;

2) $\frac{m}{9n}$ до знаменника $27n^4$; 4) $\frac{5k}{6p^5}$ до знаменника $24p^9c$.

10.6.° Зведіть дріб:

1) $\frac{x}{y^2}$ до знаменника y^8; 3) $\frac{9}{4m^2n}$ до знаменника $12m^3n^2$;

2) $\frac{a}{3b}$ до знаменника $6b^3$; 4) $\frac{11c}{15d^6}$ до знаменника $30bd^7$.

10.7.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$; 4) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$; 7) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$;

2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$; 5) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$; 8) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;

3) $\frac{12a+18b}{12a}$; 6) $\frac{y^2-25}{10+2y}$; 9) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$.

10.8.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$; 2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$; 3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$;

4) $\frac{7a^4 - a^3b}{b^4 - 7ab^3}$; 5) $\frac{x^2 - 25}{5x^2 - x^3}$; 6) $\frac{y^2 - 12y + 36}{36 - y^2}$.

10.9.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{3m - 3n}{7m - 7n}$; 4) $\frac{x^2 - 49}{6x + 42}$; 7) $\frac{b^5 - b^4}{b^5 - b^6}$;

2) $\frac{5a + 25b}{2a^2 + 10ab}$; 5) $\frac{12a^2 - 6a}{3 - 6a}$; 8) $\frac{7m^2 + 7m + 7}{m^3 - 1}$;

3) $\frac{4x - 16y}{16y}$; 6) $\frac{9b^2 - 1}{9b^2 + 6b + 1}$; 9) $\frac{64 - x^2}{3x^2 - 24x}$.

10.10.° Зведіть дріб:

1) $\frac{a}{a+2}$ до знаменника $4a + 8$;

2) $\frac{m}{m - 3n}$ до знаменника $m^2 - 9n^2$;

3) $\frac{x}{2x - y}$ до знаменника $7y - 14x$;

4) $\frac{5b}{2a + 3b}$ до знаменника $4a^2 + 12ab + 9b^2$;

5) $\frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$ до знаменника $x^3 - 1$.

10.11.° Подайте вираз $x - 5y$ у вигляді дробу із знаменником:

1) 2; 2) x; 3) $4y^3$; 4) $x^2 - 25y^2$.

10.12.° Зведіть дріб $\frac{6}{b - 4}$ до знаменника:

1) $5b - 20$; 2) $12 - 3b$; 3) $b^2 - 4b$; 4) $b^2 - 16$.

10.13.° Подайте дані дроби у вигляді дробів з однаковими знаменниками:

1) $\frac{1}{8ab}$ і $\frac{1}{2a^3}$; 5) $\frac{x}{2x + 1}$ і $\frac{x}{3x - 2}$;

2) $\frac{3x}{7m^3n^3}$ і $\frac{4y}{3m^2n^4}$; 6) $\frac{a - b}{3a + 3b}$ і $\frac{a}{a^2 - b^2}$;

3) $\frac{a + b}{a - b}$ і $\frac{2}{a^2 - b^2}$; 7) $\frac{3a}{4a - 4}$ і $\frac{2a}{5 - 5a}$;

4) $\frac{3d}{m - n}$ і $\frac{8p}{(m - n)^2}$; 8) $\frac{7a}{b - 3}$ і $\frac{c}{9 - b^2}$.

10.14.° Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{4}{15x^2y^2}$ і $\frac{1}{10x^3y}$; 3) $\frac{x}{y - 5}$ і $\frac{z}{y^2 - 25}$;

2) $\frac{c}{6a^4b^5}$ і $\frac{d}{9ab^2}$; 4) $\frac{m + n}{m^2 - mn}$ і $\frac{2m - 3n}{m^2 - n^2}$;

5) $\frac{x+1}{x^2-xy}$ і $\frac{y-1}{xy-y^2}$;

6) $\frac{6a}{a-2b}$ і $\frac{3a}{a+b}$;

7) $\frac{1+c^2}{c^2-16}$ і $\frac{c}{4-c}$;

8) $\frac{2m+9}{m^2+5m+25}$ і $\frac{m}{m-5}$.

10.15.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$;

2) $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$;

3) $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$;

4) $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$.

10.16.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$;

2) $\frac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$;

3) $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$.

10.17.° Скоротіть дріб (n — натуральне число):

1) $\frac{100^n}{2^{2n+3}\cdot 5^{2n+1}}$;
2) $\frac{2^{2n+1}\cdot 7^{n+1}}{6\cdot 28^n}$;
3) $\frac{5^{n+1}-5^n}{2\cdot 5^n}$.

10.18.° Скоротіть дріб (n — натуральне число):

1) $\frac{18^n}{3^{2n+2}\cdot 2^{n+1}}$;
2) $\frac{41\cdot 9^n}{9^{n+2}+9^n}$.

10.19.° Зведіть до спільного знаменника дроби:

1) $\frac{2p}{5p-15}$ і $\frac{1}{p^3-27}$;

2) $\frac{3a+1}{9a^2-6a+1}$ і $\frac{a-2}{9a^2-1}$;

3) $\frac{a}{a^2-7a}$ і $\frac{a+3}{a^2-14a+49}$;

4) $\frac{2x}{x^2-1}$, $\frac{3x}{x^2-2x+1}$ і $\frac{4}{x^2+2x+1}$;

5) $\frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}$, $\frac{b}{2a-2b}$ і $\frac{ab}{4a-4c}$.

10.20.° Запишіть у вигляді дробів з однаковими знаменниками дроби:

1) $\frac{3a}{3a-2}$, $\frac{a}{9a+6}$ і $\frac{a^2}{9a^2b-4b}$;

2) $\frac{1}{a-5b}$, $\frac{1}{a^2+7ac}$ і $\frac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}$.

10.21.° Знайдіть значення виразу $\frac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, якщо $\frac{x}{y}=2$.

10.22.$^{\bullet}$ Знайдіть значення виразу $\frac{4a^2 - ab}{ab + 14b^2}$, якщо $\frac{a}{b} = 5$.

10.23.$^{\bullet}$ Відомо, що $2a - 6b = 1$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{8}{a - 3b}$;
2) $\frac{a^2 - 9b^2}{0,5a + 1,5b}$.

10.24.$^{\bullet}$ Знайдіть значення виразу $\frac{2m - 1,5n}{32m^2 - 18n^2}$, якщо $4m + 3n = 8$.

10.25.$^{\bullet}$ Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a^2 - 3ab - b^2}{a^2 - b^2}$, якщо $\frac{3a + 2b}{4a - b} = 1$;

2) $\frac{m^3 + 2m^2n}{n^3 - mn^2}$, якщо $\frac{5m - n}{3m + 2n} = 2$.

10.26.$^{\bullet}$ Яка фігура є графіком функції $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 + 4}$?

10.27.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$;
3) $y = \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5} - \frac{2x^2 - 4x}{x}$;
2) $y = \frac{x - 3}{3 - x}$;
4) $y = \frac{2}{x + 4} - \frac{2}{x + 4}$.

10.28.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}$;
3) $y = \frac{x^2 - 3x}{x} - \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 1}$.
2) $y = x - \frac{x}{x}$;

10.29.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{|x|}{x}$;
2) $y = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}$.

10.30.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x + 1}{x + 1} = 1$;
2) $\frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$;
3) $\frac{x + 6}{|x| - 6} = 0$.

10.31.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 16}{x + 4} = -8$;
2) $\frac{|x| - 7}{x - 7} = 0$.

10.32.$^{\bullet\bullet}$ Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $ax = 1$;
3) $(a - 6)\,x = a^2 - 12a + 36$;
2) $ax = a$;
4) $(a^2 - 4)\,x = a - 2$.

10.33.$^{\bullet\bullet}$ Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1) $(a + 3)\,x = 3$;
2) $(a^2 - 9a)\,x = a^2 - 18a + 81$.

10.34.** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення дробу:

1) $\frac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^3 + a^2 + a + 1}$ невід'ємне;
2) $\frac{2x - 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$ додатне;
3) $\frac{(x-1)^3}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$ невід'ємне;
4) $\frac{x^2 - 4}{12 + x^2 - x^4}$ від'ємне.

10.35.** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення дробу:

1) $\frac{x - 1}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$ додатне;
2) $\frac{(x-2)^3}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$ невід'ємне;
3) $\frac{x^2 - 1}{4 - 3x^2 - x^4}$ від'ємне.

10.36.** Відомо, що $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$. Доведіть, що коли $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \neq 0$, то $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = k$.

10.37.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{2x + 4}{x^2 + x - 2}$;
2) $\frac{a^2 - 4a + 3}{a^2 + 2a - 3}$;
3) $\frac{2b^3 + 3b^2 + 3b + 1}{2b + 1}$;
4) $\frac{x + 3}{x^3 + 6x^2 + 12x + 9}$;
5) $\frac{a^4 + 4}{a^2 + 2a + 2}$;
6) $\frac{n^4 + 4n^3 + 8n^2}{n^4 + 64}$;
7) $\frac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 - y + 1}$;
8) $\frac{m^2 + m + 3}{m^4 + 5m^2 + 9}$;
9) $\frac{b^{47} + b^{46} + \ldots + b + 1}{b^{23} + b^{22} + \ldots + b + 1}$;
10) $\frac{a^{38} - a^{37} + a^{36} - \ldots - a + 1}{a^{12} - a^{11} + a^{10} - \ldots - a + 1}$.

10.38.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{3y + 9}{y^2 + y - 6}$;
2) $\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 3x + 2}$;
3) $\frac{2x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{4x^2 - 9}$;
4) $\frac{z^4 + 7z^2 + 16}{z^2 + z + 4}$;
5) $\frac{y^{55} + y^{54} + \ldots + y + 1}{y^{27} + y^{26} + \ldots + y + 1}$;
6) $\frac{a^{59} - a^{58} + a^{57} - \ldots + a - 1}{a^{19} - a^{18} + a^{17} - \ldots + a - 1}$.

10.39.* Відомо, що $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4}$. Доведіть, що

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3 + x_4}\right)^3 = \frac{x_1}{x_4}.$$

10.40.* Відомо, що $a^3 + 7a - 9 = 0$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{2a^3+3a}{11a-18}$; 2) $\frac{2a^4+14a^2-17a+3}{2a+6}$.

10.41.* Скоротіть дріб $\frac{x^5+x+1}{x^2+x+1}$.

10.42.* Розкладіть на множники многочлен $a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1$.

11. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками

Ви знаєте правила додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками. Їх можна виразити такими рівностями:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

За цими самими правилами додають і віднімають раціональні дроби з однаковими знаменниками.

Щоб додати раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий.

Щоб відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника першого дробу відняти чисельник другого дробу, а знаменник залишити той самий.

ПРИКЛАД 1 Виконайте віднімання:

1) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}$; 2) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}$.

Розв'язання

1) $\frac{y^2+2y}{y^2-25}-\frac{12y-25}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25}=\frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25}=$

$=\frac{y^2-10y+25}{y^2-25}=\frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)}=\frac{y-5}{y+5}$.

2) $\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{1-2a}=\frac{4}{2a-1}-\frac{2a-3}{-(2a-1)}=\frac{4}{2a-1}+\frac{2a-3}{2a-1}=\frac{4+2a-3}{2a-1}=$

$=\frac{2a+1}{2a-1}$.

ПРИКЛАД 2 Відомо, що $\frac{m}{n}=-3$. Знайдіть значення виразу $\frac{2m+n}{m}$.

Розв'язання. Подамо даний дріб у вигляді суми цілого й дробового виразів:

$$\frac{2m+n}{m}=\frac{2m}{m}+\frac{n}{m}=2+\frac{n}{m}.$$

Якщо $\frac{m}{n}=-3$, то $\frac{n}{m}=-\frac{1}{3}$. Отже, $\frac{2m+n}{m}=2+\frac{n}{m}=$

$=2-\frac{1}{3}=1\frac{2}{3}$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення виразу $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ є цілим числом.

Розв'язання. Подамо даний дріб у вигляді різниці цілого й дробового виразів:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n}=\frac{2n^2}{n}+\frac{3n}{n}-\frac{15}{n}=2n+3-\frac{15}{n}.$$

Вираз $2n+3$ набуває натурального значення при будь-якому натуральному n. Тому вираз $2n+3-\frac{15}{n}$ набуває цілого значення, якщо значення виразу $\frac{15}{n}$ є цілим числом. Це можливо лише при таких натуральних значеннях n: 1, 3, 5, 15.
Відповідь: {1, 3, 5, 15}.

ПРИКЛАД 4 При яких цілих значеннях n значення дробу $\frac{3n^2+5n-13}{n+2}$ є цілим числом?

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{3n^2+5n-13}{n+2}=\frac{3n^2+6n-n-2-11}{n+2}=\frac{3n(n+2)-(n+2)-11}{n+2}=$$

$$=\frac{3n(n+2)}{n+2}-1-\frac{11}{n+2}=3n-1-\frac{11}{n+2}.$$

Дріб $\frac{11}{n+2}$ набуває цілих значень тільки тоді, коли його знаменник набуває одного з чотирьох значень: −1, 1, −11, 11. Звідси n набуває таких значень: −3, −1, −13, 9.
Відповідь: {−3, −1, −13, 9}.

Виконані в прикладах 2–4 перетворення раціонального дробу називають **виділенням цілої частини з дробу**.

1. Як додати раціональні дроби з однаковими знаменниками?
2. Як відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками?

11.1.° Виконайте дії:

1) $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}$;
2) $\frac{a}{3}-\frac{b}{3}$;
3) $\frac{m}{n}+\frac{4m}{n}$;
4) $\frac{m+n}{6}-\frac{m-2n}{6}$;
5) $\frac{2a-3b}{6ab}+\frac{9b-2a}{6ab}$;
6) $\frac{8m+3}{10m^2}-\frac{2m+3}{10m^2}$.

11.2.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{a-b}{2b}-\frac{a}{2b}$;
2) $-\frac{a-12b}{27a}+\frac{a+15b}{27a}$;
3) $\frac{10a+6b}{11a^3}-\frac{6b-a}{11a^3}$;
4) $\frac{x^2-xy}{x^2y}+\frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

11.3.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{a+3}-\frac{9}{a+3}$;
2) $\frac{t}{t^2-16}-\frac{4}{t^2-16}$;
3) $\frac{m^2}{(m-5)^2}-\frac{25}{(m-5)^2}$;
4) $\frac{b^2}{b+10}+\frac{20b+100}{b+10}$.

11.4.° Спростіть вираз:

1) $\frac{c^2}{c-9}-\frac{81}{c-9}$;
2) $\frac{a^2}{(a-6)^2}-\frac{36}{(a-6)^2}$;
3) $\frac{3x+5}{x^2-4}-\frac{2x+7}{x^2-4}$;
4) $\frac{y^2}{y-2}-\frac{4y-4}{y-2}$.

11.5.° Виконайте дії:

1) $\frac{a+b}{c-7}+\frac{a}{7-c}$;
2) $\frac{2x-4y}{x-3y}-\frac{4x-14y}{3y-x}$;
3) $\frac{81b^2}{9b-a}+\frac{a^2}{a-9b}$;
4) $\frac{y^2}{y-1}-\frac{1-2y}{1-y}$.

11.6.° Спростіть вираз:

1) $\frac{3c}{c-d}+\frac{3d}{d-c}$;
2) $\frac{b^2}{2b-14}+\frac{49}{14-2b}$.

11.7.° Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a^2-48}{a-8}-\frac{16}{a-8}$ при $a=32$;
2) $\frac{c^2+3c+7}{c^3-8}+\frac{c+3}{8-c^3}$ при $c=-3$.

11.8.° Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{5x+3}{x^2-16}+\frac{6x-1}{16-x^2}$ при $x=-4{,}1$; 2) $\frac{a^2+a}{a^2-9}-\frac{7a-9}{a^2-9}$ при $a=7$.

11.9.° Спростіть вираз:

1) $\frac{5n-1}{20n}-\frac{7n-8}{20n}-\frac{8n+7}{20n}$;

2) $\frac{9m+2}{m^2-4}-\frac{m-9}{4-m^2}+\frac{1-7m}{m^2-4}$;

3) $\frac{3k}{k^3-1}+\frac{4k+1}{1-k^3}+\frac{k^2}{1-k^3}$.

11.10.° Спростіть вираз:

1) $\frac{6a-1}{16a-8}+\frac{4a-7}{16a-8}+\frac{-2a-2}{8-16a}$;

2) $\frac{2a^2+12a}{a^2-25}+\frac{8a-9}{25-a^2}-\frac{a^2+14a-16}{a^2-25}$.

11.11.° Виконайте дії:

1) $\frac{15-8a}{(a-1)^2}-\frac{14-7a}{(1-a)^2}$;

2) $\frac{3b^2+12}{(b-2)^3}+\frac{12b}{(2-b)^3}$;

3) $\frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)}-\frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)}$;

4) $\frac{x^2}{(x-3)^2}-\frac{6x-9}{(3-x)^2}$.

11.12.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{x^2-16x}{(x-7)^4}+\frac{2x+49}{(7-x)^4}$;

2) $\frac{a^3}{(a-2b)^3}+\frac{8b^3}{(2b-a)^3}$;

3) $\frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)}+\frac{y+36}{(6-y)(2+y)}$.

11.13.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{(a+b)^2}{4ab}-\frac{(a-b)^2}{4ab}=1$;

2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}=2$.

11.14.° Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної x значення виразу $\frac{12x-25}{20x-15}+\frac{8x+10}{20x-15}$ не залежить від значення x.

11.15.° Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної y значення виразу $\frac{17y+5}{21y-3}-\frac{9-11y}{21y-3}$ не залежить від значення y.

11.16.° Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{a^2-6}{(a-2)^4}-\frac{7a-4}{(a-2)^4}+\frac{3a+6}{(a-2)^4}$ набуває додатних значень.

11.17.° Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{2-b^2}{(b-5)^6}-\frac{7-3b}{(b-5)^6}+\frac{7b-20}{(b-5)^6}$ набуває від'ємних значень.

11.18.° Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого і дробового виразів:

1) $\frac{x+3}{x}$; 2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}$.

11.19.° Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого і дробового виразів:

1) $\frac{4a-b}{a}$; 2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}$.

11.20.° Відомо, що $\frac{x}{y}=4$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{y}{x}$; 2) $\frac{2x-3y}{y}$; 3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

11.21.° Відомо, що $\frac{a}{b}=-2$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a-b}{a}$; 2) $\frac{4a+5b}{b}$; 3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

11.22.° Знайдіть усі натуральні значення n, при яких є цілим числом значення виразу:

1) $\frac{n+6}{n}$; 2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$; 3) $\frac{4n+7}{2n-3}$.

11.23.° Знайдіть усі натуральні значення n, при яких є цілим числом значення виразу:

1) $\frac{8n-9}{n}$; 2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$; 3) $\frac{9n-4}{3n-5}$.

11.24.°° Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення дробу не є цілим числом:

1) $\frac{n^2+n+1}{n+1}$; 2) $\frac{n^3-2n^2+n-1}{n^2+1}$.

11.25.°° При яких цілих значеннях n є цілим числом значення дробу:

1) $\frac{2n^2+7n-4}{n+3}$; 2) $\frac{4n^2-11n+23}{n-2}$?

11.26.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n є цілим числом значення дробу:

1) $\frac{n^3-2n+1}{n^2+n-1}$; 2) $\frac{n^3-4n-3}{n^2-n-3}$.

11.27.* Числа a, b і c такі, що значення виразів $a+b+c$ і $\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$ є цілими числами. Доведіть, що значення виразу $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ також є цілим числом.

12. Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками

Застосовуючи основну властивість дробу, можна додавання і віднімання дробів з різними знаменниками звести до додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Нехай треба додати два раціональних дроби $\frac{A}{B}$ і $\frac{C}{D}$. Можна записати:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}; \quad \frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}.$$

Тоді

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}.$$

Тут за **спільний знаменник** обрано вираз, який дорівнює добутку знаменників даних дробів.

Зазначимо, що добуток знаменників даних дробів не завжди є найбільш зручним спільним знаменником.

Нагадаємо, що при знаходженні спільного знаменника звичайних дробів ми знаходили найменше спільне кратне знаменників, розкладаючи їх на прості множники. Аналогічно для знаходження спільного знаменника раціональних дробів може виявитися зручним розкладання знаменників на множники.

Зрозуміло, що сума і різниця двох раціональних дробів є раціональними дробами.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

1) $\frac{b+1}{abc} + \frac{1-a}{a^2c}$;

2) $\frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n}$;

3) $\frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n}$;

4) $\frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15}$;

5) $\frac{x}{x-4} - \frac{x+2}{x-2}$.

Розв'язання

1) Спільним знаменником даних дробів є одночлен a^2bc. Отже,

$$^{a/}\frac{b+1}{abc} + {}^{b/}\frac{1-a}{a^2c} = \frac{ab+a+b-ab}{a^2bc} = \frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Розклавши попередньо знаменники даних дробів на множники, отримуємо:

$$\frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n} = {}^{m-n/}\frac{m}{7(m+n)} - {}^{m+n/}\frac{n}{7(m-n)} =$$

$$= \frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)} = \frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)} = \frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}.$$

3) Маємо:

$$\frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n} = \frac{10n+14}{(n-7)(n+7)} - \frac{\overset{n+7}{6}}{n-7} = \frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)} =$$

$$= \frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)} = \frac{4n-28}{(n-7)(n+7)} = \frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)} = \frac{4}{n+7}.$$

4) $$\frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15} = \frac{2a}{(5-a)^2} - \frac{1}{3(a-5)} =$$

$$= \frac{\overset{3}{2a}}{(a-5)^2} - \frac{\overset{a-5}{1}}{3(a-5)} = \frac{6a-a+5}{3(a-5)^2} = \frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$$

5) У цьому випадку спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їх знаменників. Тоді

$$\frac{\overset{x-2}{x}}{x-4} - \frac{\overset{x-4}{x+2}}{x-2} = \frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)} =$$

$$= \frac{x^2-2x-x^2+4x-2x+8}{(x-4)(x-2)} = \frac{8}{(x-4)(x-2)}.$$

ПРИКЛАД 2 Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{21c^2}{7c-2} - 3c$.

Розв'язання. Подавши вираз $3c$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо:

$$\frac{21c^2}{7c-2} - 3c = \frac{21c^2}{7c-2} - \frac{\overset{7c-2}{3c}}{1} = \frac{21c^2-21c^2+6c}{7c-2} = \frac{6c}{7c-2}.$$

?

1. Як виконати додавання й віднімання раціональних дробів з різними знаменниками?
2. Що є сумою і різницею двох раціональних дробів?

12.1.° Спростіть вираз:

1) $\frac{2b-7c}{6} - \frac{3b+2c}{15}$;

2) $\frac{3x-2}{x} - \frac{3y-1}{y}$;

3) $\frac{5m-n}{14m} - \frac{m-6n}{7m}$;

4) $\frac{a+b}{ab} + \frac{a-c}{ac}$;

5) $\frac{k+4}{k} - \frac{3k-4}{k^2}$;

6) $\frac{x-y}{x^3} - \frac{y-x^2}{x^2y}$;

7) $\frac{2m-3n}{m^2n}+\frac{7m-2n}{mn^2}$; 8) $\frac{c+d}{cd^4}-\frac{c^2-8d}{c^3d^3}$.

12.2.° Виконайте віднімання дробів:

1) $\frac{4d+7}{7d}-\frac{d-6}{6d}$; 4) $\frac{c^2-16}{c^6}-\frac{c-9}{c^5}$;

2) $\frac{m-n}{mn}-\frac{p-n}{np}$; 5) $\frac{1}{x^3}-\frac{1+x^2}{x^5}$;

3) $\frac{6a+2}{ab}-\frac{2a+4}{a^2b}$; 6) $\frac{1-ab}{abc}-\frac{1-ad}{acd}$.

12.3.° Виконайте дії:

1) $\frac{m}{n}-\frac{m}{m+n}$; 3) $\frac{c}{3c-1}-\frac{c}{3c+1}$;

2) $\frac{a}{a-3}-\frac{3}{a+3}$; 4) $\frac{x}{2y+1}-\frac{x}{3y-2}$.

12.4.° Перетворіть у дріб вираз:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}$; 2) $\frac{4}{x}-\frac{5x+4}{x+2}$; 3) $\frac{b}{b-2}-\frac{2}{b+2}$.

12.5.° Виконайте додавання або віднімання дробів:

1) $\frac{18}{b^2+3b}-\frac{6}{b}$; 4) $\frac{m-2n}{6m+6n}-\frac{m-3n}{4m+4n}$;

2) $\frac{2}{c+1}-\frac{c-1}{c^2+c}$; 5) $\frac{a^2+2}{a^2+2a}-\frac{a+4}{2a+4}$;

3) $\frac{m+1}{3m-15}+\frac{1-m}{2m-10}$; 6) $\frac{3x-4y}{x^2-2xy}+\frac{x-3y}{xy-2y^2}$.

12.6.° Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{m}-\frac{16}{m^2+8m}$; 3) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;

2) $\frac{a-2}{2a-6}-\frac{a-1}{3a-9}$; 4) $\frac{b+4}{ab-b^2}-\frac{a+4}{a^2-ab}$.

12.7.° Виконайте дії:

1) $\frac{3}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-9}$; 4) $\frac{3a+b}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}$;

2) $\frac{a^2}{a^2-64}-\frac{a}{a-8}$; 5) $\frac{m}{m+5}-\frac{m^2}{m^2+10m+25}$;

3) $\frac{6b}{9b^2-4}-\frac{1}{3b-2}$; 6) $\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}$.

12.8.° Спростіть вираз:

1) $\frac{4x-y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x-y}$; 2) $\frac{y^2}{y^2-81}-\frac{y}{y+9}$;

3) $\frac{10a}{25a^2-9}-\frac{1}{5a+3}$;

4) $\frac{n}{n-7}-\frac{n^2}{n^2-14n+49}$.

12.9.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{x}{y}-x$;

2) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2$;

3) $\frac{9}{p^2}-\frac{4}{p}+3$;

4) $\frac{3b+4}{b-2}-3$;

5) $6m-\frac{12m^2+1}{2m}$;

6) $\frac{20b^2+5}{2b-1}-10b$.

12.10.° Виконайте дії:

1) $a-\frac{4}{a}$;

2) $\frac{1}{x}+x-2$;

3) $\frac{m}{n^3}-\frac{1}{n}+m$;

4) $\frac{2k^2}{k-5}-k$;

5) $3n-\frac{9n^2-2}{3n}$;

6) $5-\frac{4y-12}{y-2}$.

12.11.• Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1}+\frac{a+1}{a-1}$;

2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{c+7}{c-7}+\frac{28c}{49-c^2}$;

4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a}+\frac{6-3a}{a^2-9}$;

5) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{a+4}{a^2-4}$;

6) $\frac{2p}{p-5}-\frac{5}{p+5}+\frac{2p^2}{25-p^2}$;

7) $\frac{1}{y}-\frac{y+8}{16-y^2}-\frac{2}{y-4}$;

8) $\frac{2b-1}{4b+2}+\frac{4b}{4b^2-1}+\frac{2b+1}{3-6b}$.

12.12.• Спростіть вираз:

1) $\frac{m+n}{m-n}-\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;

2) $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y^2}{2xy+x^2+y^2}$;

3) $\frac{2a}{4a^2-1}-\frac{a+4}{2a^2+a}$;

4) $\frac{b-2}{b^2+6b+9}-\frac{b}{b^2-9}$;

5) $\frac{x-6}{x^2+3x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}$;

6) $\frac{y+2}{y-2}-\frac{y-2}{y+2}-\frac{16}{y^2-4}$.

12.13.• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення даного виразу не залежить від її значення:

1) $\frac{2x+1}{2x-4}+\frac{2x-1}{6-3x}-\frac{x+7}{6x-12}$;

2) $\frac{24-2a}{a^2-16}-\frac{a}{2a-8}+\frac{4}{a+4}$.

12.14.• Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $1-a+\frac{a^2-2}{a+2}$;

2) $\frac{a^2-b^2}{3a+b}+3a-b$;

3) $\frac{c^2+9}{c-3}-c-3$; 4) $\frac{8m^2}{4m-3}-2m-1$.

12.15.° Спростіть вираз:

1) $b+7-\frac{14b}{b+7}$; 2) $5c-\frac{10-29c+10c^2}{2c-5}+2$.

12.16.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\frac{7}{2a-4}-\frac{12}{a^2-4}-\frac{3}{a+2}$, якщо $a=5$;

2) $\frac{2c+3}{2c^2-3c}+\frac{2c-3}{2c^2+3c}-\frac{16c}{4c^2-9}$, якщо $c=-0{,}8$;

3) $\frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2}-\frac{m+4n}{2m-8n}$, якщо $m=3$, $n=0{,}5$.

12.17.° Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{6}{5x-20}-\frac{x-5}{x^2-8x+16}$, якщо $x=3$;

2) $\frac{2y-1}{2y}-\frac{2y}{2y-1}-\frac{1}{2y-4y^2}$, якщо $y=-2\frac{3}{7}$.

12.18.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}+\frac{b^2}{a^2-ab}=0$; 2) $\frac{a+3}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}+\frac{6}{a^2-1}=\frac{2}{a^2-1}$.

12.19.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{6a-4b}-\frac{1}{6a+4b}-\frac{3a}{4b^2-9a^2}=\frac{1}{3a-2b}$;

2) $\frac{c+2}{c^2+3c}-\frac{1}{3c+9}-\frac{2}{3c}=0$.

12.20.° Знайдіть різницю дробів:

1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$; 2) $\frac{1}{b+3}-\frac{b^2-6b}{b^3+27}$.

12.21.° Спростіть вираз:

1) $\frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n}-\frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n}$; 2) $1-\frac{2b-1}{4b^2-2b+1}-\frac{2b}{2b+1}$.

12.22.° Доведіть тотожність

$$\frac{3a^2+24}{a^3+8}-\frac{6}{a^2-2a+4}-\frac{1}{a+2}=\frac{2}{a+2}.$$

12.23.° Спростіть вираз:

1) $\frac{4b}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a^2+ab}+\frac{a+b}{b^2-ab}$;

2) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}+\frac{x^2+4}{8x-2x^3}$;

3) $\frac{1}{(a-5b)^2}-\frac{2}{a^2-25b^2}+\frac{1}{(a+5b)^2}$;

4) $\frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6}-\frac{x+5}{y-2}$.

12.24.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{a+3}{a^2-3a}+\frac{a-3}{3a+9}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{a-3}{3a}$;

2) $\frac{b-4}{2a-1}-\frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a}=\frac{2}{2a-1}$;

3) $\frac{1}{a^2+12a+36}+\frac{2}{36-a^2}+\frac{1}{a^2-12a+36}=\frac{144}{(a^2-36)^2}$.

12.25.•• Доведіть тотожність:

1) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$;

2) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$.

12.26.•• Доведіть тотожність:

1) $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$;

2) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$.

12.27.•• Доведіть, що при будь-якому натуральному n справджується рівність $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$. Скориставшись цією рівністю, знайдіть значення суми

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{4^2\cdot 5^2}+\frac{11}{5^2\cdot 6^2}.$$

12.28.•• Доведіть, що при будь-якому натуральному n справджується рівність

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1-\frac{1}{n}.$$

12.29.•• Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{(a-1)(a-2)}+\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-4)}$;

2) $\frac{1}{a(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+9)}+\frac{1}{(a+9)(a+12)}$.

12.30.•• Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{(a-1)(a-3)}+\frac{1}{(a-3)(a-5)}+\frac{1}{(a-5)(a-7)}$;

2) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+$
$+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$.

12.31.** Доведіть тотожність

$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\frac{8}{x^2-16}=$$
$$=5\left(\frac{1}{(x-1)(x+4)}+\frac{1}{(x-2)(x+3)}+\frac{1}{(x-3)(x+2)}+\frac{1}{(x-4)(x+1)}\right).$$

12.32.** Доведіть тотожність

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}+\frac{8}{1+a^8}+\frac{16}{1+a^{16}}=\frac{32}{1-a^{32}}.$$

12.33.** Доведіть тотожність

$$\frac{3}{1-a^2}+\frac{3}{1+a^2}+\frac{6}{1+a^4}+\frac{12}{1+a^8}+\frac{24}{1+a^{16}}=\frac{48}{1-a^{32}}.$$

12.34.** Доведіть, що коли $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{a+c}+\frac{c-b}{a+b}=1$, то

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+c}+\frac{a+c}{a+b}=4.$$

12.35.** Доведіть, що коли $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{a-b+c}{a-b-c}$, то $b=0$ або $c=0$.

12.36.* Для додатних чисел a, b і c виконується рівність $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$. Знайдіть значення виразу

$$\frac{(a+b)^2}{c^2}+\frac{(a+c)^2}{b^2}+\frac{(b+c)^2}{a^2}.$$

12.37.* Для додатних чисел a, b і c виконується рівність $\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{a+c+d}=\frac{c}{a+b+d}=\frac{d}{a+b+c}$. Знайдіть значення виразу $\frac{a+b+c}{d}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{b+c+d}{a}$.

12.38.* Числа a, b і c такі, що $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Доведіть, що $\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}$.

12.39.* Знайдіть значення виразу $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}$, якщо $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$ і $x\neq y$.

12.40.* Числа a, b і c такі, що $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=0$. Доведіть, що один з доданків у лівій частині рівності дорівнює 0.

12.41.* Числа a, b і c такі, що $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=-\frac{1}{30}$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}$; 2) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$.

12.42.* Числа a, b і c такі, що $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=\frac{3}{2}$. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$.

12.43.* Числа a, b і c такі, що $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Доведіть, що $\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}=3$.

12.44.* Числа a, b і c такі, що $\frac{b+c-a}{a}=\frac{a+c-b}{b}=\frac{b+a-c}{c}$. Яких значень може набувати вираз $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$?

12.45.* Знайдіть значення виразу $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$, якщо $xyz=1$.

13. Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня

Ви знаєте правила множення і ділення звичайних дробів. Їх можна виразити такими рівностями:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

За аналогічними правилами виконують множення і ділення раціональних дробів.

Добутком двох раціональних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників даних дробів, а знаменник — добутку їх знаменників.

Часткою двох раціональних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельника діленого і знаменника дільника, а знаменник — добутку знаменника діленого і чисельника дільника.

ПРИКЛАД 1 Виконайте дії:

1) $(2x-12)\cdot\dfrac{4x}{x^2-12x+36}$;

2) $\dfrac{a^2+2ab}{a+9}:\dfrac{a^2-4b^2}{3a+27}$;

3) $\dfrac{5c^2-35c}{c+2}:(c-7)$.

Розв'язання

1) Подавши многочлен $2x-12$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо:

$$(2x-12)\cdot\frac{4x}{x^2-12x+36}=\frac{2x-12}{1}\cdot\frac{4x}{x^2-12x+36}=\frac{2(x-6)\cdot 4x}{(x-6)^2}=\frac{8x}{x-6}.$$

2) $\dfrac{a^2+2ab}{a+9}:\dfrac{a^2-4b^2}{3a+27}=\dfrac{a(a+2b)}{a+9}\cdot\dfrac{3(a+9)}{(a-2b)(a+2b)}=\dfrac{3a}{a-2b}$.

3) $\dfrac{5c^2-35c}{c+2}:(c-7)=\dfrac{5c^2-35c}{c+2}:\dfrac{c-7}{1}=\dfrac{5c(c-7)}{c+2}\cdot\dfrac{1}{c-7}=\dfrac{5c}{c+2}$.

Правило множення двох дробів можна узагальнити для знаходження добутку трьох або більше раціональних дробів. Наприклад, для трьох дробів маємо:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{A\cdot C\cdot P}{B\cdot D\cdot Q}.$$

ПРИКЛАД 2 Спростіть вираз $\dfrac{2a^5}{15b^3}\cdot\dfrac{10b^2}{7c^4}:\dfrac{4a^2}{9bc^3}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{2a^5}{15b^3}\cdot\frac{10b^2}{7c^4}:\frac{4a^2}{9bc^3}=\frac{2a^5}{15b^3}\cdot\frac{10b^2}{7c^4}\cdot\frac{9bc^3}{4a^2}=\frac{2a^5\cdot 10b^2\cdot 9bc^3}{15b^3\cdot 7c^4\cdot 4a^2}=$$

$$=\frac{2\cdot 10\cdot 9\cdot a^5b^3c^3}{15\cdot 7\cdot 4\cdot a^2b^3c^4}=\frac{3a^3}{7c}.$$

Застосовуючи правило множення дробів, можна отримати правило піднесення раціональних дробів до степеня. Для натурального n, $n>1$, маємо:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\underbrace{\frac{A}{B}\cdot\frac{A}{B}\cdot\ldots\cdot\frac{A}{B}}_{n}=\frac{\overbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}^{n}}{\underbrace{B\cdot B\cdot\ldots\cdot B}_{n}}=\frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n=1$ прийнято $\left(\dfrac{A}{B}\right)^1=\dfrac{A}{B}$.

Отже,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n},$$

де n — натуральне число.

Щоб піднести раціональний дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник і перший результат записати як чисельник, а другий — як знаменник дробу.

ПРИКЛАД 3 Подайте у вигляді дробу вираз $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

Розв'язання. $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{3^3 \cdot (a^2)^3}{2^3b^3(c^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}$.

?

1. Що є добутком двох раціональних дробів?
2. Що є часткою двох раціональних дробів?
3. Як піднести раціональний дріб до степеня?

13.1.° Виконайте множення:

1) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$;
2) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$;
3) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$;
4) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$;
5) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$;
6) $\frac{25a^2c}{64b^4} \cdot \frac{77b^6}{10ac^3}$.

13.2.° Спростіть вираз:

1) $\frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12}$;
2) $\frac{a}{2b} \cdot 2a$;
3) $15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4}$;
4) $\frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6p^2}$.

13.3.° Спростіть вираз:

1) $\frac{2mn + n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n}$;
2) $\frac{7a + 7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a + b}$;
3) $\frac{m - 2}{m^2 - 49} \cdot \frac{m + 7}{m - 2}$;
4) $(a + 4) \cdot \frac{a}{2a + 8}$;
5) $\frac{4a^2 - 4a + 1}{3a + 3} \cdot \frac{a + 1}{2a - 1}$;
6) $\frac{a^2 - 25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2 - 5a}$.

13.4.° Виконайте множення:

1) $\frac{ab - b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4}$;
2) $\frac{5x - 5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x - y}$;
3) $\frac{6}{m^2 - 9n^2} \cdot (m - 3n)$;
4) $\frac{3c - 9}{9c^2 + 6c + 1} \cdot \frac{3c + 1}{c - 3}$.

13.5.° Виконайте ділення:

1) $\frac{3b}{8} : b$;
2) $\frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2}$;
3) $-\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3}$;

4) $a^2 : \frac{a}{b^2c}$; 5) $\frac{36a}{c^3} : (4a^2c)$; 6) $\frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{12x^2}{55z^6}\right)$.

13.6.° Знайдіть частку:

1) $\frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48}$; 2) $\frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7n^2}$; 3) $\frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2)$.

13.7.° Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2-y^2}{x^2} : \frac{6x+6y}{x^5}$;

2) $\frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20}$;

3) $\frac{x-y}{xy} : \frac{x^2-y^2}{3xy}$;

4) $\frac{a^2-4a+4}{a+2} : (a-2)$;

5) $(p^2-16k^2) : \frac{p+4k}{p}$;

6) $\frac{a^2-ab}{a^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

13.8.° Виконайте ділення:

1) $\frac{p+3}{p^2-2p} : \frac{p+3}{4p-8}$;

2) $\frac{a^2-16}{a-3} : \frac{a+4}{a-3}$;

3) $\frac{y-9}{y-8} : \frac{y^2-81}{y^2-16y+64}$;

4) $(x^2-49y^2) : \frac{x-7y}{x}$.

13.9.° Виконайте піднесення до степеня:

1) $\left(\frac{c}{2d}\right)^5$; 2) $\left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3$; 4) $\left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2$.

13.10.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}$; 2) $\left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3$; 4) $\left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6$.

13.11.° Виразіть змінну x через змінні a і b, якщо:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=b$;

2) $\frac{a}{b}+\frac{x}{4}=\frac{b}{a}$.

13.12.° Виразіть змінну x через змінні m і n, якщо:

1) $2x-\frac{m}{n}=2$;

2) $\frac{1}{m}-\frac{1}{x}=\frac{1}{n}$.

13.13.° Спростіть вираз:

1) $\frac{33m^8}{34n^8} : \frac{88m^4}{51n^4} : \frac{21m^6}{16n^2}$;

2) $\frac{36x^6}{49y^5} : \frac{24x^9}{25y^4} \cdot \frac{7x^2}{30y}$;

3) $\left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4 : \left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3$;

4) $\left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3$.

13.14.° Спростіть вираз:

1) $\frac{3a^4b^3}{10c^5} \cdot \frac{4b^4c^2}{27a^7} : \frac{5b^7}{9a^3c^3}$;

2) $\frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^8}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^{12}}$;

3) $\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4 \cdot \frac{b^{18}}{50a^{16}}$; 4) $\left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4 : \left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3$.

13.15.° Замініть змінну x таким виразом, щоб утворилася тотожність:

1) $\left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2 \cdot x = \frac{6a}{b^2}$; 2) $\left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3 : x = \frac{b^6}{12}$.

13.16.° Виконайте множення і ділення дробів:

1) $\frac{4c-d}{c^2+cd} \cdot \frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}$;

2) $\frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9} \cdot \frac{b^3+27}{5b-15}$;

3) $\frac{a^3-16a}{3a^2b} \cdot \frac{12ab^2}{4a+16}$;

4) $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \cdot \frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}$;

5) $\frac{m+2n}{2-3m} : \frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m}$;

6) $\frac{a^3+8}{16-a^4} : \frac{a^2-2a+4}{a^2+4}$;

7) $\frac{x^2-12x+36}{3x+21} \cdot \frac{x^2-49}{4x-24}$;

8) $\frac{3a+15b}{a^2-81b^2} : \frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}$.

13.17.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a^4-1}{a^3-a} \cdot \frac{a}{1+a^2}$;

2) $\frac{a^2-8ab}{12b} : \frac{8b^2-ab}{24a}$;

3) $\frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2} : \frac{15n-15m}{4m^2+4n^2}$;

4) $\frac{mn^2-36m}{m^3-8} : \frac{2n+12}{6m-12}$;

5) $\frac{a^4-1}{a^2-a+1} : \frac{a-1}{a^3+1}$;

6) $\frac{4x^2-100}{6x} : (2x^2-20x+50)$.

13.18.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\frac{x}{4x^2-4y^2} : \frac{1}{6x+6y}$, якщо $x = 4{,}2$, $y = -2{,}8$;

2) $(3a^2-18a+27) : \frac{3a-9}{4a}$, якщо $a = 0{,}5$;

3) $\frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2} : \frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}$, якщо $a = 0{,}8$.

13.19.° Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{a^2-ab} : \frac{b}{b^2-a^2}$, якщо $a = 2\frac{1}{3}$, $b = -\frac{3}{7}$;

2) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2} : \frac{3a+6b}{2a-6b}$, якщо $a = 4$, $b = -5$.

13.20.° Спростіть вираз (n — натуральне число):

1) $\frac{a^{n+4}b^{3n+2}}{c^{n+5}} : \frac{a^{n+3}b^{3n+1}}{c^{n+8}}$; 2) $\frac{(a^n+b^n)^2-4a^nb^n}{a^{3n}+b^{3n}} : \frac{a^{2n}-b^{2n}}{(a^n-b^n)^2+4a^nb^n}$.

13.21.° Спростіть вираз (n — натуральне число):

1) $\frac{x^{n+3}y^{4n-1}}{z^{n+4}} \cdot \frac{z^{2n+5}}{x^{n+1}y^{3n-2}}$;

2) $\frac{(x^n - 2y^n)^2 + 8x^n y^n}{x^{3n} - 8y^{3n}} : \frac{x^{2n} - 4y^{2n}}{(x^n + 2y^n)^2 - 8x^n y^n}$.

13.22.° Відомо, що $x - \frac{1}{x} = 9$. Знайдіть значення виразу $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

13.23.° Відомо, що $3x + \frac{1}{x} = -4$. Знайдіть значення виразу $9x^2 + \frac{1}{x^2}$.

13.24.° Дано: $x^2 + \frac{16}{x^2} = 41$. Знайдіть значення виразу $x + \frac{4}{x}$.

13.25.° Дано: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$. Знайдіть значення виразу $x - \frac{1}{x}$.

13.26.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2 - 36}{a^2 + ab - 6a - 6b} : \frac{a^2 + ab + 6a + 6b}{a^2 + 2ab + b^2}$;

2) $\frac{a^2 + a - ab - b}{a^2 + a + ab + b} : \frac{a^2 - a - ab + b}{a^2 - a + ab - b}$.

13.27.° Виконайте дії:

1) $\frac{25 - 5a + 5b - ab}{25 + 5a - 5b - ab} \cdot \frac{ab - 5a - 5b + 25}{ab + 5a + 5b + 25}$;

2) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - ab - 4a + 4b} : \frac{a^2 - ab + 4a - 4b}{a^2 - 16}$.

13.28.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{8a^2}{a - 3b} : \frac{6a^3}{a^2 - 9b^2} \cdot \frac{3a}{4a + 12b} = 1$;

2) $\frac{a^4 - 1000ab^3}{a^2 - 2ab + b^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2b - 100b^3} : \frac{a^3 + 10a^2b + 100ab^2}{ab + 10b^2} = \frac{a + b}{a - b}$.

13.29.° Доведіть тотожність

$$\frac{a^2 + a}{2a - 12} \cdot \frac{6a + 6}{2a + 12} : \frac{9a^3 + 18a^2 + 9a}{a^2 - 36} = \frac{1}{6}.$$

13.30.°° Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b + 1}{a^2 - 2ab + b^2 + 2a - 2b + 1} : \frac{a + b - 1}{a - b + 1}$;

2) $\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 + 4x - 21} : \frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + 14x + 49}$.

13.31.** Спростіть вираз:

1) $\frac{n^2-9}{n^2-1}:\frac{n^2+4n+3}{n^2-4n+3}$; 2) $\frac{a^5+1}{a^3+a^2+a+1}:\frac{a^4-a^3+a^2-a+1}{a^4-1}$.

14. Тотожні перетворення раціональних виразів

Правила дій над раціональними дробами дають змогу будь-який раціональний вираз перетворити в раціональний дріб.

Розглянемо це на прикладах.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз

$$\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

Розв'язання. Як і обчислення значення числового виразу, що містить кілька арифметичних дій, спрощення даного виразу можна виконати по діях, визначаючи порядок виконання відповідно до порядку виконання арифметичних дій: спочатку — віднімання виразів, які стоять у дужках, потім — ділення і наприкінці — віднімання:

1) $\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}=\frac{\overset{a-2}{3a}}{a-2}-\frac{6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}$;

2) $\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}:\frac{a-4}{a^2-4}=\frac{3a^2-12a}{(a-2)^2}\cdot\frac{a^2-4}{a-4}=$

$=\frac{3a(a-4)}{(a-2)^2}\cdot\frac{(a-2)(a+2)}{a-4}=\frac{3a(a+2)}{a-2}=\frac{3a^2+6a}{a-2}$;

3) $\frac{3a^2+6a}{a-2}-\frac{2a^2+8a}{a-2}=\frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2}=\frac{a^2-2a}{a-2}=$

$=\frac{a(a-2)}{a-2}=a.$

Відповідь: a.

Перетворення раціонального виразу можна виконувати не по окремих діях, а «ланцюжком». Проілюструємо цей прийом на прикладі.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}$ не залежить від значення a.

Розв'язання. $\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{18-6a}\cdot\frac{54a}{5a+a^2}=\frac{3a}{a-3}+\frac{a+5}{6\,(3-a)}\cdot\frac{54a}{a\,(5+a)}=$

$$=\frac{3a}{a-3}+\frac{9}{3-a}=\frac{3a}{a-3}-\frac{9}{a-3}=\frac{3a-9}{a-3}=\frac{3\,(a-3)}{a-3}=3.$$

Отже, при всіх допустимих значеннях a значення даного виразу дорівнює 3.

ПРИКЛАД 3 Доведіть тотожність $\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{4}{a+1}$.

Розв'язання. У цьому випадку для перетворення лівої частини даної рівності доцільно розкрити дужки, застосовуючи розподільну властивість множення:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1}+\frac{a-7}{a+1}\right)\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=\frac{a-7}{3a-1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}+\frac{a-7}{a+1}\cdot\frac{3a-1}{a^2-7a}=$$

$$\overset{a+1}{=}\ \frac{1}{a}+\frac{3a-1}{a\,(a+1)}=\frac{a+1+3a-1}{a\,(a+1)}=\frac{4a}{a\,(a+1)}=\frac{4}{a+1}.$$

Тотожність доведено.

ПРИКЛАД 4 Спростіть вираз $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

Розв'язання. Записавши даний вираз у вигляді частки чисельника і знаменника, отримуємо:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right):\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=\frac{bc+ac+ab}{abc}:\frac{c+a+b}{abc}=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{abc}\cdot\frac{abc}{c+a+b}=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Заданий вираз можна спростити іншим способом, використовуючи основну властивість дробу, а саме помножити його чисельник і знаменник на одночлен abc:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc}{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)abc}=\frac{\frac{1}{a}\cdot abc+\frac{1}{b}\cdot abc+\frac{1}{c}\cdot abc}{\frac{1}{ab}\cdot abc+\frac{1}{bc}\cdot abc+\frac{1}{ac}\cdot abc}=$$

$$=\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Відповідь: $\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}$.

14.1.• Виконайте дії:

1) $\frac{a+2}{a^2-2a+1} : \frac{a^2-4}{3a-3} - \frac{3}{a-2}$;

2) $\frac{b^2+3b}{b^3+9b} \cdot \left(\frac{b-3}{b+3} + \frac{b+3}{b-3}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{a^2-4ab+4b^2} - \frac{1}{4b^2-a^2}\right) : \frac{2a}{a^2-4b^2}$;

4) $\left(\frac{a-8}{a^2-10a+25} - \frac{a}{a^2-25}\right) : \frac{a-20}{(a-5)^2}$;

5) $\left(\frac{2x+1}{x^2+6x+9} - \frac{x-2}{x^2+3x}\right) : \frac{x^2+6}{x^3-9x}$.

14.2.• Виконайте дії:

1) $\frac{b+4}{b^2-6b+9} : \frac{b^2-16}{2b-6} - \frac{2}{b-4}$;

2) $\frac{2x}{x^2-y^2} : \left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{y^2-x^2}\right)$;

3) $\left(\frac{2a-3}{a^2-4a+4} - \frac{a-1}{a^2-2a}\right) : \frac{a^2-2}{a^3-4a}$.

14.3.• Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{15}{x-7} - x - 7\right) \cdot \frac{7-x}{x^2-16x+64}$;

2) $\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{a}{b^2}\right) \cdot \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{2}{b-a}$;

3) $\left(\frac{a}{a-1} - \frac{a}{a+1} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) : \frac{a^2+a}{(a-1)^2}$;

4) $\left(\frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y} - \frac{16y^2}{x^2-4y^2}\right) : \frac{4y}{x+2y}$;

5) $\left(\frac{3a-8}{a^2-2a+4} + \frac{1}{a+2} - \frac{4a-28}{a^3+8}\right) \cdot \frac{a^2-4}{4}$.

14.4.• Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2+14x+49}{x+6} : \left(\frac{13}{x+6} - x + 6\right)$;

2) $\left(c - \frac{2c-9}{c+8}\right) : \frac{c^2+3c}{c^2-64} + \frac{24}{c}$;

3) $\left(\frac{36}{x^2-9} - \frac{x-3}{x+3} - \frac{3+x}{3-x}\right) : \frac{6}{3-x}$;

4) $\left(\frac{2y-1}{y^2+2y+4} + \frac{9y+6}{y^3-8} + \frac{1}{y-2}\right) \cdot \frac{y^2-4}{18}$.

14.5.° Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{ab}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{2b-2a}\right):\dfrac{2b}{a^2-b^2}=\dfrac{a-b}{4}$;

2) $\left(\dfrac{8a}{4-a^2}-\dfrac{a-2}{a+2}\right):\dfrac{a+2}{a}+\dfrac{2}{a-2}=-1$;

3) $\left(\dfrac{3}{36-c^2}+\dfrac{1}{c^2-12c+36}\right)\cdot\dfrac{(c-6)^2}{2}+\dfrac{3c}{c+6}=2$.

14.6.° Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{b}{a^2-ab}-\dfrac{2}{a-b}-\dfrac{a}{b^2-ab}\right):\dfrac{a^2-b^2}{4ab}=\dfrac{4}{a+b}$;

2) $\dfrac{(a-b)^2}{a}\cdot\left(\dfrac{a}{(a-b)^2}+\dfrac{a}{b^2-a^2}\right)+\dfrac{3a+b}{a+b}=3$.

14.7.° Чи залежить значення виразу від значення змінної, яка входить до нього:

1) $\left(\dfrac{a+3}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2+a}\right):\dfrac{3a+3}{a^2-a}$;

2) $\left(\dfrac{a}{a^2-49}-\dfrac{1}{a+7}\right):\dfrac{7a}{a^2+14a+49}-\dfrac{2}{a-7}$?

14.8.° Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної, яка входить до нього:

1) $\dfrac{3x^2-27}{4x^2+2}\cdot\left(\dfrac{6x+1}{x-3}+\dfrac{6x-1}{x+3}\right)$;

2) $\dfrac{3}{2a-3}-\dfrac{8a^3-18a}{4a^2+9}\cdot\left(\dfrac{2a}{4a^2-12a+9}-\dfrac{3}{4a^2-9}\right)$.

14.9.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a-\dfrac{a^2}{a+1}}{a-\dfrac{a}{a+1}}$;

2) $\dfrac{a-\dfrac{6a-9}{a}}{1-\dfrac{3}{a}}$;

3) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$;

4) $\dfrac{\dfrac{2a-b}{b}+1}{\dfrac{2a+b}{b}-1}+\dfrac{3-\dfrac{b}{a}}{\dfrac{3a}{b}-1}$.

14.10.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a-b}{a}}$;

2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$.

14.11.• Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a^2}{b^3-ab^2}+\frac{a-b}{b^2}-\frac{1}{b}\right):\left(\frac{a+b}{b-a}-\frac{b-a}{a+b}+\frac{6a^2}{a^2-b^2}\right)$;

2) $\left(\frac{a+2}{4a^3-4a^2+a}-\frac{2-a}{1-8a^3}\cdot\frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a}\right):\left(\frac{1}{1-2a}\right)^2-\frac{8a-1}{2a^2+a}$;

3) $(a^2-b^2)\cdot\left(\frac{2a^2b+2ab^2}{7a^3+a^2b+7ab^2+b^3}\cdot\frac{7a+b}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a^2+b^2}\right)$.

14.12.• Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{18y^2+3y}{27y^3-1}-\frac{3y+1}{9y^2+3y+1}\right):\left(1-\frac{3y-1}{y}-\frac{5-6y}{3y-1}\right)$;

2) $\left(3+\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\right):\left(3+\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\right)\cdot\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$.

14.13.• Доведіть тотожність:

1) $\frac{16}{(a-2)^4}:\left(\frac{1}{(a-2)^2}-\frac{2}{a^2-4}+\frac{1}{(a+2)^2}\right)-\frac{8a}{(a-2)^2}=1$;

2) $\frac{a+11}{a+9}-\left(\frac{a+5}{a^2-81}+\frac{a+7}{a^2-18a+81}\right):\left(\frac{a+3}{a-9}\right)^2=1$;

3) $\left(a^2-b^2-\frac{4a^2b-4ab^2}{a+b}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)=(a-b)^2$.

14.14.• Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{b^2+9}{3b^2-b^3}+\left(\frac{b+3}{b-3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{b-3}+\frac{6}{9-b^2}-\frac{3}{b^2+3b}\right)$ набуває додатних значень.

14.15.• Підставте замість x даний вираз і виконайте спрощення:

1) $\frac{x-a}{x-b}$, якщо $x=\frac{ab}{a+b}$;

2) $\frac{a-bx}{b+ax}$, якщо $x=\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{ax}{a+x}-\frac{bx}{b-x}$, якщо $x=\frac{ab}{a-b}$.

14.16.•• Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{1}{2-a}+\frac{6a-4-a^2}{a^3-8}-\frac{2-a}{a^2+2a+4}\right)\cdot\frac{a^3+4a^2+8a+8}{4-4a+a^2-a^3}$;

2) $\left(\frac{x-2y}{x^3+y^3}+\frac{y}{x^3-x^2y+xy^2}\right):\frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}+\frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$;

3) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b-c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b-c}}\cdot\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{b-a-c}{abc}$.

14.17.** Доведіть, що значення виразу є додатним при всіх допустимих значеннях змінних:

1) $\dfrac{2}{(a+b)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+\dfrac{1}{a^2+b^2+2ab}\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{a^2}{4b^3}+\dfrac{2}{a}\right):\left(\dfrac{a}{2b^2}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{a}\right):\dfrac{(a-2b)^2+8ab}{4+\dfrac{2a}{b}}$.

14.18.** Спростіть вираз

$$\left(\frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)}+\frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)}\right):\left(\frac{5}{x^2+1}+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{3}{2(x-1)}\right).$$

14.19.** Доведіть тотожність $\dfrac{\left(\dfrac{a^3}{(b-1)^3}+1\right)\left(\dfrac{a}{b-1}-1\right)}{\left(\dfrac{a^2}{(b-1)^2}-1\right)\left(\dfrac{a^2}{(b-1)^2}-\dfrac{a}{b-1}+1\right)}=1$.

14.20.** Спростіть вираз

$$\frac{1}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\frac{3}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{6}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

14.21.** Спростіть вираз

$$\frac{1}{(a+b)^3}\cdot\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}\right)+\frac{2}{(a+b)^4}\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}\right)+\frac{2}{(a+b)^5}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right).$$

14.22.* Числа a, b і c такі, що $a+b+c=7$, $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=0{,}7$.

Знайдіть значення виразу $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$.

14.23.* Числа a, b і c такі, що $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$. Доведіть, що

$\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0$.

14.24.* Знайдіть суму $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{\ldots+\dfrac{1}{n}}}}}}+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{\ldots+\dfrac{1}{n}}}}}$.

15. Рівносильні рівняння. Рівняння-наслідок. Раціональні рівняння

Нехай задано функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ та поставлено задачу знайти множину значень аргументу x, при яких значення функцій f і g рівні. У такому випадку кажуть, що треба розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$.

Означення. Областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ називають множину значень змінної x, при яких мають зміст обидві частини рівняння.

З означення випливає, що областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ є множина $D(f) \cap D(g)$.

Розглянемо кілька прикладів:

- областю визначення лінійного рівняння, тобто рівняння виду $ax = b$, є множина всіх чисел;
- областю визначення рівняння $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$ є множина $\{x \mid x \neq -2\}$;
- областю визначення рівняння $\frac{x + 3}{|x| - x} = 0$ є множина $\{x \mid x < 0\}$.

Незважаючи на те що рівняння $x^2 = -2$ не має коренів, його областю визначення є множина всіх чисел.

Для того щоб значення змінної x було коренем рівняння $f(x) = g(x)$, необхідно виконання умови $x \in D(f) \cap D(g)$. Цей факт ілюструє діаграма Ейлера (рис. 15.1). Наприклад, ви поки що не вмієте розв'язувати рівняння $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$. Проте ви сміливо можете стверджувати, що число 0 не є його коренем.

Розглянемо два рівняння: $x^2 = 4$ і $|x| = 2$.

Очевидно, що кожне з них має одні й ті самі корені: -2 і 2.

Рис. 15.1

У таких випадках кажуть, що рівняння $x^2 = 4$ і $|x| = 2$ **рівносильні**.

Означення. Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називають рівносильними, якщо множини їх коренів рівні.

З означення випливає, що коли потрібно довести рівносильність двох рівнянь, то треба довести, що кожний корінь першого рівняння є коренем другого рівняння, і навпаки, кожний корінь другого рівняння є коренем першого рівняння.

Наведемо приклади пар рівносильних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ і } 2x = 0;$$

$$2x = 4 \text{ і } 4x - 8 = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ і } (x - 1)(x + 1) = 0;$$

$$x - 1 = 0 \text{ і } (x^2 + 1)(x - 1) = 0;$$

$$(x - 1)^{100} = 0 \text{ і } (x - 1)^{1000} = 0.$$

Множина коренів кожного з рівнянь $x^2 = -5$ і $|x| = -3$ є порожньою, тобто множини коренів цих рівнянь рівні. Отже, за означенням ці рівняння є рівносильними.

Розв'язуючи рівняння, важливо знати, за допомогою яких перетворень можна замінити дане рівняння на рівносильне.

Теорема 15.1. ***Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Доведення. Доведемо, що рівняння

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

і

$$f(x) + c = g(x) + c \; (c \text{ — деяке число}) \qquad (2)$$

рівносильні.

Нехай деяке число a є коренем рівняння (1). Тоді справджується числова рівність $f(a) = g(a)$. Отже, правильною буде й така числова рівність: $f(a) + c = g(a) + c$. Це означає, що число a є коренем рівняння (2). Таким чином, кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2).

За допомогою аналогічних міркувань можна показати, що кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1).

Отже, рівняння (1) і (2) рівносильні. ▲

Теорема 15.2. ***Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Теорема 15.3. ***Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Доведення теорем 15.2 і 15.3 аналогічні доведенню теореми 15.1. Проведіть доведення самостійно.

Зауваження. З теореми 15.1 не випливає, що коли до обох частин рівняння додати вираз зі змінною, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Так, якщо до обох частин рівняння $\frac{1}{x-5}+x^2=25+\frac{1}{x-5}$ додати дріб $\frac{1}{5-x}$, то отримаємо рівняння $x^2=25$, яке не рівносильне заданому.

Означення. Якщо множина коренів рівняння $f_2(x)=g_2(x)$ містить множину коренів рівняння $f_1(x)=g_1(x)$, то рівняння $f_2(x)=g_2(x)$ називають наслідком рівняння $f_1(x)=g_1(x)$.

Наприклад, рівняння $x^2=25$ є наслідком рівняння

$$\frac{1}{x-5}+x^2=25+\frac{1}{x-5}.$$

На рисунку 15.2 означення рівняння-наслідку проілюстровано за допомогою діаграми Ейлера.

Ті корені рівняння-наслідку, які не є коренями заданого рівняння, називають **сторонніми коренями** для заданого рівняння.

Наприклад, рівняння $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)=0$ є наслідком рівняння $2x-1=0$. Рівняння-наслідок має два корені: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-2$, а задане рівняння має один корінь $x=\frac{1}{2}$. У цьому випадку корінь $x=-2$ є стороннім коренем для заданого рівняння $2x-1=0$.

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то, наприклад, наслідком рівняння $x^2=-5$ є будь-яке рівняння з однією змінною x.

Зауважимо, що коли два рівняння рівносильні, то кожне з них можна вважати наслідком іншого.

Розв'язуючи рівняння, треба намагатися побудувати ланцюжок рівносильних рівнянь, щоб урешті-решт отримати рівняння, яке рівносильне даному і корені якого легко знайти. Наприклад, так ви робили, розв'язуючи рівняння з вправ 1.1–1.6.

Рис. 15.2

Проте якщо під час розв'язування рівняння рівносильність не було дотримано і перейдено до рівняння-наслідку, то отримані при цьому сторонні корені можна відкинути за допомогою перевірки.

Розв'яжемо рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$. Прирівнявши чисельник дробу до нуля, отримаємо рівняння $x^2-4=0$, коренями якого є числа -2 і 2. Проте число -2 не належить області визначення даного рівняння, а число 2 задовольняє задане рівняння і є його єдиним коренем.

Розв'язуючи рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$, ми перейшли до рівняння-наслідку $x^2-4=0$, корені якого було перевірено.

При розв'язуванні рівняння важливо розуміти, на якому етапі було порушено рівносильність і що спричинило це порушення.

Так, при переході від рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ до рівняння $x^2-4=0$ було розширено область визначення даного рівняння, тобто саме зняття обмеження $x \neq -2$ й призвело до появи стороннього кореня $x=-2$.

Зазначимо, що розширення області визначення рівняння не завжди призводить до появи сторонніх коренів. Наприклад, перехід від рівняння $\frac{x^2-4}{x+1}=0$ до рівняння $x^2-4=0$ є рівносильним, хоча при цьому розширюється область визначення даного рівняння.

Розглянуті рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ і $\frac{x^2-4}{x+1}=0$ є рівняннями виду $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени.

Ви знаєте, що *дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.* Тому розв'язування рівняння вказаного виду зводиться до розв'язування рівняння $f(x)=0$ і перевірки умови $g(x) \neq 0$. Іншими словами, множина коренів рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ дорівнює перетину множин $\{x \mid f(x)=0\}$ і $\{x \mid g(x) \neq 0\}$. У таких випадках кажуть, що рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$

Наприклад, рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-4=0, \\ x+2 \neq 0. \end{cases}$$

Легко встановити, що розв'язком цієї системи є число 2. Оскільки система рівносильна рівнянню, то без будь-яких перевірок можна стверджувати, що число 2 — єдиний корінь даного рівняння.

Означення. **Рівняння, ліва і права частини якого є раціональними виразами, називають раціональним.**

Як відомо, будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді дробу. Тому будь-яке раціональне рівняння можна звести до рівняння виду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння

$$\frac{3x+5}{6x+3} + \frac{1}{4x^2-1} = \frac{x}{2x-1}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{3x+5}{3(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{x}{2x-1} = 0;$$

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)} = 0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 4x-2=0, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x=0,5, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$$

Отже, дане рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$\frac{2x^2-4x-16}{x-4} - x = 0.$$

Розв'язання. Запишемо ліву частину рівняння у вигляді дробу:

$$\frac{2x^2-4x-16-x^2+4x}{x-4} = 0.$$

Звідси

$$\frac{x^2-16}{x-4} = 0.$$

Це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 4 \neq 0. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} x = 4 \text{ або } x = -4, \\ x \neq 4; \end{cases}$$

$$x = -4.$$

Відповідь: -4.

ПРИКЛАД 3 Турист проплив на човні 3 км за течією річки і 2 км проти течії за 30 хв. Знайдіть швидкість човна в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

Розв'язання. Нехай швидкість човна в стоячій воді дорівнює x км/год. Тоді його швидкість за течією річки дорівнює $(x + 2)$ км/год, а проти течії — $(x - 2)$ км/год. Турист проплив 3 км за течією за $\frac{3}{x+2}$ год, а 2 км проти течії — за $\frac{2}{x-2}$ год. Оскільки весь шлях було пройдено за 30 хв $= \frac{1}{2}$ год, то $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{3x - 6 + 2x + 4}{x^2 - 4} - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\frac{10x - 4 - x^2 + 4}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\frac{10x - x^2}{2(x^2 - 4)} = 0;$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 = 0, \\ 2(x^2 - 4) \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10 - x) = 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ або } x = 10.$$

Корінь $x = 0$ не задовольняє змісту задачі. Отже, швидкість човна в стоячій воді дорівнює 10 км/год.

Відповідь: 10 км/год.

1. Що називають областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$?
2. Які два рівняння називають рівносильними?
3. За допомогою яких перетворень даного рівняння можна отримати рівняння, рівносильне даному?
4. Яке рівняння називають наслідком даного?
5. Які корені називають сторонніми коренями даного рівняння?
6. Опишіть, як розв'язують рівняння виду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени.
7. Яке рівняння називають раціональним?

15.1.° Чи є рівносильними рівняння:

1) $x + 2 = 10$ і $3x = 24$;
2) $-2x = -6$ і $\frac{1}{3}x = 1$;
3) $x - 5 = 0$ і $x(x - 5) = 0$;
4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ і $(0{,}4 - 0{,}1x)(7x + 14) = 0$;
5) $\frac{6}{x} = 0$ і $x^2 = -4$;
6) $x + 1 = 1 + x$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$;
7) $x^3 = 1$ і $|x| = 1$;
8) $x^{100} = 1$ і $x^{1000} = 1$;
9) $\frac{x}{x} = 1$ і $x = x$;
10) $x^2 + 2x + 1 = 0$ і $x + 1 = 0$;
11) $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ і $x + 1 = 0$;
12) $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$ і $x - 1 = 0$;
13) $\frac{x^2-9}{x+2} = 0$ і $x^2 - 9 = 0$?

15.2.° Чи є рівносильними рівняння:

1) $x + 6 = 10$ і $2x - 1 = 7$;
2) $x^2 = x$ і $x = 1$;
3) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x + 1) = 0$ і $4x^2 - 1 = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$ і $\frac{3}{x-1} = 0$;
5) $\frac{x+1}{x+1} = 1$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$;

6) $\frac{x-2}{x-2}=0$ і $2x^2+3=0$;

7) $x^2+4x+4=0$ і $\frac{x+2}{x-1}=0$;

8) $\frac{x^2-9}{x-3}=0$ і $x+3=0$;

9) $\frac{x+1}{x+1}=0$ і $\frac{x^2-1}{x^2-1}=0$?

15.3.° Складіть рівняння, яке рівносильне даному:

1) $2x-3=4$;
2) $|x|=1$;
3) $x+6=x-2$;
4) $\frac{x-1}{x-1}=0$;
5) $\frac{x-1}{x-1}=1$.

15.4.° Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:

1) $4x-8=x+3$ і $4x-x=8+3$;
2) $x^2-1=3$ і $x^2+5=9$;
3) $\frac{3x-5}{2}-\frac{x}{6}=1$ і $9x-15-x=6$;
4) $(2x+1)(x^2+1)=3(x^2+1)$ і $2x+1=3$.

15.5.° Чи буде рівняння, отримане в результаті вказаного перетворення, рівносильним даному:

1) у рівнянні $3(2x-1)-5(4x+2)=1$ розкрити дужки і звести подібні доданки;
2) у рівнянні $x^2+\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-7}=49$ різницю $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-7}$ замінити на нуль;
3) у рівнянні $\frac{x^2-1}{x-1}+3x-5=0$ скоротити дріб;
4) обидві частини рівняння $x^3=x$ поділити на x;
5) обидві частини рівняння $(x+1)(x^2+4)=x^2+4$ поділити на x^2+4;
6) обидві частини рівняння $\frac{x^2}{x}=2$ помножити на x;
7) обидві частини рівняння $2x+1=5$ помножити на $x+1$?

15.6.° Яке з двох рівнянь є наслідком другого:

1) $x^2=x$ і $x=1$;
2) $\frac{x}{x}=1$ і $0x=0$;
3) $x^3=1$ і $x^2=1$;
4) $|x|=1$ і $x^3=1$;
5) $\frac{x^2}{x-6}=\frac{36}{x-6}$ і $x^2=36$;
6) $x^2=4$ і $x^2-\frac{1}{x+2}=4-\frac{1}{x+2}$;
7) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ і $x^2-1=0$?

15.7.° Яке з двох рівнянь є наслідком другого:

1) $\frac{x^2}{x}=1$ і $x^2=x$;
2) $x^2+1=1$ і $x(x-1)=0$;
3) $\frac{x^2}{x+8}=\frac{64}{x+8}$ і $x^2=64$;
4) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ і $x^2=9$?

15.8.° Складіть пару рівносильних рівнянь, кожне з яких:

1) має один корінь;
2) має два корені;
3) має безліч коренів;
4) не має коренів.

15.9.• Як може змінитися (розширитися чи звузитися) множина коренів заданого рівняння, якщо:

1) рівняння $(|x|+3)f(x)=2|x|+6$ замінити на рівняння $f(x)=2$;
2) рівняння $\frac{f(x)}{x^2+1}=0$ замінити на рівняння $f(x)=0$;
3) рівняння $(x+1)f(x)=x+1$ замінити на рівняння $f(x)=1$;
4) рівняння $\frac{f(x)}{x+1}=\frac{g(x)}{x+1}$ замінити на рівняння $f(x)=g(x)$;
5) рівняння $f(x)=g(x)$ замінити на рівняння $(x+1)f(x)=$ $=(x+1)g(x)$?

15.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5}{x^2-4}+\frac{2x}{x+2}=2$;
2) $\frac{2}{6x+1}+\frac{3}{6x-1}=\frac{30x+9}{36x^2-1}$;
3) $\frac{6x+14}{x^2-9}+\frac{7}{x^2+3x}=\frac{6}{x-3}$;
4) $\frac{2y^2+5}{1-y^2}+\frac{y+1}{y-1}=\frac{4}{y+1}$;
5) $\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{4}{1-4x^2}$;
6) $\frac{7}{(x+2)(x-3)}-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$;
7) $\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x}=\frac{6x+64}{x^2-16}+4$;
8) $\frac{2x-6}{x^2-36}-\frac{x-3}{x^2-6x}-\frac{x-1}{x^2+6x}=0$.

15.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{5}{1-x}=\frac{x^2+27}{x^2-1}$;
2) $\frac{3x+1}{3x-1}-\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{6}{1-9x^2}$;
3) $\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{5}{x-2}$;
4) $\frac{2x^2-2x}{x^2-4}+\frac{6}{x+2}=\frac{x+2}{x-2}$;
5) $\frac{7}{x^2+2x}+\frac{x+1}{x^2-2x}=\frac{x+4}{x^2-4}$;
6) $\frac{x^2-9x+50}{x^2-5x}=\frac{x+1}{x-5}+\frac{x-5}{x}$.

15.12.• Моторний човен проплив 8 км за течією річки і повернувся назад, витративши на весь шлях 54 хв. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна дорівнює 18 км/год.

15.13.• Теплохід пройшов 28 км проти течії річки і повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 4 хв менше. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 1 км/год.

15.14.˙ Щоб наповнити басейн через одну трубу, треба в 1,5 раза більше часу, ніж через другу. Якщо ж відкрити одночасно обидві труби, то басейн наповниться за 6 год. За скільки годин можна наповнити басейн через кожну трубу окремо?

15.15.˙ Два екскаватори викопали котлован за 8 год. Перший екскаватор може викопати такий котлован у 4 рази швидше, ніж другий. За скільки годин може викопати такий котлован кожний екскаватор, працюючи самостійно?

15.16.˙ Човен пройшов 6 км проти течії річки і 12 км за течією, витративши на весь шлях 2 год. Знайдіть швидкість човна в стоячій воді, якщо швидкість течії становить 3 км/год.

15.17.˙˙ Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+5}{x^2-5x}-\frac{x-5}{2x^2+10x}=\frac{x+25}{2x^2-50}$;

2) $\frac{2}{x^2-9}-\frac{1}{2x^2-12x+18}=\frac{3}{2x^2+6x}$;

3) $\frac{9x+12}{x^3-64}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x^2+4x+16}$.

15.18.˙˙ Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4y+24}{5y^2-45}+\frac{y+3}{5y^2-15y}=\frac{y-3}{y^2+3y}$;

2) $\frac{y+2}{8y^3+1}-\frac{1}{4y+2}=\frac{y+3}{8y^2-4y+2}$.

16. Раціональні рівняння з параметрами

Розглянемо лінійне рівняння $ax = 1$.

Якщо $a = 0$, то дане рівняння коренів не має. Якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{1}{a}$.

Розв'язуючи це рівняння, буквам a і x надавали різного змісту: буква x відігравала роль невідомого числа, а буква a — роль відомого числа. У таких випадках кажуть, що a є **параметром**, а саме рівняння називають **рівнянням з параметром**.

Підкреслимо подвійну природу параметра: з одного боку, ми вважаємо параметр фіксованим числом, з іншого — це число невідоме. Саме це не дозволяє, розв'язуючи рівняння $ax = 1$, просто записати у відповідь $x = \frac{1}{a}$. Ми змушені розглядати дві можливості: $a = 0$ і $a \neq 0$.

Хоча термін «параметр» для вас новий, проте ви вже зустрічалися з цим поняттям. Наприклад, лінійним рівнянням називають рівняння виду $ax = b$. Тут a і b — параметри. Лінійну функцію задають формулою $y = kx + b$, де k і b — параметри.

Вам не раз доводилось розв'язувати рівняння з параметрами (задачі 1.12, 1.13, 10.32, 10.33). Процес розв'язування полягав у побудові алгоритму, який дозволяв для будь-якого значення параметра знаходити відповідну множину коренів.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2 + ax - 2}{x + 2} = x - a$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{x^2 + ax - 2 - (x + 2)(x - a)}{x + 2} = 0;$$

$$\frac{x^2 + ax - 2 - x^2 + ax - 2x + 2a}{x + 2} = 0; \quad \frac{2ax - 2x + 2a - 2}{x + 2} = 0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2ax - 2x + 2a - 2 = 0, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x(a - 1) = 1 - a, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Якщо $a = 1$, то маємо: $0x = 0$, тобто коренем рівняння системи є будь-яке число. Оскільки $x \neq -2$, то при $a = 1$ множиною коренів заданого рівняння є $\{x \mid x \neq -2\}$.

Якщо $a \neq 1$, то отримуємо:

$$\begin{cases} x = \frac{1 - a}{a - 1}, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Звідси $x = -1$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то коренем рівняння є будь-яке число, крім -2; якщо $a \neq 1$, то $x = -1$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{b(x + 1)}{x} + \frac{b + 1}{x - 1} = b$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{b(x + 1)(x - 1) + x(b + 1) - bx(x - 1)}{x(x - 1)} = 0;$$

$$\frac{bx^2 - b + bx + x - bx^2 + bx}{x(x - 1)} = 0; \quad \frac{x(2b + 1) - b}{x(x - 1)} = 0.$$

Це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x(2b+1) = b, \\ x(x-1) \neq 0. \end{cases}$$

Якщо $b = -\frac{1}{2}$, то рівняння системи, а отже, і задане рівняння коренів не має.

Якщо $b \neq -\frac{1}{2}$, то

$$\begin{cases} x = \dfrac{b}{2b+1}, \\ x(x-1) \neq 0. \end{cases}$$

Знайдемо ті значення параметра b, при яких значення виразу $\frac{b}{2b+1}$ дорівнює 0 або 1.

Рівність $\frac{b}{2b+1} = 0$ виконується тільки при $b = 0$, а рівність $\frac{b}{2b+1} = 1$ виконується тільки при $b = -1$.

Отже, при $b = 0$ або $b = -1$ число $\frac{b}{2b+1}$ не є коренем заданого рівняння.

Відповідь: якщо $b = -\frac{1}{2}$, або $b = 0$, або $b = -1$, то рівняння коренів не має; якщо $b \neq -\frac{1}{2}$, $b \neq 0$ і $b \neq -1$, то $x = \frac{b}{2b+1}$.

Цю відповідь можна записати ще й так: якщо $b \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, -1\right\}$, то коренів немає, якщо $b \notin \left\{-\frac{1}{2}, 0, -1\right\}$, то $x = \frac{b}{2b+1}$.

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{(x-a)(x+2)}{x-1} = 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Треба знайти всі значення параметра a, при яких множина коренів даного рівняння є одноелементною.

Переходимо до рівносильної системи

$$\begin{cases} (x-a)(x+2) = 0, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x = a \text{ або } x = -2, \\ x \neq 1. \end{cases}$

При будь-якому значенні параметра a задане рівняння має корінь $x = -2$. Для того щоб цей корінь залишався єдиним, потрібно, щоб корінь рівняння $x = a$:

- або дорівнював тому самому кореню, який вже знайдено,
- або не задовольняв умову $x \neq 1$.

Звідси $a = -2$ або $a = 1$.

Відповідь: $a = -2$ або $a = 1$.

ПРИКЛАД 4 При яких значеннях параметра m рівняння $m(x - 1) = 0$ і $x + m^2 + m = 1$ є рівносильними?

Розв'язання. При будь-якому значенні параметра m число 1 є коренем першого рівняння. Для рівносильності рівнянь необхідно, щоб число 1 було коренем і другого рівняння. Підставимо це значення змінної до другого рівняння:

$$1 + m + m^2 = 1;$$
$$m(m + 1) = 0;$$
$$m = 0 \text{ або } m = -1.$$

Тепер можна зробити висновок: якщо шукані значення параметра m існують, то їх слід шукати серед елементів множини $\{-1, 0\}$.

Якщо $m = -1$, то задані рівняння набувають вигляду $(-1)(x - 1) = 0$ і $x + 1 - 1 = 1$. Ці рівняння є рівносильними.

При $m = 0$ маємо: $0(x - 1) = 0$ і $x = 1$. Очевидно, що ці рівняння не рівносильні.

Відповідь: $m = -1$.

?

1. У чому полягає подвійна природа параметра?
2. При вивченні яких понять ви зустрічалися з параметрами?
3. У чому полягає процес розв'язування рівняння з параметрами?

16.1.° Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x - a}{x - 1} = 0$;
2) $\frac{x + 2}{x - a} = 0$;
3) $\frac{a(x - 1)}{x - 1} = 0$;
4) $\frac{a(x - a)}{x - 3} = 0$;
5) $\frac{x - 2a}{x + a} = 0$;
6) $\frac{a(x - 4)}{x - a} = 0$.

16.2.° Для кожного значення параметра b розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x + b}{x - 5} = 0$;
2) $\frac{x + 4}{x - 2b} = 0$;
3) $\frac{x - 3b}{x + b + 2} = 0$;
4) $\frac{(b - 1)x}{x + b} = 0$.

16.3.° Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 1}{x - a} = 0$;
2) $\frac{x(x - a)}{x + 2} = 0$;
3) $\frac{(x - a)(x - 6)}{x - 7} = 0$;

4) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$; 6) $\frac{x^2-a^2}{x+4}=0$; 8) $\frac{(x-a)(x-2)}{x-2a}=0$.

5) $\frac{x-a}{(x-1)(x+3)}=0$; 7) $\frac{x+a}{(x-3a)(x+5)}=0$;

16.4.° Для кожного значення параметра b розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{(x-2)(x-3)}{x+b}=0$; 3) $\frac{x+2b}{(x-b+1)x}=0$;

2) $\frac{x+b}{(x+1)(x-4)}=0$; 4) $\frac{(x+2b)(x-3)}{x-b}=0$.

16.5.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-2}{x-a}=a-1$; 4) $\frac{3x+1}{(x-1)(x+a)}+\frac{1}{x+a}=\frac{3}{x-1}$;

2) $\frac{ax-2}{x-1}=a+\frac{1}{x}$; 5) $\frac{a}{x+3}+\frac{3}{x+2}=\frac{a^2+2a}{(x+2)(x+3)}$;

3) $\frac{ax^2-3}{x^2-1}=a+\frac{2}{x-1}$; 6) $\frac{a^2-1}{x-2}-\frac{a^3-x+10}{(x+a)(x-2)}=\frac{4}{x+a}$.

16.6.•• Для кожного значення параметра b розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{bx+3}{x+2}=b-\frac{1}{x-1}$; 3) $\frac{1}{x+1}+\frac{2b-b^2}{(x+1)(x-2b)}=\frac{b}{2b-x}$;

2) $\frac{bx^2-2}{x^2-4}=b+1+\frac{1-x}{x+2}$; 4) $\frac{b^2}{x+4}-\frac{3b^2+b+39}{(x+4)(3-x)}=\frac{9}{x-3}$.

16.7.•• При яких значеннях параметра a рівняння має єдиний розв'язок:

1) $\frac{x-1}{x-a}=0$; 4) $\frac{(x-2)(x-a)}{x-2a}=0$;

2) $\frac{(x+1)(x-5)}{x-a}=0$; 5) $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-a)(x+3a)}=0$;

3) $\frac{(x-a)(x+3a)}{x-3}=0$; 6) $\frac{x^2-a^2}{(x+1)(x+2)}=0$?

16.8.•• При яких значеннях параметра b рівняння має єдиний розв'язок:

1) $\frac{(x+3)(x-8)}{x+b}=0$; 3) $\frac{(x-2)(x+1)}{(x+b)(x-2b)}=0$;

2) $\frac{(x+2b)(x-4b)}{x-2}=0$; 4) $\frac{(x+b)(x-5b)}{(x-3)(x+5)}=0$?

16.9.•• При яких значеннях параметра a дані рівняння є рівносильними:

1) $\frac{x-1}{x-a}=0$ і $x-1=0$; 2) $\frac{x(x-a)}{x-2}=0$ і $x=0$;

3) $\frac{(x-a)(x-3)}{x-2a}=0$ і $x-3=0$;

4) $\frac{(x+a)(x-4a)}{x-1}=0$ і $x-4a=0$;

5) $\frac{(x-a)(x-2a+1)}{x-1}=0$ і $\frac{x-a}{x-1}=0$;

6) $(a^2-1)x=a-1$ і $\frac{x-1}{x-a}=1$;

7) $(a^2-a)(x-1)=0$ і $2ax+a^2-3a=0$;

8) $a(x-1)=0$ і $ax+a^2=2a$?

16.10." При яких значеннях параметра b дані рівняння є рівносильними:

1) $\frac{x-4}{x+b}=0$ і $x-4=0$;

2) $\frac{(x-1)(x+b)}{x-3}=0$ і $x-1=0$;

3) $\frac{(x+b)(x-2b)}{x-3b}=0$ і $\frac{x+b}{x-3b}=0$;

4) $\frac{(x-b)(x-3b+4)}{x-2}=0$ і $\frac{x-b}{x-2}=0$;

5) $(b^2-4)(x+2)=0$ і $bx+2b=4-b^2$?

17. Степінь з цілим від'ємним показником

У науці та практиці для короткого запису значень величин часто використовують степінь числа 10.

Наприклад, відстань від Землі до Полярної зорі приблизно дорівнює 4 470 000 000 000 000 км або $4{,}47 \cdot 10^{15}$ км. Маса Сонця дорівнює 1 990 000 000 000 000 000 000 000 000 000 кг або $1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг.

Це були приклади з макросвіту, тобто світу дуже великих фізичних величин. Наведемо приклади з мікросвіту, тобто світу дуже маленьких фізичних величин.

Маса атома Гідрогену дорівнює

0,000000000000000000000000001661 кг.

Радіус атома Оксигену дорівнює 0,0000000066 см.

Для запису цих величин так само можна використовувати степінь числа 10. Наприклад:

$$0{,}0000000000000000000000000001661 \text{ кг} = \frac{1{,}661}{10^{27}} \text{ кг},$$

$$0{,}0000000066 \text{ см} = \frac{6{,}6}{10^{9}} \text{ см}.$$

Проте якщо домовитися позначати $\frac{1}{10^{27}}$ і $\frac{1}{10^{9}}$ відповідно 10^{-27} і 10^{-9}, то для розглянутих величин отримаємо «одноповерхову» форму запису: $\frac{1{,}661}{10^{27}} = 1{,}661 \cdot 10^{-27}$, $\frac{6{,}6}{10^{9}} = 6{,}6 \cdot 10^{-9}$.

Аналогічно можна домовитися, що, наприклад, $\frac{1}{5^2} = 5^{-2}$, $\frac{1}{(-3)^5} = (-3)^{-5}$, $\frac{1}{0{,}7} = (0{,}7)^{-1}$.

Означення. **Для будь-якого числа a, яке не дорівнює нулю, і $n \in \mathbb{N}$**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

З означення випливає, що, наприклад, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$,

$$(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16,\ (0{,}3)^{-1} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}.$$

Отже, можна підносити число до будь-якого цілого степеня, крім нуля. Заповнимо цю прогалину.

Означення. **Для будь-якого числа a, яке не дорівнює нулю, $a^0 = 1$.**

Наприклад, $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

Зауваження. Вираз 0^n при цілих n, які менші або дорівнюють нулю, не має змісту.

З наведених означень випливає, що при будь-якому $a \neq 0$ і $n \in \mathbb{Z}$ числа a^n і a^{-n} взаємно обернені. Тому рівність

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

виконується при будь-якому цілому n.

Наприклад, при $n = -2$ маємо $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$.

У довідковій літературі ви можете знайти таку інформацію: «Маса Венери дорівнює $4{,}9 \cdot 10^{24}$ кг. Маса Марса дорівнює $6{,}423 \cdot 10^{23}$ кг. Площа поверхні Місяця складає $3{,}8 \cdot 10^{7}$ км^2».

Наведені числа записано в так званому **стандартному вигляді**.

Означення. Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$ і $n \in \mathbb{Z}$.

Число n називають **порядком** числа, записаного в стандартному вигляді. Наприклад, порядок числа, яке виражає масу Сонця в кілограмах, дорівнює 30, а порядок числа, яке виражає масу атома Гідрогену в кілограмах, дорівнює −27.

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число. Наприклад, $171{,}25 = 1{,}7125 \cdot 10^2$; $0{,}00958 = 9{,}58 \cdot 10^{-3}$. На практиці стандартний вигляд числа використовують для запису великих і маленьких чисел. При цьому порядок числа дає уявлення про величину числа.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1{,}2^{-2}$; 3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0$.

Розв'язання

1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

Узагалі, якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

2) $1{,}2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2} = \frac{25}{36}$.

3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4{,}3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 =$

$= \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$.

ПРИКЛАД 2 Подайте вираз $(a-b)^{-2}(a^{-2} - b^{-2})$ у вигляді раціонального дробу.

Розв'язання. $(a-b)^{-2}(a^{-2} - b^{-2}) = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) =$

$$= \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{a^2 b^2} = \frac{b+a}{a^2 b^2 (b-a)} = \frac{b+a}{a^2 b^3 - a^3 b^2}.$$

ПРИКЛАД 3 Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 564 000 000; 2) 0,0036.

Розв'язання

1) $564\,000\,000 = 5{,}64 \cdot 100\,000\,000 = 5{,}64 \cdot 10^8$.

2) $0{,}0036 = 3{,}6 \cdot 0{,}001 = 3{,}6 \cdot \frac{1}{1000} = 3{,}6 \cdot \frac{1}{10^3} = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$.

1. Чому дорівнює a^{-n}, якщо a — будь-яке число, відмінне від нуля, і $n \in \mathbb{N}$?
2. Чому дорівнює нульовий степінь будь-якого відмінного від нуля числа?
3. Що називають стандартним виглядом числа?
4. У яких межах має знаходитися число a, щоб запис $a \cdot 10^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, був стандартним виглядом числа?
5. Як називають число n у записі $a \cdot 10^n$ числа в стандартному вигляді?

17.1.° Якому з виразів дорівнює вираз a^{-6}:

1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

17.2.° Подайте степінь у вигляді дробу:

1) 3^{-8}; 3) a^{-9}; 5) 12^{-1}; 7) $(a-b)^{-2}$;
2) 5^{-6}; 4) d^{-3}; 6) m^{-1}; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

17.3.° Замініть степінь дробом:

1) 14^{-4}; 2) p^{-20}; 3) $(m+n)^{-1}$; 4) $(4c-5d)^{-10}$.

17.4.° Подайте дріб у вигляді степеня з цілим від'ємним показником або у вигляді добутку степенів:

1) $\frac{1}{7^2}$; 3) $\frac{1}{c}$; 5) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;
2) $\frac{1}{x^5}$; 4) $\frac{m}{n^3}$; 6) $\frac{x^6}{y^7}$; 8) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

17.5.° Замініть дріб степенем з цілим від'ємним показником або добутком степенів:

1) $\frac{1}{11^{11}}$; 2) $\frac{1}{k^4}$; 3) $\frac{x^2}{y}$; 4) $\frac{m^6}{n^6}$; 5) $\frac{(2x-y)^3}{(x-2y)^9}$.

17.6.° Подайте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

17.7.° Подайте у вигляді степеня одноцифрового натурального числа дріб:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

17.8.° Подайте у вигляді степеня з основою 10 число:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

17.9.° Подайте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

17.10.° Обчисліть:

1) 5^{-2}; 3) $(-9)^{-2}$; 5) 1^{-24}; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

2) 2^{-4}; 4) $0{,}2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^{0}$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

17.11.° Знайдіть значення виразу:

1) 20^{-2}; 2) $0{,}3^{-1}$; 3) $(-6)^{-3}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

17.12.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 4) $9 \cdot 0{,}1^{-1}$;

2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$;

3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^{0} - 5^{-2}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

17.13.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $2^{-2} + 2^{-1}$; 3) $0{,}03^{0} + 0{,}7^{0}$;

2) $3^{-2} - 6^{-1}$; 4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$?

17.14.° Яке з даних чисел записано в стандартному вигляді:

1) $12 \cdot 10^{4}$; 2) $1{,}2 \cdot 10^{4}$; 3) $0{,}12 \cdot 10^{4}$?

17.15.° Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:

1) 3400; 4) 0,000008; 7) $0{,}86 \cdot 10^{3}$;

2) 15; 5) 0,73; 8) $0{,}23 \cdot 10^{4}$;

3) 0,0046; 6) $250 \cdot 10^{2}$; 9) $9300 \cdot 10^{5}$.

17.16.° Використовуючи стандартний вигляд числа, запишіть:

1) швидкість світла у вакуумі дорівнює 300 000 км/с;
2) висота Говерли, найвищої гори України, дорівнює 2061 м;
3) площа України становить 603 700 км^2;
4) середня відстань від Землі до Сонця становить 149,6 млн км;
5) атмосферний тиск на висоті 100 км становить 0,032 Па;
6) діаметр молекули води дорівнює 0,00000028 мм.

17.17.° Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:

1) 45 000; 3) 0,00024; 5) $0{,}059 \cdot 10^{8}$;

2) 260; 4) 0,032; 6) $526 \cdot 10^{4}$.

17.18.° Запишіть у вигляді натурального числа або десяткового дробу число, записане в стандартному вигляді:

1) $1{,}6 \cdot 10^{3}$; 2) $5{,}7 \cdot 10^{6}$; 3) $2{,}1 \cdot 10^{-2}$; 4) $1{,}1 \cdot 10^{-5}$.

17.19.° Запишіть у вигляді натурального числа або десяткового дробу число, записане в стандартному вигляді:

1) $2{,}4 \cdot 10^{2}$; 2) $4{,}8 \cdot 10^{5}$; 3) $1{,}4 \cdot 10^{-3}$; 4) $8{,}6 \cdot 10^{-4}$.

17.20.° Доведіть, що $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

17.21.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot 10^{-1}+9^{0}-(-2)^{3}+\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}\cdot(-1,5)^{-3}$;

2) $(2,5)^{-2}-(8^{5})^{0}+\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3}+0,1^{-1}$.

17.22.° Розташуйте в порядку спадання:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$;
2) 4^{-1}, 4^{3}, 4^{0}, 4^{-2}.

17.23.° Розташуйте в порядку зростання:

1) 7^{-2}, 7^{2}, 7^{-1}, 7^{0};
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

17.24.° Порівняйте значення виразів:

1) 12^{0} і $(-6)^{0}$;
2) $0,2^{3}$ і $0,2^{-3}$;
3) 4^{6} і $0,25^{-6}$;
4) $3^{-1}\cdot 7^{-1}$ і 21^{-1};
5) $5^{-1}-7^{-1}$ і 2^{-1};
6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ і $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

17.25.° Порівняйте значення виразів:

1) 3^{-2} і $(-3)^{0}$;
2) $3^{-1}+2^{-1}$ і 5^{-1};
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ і $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^{-2}$.

17.26.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $ab^{-1}+a^{-1}b$;
2) $3a^{-1}+ab^{-2}$;
3) $m^{2}n^{2}(m^{-3}-n^{-3})$;
4) $(a+b)^{-1}\cdot(a^{-1}+b^{-1})$;
5) $(c^{-2}-d^{-2}):(c+d)$;
6) $(xy^{-2}+x^{-2}y)\cdot\left(\frac{x^{2}-xy+y^{2}}{x}\right)^{-1}$.

17.27.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a^{-2}+a^{-3}$;
2) $mn^{-4}+m^{-4}n$;
3) $(c^{-1}-d^{-1})\cdot(c-d)^{-2}$;
4) $(x^{-2}+y^{-2})\cdot(x^{2}+y^{2})^{-1}$.

17.28.° Доведіть, що при будь-якому $n\in\mathbb{Z}$:

1) якщо $a>0$, то $a^{n}>0$;
2) якщо $a<0$, то $a^{n}>0$ при парному n і $a^{n}<0$ при непарному n.

17.29.° Чи є правильною нерівність $a^{n}>a^{-n}$, якщо:

1) $a>1$, $n\in\mathbb{N}$;
2) $0<a<1$, $n\in\mathbb{N}$?

17.30.° Порядок деякого натурального числа дорівнює 4. Скільки цифр містить десятковий запис цього числа?

17.31.° Десятковий запис деякого натурального числа складається із семи цифр. Чому дорівнює порядок цього числа?

17.32.° Яке число більше:

1) $9{,}7 \cdot 10^{11}$ чи $1{,}2 \cdot 10^{12}$;
2) $3{,}6 \cdot 10^{-5}$ чи $4{,}8 \cdot 10^{-6}$;
3) $2{,}34 \cdot 10^{6}$ чи $0{,}23 \cdot 10^{7}$;
4) $42{,}7 \cdot 10^{-9}$ чи $0{,}072 \cdot 10^{-7}$?

17.33.° Яке число менше:

1) $6{,}1 \cdot 10^{19}$ чи $6{,}15 \cdot 10^{18}$;
2) $1{,}5 \cdot 10^{-9}$ чи $0{,}9 \cdot 10^{-8}$?

17.34.° У таблиці наведено середні відстані від Сонця до планет Сонячної системи:

Планета	Відстань, км
Венера	$1{,}082 \cdot 10^{8}$
Земля	$1{,}495 \cdot 10^{8}$
Марс	$2{,}280 \cdot 10^{8}$
Меркурій	$5{,}790 \cdot 10^{7}$
Нептун	$4{,}497 \cdot 10^{9}$
Сатурн	$1{,}427 \cdot 10^{9}$
Уран	$2{,}871 \cdot 10^{9}$
Юпітер	$7{,}781 \cdot 10^{8}$

1) Яка планета знаходиться на найменшій відстані від Сонця, а яка — на найбільшій?
2) Яка з планет, Марс або Сатурн, знаходиться далі від Сонця?
3) Складіть таблицю, записавши в лівому стовпці назви планет у порядку збільшення відстані від них до Сонця, а в правому — відстані від них до Сонця, виражені в млн км.

17.35.° У таблиці наведено маси атомів деяких хімічних елементів:

Елемент	Маса атома, кг	Елемент	Маса атома, кг
Нітроген	$2{,}32 \cdot 10^{-26}$	Аурум	$3{,}27 \cdot 10^{-25}$
Алюміній	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$	Купрум	$1{,}05 \cdot 10^{-25}$
Гідроген	$1{,}66 \cdot 10^{-27}$	Натрій	$3{,}81 \cdot 10^{-26}$
Гелій	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	Станум	$1{,}97 \cdot 10^{-25}$
Ферум	$9{,}28 \cdot 10^{-26}$	Уран	$3{,}95 \cdot 10^{-25}$

1) Маса атома якого з наведених елементів найменша, а якого — найбільша?
2) Маса атома якого з елементів, Купруму чи Натрію, більша?
3) Складіть таблицю, упорядкувавши елементи в порядку зменшення маси їх атомів.

17.36.° У таблиці наведено запаси деяких речовин у мінеральних ресурсах світу:

Речовина	Запаси, т	Речовина	Запаси, т
Алюміній	$1{,}1 \cdot 10^9$	Нікель	$6{,}8 \cdot 10^7$
Вольфрам	$1{,}3 \cdot 10^6$	Олово	$4{,}76 \cdot 10^6$
Залізо	$8{,}8 \cdot 10^{10}$	Ртуть	$1{,}15 \cdot 10^5$
Золото	$1{,}1 \cdot 10^4$	Фосфати	$1{,}98 \cdot 10^{10}$
Марганець	$6{,}35 \cdot 10^8$	Хром	$4{,}4 \cdot 10^9$
Мідь	$2{,}8 \cdot 10^9$	Цинк	$1{,}12 \cdot 10^8$

1) Запаси якої з наведених речовин найбільші, а якої — найменші?
2) Запаси якої з речовин, нікелю чи цинку, більші?
3) Складіть таблицю мінеральних ресурсів, розмістивши речовини в порядку зменшення їх запасів.

18. Властивості степеня з цілим показником

У 7 класі ви вивчали властивості степеня з натуральним показником. Вони залишаються справедливими і для степеня з будь-яким цілим показником.

Для будь-якого $a \neq 0$ і будь-яких цілих m і n виконуються рівності:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (2)$$

Для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ та будь-якого цілого n виконується рівність

$$(ab)^n = a^n b^n. \quad (3)$$

Рівність (1) виражає **основну властивість степеня.** Доведемо її. Для натуральних m і n цю рівність уже було доведено в 7 класі. Розглянемо тепер випадок, коли m і n — цілі від'ємні числа.

Якщо m і n — цілі від'ємні числа, то $-m$ і $-n$ — натуральні числа. Тоді

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-m-n}.$$

Маємо:

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Для того щоб доведення основної властивості степеня стало повним, слід розглянути ще такі випадки: один з показників степеня m або n від'ємний, а другий — додатний; один або обидва показники дорівнюють нулю. Розгляньте ці випадки самостійно.

Рівності (2) і (3) доводять аналогічно.

З основної властивості степеня випливає такий важливий наслідок: ***для будь-якого $a \neq 0$ і будь-яких цілих m і n виконується рівність***

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad (4)$$

Справді, $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$.

З властивостей (2) и (3) можна отримати ще одну властивість степеня з цілим показником: ***для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ і будь-якого цілого n виконується рівність***

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Справді, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Властивості (1)–(5) називають **властивостями степеня з цілим показником**.

ПРИКЛАД 1 Подайте у вигляді степеня вираз $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6$.

Розв'язання. Застосувавши послідовно правила піднесення степеня до степеня (властивість (2)), множення і ділення степенів з однаковою основою (властивості (1) і (4)), отримуємо:

$$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4 \cdot (-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}.$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть значення виразу:

1) $16^{-9} \cdot 8^{12}$; 2) $\dfrac{6^{-3}}{18^{-3}}$; 3) $\left(1\dfrac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\dfrac{5}{6}\right)^3\right)^{-5}$.

Розв'язання

1) Подавши числа 16 і 8 у вигляді степенів з основою 2, отримуємо:

$$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1.$$

2) Використовуючи правило піднесення дробу до степеня (властивість (5)), маємо: $\dfrac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\dfrac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$.

3) $$\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5} = \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} =$$

$$= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{15} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{6}.$$

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз:

1) $0{,}6m^2n^{-6}\cdot\frac{1}{3}m^{-4}n^3$; 2) $(a^{-2}+9)(a^{-2}-4)-(a^{-2}+6)(a^{-2}-6)$.

Розв'язання

1) $0{,}6m^2n^{-6}\cdot\frac{1}{3}m^{-4}n^3=\left(0{,}6\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot(m^2\cdot m^{-4})\cdot(n^{-6}\cdot n^3)=0{,}2m^{-2}n^{-3}$.

2) $(a^{-2}+9)(a^{-2}-4)-(a^{-2}+6)(a^{-2}-6)=$
$=a^{-4}-4a^{-2}+9a^{-2}-36-a^{-4}+36=5a^{-2}$.

ПРИКЛАД 4 Виконайте множення $(3{,}4\cdot10^{14})\cdot(7\cdot10^{-8})$ і результат запишіть у стандартному вигляді.

Розв'язання. $(3{,}4\cdot10^{14})\cdot(7\cdot10^{-8})=(3{,}4\cdot7)\cdot(10^{14}\cdot10^{-8})=$ $=23{,}8\cdot10^6=2{,}38\cdot10\cdot10^6=2{,}38\cdot10^7$.

Сформулюйте властивості степеня з цілим показником.

18.1.° Знайдіть значення виразу:

1) $9^5\cdot9^{-7}$;
2) $10^{-8}\cdot10^{12}$;
3) $3^{-18}:3^{-21}$;
4) $2^{-9}\cdot2^{-12}:2^{-22}$;
5) $(17^4)^{-12}\cdot(17^{-6})^{-8}$;
6) $\frac{6^{-5}\cdot(6^{-3})^4}{(6^{-7})^2\cdot6^{-3}}$;
7) $3^{-3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
8) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$.

18.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $5^{-7}:5^{-6}\cdot5^3$;
2) $\frac{4^{-7}\cdot(4^{-5})^3}{(4^{-3})^7}$;
3) $0{,}8^{-4}\cdot\left(1\frac{1}{4}\right)^{-4}$;
4) $\frac{11^{-2}}{22^{-2}}$.

18.3.° Спростіть вираз:

1) $3a^{-3}\cdot4a^{-4}$;
2) $\frac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$;
3) $(2c^{-6})^4$;
4) $m^{-2}n\cdot mn^{-2}$;
5) $abc^{-1}\cdot ab^{-1}c$;
6) $\frac{kp^{-6}}{k^4p^4}$;
7) $(c^{-6}d^2)^{-7}$;
8) $\frac{1}{3}a^{-3}b^{-6}\cdot\frac{6}{7}a^7b^4$;
9) $0{,}2c^{-3}d^5\cdot1{,}5c^{-2}d^{-5}$;
10) $4x^8\cdot(-3x^{-2}y^4)^{-2}$;
11) $\frac{13m^{-10}}{12n^{-8}}\cdot\frac{27n}{26m^2}$;
12) $\frac{18p^{-6}k^2}{7}:\frac{15k^{-2}}{p^6}$.

18.4.° Спростіть вираз:

1) $2a^{-5}b^2 \cdot 3a^{-2}b^{-5}$;
2) $\left(\frac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$;
3) $\frac{3,6a^2b}{0,9a^3b^{-3}}$;
4) $0,8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-8}$;
5) $\frac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \frac{y^4}{5x^{-7}}$;
6) $28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}$.

18.5.° Знайдіть значення виразу:

1) $8^{-3} \cdot 2^7$;
2) $27^{-2} : 9^{-4}$;
3) $100^{-2} : 1000^{-5} \cdot 0,01^6$;
4) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$;
5) $25^{-4} : (0,2^{-3})^{-2}$;
6) $\frac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;
7) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$;
8) $\frac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$.

18.6.° Знайдіть значення виразу:

1) $9^{-4} \cdot 27^2$;
2) $32^{-5} : 64^{-4}$;
3) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;
4) $8^{-2} : 0,5^4$;
5) $\frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$;
6) $\frac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

18.7.° Виконайте дії і зведіть отриманий вираз до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $-2,4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$;
2) $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0,1yz^{-4})^{-2}$;
3) $1\frac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\frac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$;
4) $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2}$;
5) $\left(\frac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4$;
6) $\left(\frac{4x^{-5}}{3y^{-2}}\right)^{-3} \cdot (16x^{-6}y^4)^2$.

18.8.° Виконайте дії і зведіть отриманий вираз до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $3,6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$;
2) $1\frac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$;
3) $\left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2$;
4) $\left(\frac{7a^{-6}}{b^5}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^4$.

18.9.° Винесіть за дужки степінь з основою a і з найменшим з даних показників:

1) $a^3 - 2a^4$;
2) $a^{-3} - 2a^{-4}$;
3) $a^3 - 2a^{-4}$.

18.10.° Винесіть за дужки степінь з основою b і з найменшим з даних показників:

1) $b^3 + 3b^2$; 2) $b^{-3} + 3b^{-2}$; 3) $b^{-3} + 3b^2$.

18.11.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $a^{-2} - 4$;
2) $a^{-4}b^{-6} - 1$;
3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$;
4) $a^{-3} + b^{-3}$;
5) $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$;
6) $a^{-8} - 49a^{-2}$.

18.12.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $x^{-4} - 25$;
2) $m^{-6} - 8n^{-3}$;
3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;
4) $a^{-4} - a^{-2}$.

18.13.° Виконайте обчислення і результат запишіть у стандартному вигляді:

1) $(1{,}8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$;
2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-9})$;
3) $\dfrac{5{,}4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^8}$;
4) $\dfrac{1{,}7 \cdot 10^{-6}}{3{,}4 \cdot 10^{-4}}$.

18.14.° Виконайте обчислення і результат запишіть у стандартному вигляді:

1) $(1{,}6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^7)$;
2) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1{,}8 \cdot 10^{-1})$;
3) $\dfrac{7 \cdot 10^{-4}}{1{,}4 \cdot 10^{-6}}$;
4) $\dfrac{6{,}4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2}}$.

18.15.° Середня відстань від Землі до Сонця дорівнює $1{,}5 \cdot 10^8$ км, а швидкість світла — $3 \cdot 10^8$ м/с. За скільки хвилин світло від Сонця дійде до Землі? Відповідь округліть до одиниць.

18.16.° Густина міді дорівнює $8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Знайдіть масу мідної плити, довжина якої $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ м, ширина — 12 см, а висота — 0,02 м.

18.17.° Маса Землі дорівнює $6 \cdot 10^{24}$ кг, а Місяця — $7{,}4 \cdot 10^{22}$ кг. У скільки разів маса Місяця менша від маси Землі? Відповідь округліть до одиниць.

18.18.• Доведіть тотожність

$$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} + b^{-2})(a^{-4} + b^{-4}).$$

18.19.• Спростіть вираз:

1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2$;
2) $\dfrac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}}$;
3) $\dfrac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \dfrac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$;
4) $\dfrac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \dfrac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}$.

18.20.• Спростіть вираз:

1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4)$;
2) $\dfrac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}}$;

3) $\dfrac{5m^{-2}+n^{-2}}{4m^{-3}+4m^{-1}n^{-2}}-\dfrac{m^{-1}}{m^{-2}+n^{-2}}$; 4) $\dfrac{b^{-1}+3c^{-1}}{c^{-2}}\cdot\dfrac{bc}{b^{-2}c^{-1}+3b^{-1}c^{-2}}$.

18.21.^•^ Побудуйте графік функції:

1) $y=(x+3)^0$; 3) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^0$; 5) $y=x\cdot\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{-1}$;

2) $y=\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{-1}$; 4) $y=\left(\dfrac{x+2}{x^2-4}\right)^{-1}$; 6) $y=\dfrac{(x^2-1)^0}{x^{-1}}$.

18.22.^•^ Побудуйте графік функції:

1) $y=(x+2)^0$; 2) $y=\left(\dfrac{x-3}{x^2-9}\right)^{-1}$; 3) $y=(x-1)\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{-1}$.

18.23.^•^ Назвіть порядок числа x, якщо:

1) $100 \leqslant x < 1000$; 3) $0{,}01 \leqslant x < 0{,}1$;

2) $10\,000 \leqslant x < 100\,000$; 4) $0{,}0001 \leqslant x < 0{,}001$.

18.24.^•^ Назвіть порядок числа x, якщо:

1) $10 \leqslant x < 100$; 2) $0{,}001 \leqslant x < 0{,}01$.

18.25.^•^ Порядок числа a дорівнює -4. Визначте порядок числа:

1) $10a$; 2) $0{,}1a$; 3) $100a$; 4) $0{,}001a$; 5) $10\,000a$; 6) $1\,000\,000a$.

18.26.^•^ Порядок числа b дорівнює 3. Визначте порядок числа:

1) $10b$; 2) $0{,}01b$; 3) $0{,}0001b$; 4) $1000b$.

18.27.^•^ Спростіть вираз і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\left(\dfrac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}}\right):\left(\dfrac{b}{a^2}\right)^{-1}$;

2) $\dfrac{b^{-2}-2}{b^{-2}}-\dfrac{b^{-4}-4}{b^{-2}}\cdot\dfrac{1}{b^{-2}-2}$;

3) $\dfrac{5c^{-3}}{c^{-3}-3}-\dfrac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6}\cdot\dfrac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$;

4) $\left(\dfrac{m^{-4}}{m^{-4}-4}-\dfrac{3m^{-4}}{m^{-8}-8m^{-4}+16}\right)\cdot\dfrac{16-m^{-8}}{m^{-4}-7}+\dfrac{8m^{-4}}{m^{-4}-4}$;

5) $\dfrac{(a+b-1)^{-1}+(a-b+1)^{-1}}{2\,(a+b)}\cdot\left(\dfrac{1}{a^{-2}}-\dfrac{1}{(b-1)^{-2}}\right)$.

8.28.^•^ Спростіть вираз і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $\dfrac{a^{-2}+5}{a^{-4}-6a^{-2}+9}:\dfrac{a^{-4}-25}{4a^{-2}-12}-\dfrac{2}{a^{-2}-5}$;

2) $\left(b^{-1}-\dfrac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7}\right)\cdot\left(2b^{-1}+\dfrac{2b^{-1}}{b^{-1}-7}\right)^{-1}$;

3) $\frac{(x-1)(x+1)^{-2}-2x(x^2-1)^{-1}+(x+1)(x-1)^{-2}}{8x(x^4-1)^{-1}}$.

18.29.° Порядок числа a дорівнює -4, а порядок числа b дорівнює 3. Яким може бути порядок значення виразу:

1) ab; 2) $a+b$; 3) $a+10b$; 4) $10a+0{,}1b$?

18.30.° Порядок числа m дорівнює 2, а порядок числа n дорівнює 4. Яким може бути порядок значення виразу:

1) mn; 2) $0{,}01mn$; 3) $100m+n$; 4) $0{,}01m+n$?

18.31.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{(xy^{-1}+1)^2}{xy^{-1}-x^{-1}y}\cdot\frac{x^3y^{-3}-1}{x^2y^{-2}+xy^{-1}+1}:\frac{x^3y^{-3}+1}{xy^{-1}+x^{-1}y-1}=1$;

2) $\frac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}}\cdot\left(1+\left(\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}\right)^{-1}\right)=\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$.

19. Функція $y=\frac{k}{x}$ та її графік

У 6 класі ви ознайомилися з такою залежністю однієї величини від другої, коли збільшення (зменшення) однієї величини в кілька разів приводить до збільшення (зменшення) другої величини в таку саму кількість разів.

У 7 класі ви дізналися, що ця залежність є функціональною і визначає функцію $y=kx$, де $k\neq 0$, яку називають прямою пропорційністю.

Існує також функціональна залежність, яка характеризується тим, що із **збільшенням** (**зменшенням**) однієї величини в кілька разів друга величина **зменшується** (**збільшується**) у стільки ж разів. Таку залежність називають **оберненою пропорційністю.**

ПРИКЛАД 1 Нехай є 100 грн. Позначимо через x грн. ціну 1 кг товару, а через y кг — кількість цього товару, яку можна придбати за 100 грн.

Зрозуміло, що залежність змінної y від змінної x є оберненою пропорційністю: збільшення ціни x у кілька разів спричинює зменшення кількості товару y у стільки ж разів, і навпаки, зменшення ціни приводить до збільшення кількості купленого товару.

Цій функціональній залежності відповідає функція, яка задається формулою $y=\frac{100}{x}$.

ПРИКЛАД 2 Розглянемо прямокутник, площа якого дорівнює 18 см^2, а сторони — x см і y см. Тоді

$$y = \frac{18}{x}.$$

Збільшення (зменшення) знаменника x у кілька разів веде до зменшення (збільшення) величини y у стільки ж разів, тобто залежність змінної y від змінної x є оберненою пропорційністю.

У розглянутих прикладах математичною моделлю реальних ситуацій є функція, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$.

Означення. **Функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають *оберненою пропорційністю*.**

Оскільки областю визначення виразу $\frac{k}{x}$ є множина $\{x \mid x \neq 0\}$, то областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ є така сама множина, тобто $D(y) = \{x \mid x \neq 0\}$.

Розглянемо функцію $y = \frac{6}{x}$. У таблиці наведено деякі значення аргументу і відповідні їм значення функції.

x	-6	-4	-3	-2	$-1{,}5$	-1	1	$1{,}5$	2	3	4	6
y	-1	$-1{,}5$	-2	-3	-4	-6	6	4	3	2	$1{,}5$	1

Позначимо на координатній площині точки, координати яких указано в таблиці (рис. 19.1).

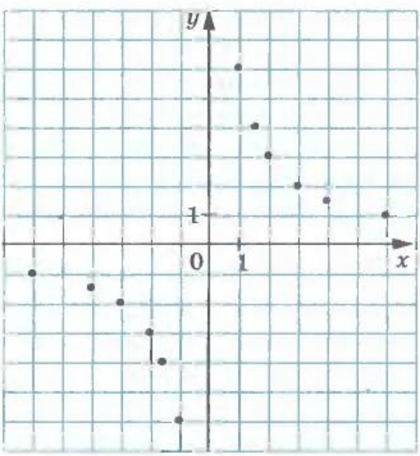


Рис. 19.1

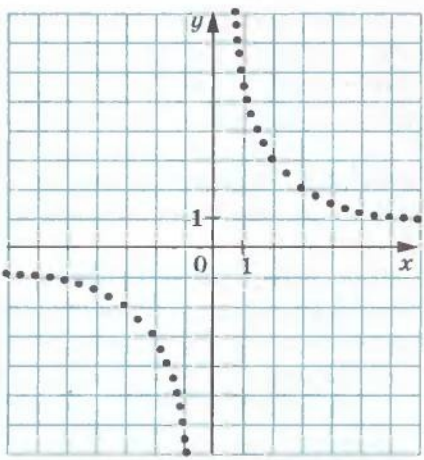


Рис. 19.2

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \frac{6}{x}$, нам удасться позначити, тим менше отримана фігура (рис. 19.2) буде відрізнятися від графіка функції $y = \frac{6}{x}$.

Серед позначених точок не може бути точки, абсциса якої дорівнює нулю, оскільки число 0 не належить області визначення даної функції. Тому графік функції $y = \frac{6}{x}$ не має спільних точок з віссю ординат.

Крім того, графік не має спільних точок також і з віссю абсцис. Справді, рівняння $\frac{6}{x} = 0$ не має розв'язків. Отже, число 0 не належить області значень даної функції.

Якщо $x > 0$, то $\frac{6}{x} > 0$, тобто $y > 0$; якщо $x < 0$, то $y < 0$. Отже, точки графіка даної функції можуть знаходитися тільки в I і III координатних чвертях.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля абсциси відстань від точки графіка функції $y = \frac{6}{x}$ до осі абсцис зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю. Справді, чим більше модуль аргументу, тим менше модуль відповідного значення функції.

Аналогічно можна встановити, що зі зменшенням модуля абсциси відстань від точок графіка до осі ординат зменшується і може стати як завгодно малою, проте ніколи не дорівнюватиме нулю.

Якби можна було позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівняння $y = \frac{6}{x}$, то ми отримали б фігуру, зображену на рисунку 19.3.

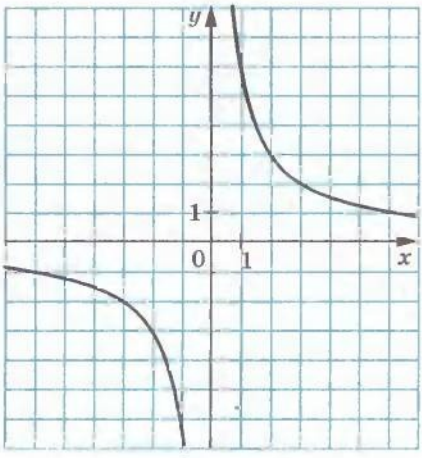


Рис. 19.3

Фігуру, яка є графіком функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають **гіперболою**. Гіпербола складається з двох частин — **віток гіперболи**. На рисунку 19.3 зображено гіперболу $y = \frac{6}{x}$.

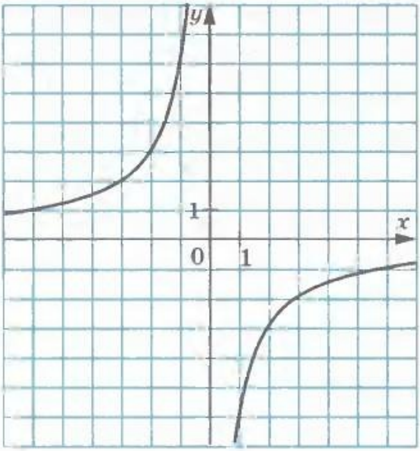


Рис. 19.4

Якщо $k > 0$, то вітки гіперболи розміщені в I і III чвертях, а якщо $k < 0$ — то у II і IV чвертях.

На рисунку 19.4 зображено графік функції $y = -\frac{6}{x}$.

Зауважимо, що областю значень функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, є множина $\{y \mid y \neq 0\}$.

У таблиці наведено властивості функції $y = \frac{k}{x}$, вивчені у цьому пункті.

Область визначення	$\{x \mid x \neq 0\}$
Область значень	$\{y \mid y \neq 0\}$
Графік	Гіпербола
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	Не існує

Покажемо, як графік функції $y = \frac{k}{x}$ можна використовувати при розв'язуванні рівнянь.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$.

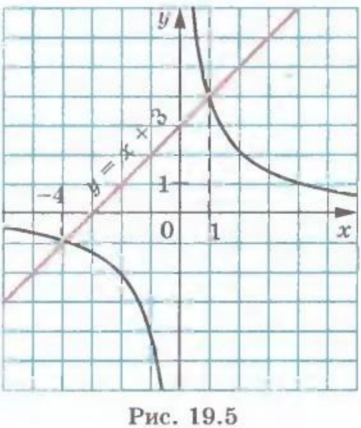


Рис. 19.5

Розв'язання. Розглянемо функції $y = \frac{4}{x}$ і $y = x + 3$. Побудуємо в одній системі координат графіки цих функцій (рис. 19.5). Вони перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють 1 і −4. У точках перетину графіків функцій самі функції набувають рівних значень. Отже, при знайдених абсцисах значення виразів $\frac{4}{x}$ і $x + 3$ рівні, тобто числа 1 і −4 є коренями рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$. Перевірка це підтверджує.

Описаний метод розв'язування рівнянь називають **графічним**. У 7 класі ви ознайомилися з графічним методом розв'язування систем рівнянь і знаєте, що цей метод не завжди дає точний результат. Тому перевірка знайдених коренів є обов'язковим етапом розв'язування рівняння.

У подальшому (п. 36) ви навчитеся розв'язувати це рівняння, не застосовуючи графіків.

?

1. Поясніть, яку залежність між величинами називають оберненою пропорційністю.
2. Яку функцію називають оберненою пропорційністю?
3. Яка множина є областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$?
4. Як називають фігуру, яка є графіком оберненої пропорційності?
5. Як називають частини, з яких складається гіпербола?
6. Яка множина є областю значень функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$?
7. У яких чвертях розташований графік функції $y = \frac{k}{x}$, якщо $k > 0$? якщо $k < 0$?
8. Поясніть, у чому полягає графічний метод розв'язування рівнянь.

19.1.° Автомобіль проїжджає деяку відстань за 10 год. За який час він проїде цю саму відстань, якщо його швидкість:
1) збільшиться у 2 рази; 2) зменшиться в 1,2 раза?

19.2.° Довжина прямокутника дорівнює 30 см. Якою стане його довжина, якщо при тій самій площі ширину прямокутника:
1) збільшити в 1,5 раза; 2) зменшити в 3,2 раза?

19.3.° За деяку суму грошей купили 40 м тканини. Скільки метрів тканини купили б за ту саму суму грошей, якби її ціна за 1 м:
1) зменшилась у 2,6 раза; 2) збільшилася в 1,6 раза?

19.4.° Пішохід пройшов 12 км. Заповніть таблицю, у першому рядку якої вказано швидкість, а в другому — час руху.

v, км/год	5		2,4	
t, год		3		$3\frac{1}{3}$

Задайте формулою залежність t від v.

19.5.° Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює 48 см^3. Заповніть таблицю, у першому рядку якої вказано площу його основи, а в другому — висоту.

S, см^2	16		240	
h, см		8		4,8

Задайте формулою залежність h від S.

19.6.° Бригада із 7 робітників з однаковою продуктивністю праці може виконати певне виробниче завдання за 12 днів. Скільки треба робітників з такою самою продуктивністю праці, щоб виконати це завдання за 4 дні?

19.7.° Заготовлених кормів вистачить для 24 коней на 18 днів. На скільки днів вистачить цих кормів для 36 коней?

19.8.° Серед даних функцій укажіть обернені пропорційності:

1) $y = 2x$;
2) $y = \frac{x}{2}$;
3) $y = \frac{2}{x}$;
4) $y = -\frac{1}{x}$;
5) $y = -\frac{0,8}{x}$;
6) $y = \frac{2x}{3}$;
7) $y = \frac{1}{2x}$;
8) $y = \frac{2}{3x}$.

19.9.° Задано функцію $y = \frac{24}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: –3; 6; 0,2;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 12; –6; 100.

19.10.° Задано функцію $y = -\frac{36}{x}$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: –4; 0,9; 18;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 6; –0,3; 8.

19.11.° Побудуйте графік функції $y = -\frac{8}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 4; –1;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 2; –8;
3) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

19.12.° Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 2; −10;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 5; −2;
3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

19.13.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = \frac{28}{x}$, установіть, чи проходить графік через точку:

1) A (−4; −7);
2) B (14; −2);
3) C (0,5; 14);
4) D (0,2; 140).

19.14.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = -\frac{48}{x}$, установіть, чи проходить графік через точку:

1) A (−6; −8);
2) B (12; −4);
3) C (0,3; −16);
4) D (0,4; −120).

19.15.° На рисунку 19.6 зображено графік залежності часу t руху з пункту A до пункту B від швидкості v руху. Користуючись графіком, установіть:

1) за який час можна дістатися з пункту A до пункту B, якщо рухатися зі швидкістю 8 км/год, 24 км/год;
2) з якою швидкістю треба рухатися, щоб дістатися з пункту A до пункту B за 3 год; 4 год;
3) чому дорівнює відстань між пунктами A і B.

19.16.° Дротяний реостат підключено до блоку живлення (рис. 19.7). Опір реостата R залежить від положення повзунка і може

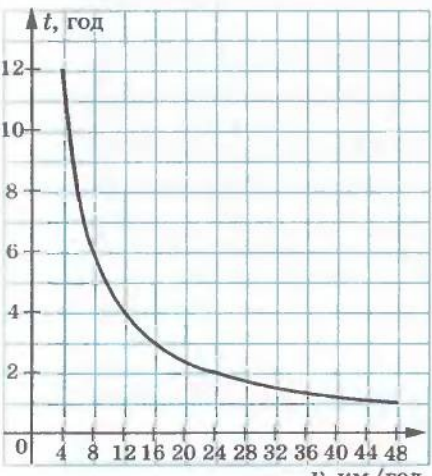


Рис. 19.6

Рис. 19.7

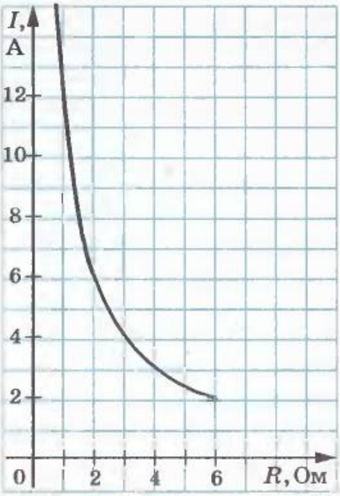


Рис. 19.8

змінюватися в межах від 0 до 6 Ом. Користуючись графіком залежності сили струму I від опору R (рис. 19.8) за умови, що напруга на кінцях реостата залишається незмінною, установіть:

1) чому дорівнює сила струму, якщо опір дорівнює 2 Ом;
2) при якому значенні опору сила струму дорівнює 3 А;
3) скільки вольт становить напруга на кінцях реостата.

19.17.° Знайдіть значення параметра k, при якому графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

1) $A\,(-5;\ 4)$;
2) $B\left(\frac{1}{6};\ -2\right)$;
3) $C\,(1{,}5;\ -8)$.

19.18.° Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A\,(10;\ 1{,}6)$. Чи проходить графік цієї функції через точку:

1) $B\,(-1;\ -16)$;
2) $C\,(-2;\ 8)$?

19.19.° Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x}$ і $y = x$ і визначте координати точок їх перетину.

19.20.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{4}{x} = 4 - x$;
2) $x - 2 = \frac{3}{x}$;
3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$.

19.21.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\frac{8}{x} = 6 - x$;
2) $2x = \frac{2}{x}$;
3) $\frac{7}{x} = -x$.

19.22.° На рисунку 19.9 зображено графік функції $y = f\,(x)$. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $f\,(x) = 0$;
2) $f\,(x) = 1$;
3) $f\,(x) = x$;
4) $f\,(x) = -x$;
5) $f\,(x) = \frac{1}{x}$;
6) $f\,(x) = 2 - x$.

19.23.° На рисунку 19.10 зображено графік функції $y = g\,(x)$. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $g\,(x) = 0$;
2) $g\,(x) = 1$;
3) $g\,(x) = -1$;
4) $g\,(x) = x$;
5) $g\,(x) = -x$;
6) $g\,(x) = \frac{1}{x}$.

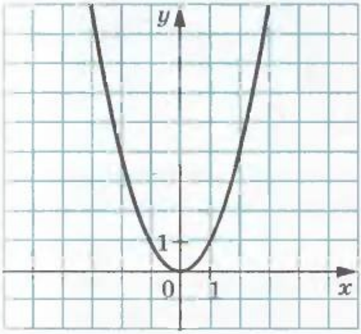


Рис. 19.9

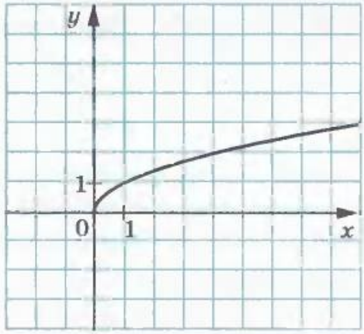


Рис. 19.10

19.24.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

19.25.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4. \end{cases}$

19.26.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

19.27.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -3, \\ x - 2y - 2 = 0. \end{cases}$

19.28.° Знайдіть координати всіх точок графіка функції $y = \frac{64}{x}$, у яких абсциса і ордината рівні.

19.29.° Знайдіть координати всіх точок графіка функції $y = -\frac{25}{x}$, у яких абсциса і ордината — протилежні числа.

19.30.• Дослідіть кількість коренів рівняння $\frac{k}{x} = a$, $k \neq 0$, залежно від значень параметра a.

19.31.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{6}{|x|}$; 2) $y = -\frac{6}{|x|}$; 3) $y = -|x|^{-1}$.

19.32.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ x + 3, & \text{якщо } x > -1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} -2x + 10, & \text{якщо } x \leqslant 2, \\ \frac{12}{x}, & \text{якщо } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$

19.33.* Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 2, & \text{якщо } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

19.34.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{9x - 18}{x^2 - 2x}$; 2) $y = \dfrac{5x^2 - 5}{x - x^3}$.

19.35.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x}$; 2) $y = \dfrac{10x^2 - 40}{x^3 - 4x}$.

19.36.** Побудуйте графік рівняння:

1) $(xy - 1)(x - 2) = 0$;

2) $(xy + 1)(y - 1) = 0$;

3) $(xy - 1)(|x| - |y|) = 0$;

4) $\dfrac{xy - 1}{x - y} = 0$;

5) $\dfrac{xy + 1}{x - y} = 0$.

19.37.** Побудуйте графік рівняння:

1) $x(xy - 1) = 0$; 2) $x^2y^2 - 1 = 0$; 3) $\dfrac{xy - 1}{x - 1} = 0$.

19.38.** Нехай $f(x) = x$. Побудуйте графік функції $y = -f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$.

19.39.** Нехай $f(x) = -\dfrac{1}{x}$. Побудуйте графік функції

$$y = -f\left(-\frac{1}{x}\right).$$

19.40.** Функція f така, що $f(x) = \dfrac{4}{x}$. Доведіть, що

$$f(x + 1) - f(x - 1) = -\frac{1}{2} f(x + 1) \cdot f(x - 1).$$

19.41.* Знайдіть функцію f, яка задовольняє умові

$$3f(x) + 2f(-x) = -\frac{2}{x}.$$

19.42.* Знайдіть функцію f, яка задовольняє умові

$$2f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{3x^2 - 6}{x}.$$

§ 4. НЕРІВНОСТІ

20. Числові нерівності та їх властивості

На практиці часто доводиться порівнювати величини. Наприклад, площа України (603,7 тис. км^2) більша за площу Франції (551 тис. км^2), висота гори Роман-Кош (1545 м) менша від висоти гори Говерла (2061 м), відстань від Києва до Харкова (450 км) дорівнює 0,011 довжини екватора.

Коли ми порівнюємо величини, нам доводиться порівнювати числа. Результати цих порівнянь записують у вигляді числових рівностей або нерівностей, використовуючи знаки: $=$, $>$, $<$.

Якщо число a більше за число b, то пишуть $a > b$; якщо число a менше від числа b, то пишуть $a < b$.

Очевидно, що $12 > 7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$. Справедливість цих нерівностей випливає з правил порівняння раціональних чисел, які ви вивчали в попередніх класах.

Проте є й інший спосіб, більш універсальний, заснований на таких очевидних міркуваннях: якщо різниця двох чисел є число додатне, то зменшуване більше за від'ємник, а якщо різниця від'ємна, то зменшуване менше ніж від'ємник.

Ці міркування підказують, що зручно прийняти таке означення.

Означення. **Число a вважають більшим за число b, якщо різниця $a - b$ є додатним числом. Число a вважають меншим від числа b, якщо різниця $a - b$ є від'ємним числом.**

Це означення дозволяє задачу про порівняння двох чисел звести до задачі про порівняння їх різниці з нулем. Наприклад, щоб порівняти значення виразів $3 - 4\pi$ і $6 - 5\pi$, розглянемо їх різницю:

$$(3 - 4\pi) - (6 - 5\pi) = 3 - 4\pi - 6 + 5\pi = \pi - 3.$$

Оскільки $\pi - 3 > 0$, то $3 - 4\pi > 6 - 5\pi$.

Зауважимо, що різниця чисел a і b може бути або додатною, або від'ємною, або дорівнювати нулю. Тоді *для будь-яких чисел a і b справедливе одне і тільки одне з таких співвідношень: $a > b$, $a < b$, $a = b$.*

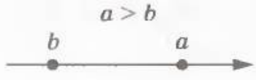


Рис. 20.1

Якщо $a > b$, то точка, яка відповідає числу a на координатній прямій, знаходиться справа від точки, яка відповідає числу b (рис. 20.1).

Для вислову «не більше» використовують знак $\leqslant$ (читають: «менше або дорівнює»), а для вислову «не менше» — знак $\geqslant$ (читають: «більше або дорівнює»).

Якщо $a < b$ або $a = b$, то нерівність $a \leqslant b$ є правильною.

Якщо $a > b$ або $a = b$, то нерівність $a \geqslant b$ є правильною.

Наприклад, нерівності $7 \leqslant 7$, $7 \leqslant 15$, $-3 \geqslant -5$ є правильними.

Знаки $<$ і $>$ називають знаками **строгої** нерівності, а знаки $\leqslant$ і $\geqslant$ — знаками **нестрогої** нерівності.

Розглянемо властивості числових нерівностей, які часто використовують при розв'язуванні задач.

Теорема 20.1. ***Якщо*** $a > b$ ***і*** $b > c$, ***то*** $a > c$.

Доведення. Оскільки за умовою $a > b$ і $b > c$, то різниці $a - b$ і $b - c$ є додатними числами. Тоді додатною буде їх сума $(a - b) + (b - c)$. Маємо: $(a - b) + (b - c) = a - c$. Отже, різниця $a - c$ є додатним числом, а тому $a > c$. ▲

Аналогічно доводиться властивість: ***якщо*** $a < b$ ***і*** $b < c$, ***то*** $a < c$.

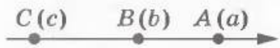


Рис. 20.2

Теорему 20.1 можна проілюструвати геометрично: якщо на координатній прямій точка A (a) лежить праворуч від точки B (b), а точка B (b) — праворуч від точки C (c), то точка A (a) лежить праворуч від точки C (c) (рис. 20.2).

Теорема 20.2. ***Якщо*** $a > b$ ***і*** c ***— будь-яке число, то*** $a + c > b + c$.

Доведення. Розглянемо різницю $(a + c) - (b + c)$. Маємо: $(a + c) - (b + c) = a - b$. Оскільки за умовою $a > b$, то різниця $a - b$ є додатним числом. Отже, $a + c > b + c$. ▲

Аналогічно доводять властивість: ***якщо*** $a < b$ ***і*** c ***— будь-яке число, то*** $a + c < b + c$.

Оскільки дію віднімання можна замінити дією додавання ($a - c = a + (-c)$), то, ураховуючи теорему 20.2, можна зробити такий висновок.

Якщо до обох частин правильної нерівності додати або від обох частин правильної нерівності відняти одне й те саме число, то отримаємо правильну нерівність.

Наслідок. ***Якщо будь-який доданок перенести з однієї частини правильної нерівності в другу, замінивши знак доданка на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.***

Доведення. Нехай нерівність $a > b + c$ є правильною. Віднімемо від обох її частин число c. Отримаємо: $a - c > b + c - c$, тобто $a - c > b$. ▲

Теорема 20.3. ***Якщо $a > b$ і c — додатне число, то $ac > bc$. Якщо $a > b$ і c — від'ємне число, то $ac < bc$.***

Доведення. Розглянемо різницю $ac - bc$. Маємо: $ac - bc = c(a - b)$.

За умовою $a > b$, отже, різниця $a - b$ є додатним числом.

Якщо $c > 0$, то добуток $c(a - b)$ додатний, а отже, різниця $ac - bc$ є додатною, тобто $ac > bc$.

Якщо $c < 0$, то добуток $c(a - b)$ від'ємний, а отже, різниця $ac - bc$ є від'ємною, тобто $ac < bc$. ▲

Аналогічно доводять властивість: ***якщо $a < b$ і c — додатне число, то $ac < bc$; якщо $a < b$ і c — від'ємне число, то $ac > bc$.***

Оскільки дію ділення можна замінити дією множення $\left(a : c = a \cdot \frac{1}{c}\right)$, то, ураховуючи теорему 20.3, можна зробити такий висновок.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо правильну нерівність.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число і поміняти знак нерівності на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.

Наслідок. ***Якщо $ab > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.***

Доведення. Поділимо обидві частини нерівності $a > b$ на додатне число ab. Отримаємо правильну нерівність $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, тобто $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Звідси $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ▲

Звернемо увагу: вимога, щоб числа a і b були однакового знака ($ab > 0$), є суттєвою. Справді, нерівність $5 > -3$ є правильною, проте нерівність $\frac{1}{5} < -\frac{1}{3}$ є неправильною.

У теоремах, які розглядалися в цьому пункті, ішлося про строгі нерівності. Аналогічні властивості мають і нестрогі нерівності. Наприклад, якщо $a \geqslant b$ і c — будь-яке число, то $a + c \geqslant b + c$.

ПРИКЛАД Відомо, що $-4 \leqslant a < -2$. Доведіть, що

$$-7 < \frac{7}{3a+5} \leqslant -1.$$

Розв'язання. Маємо: $-4 \leqslant a < -2$. Тоді за теоремою 20.3 отримуємо $-12 \leqslant 3a < -6$. Застосовуючи теорему 20.2, одержимо $-7 \leqslant 3a + 5 < -1$. Користуючись наслідком з теореми 20.3, можна записати, що $-\frac{1}{7} \geqslant \frac{1}{3a+5} > -1$, тобто $-1 < \frac{1}{3a+5} \leqslant -\frac{1}{7}$. Звідси $-7 < \frac{7}{3a+5} \leqslant -1$.

?

1. У якому випадку число a вважають більшим за число b?
2. У якому випадку число b вважають меншим від числа a?
3. Скільки різних співвідношень і яких саме може бути при порівнянні чисел a і b?
4. Як розташована на координатній прямій точка, яка зображує число a, відносно точки, яка зображує число b, якщо $a > b$?
5. Який символ використовують для вислову «не більше»?
6. Який символ використовують для вислову «не менше»?
7. У якому випадку є правильною нерівність $a \leqslant b$?
8. У якому випадку є правильною нерівність $a \geqslant b$?
9. Поясніть, які знаки називають знаками строгої нерівності, а які — нестрогої.
10. Яке з чисел a і c більше, якщо $a > b$ і $b > c$?
11. Сформулюйте теорему про додавання одного й того самого числа до обох частин нерівності.
12. Сформулюйте наслідок з теореми про додавання одного й того самого числа до обох частин нерівності.
13. Сформулюйте теорему про множення обох частин нерівності на одне й те саме число.
14. Сформулюйте наслідок з теореми про множення обох частин нерівності на одне й те саме число.

20.1.° Порівняйте числа a і b, якщо:

1) $a - b = 0,4$; 2) $a - b = -3$; 3) $a - b = 0$.

20.2.° Відомо, що $m < n$. Чи може різниця $m - n$ дорівнювати числу: 1) 4,6; 2) −5,2; 3) 0?

20.3.° Яке з чисел x і y більше, якщо:
1) $x - y = -8$; 2) $y - x = 10$?

20.4.° Як розташована на координатній прямій точка A (a) відносно точки B (b), якщо:
1) $a - b = 2$; 2) $a - b = -6$; 3) $a - b = 0$?

20.5.° Чи можуть одночасно виконуватися нерівності:
1) $a > b$ і $a < b$; 2) $a \geqslant b$ і $a \leqslant b$?

20.6.° Чи є правильним твердження:
1) якщо $a > b$, то $\frac{a}{b} > 1$; 3) якщо $a < 1$, то $\frac{2}{a} > 2$;
2) якщо $a > 1$, то $\frac{2}{a} < 2$; 4) якщо $\frac{a}{b} > 1$ і $b > 0$, то $a > b$?

20.7.° Чи є правильним твердження:
1) якщо $a > 1$, то $|a| > 1$; 3) якщо $a < -3$, то $|a| > 3$;
2) якщо $a < 2$, то $|a| < 2$; 4) якщо $-4 < a < 4$, то $|a| < 4$?

20.8.° Відомо, що $a < 3$. Який знак має значення виразу:
1) $2a - 6$; 2) $3 - a$; 3) $\frac{a-3}{4-a}$?

20.9.° Відомо, що $a > 2$. Який знак має значення виразу:
1) $4a - 8$; 2) $6 - 3a$; 3) $3a - 3$; 4) $(a - 2)(1 - a)$?

20.10.° Який знак має значення виразу $(a + 3)(a - 2)$, якщо:
1) $a < -3$; 2) $a > 2$; 3) $-3 < a < 2$; 4) $a < -4$?

20.11.° Відомо, що $a < b$ і $b < c$. Яке з тверджень є правильним:
1) $a > c$; 2) $a = c$; 3) $c > a$?

20.12.° Відомо, що $b > a$, $c < a$ і $d > b$. Порівняйте числа:
1) a і d; 2) b і c.

20.13.° Розташуйте в порядку зростання числа a, b, c і 0, якщо $a > b$, $c < b$, $0 < b$ і $0 > c$.

20.14.° Відомо, що $a > 4$. Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $a - 3$; 3) $(a - 3)(a - 2)$; 5) $(1 - a^2)(4 - a)$.
2) $2 - a$; 4) $\frac{(a-4)(a-2)}{3-a}$;

20.15.° Відомо, що $b > -2$ і $b < 1$. Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $b + 2$; 3) $b - 2$; 5) $(b + 2)(b - 4)^2$;
2) $1 - b$; 4) $(b - 1)(b - 3)$; 6) $(b - 3)(b + 3)(b - 2)^2$.

20.16.° Дано: $a > b$. Порівняйте значення виразів:
1) $a + 9$ і $b + 9$; 3) $1{,}8a$ і $1{,}8b$;
2) $b - 6$ і $a - 6$; 4) $-a$ і $-b$;

5) $-40b$ і $-40a$;

6) $\frac{a}{20}$ і $\frac{b}{20}$;

7) $2a - 3$ і $2b - 3$;

8) $5 - 8a$ і $5 - 8b$.

20.17.° Відомо, що $1 \leqslant m < 2$. Які з наведених нерівностей є правильними:

1) $-1 \leqslant m < -2$;

2) $-2 < m \leqslant -1$;

3) $-1 \geqslant -m > -2$;

4) $-2 > m \geqslant -1$?

20.18.° Дано: $-3a > -3b$. Порівняйте значення виразів:

1) a і b;

2) $\frac{2}{7}a$ і $\frac{2}{7}b$;

3) $b - 4$ і $a - 4$;

4) $-\frac{5}{9}b$ і $-\frac{5}{9}a$;

5) $3a + 2$ і $3b + 2$;

6) $-5a + 10$ і $-5b + 10$.

20.19.° Відомо, що $a > b$. Розташуйте в порядку спадання числа $a + 7$, $b - 3$, $a + 4$, $b - 2$, b.

20.20.° Дано: $a < b$. Порівняйте:

1) $a - 5$ і b;
2) a і $b + 6$;
3) $a + 3$ і $b - 2$.

20.21.° Порівняйте числа a і b, якщо:

1) $a > c$ і $c > b + 3$;

2) $a > c$ і $c - 1 > b + d^2$,

де c і d — деякі числа.

20.22.° Порівняйте числа a і 0, якщо:

1) $7a < 8a$;

2) $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$;

3) $-6a > -8a$;

4) $-0{,}02a > -0{,}2a$.

20.23.° Дано: $a > -2$. Доведіть, що:

1) $7a + 10 > -4$;

2) $-6a - 3 < 10$.

20.24.° Дано: $b \leqslant 10$. Доведіть, що:

1) $5b - 9 \leqslant 41$;

2) $1 - 2b > -21$.

20.25.° Чи є правильним твердження:

1) якщо $a > b$, то $a > -b$;

2) якщо $a > b$, то $2a > b$;

3) якщо $a > b$, то $2a + 1 > 2b$;

4) якщо $b > a$, то $\frac{b}{a} > 1$;

5) якщо $\frac{a}{b} > 1$ і $a > 0$, то $a > b$;

6) якщо $a > b + 2$ і $b - 3 > 4$, то $a > 5$;

7) якщо $a > b$, то $ab > b^2$;

8) оскільки $5 > 3$, то $5a^2 > 3a^2$?

20.26.° Чи є правильним твердження:

1) якщо $a > 1$, то $\frac{1}{a} < 1$;
2) якщо $a > 3$, то $\frac{3}{a} < 1$;
3) якщо $a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$;
4) якщо $2 \leqslant a < 3$, то $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{2}$;
5) якщо $-2 < a < -1$, то $-1 < \frac{1}{a} < -\frac{1}{2}$;
6) якщо $-3 < a < 3$, то $-\frac{1}{3} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$?

20.27.° Відомо, що $1 < a < 2$. Доведіть, що:

1) $\frac{1}{3} < \frac{1}{2a-1} < 1$;
2) $1 < \frac{4}{3a-2} < 4$.

20.28.° Доведіть, що коли:

1) $2 < a < 3$, то $\frac{1}{a-2} > 1$;
2) $-3 < a < -1$, то $\frac{1}{a+1} < -\frac{1}{2}$.

20.29.° Запишіть правильну нерівність, яку дістанемо, якщо:
1) обидві частини нерівності $a > 2$ помножимо на a;
2) обидві частини нерівності $b < -1$ помножимо на b;
3) обидві частини нерівності $m < -3$ помножимо на $-m$.

20.30.° Запишіть правильну нерівність, яку дістанемо, якщо:
1) обидві частини нерівності $a < -a^2$ поділимо на a;
2) обидві частини нерівності $a > a^2$ поділимо на a;
3) обидві частини нерівності $a^3 > a^2$ поділимо на $-a$.

21. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу

Розглянемо приклади.

1) Якщо з першого поля зібрали не менше ніж 40 т жита, а з другого поля — не менше ніж 45 т, то очевидно, що з двох полів разом зібрали не менше ніж 85 т жита.
2) Якщо довжина прямокутника не більша за 70 см, а ширина — не більша за 40 см, то очевидно, що його площа не більша за 2800 см^2.

Висновки з цих прикладів є інтуїтивно очевидними. Справедливість їх підтверджують такі теореми.

Теорема 21.1 (про почленне додавання нерівностей). ***Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.***

Доведення. Розглянемо різницю $(a + c) - (b + d)$. Маємо:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Оскільки $a > b$ і $c > d$, то різниці $a - b$ і $c - d$ є додатними числами. Отже, різниця, що розглядається, є додатною, тобто $a + c > b + d$. ▲

Аналогічно доводиться властивість: ***якщо*** $a < b$ ***і*** $c < d$, ***то*** $a + c < b + d$.

Нерівності $a > b$ і $c > d$ (або $a < b$ і $c < d$) називають **нерівностями однакового знака**, а нерівності $a > b$ і $c < d$ (або $a < b$ і $c > d$) — **нерівностями протилежних знаків**.

Теорема 21.1 означає, що ***при почленному додаванні правильних нерівностей однакового знака результатом є правильна нерівність того самого знака.***

Зазначимо, що теорема 21.1 справедлива й у випадку почленного додавання трьох і більше нерівностей. Наприклад, якщо $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ і $a_3 > b_3$, то $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

Теорема 21.2 (**про почленне множення нерівностей**). ***Якщо*** $a > b$, $c > d$ ***і*** a, b, c, d ***— додатні числа, то*** $ac > bd$.

Доведення. Розглянемо різницю $ac - bd$. Маємо:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c\,(a - b) + b\,(c - d).$$

За умовою $a - b > 0$, $c - d > 0$, $c > 0$, $b > 0$. Отже, різниця, що розглядається, є додатною. З цього випливає, що $ac > bd$. ▲

Аналогічно доводиться властивість: ***якщо*** $a < b$, $c < d$ ***і*** a, b, c, d ***— додатні числа, то*** $ac < bd$.

Теорема 21.2 означає, що ***при почленному множенні правильних нерівностей однакового знака, у яких ліві та праві частини — додатні числа, результатом є правильна нерівність того самого знака.***

Звернемо увагу: вимога, щоб обидві частини нерівностей, які множать, були додатними, є суттєвою. Справді, розглянемо дві правильні нерівності $-2 > -3$ і $4 > 1$. Помноживши почленно ці нерівності, отримуємо нерівність $-8 > -3$, яка не є правильною.

Зауважимо, що теорема залишається справедливою і у випадку почленного множення трьох і більше нерівностей. Наприклад, якщо $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — додатні числа, причому $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 > b_3$, то $a_1a_2a_3 > b_1b_2b_3$.

Наслідок. ***Якщо*** $a > b$ ***і*** a, b ***— додатні числа, то*** $a^n > b^n$, ***де*** n ***— натуральне число.***

Доведення. Запишемо n правильних нерівностей $a > b$:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ \ldots \\ a > b \end{array}\right\} n \text{ нерівностей}$$

Оскільки a і b — додатні числа, то можемо помножити почленно n записаних нерівностей. Отримаємо $a^n > b^n$. ▲

Зазначимо, що всі розглянуті властивості нерівностей є справедливими і в тому випадку, коли нерівності є нестрогими:

якщо $a \geqslant b$ і $c \geqslant d$, то $a + c \geqslant b + d$;

якщо $a \geqslant b$, $c \geqslant d$ і a, b, c, d — додатні числа, то $ac \geqslant bd$;

якщо $a \geqslant b$ і a, b — додатні числа, то $a^n \geqslant b^n$, де n — натуральне число.

Часто значення величин, які є результатом вимірювань, не є точними. Вимірювальні прилади, як правило, дозволяють лише встановити **межі**, між якими знаходиться точне значення.

Нехай, наприклад, у результаті вимірювання ширини x і довжини y прямокутника було встановлено, що 2,5 см $< x <$ 2,7 см і 4,1 см $< y <$ 4,3 см. Тоді за допомогою теореми 21.2 можна оцінити площу прямокутника. Маємо:

$$\times\begin{array}{r} 2{,}5 \text{ см} < x < 2{,}7 \text{ см} \\ 4{,}1 \text{ см} < y < 4{,}3 \text{ см} \\ \hline 10{,}25 \text{ см}^2 < xy < 11{,}61 \text{ см}^2 \end{array}$$

Узагалі, якщо відомо значення меж величин, то, використовуючи властивості числових нерівностей, можна знайти межі, тобто **оцінити** значення виразу, який містить ці величини.

ПРИКЛАД Дано: $6 < a < 8$ і $10 < b < 12$. Оцініть значення виразу:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) ab; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $3a - \frac{1}{2}b$.

Розв'язання

1) Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо:

$$+\begin{array}{r} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \\ \hline 16 < a + b < 20 \end{array}$$

2) Помноживши кожну частину нерівності $10 < b < 12$ на -1, отримуємо $-10 > -b > -12$ або $-12 < -b < -10$. Ураховуючи, що $a - b = a + (-b)$, далі маємо:

$$+\begin{array}{r} 6 < a < 8 \\ -12 < -b < -10 \\ \hline -6 < a - b < -2 \end{array}$$

3) Оскільки $a > 6$ і $b > 10$, то a і b набувають додатних значень. Застосувавши теорему про почленне множення нерівностей, отримуємо:

$$\times\begin{array}{r} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \\ \hline 60 < ab < 96 \end{array}$$

4) Оскільки $10 < b < 12$, то $\frac{1}{10} > \frac{1}{b} > \frac{1}{12}$ або $\frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}$. Ураховуючи, що $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, маємо:

$$\times\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ \frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10} \\ \hline \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5} \end{array}$$

5) Помножимо кожну частину нерівності $6 < a < 8$ на 3, а кожну частину нерівності $10 < b < 12$ на $-\frac{1}{2}$:

$$6 < a < 8 \,\Big|\cdot 3 \qquad\qquad 10 < b < 12 \,\Big|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$18 < 3a < 24 \qquad\qquad -5 > -\frac{1}{2}b > -6$$

$$-6 < -\frac{1}{2}b < -5$$

Додамо отримані нерівності:

$$+\begin{array}{c} 18 < 3a < 24 \\ -6 < -\frac{1}{2}b < -5 \\ \hline 12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19 \end{array}$$

Відповідь: 1) $16 < a + b < 20$; 2) $-6 < a - b < -2$; 3) $60 < ab < 96$; 4) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$; 5) $12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19$.

?

1. Сформулюйте теореми про почленне додавання нерівностей.

2. Поясніть, які нерівності називають нерівностями однакового знака, а які нерівності — нерівностями протилежних знаків.
3. Що є результатом почленного додавання нерівностей однакового знака?
4. Сформулюйте теорему про почленне множення нерівностей.
5. Що є результатом почленного множення нерівностей однакового знака?
6. Сформулюйте наслідок з теореми про почленне множення нерівностей.

21.1.° Дано: $-3 < a < 4$. Оцініть значення виразу:

1) $2a$; 3) $a + 2$; 5) $3a + 1$; 7) $-4a$;

2) $\frac{a}{3}$; 4) $a - 1$; 6) $-a$; 8) $-5a + 3$.

21.2.° Дано: $2 < b < 6$. Оцініть значення виразу:

1) $\frac{1}{2}b$; 2) $b - 6$; 3) $2b + 5$; 4) $4 - b$.

21.3.° Дано: $2 < x < 4$. Оцініть значення виразу $\frac{1}{x}$.

21.4.° Оцініть середнє арифметичне значень a і b, якщо $2{,}5 < a < 2{,}6$ і $3{,}1 < b < 3{,}2$.

21.5.° Оцініть периметр рівнобедреного трикутника з основою a см і бічною стороною b см, якщо $10 < a < 14$ і $12 < b < 18$.

21.6.° Оцініть периметр паралелограма зі сторонами a см і b см, якщо $15 \leqslant a \leqslant 19$ і $6 \leqslant b \leqslant 11$.

21.7.° Чи є правильним твердження:

1) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 9$;
2) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 8$;
3) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 9{,}2$;
4) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a - b > -5$;
5) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $b - a > 5$;
6) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $ab > 13$;
7) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $3a + 2b > 20$;
8) якщо $a > 2$ і $b < -7$, то $a - b > 9$;
9) якщо $a < 2$ і $b < 7$, то $ab < 14$;
10) якщо $a > 2$, то $a^2 > 4$;
11) якщо $a < 2$, то $a^2 < 4$?

21.8.° Дано: $a > 2{,}4$ і $b > 1{,}6$. Порівняйте:

1) $a + \frac{3}{4}b$ і 3,6; 2) $(a + b)^2$ і 16; 3) $(a - 0{,}4)(b + 1{,}4)$ і 6.

21.9.° Відомо, що $a > 3$ і $b > -2$. Доведіть, що $5a + 4b > 7$.

21.10.° Відомо, що $a > 5$ і $b < 2$. Доведіть, що $6a - 7b > 16$.

21.11.° Дано: $5 < a < 8$ і $3 < b < 6$. Оцініть значення виразу:

1) $4a + 3b$; 2) $3a - 6b$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{2b}{3a}$.

21.12.° Дано: $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ і $\frac{1}{7} < y < \frac{1}{4}$. Оцініть значення виразу:

1) $6x + 14y$; 2) $28y - 12x$; 3) $\frac{y}{x}$.

21.13.• Доведіть, що периметр чотирикутника більший за суму його діагоналей.

21.14.• Доведіть, що кожна діагональ опуклого чотирикутника менша від його півпериметра.

21.15.• Доведіть, що сума двох протилежних сторін опуклого чотирикутника менша від суми його діагоналей.

21.16.• Доведіть твердження:

1) якщо $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$;

2) якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a^2 > b^2$, то $a > b$.

21.17.• Оцініть значення a, якщо:

1) $a - |b| = 1$; 2) $a + b^2 = 2$; 3) $|a| + |b| = 1$.

21.18.• Відомо, що $b > 0$ і $a > b$. Чи обов'язково є правильною нерівність:

1) $a^2 + a > b^2 + b$;

2) $a^2 - a > b^2 - b$;

3) $2 - a^2 < 2 - b^2$;

4) $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$?

22. Нерівності з однією змінною

Розглянемо таку задачу. Одна із сторін паралелограма дорівнює 7 см. Якою має бути довжина другої сторони, щоб периметр паралелограма був більший за 44 см?

Нехай шукана сторона дорівнює x см. Тоді периметр паралелограма дорівнює $(14 + 2x)$ см. Нерівність $14 + 2x > 44$ є математичною моделлю задачі про периметр паралелограма.

Якщо в цю нерівність замість змінної x підставити, наприклад, число 16, то отримаємо правильну числову нерівність $14 + 32 > 44$. Кажуть, що число 16 є **розв'язком нерівності** $14 + 2x > 44$.

Означення. **Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її в правильну числову нерівність.**

Так, кожне з чисел 15,1; 20; 101 є розв'язком нерівності $14 + 2x > 44$, а, наприклад, число 10 не є її розв'язком.

Зауваження. Означення розв'язку нерівності аналогічне означенню кореня рівняння. Проте не прийнято говорити «корінь нерівності».

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Усі розв'язки нерівності утворюють **множину розв'язків нерівності.** Якщо нерівність розв'язків не має, то кажуть, що множиною її розв'язків є порожня множина. Отже, ***розв'язати нерівність означає знайти множину її розв'язків.***

Наприклад, до задачі «розв'яжіть нерівність $x^2 > 0$» відповідь буде такою: «множина всіх чисел, крім числа 0».

Очевидно, що нерівність $|x| < 0$ розв'язків не має, тобто множиною її розв'язків є порожня множина.

Означення. Нерівності називають рівносильними, якщо множини їх розв'язків рівні.

Наведемо кілька прикладів.

Нерівності $x^2 \leqslant 0$ і $|x| \leqslant 0$ є рівносильними. Справді, кожна з них має єдиний розв'язок $x = 0$.

Нерівності $x^2 > -1$ і $|x| > -2$ є рівносильними, оскільки множиною розв'язків кожної з них є множина всіх чисел.

Оскільки кожна з нерівностей $|x| < -1$ і $0x < -3$ розв'язків не має, то вони також є рівносильними.

1. Що називають розв'язком нерівності з однією змінною?
2. Що означає розв'язати нерівність?
3. Що утворюють усі розв'язки нерівності?
4. Коли множиною розв'язків нерівності є порожня множина?
5. Які нерівності називають рівносильними?

22.1.° Які з чисел -4; $-0,5$; 0; $\frac{1}{3}$; 2 є розв'язками нерівності:

1) $x \leqslant 5$; 2) $3x > x - 1$; 3) $x^2 - 9 \leqslant 0$; 4) $\frac{1}{x} > 1$?

22.2.° Яке з наведених чисел є розв'язком нерівності

$$(x - 2)^2 (x - 5) > 0:$$

1) 3; 2) 2; 3) 6; 4) -1?

22.3.° Множиною розв'язків якої з даних нерівностей є порожня множина:

1) $(x - 3)^2 > 0$; 2) $(x - 3)^2 \geqslant 0$; 3) $(x - 3)^2 < 0$; 4) $(x - 3)^2 \leqslant 0$?

22.4.° Яка з наведених нерівностей не має розв'язків:

1) $0x > -3$; 2) $0x < 3$; 3) $0x < -3$; 4) $0x > 3$?

22.5.° Множиною розв'язків якої з наведених нерівностей є множина всіх чисел:

1) $0x > 1$; 2) $0x > 0$; 3) $0x > -1$; 4) $x + 1 > 0$?

22.6.° Множиною розв'язків яких з наведених нерівностей є множина всіх чисел:

1) $x^2 > 0$; 2) $x > -x$; 3) $-x^2 \leqslant 0$; 4) $|x| \geqslant 0$?

22.7.° Серед наведених нерівностей укажіть нерівність, розв'язком якої є будь-яке число, і нерівність, що не має розв'язків:

1) $\frac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$; 2) $\frac{x^2+1}{x^2+1} < 1$; 3) $\frac{x^2-1}{x^2-1} \geqslant 1$; 4) $\frac{x^2}{x^2+1} \geqslant 0$.

22.8.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{2}{x^2} + 2 > 0$;
2) $(x + 2)^2 > 0$;
3) $(x + 2)^2 \leqslant 0$;
4) $\frac{x+2}{x+2} > \frac{2}{3}$;
5) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 > 0$;
6) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 \geqslant 0$;
7) $|x| > -1$;
8) $|x^2 - 3x - 2| < -1$;
9) $\left|\frac{1}{x+3}\right| > -2$;
10) $|x^2 - 4| \leqslant 0$;
11) $|x| \geqslant -x^2$;
12) $|x| > -x^2$;
13) $|x| > x$;
14) $|x| \geqslant -x$;
15) $\frac{|x|}{x} \geqslant 1$;
16) $\frac{|x|}{x} > 1$;
17) $|x| + x \geqslant -x^2$;
18) $|x| - x \geqslant -x^2$.

22.9.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $|x| > 0$;
2) $|x| \leqslant 0$;
3) $|x| < 0$;
4) $|x| > -2$;
5) $\left|\frac{1}{x}\right| > -2$;
6) $|x| > -|x - 4|$;
7) $\left|\frac{1}{x}\right| > -|x|$;
8) $\frac{|x|}{x} < 1$;
9) $\frac{|x|}{x} \leqslant 1$;
10) $|x| + x > -x^2$;
11) $|x| + x \leqslant -x^2$;
12) $|x| - x \leqslant -x^2$.

22.10.° Чи рівносильні нерівності:

1) $\frac{1}{x} < 1$ і $x > 1$;
2) $x^2 \geqslant x$ і $x \geqslant 1$;
3) $(x - 1)^2 > 0$ і $|x - 1| > 0$;
4) $(x - 5)^2 < 0$ і $|x - 4| < 0$;
5) $|x| \leqslant 0$ і $x^4 \leqslant 0$;
6) $(x - 2)^2 \leqslant 0$ і $(x - 1)^2 \leqslant 0$?

23. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Числові проміжки

За допомогою властивостей числових рівностей ми розв'язували рівняння. Так само використовуючи властивості числових нерівностей, можна розв'язувати нерівності.

Розв'язуючи рівняння, ми заміняли його іншим, більш простим рівнянням, але рівносильним даному. За аналогічною схемою розв'язують і нерівності.

При заміні рівняння на рівносильне йому рівняння використовують теореми про перенесення доданків з однієї частини в другу і про множення обох частин рівняння на одне й те саме відмінне від нуля число.

Аналогічні теореми застосовують і при розв'язуванні нерівностей.

- Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в іншу, замінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Ці теореми доводять так само, як і теореми пункту 15. Переконайтесь у цьому самостійно.

За допомогою цих теорем розв'яжемо нерівність, отриману в задачі про периметр паралелограма (див. п. 22).

Маємо: $14 + 2x > 44$.

Переносимо доданок 14 в праву частину нерівності:

$$2x > 44 - 14.$$

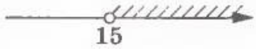
Звідси $2x > 30$.

Поділимо обидві частини нерівності на 2:

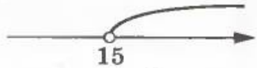
$$x > 15.$$

Зауважимо, що отримана нерівність рівносильна заданій нерівності. Множина її розв'язків складається з усіх чисел, які більші за 15. Цю множину називають **числовим проміжком** і позначають $(15; +\infty)$ (читають: «проміжок від 15 до плюс нескінченності»).

Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x > 15$, розміщені праворуч від точки, яка зображує чис-



а



б

Рис. 23.1

ло 15, і утворюють промінь, у якого «виколото» початок (рис. 23.1). Тому числовий проміжок $(15; +\infty)$ називають **відкритим числовим променем**.

Відповідь може бути записана одним із способів: $(15; +\infty)$ або $x > 15$.

Зауважимо, що для зображення на рисунку числового проміжку використовують два способи: за допомогою або штриховки (рис. 23.1, *а*), або дужки (рис. 23.1, *б*). Ми використовуватимемо другий спосіб.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $3 + \frac{x}{2} \leqslant 7 + x$.

Розв'язання. Перенесемо доданок x з правої частини нерівності в ліву, а доданок 3 — з лівої частини в праву і зведемо подібні члени:

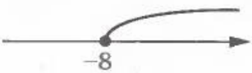


Рис. 23.2

$$-x + \frac{x}{2} \leqslant 7 - 3;$$

$$-\frac{x}{2} \leqslant 4.$$

Помножимо обидві частини нерівності на -2:

$$x \geqslant -8.$$

Множиною розв'язків цієї нерівності є числовий проміжок, який позначають так: $[-8; +\infty)$ (читають: «проміжок від -8 до плюс нескінченності, включаючи -8»).

Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x \geqslant -8$, утворюють промінь (рис. 23.2). Тому числовий проміжок $[-8; +\infty)$ називають **числовим променем**.

Відповідь можна записати одним із способів: $[-8; +\infty)$ або $x \geqslant -8$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $2(2 - 3x) > 3(x + 6) - 5$.

Розв'язання. Запишемо ланцюжок рівносильних нерівностей:

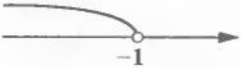


Рис. 23.3

$$4 - 6x > 3x + 18 - 5;$$

$$4 - 6x > 3x + 13;$$

$$-3x - 6x > -4 + 13;$$

$$-9x > 9;$$

$$x < -1.$$

Множиною розв'язків останньої нерівності є числовий проміжок, який позначають так: $(-\infty; -1)$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до -1»).

Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x < -1$, розміщені ліворуч від точки -1 (рис. 23.3) і утворюють промінь, у якого «виколото» початок. Тому числовий проміжок $(-\infty; -1)$ називають відкритим числовим променем. Відповідь можна записати одним із способів: $(-\infty; -1)$ або $x < -1$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} \leqslant \frac{1}{6}$.

Розв'язання. Запишемо ланцюжок рівносильних нерівностей:

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} \leqslant 6 \cdot \frac{1}{6};$$
$$3x - 3 + 2x \leqslant 1;$$
$$5x \leqslant 4;$$
$$x \leqslant \frac{4}{5}.$$

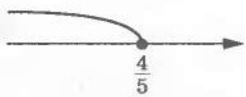


Рис. 23.4

Множиною розв'язків останньої нерівності є числовий проміжок, який позначають так: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до $\frac{4}{5}$, включаючи $\frac{4}{5}$»).

Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x \leqslant \frac{4}{5}$, утворюють промінь (рис. 23.4). Тому числовий проміжок $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ називають числовим променем.

Відповідь можна записати одним із способів: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ або $x \leqslant \frac{4}{5}$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $3(2x - 1) + 7 \geqslant 2(3x + 1)$.

Розв'язання. Маємо: $6x - 3 + 7 \geqslant 6x + 2;$

$$6x - 6x \geqslant 2 - 4;$$
$$0x \geqslant -2.$$

Остання нерівність при будь-якому значенні x перетворюється в правильну числову нерівність $0 \geqslant -2$. Отже, шукана множина розв'язків збігається з множиною всіх чисел.

Відповідь: x — будь-яке число.

Цю відповідь можна записати інакше: $(-\infty; +\infty)$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до плюс нескінченності»). Цей числовий проміжок називають **числовою прямою**.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $4(x-2)-1<2(2x-9)$.

Розв'язання. Маємо:

$$4x-8-1<4x-18;$$
$$4x-4x<9-18;$$
$$0x<-9.$$

Отримана нерівність при будь-якому значенні x перетворюється в неправильну числову нерівність $0<-9$.

Відповідь можна записати одним із способів: розв'язків немає або $\varnothing$.

Означення. Нерівності виду $ax>b$ і $ax<b$, де x — змінна, a і b — параметри, називають лінійними нерівностями з однією змінною.

Означення. Якщо множина розв'язків першої нерівності є підмножиною множини розв'язків другої нерівності, то другу нерівність називають наслідком першої нерівності.

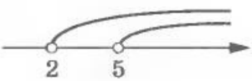


Рис. 23.5

Наприклад, нерівність $x>2$ є наслідком нерівності $x>5$ (рис. 23.5).

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то будь-яка нерівність з однією змінною є наслідком нерівності, яка не має розв'язків, наприклад нерівності $|x|<0$.

ПРИКЛАД 6 При яких значеннях параметра a нерівність $2x+a>0$ є наслідком нерівності $x+1-3a>0$?

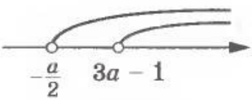
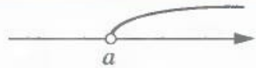
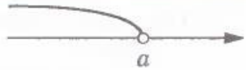
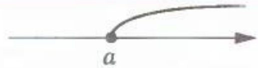
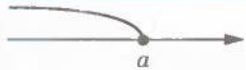


Рис. 23.6

Розв'язання. Замінимо дані нерівності на рівносильні. Маємо: $x>-\frac{a}{2}$ і $x>3a-1$. Множина розв'язків нерівності $x>-\frac{a}{2}$ має містити множину розв'язків нерівності $x>3a-1$ (рис. 23.6), а це виконується, якщо $-\frac{a}{2}\leqslant 3a-1$, тобто $a\geqslant\frac{2}{7}$.

Відповідь: $a\geqslant\frac{2}{7}$.

Наведемо таблицю позначень і зображень вивчених числових проміжків.

Нерівність	Проміжок	Назва	Зображення
$x > a$	$(a;\ +\infty)$	Відкритий числовий промінь	
$x < a$	$(-\infty;\ a)$	Відкритий числовий промінь	
$x \geqslant a$	$[a;\ +\infty)$	Числовий промінь	
$x \leqslant a$	$(-\infty;\ a]$	Числовий промінь	

1. Сформулюйте теореми, за якими можна отримати нерівність, рівносильну даній.
2. Які нерівності називають лінійними нерівностями з однією змінною?
3. Як записують, читають, називають і зображують проміжок, який є множиною розв'язків нерівності виду: $x > a$; $x < a$; $x \geqslant a$; $x \leqslant a$?
4. Розв'язком нерівності є будь-яке число. Як у такому випадку записують, читають і називають проміжок, який є множиною розв'язків нерівності?

23.1.° Укажіть найменше ціле число, яке належить проміжку:
1) $(6;\ +\infty)$; 2) $[6;\ +\infty)$; 3) $(-3{,}4;\ +\infty)$; 4) $[-0{,}9;\ +\infty)$.

23.2.° Укажіть найбільше ціле число, яке належить проміжку:
1) $(-\infty;\ -4)$; 2) $(-\infty;\ -6{,}2]$; 3) $(-\infty;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -1{,}8)$.

23.3.° Розв'яжіть нерівність:
1) $-2x \geqslant 10$; 4) $7x - 2 > 19$; 7) $5x < 2x - 18$;
2) $\frac{1}{3}x < 9$; 5) $4 - x < 5$; 8) $36 - 2x < 4x$;
3) $-10x < 0$; 6) $5 + 8x \geqslant 6$; 9) $\frac{x+2}{5} < 2$.

23.4.° Розв'яжіть нерівність:
1) $-4x \leqslant -16$; 4) $-3x < \frac{6}{7}$; 7) $5 - 9x > 16$;
2) $\frac{2}{3}x \leqslant 6$; 5) $4x + 5 > -7$; 8) $\frac{x-3}{4} > -1$.
3) $-12x \geqslant 0$; 6) $9 - x \geqslant 2x$;

23.5.° Розв'яжіть нерівність:

1) $0x > 10$; 3) $0x > -8$; 5) $0x \geqslant 1$; 7) $0x \leqslant 0$;
2) $0x < 15$; 4) $0x < -3$; 6) $0x \leqslant 2$; 8) $0x > 0$.

23.6.° Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $5x \geqslant 40$; 2) $5x > 40$; 3) $-2x < -3$; 4) $-7x < 15$.

23.7.° Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $8x \leqslant -16$; 2) $8x < -16$; 3) $3x < 10$; 4) $-6x > -25$.

23.8.° При яких значеннях a вираз $6a + 1$ набуває від'ємних значень?

23.9.° При яких значеннях b вираз $7 - 2b$ набуває додатних значень?

23.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $8x + 2 < 9x - 3$; 3) $3 - 11y \geqslant -3y + 6$;
2) $6y + 8 \leqslant 10y - 8$; 4) $3m - 1 \leqslant 1{,}5m + 5$.

23.11.° Розв'яжіть нерівність:

1) $4 + 11x > 7 + 12x$; 3) $3x - 10 < 6x + 2$;
2) $35x - 28 \leqslant 32x + 2$; 4) $6x - 3 \geqslant 2x$.

23.12.° При яких значеннях c значення двочлена $9c - 2$ не більші за відповідні значення двочлена $4c + 4$?

23.13.° При яких значеннях k значення двочлена $11k - 3$ не менші від відповідних значень двочлена $15k - 13$?

23.14.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{4x}{3} + \frac{x}{2} < 11$; 3) $\frac{5x}{7} - x > -4$;
2) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} \geqslant \frac{1}{6}$; 4) $\frac{x}{8} - \frac{1}{4} \leqslant x$.

23.15.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{y}{6} - \frac{5y}{4} < 1$; 2) $\frac{x}{10} - \frac{x}{5} > -2$.

23.16.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3 - 5(2x + 4) \geqslant 7 - 2x$;
2) $x - 2(x - 1) \geqslant 10 + 3(x + 4)$;
3) $2(2x - 3{,}5) - 3(2 - 3x) < 6(1 - x)$;
4) $(4x - 3)^2 + (3x + 2)^2 \geqslant (5x + 1)^2$;
5) $\frac{2x - 1}{4} \geqslant \frac{3x - 5}{5}$;
6) $(x - 5)(x + 1) \leqslant 3 + (x - 2)^2$;
7) $\frac{x + 1}{2} - \frac{x - 3}{3} > 2 + \frac{x}{6}$;
8) $(6x - 1)^2 - 4x(9x - 3) \leqslant 1$;
9) $\frac{x - 3}{9} - \frac{x + 4}{4} > \frac{x - 8}{6}$.

23.17.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $(2 - y)(3 + y) \leqslant (4 + y)(6 - y)$;

2) $(y + 3)(y - 5) - (y - 1)^2 > -16$;

3) $\frac{2x}{3} - \frac{x-1}{6} - \frac{x+2}{2} < 0$;

4) $\frac{y-1}{2} - \frac{2y+1}{8} - y < 2$.

23.18.° Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $7(x + 2) - 3(x - 8) < 10$;

2) $(x - 4)(x + 4) - 5x > (x - 1)^2 - 17$.

23.19.° Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $\frac{4x+13}{10} - \frac{5+2x}{4} > \frac{6-7x}{20} - 2$;

2) $(x - 1)(x + 1) - (x - 4)(x + 2) \geqslant 0$.

23.20.° Скільки цілих від'ємних розв'язків має нерівність

$$x - \frac{x+7}{4} - \frac{11x+30}{12} < \frac{x-5}{3}?$$

23.21.° Скільки натуральних розв'язків має нерівність

$$\frac{2-3x}{4} \geqslant \frac{1}{5} - \frac{5x+6}{8}?$$

23.22.° При яких значеннях x є правильною рівність:

1) $|x - 5| = x - 5$;

2) $|2x + 14| = -2x - 14$?

23.23.° При яких значеннях y є правильною рівність:

1) $\frac{|y+7|}{y+7} = 1$;

2) $\frac{|6-y|}{y-6} = 1$?

23.24.° Турист проплив на човні деяку відстань за течією річки, а потім повернувся назад, витративши на всю подорож не більше п'яти годин. Швидкість човна в стоячій воді дорівнює 5 км/год, а швидкість течії — 1 км/год. Яку найбільшу відстань міг проплисти турист за течією річки?

23.25.° Узявши чотири послідовних цілих числа, розглянули різницю добутків крайніх і середніх чисел. Знайдіть чотири таких числа, для яких ця різниця більша за нуль.

23.26.° У коробці містяться сині та жовті кульки. Кількість синіх кульок відноситься до кількості жовтих як 3 : 4. Яка найбільша кількість синіх кульок може бути в коробці, якщо всього кульок не більше ніж 45?

23.27.° Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 14 см і a см, де a — натуральне число. Якого найбільшого значення може набувати a?

23.28.° Які з нерівностей є наслідками нерівності $1 - 3x > 0$:

1) $x > \frac{1}{3}$; 3) $x \leqslant \frac{1}{3}$; 5) $x < \frac{2}{5}$;

2) $x < \frac{1}{3}$; 4) $x < \frac{1}{4}$; 6) $x < 1$?

23.29.° Яка з нерівностей у парі є наслідком іншої:

1) $2x + 1 > 0$ і $1 - 2x < 0$;
2) $3x - 5 \leqslant 0$ і $6 - 5x \geqslant 0$;
3) $|x| \geqslant 0$ і $x^2 > 0$;
4) $|x + 3| < 0$ і $17x - 19 > 0$;
5) $x + 1 \geqslant 0$ і $(x + 1)(x^2 + 1) > 0$
6) $x^2 + 2x + 1 > 0$ і $x + 1 > 0$;
7) $\frac{1}{x} > 0$ і $x \geqslant 0$?

23.30.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |x - 2|$; 2) $y = |x + 3| - 1$; 3) $y = |x - 1| + x$.

23.31.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |x + 4|$; 2) $y = |x - 5| + 2$; 3) $y = |2x - 6| - x$.

23.32.° При яких значеннях параметра a рівняння:

1) $4x + a = 2$ має додатний корінь;
2) $(a + 6)x = 3$ має від'ємний корінь;
3) $(a - 1)x = a^2 - 1$ має єдиний додатний корінь?

23.33.° При яких значеннях параметра m рівняння:

1) $2 + 4x = m - 6$ має невід'ємний корінь;
2) $mx = m^2 - 7m$ має єдиний від'ємний корінь?

23.34.° Чи існує таке значення параметра a, при якому не має розв'язків нерівність (у випадку позитивної відповіді вкажіть це значення):

1) $ax > 3x + 4$; 2) $(a^2 + a)x \leqslant a$?

23.35.° Чи існує таке значення параметра a, при якому будь-яке число є розв'язком нерівності (у випадку позитивної відповіді вкажіть це значення):

1) $ax > -1 - 7x$; 2) $(a^2 - 16)x \leqslant a + 4$?

23.36.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $ax > 0$; 3) $ax \geqslant a$; 5) $(a + 3)x \leqslant a^2 - 9$;

2) $ax < 1$; 4) $(a - 2)x > a^2 - 4$; 6) $2(x - a) < ax - 4$.

23.37.** Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

1) $a^2x \leqslant 0$; 2) $(a + 4)x > 1$; 3) $a + x < 2 - ax$.

23.38.** При яких значеннях параметра a перша з нерівностей пари є наслідком другої нерівності:

1) $2x - a > 0$ і $x + 2a - 3 > 0$;
2) $3x + a \leqslant 0$ і $2x - a + 4 < 0$;
3) $x + a - 3 > 0$ і $\frac{x}{2} + a - 1 \geqslant 0$;
4) $ax < 1$ і $x > 1$;
5) $x > 0$ і $ax > 1$?

23.39.•• При яких значеннях параметра a нерівності є рівносильними:

1) $2x - a > 0$ і $x + 2a - 3 > 0$;
2) $3x + a \leqslant 0$ і $2x - a + 4 < 0$;
3) $3x - a \geqslant 0$ і $x - a - 1 \geqslant 0$;
4) $3x - a \geqslant 0$ і $ax - 3 \geqslant 0$;
5) $ax \geqslant 1$ і $2ax > 3$;
6) $a^2x \geqslant 1$ і $2ax \geqslant 3$?

24. Системи і сукупності лінійних нерівностей з однією змінною

Розглянемо нерівності $2x - 1 \geqslant 0$ і $5 - x \geqslant 0$. Поставимо задачу: знайти множину спільних розв'язків цих нерівностей.

Якщо треба знайти спільний розв'язок двох або кількох нерівностей, кажуть, що треба **розв'язати систему нерівностей.**

Як і систему рівнянь, систему нерівностей записують за допомогою фігурної дужки.

Для знаходження спільних розв'язків заданих вище нерівностей треба розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0, \\ 5 - x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Означення. **Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює кожну нерівність системи в правильну числову нерівність.**

Так, числа 2, 3, 4, 5 є розв'язками системи (*). А, наприклад, число 7 не є її розв'язком.

Розв'язати систему нерівностей — це означає знайти множину її розв'язків.

Наприклад, до задачі «Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 0x \geqslant -1, \\ |x| \geqslant 0 \end{cases}$» відповідь буде такою: «множина всіх чисел».

Очевидно, що множина розв'язків системи $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x \geqslant 5 \end{cases}$ складається з одного числа 5.

Система $\begin{cases} x > 5, \\ x < 5 \end{cases}$ розв'язків не має, тобто множиною її розв'язків є порожня множина.

Розв'яжемо систему (*). Перетворюючи кожну нерівність системи в рівносильну їй, отримуємо:

$$\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ -x \geqslant -5; \end{cases} \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$$

Множина розв'язків останньої системи складається з усіх чисел, які не менші від $\frac{1}{2}$ і не більші за 5, тобто з усіх чисел, які задовольняють нерівність $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають так: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (читають: «проміжок від $\frac{1}{2}$ до 5, включаючи $\frac{1}{2}$ і 5»).

Точки, які зображують розв'язки системи (*), розміщені між точками $A\left(\frac{1}{2}\right)$ і B (5), включаючи точки A і B (рис. 24.1). Вони утворюють відрізок. Тому числовий проміжок $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ називають **числовим відрізком.**

Відповідь у задачі про знаходження спільних розв'язків нерівностей $2x - 1 \geqslant 0$ і $5 - x \geqslant 0$ може бути записана одним із способів: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ або $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$.

Зауважимо, що всі спільні точки проміжків $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty; 5]$ утворюють проміжок $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (рис. 24.2). Тобто числовий відрізок $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ є перетином числових променів $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty; 5]$. Записують: $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cap (-\infty; 5] = \left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

Проміжки $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty; 5]$ є розв'язками відповідно нерівностей $x \geqslant \frac{1}{2}$ і $x \leqslant 5$. Тоді можна сказати, що *множина розв'язків системи* $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5 \end{cases}$ *є перетином множин розв'язків кожної з нерівностей, які складають систему.*

Рис. 24.1

Рис. 24.2

Отже, ***щоб розв'язати систему нерівностей, треба знайти перетин множин розв'язків нерівностей, які складають систему.***

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 3x - 1 > -7, \\ 3 - 4x > -9. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$$

Рис. 24.3

За допомогою координатної прямої знайдемо перетин множин розв'язків нерівностей даної системи, тобто перетин проміжків $(-\infty; 3)$ і $(-2; +\infty)$ (рис. 24.3). Шуканий перетин складається з усіх чисел, які задовольняють нерівність $-2 < x < 3$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають $(-2; 3)$ і читають: «проміжок від -2 до 3». Такий проміжок називають **відкритим числовим відрізком.**
Відповідь можна записати одним із способів: $(-2; 3)$ або $-2 < x < 3$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leqslant 5. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leqslant 2; \end{cases} \begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$

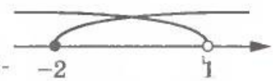


Рис. 24.4

За допомогою координатної прямої знайдемо перетин проміжків $(-\infty; 1)$ і $[-2; +\infty)$, які є множинами розв'язків нерівностей даної системи (рис. 24.4). Шуканий перетин складається з усіх чисел, які задовольняють нерівність $-2 \leqslant x < 1$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають $[-2; 1)$ і читають: «проміжок від -2 до 1, включаючи -2». Такий проміжок називають **числовим відрізком, відкритим справа.**
Відповідь можна записати одним із способів: $[-2; 1)$ або $-2 \leqslant x < 1$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > -2. \end{cases}$

Множиною розв'язків даної системи є перетин проміжків $(-\infty; 1]$ і $(-2; +\infty)$. Цей перетин є числовим проміжком, який позначають $(-2; 1]$ і читають: «проміжок від -2 до 1, включаючи 1». Такий проміжок називають **числовим відрізком, відкритим зліва.**

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $-7 < 3x + 5 < 11$.

Розв'язання. Розв'язками нерівності будуть ті значення змінної, які одночасно задовольняють кожну з нерівностей $3x + 5 > -7$ і $3x + 5 < 11$, тобто дана подвійна нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 3x+5>-7, \\ 3x+5<11. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x>-4, \\ x<2. \end{cases}$

Відповідь: $(-4; 2)$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $x^2(x + 1) > 0$.

Розв'язання. Добуток двох множників набуває додатних значень, якщо ці множники одного знака. Оскільки $x = 0$ не є розв'язком даної нерівності, то $x^2 > 0$, тому слід вимагати, щоб множник $x + 1$ був додатним. Звідси $x > -1$. Проте проміжку $(-1; +\infty)$ належить число 0, яке не є розв'язком даної нерівності. Отже, дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x+1>0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Розв'язком цієї системи є об'єднання двох проміжків: $(-1; 0)$ і $(0; +\infty)$ (рис. 24.5). Відповідь можна записати одним із способів: $(-1; 0) \cup (0; +\infty)$ чи $-1 < x < 0$ або $x > 0$.

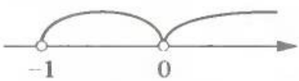


Рис. 24.5

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $|x|(x - 1) \geqslant 0$.

Розв'язання. Оскільки $|x| \geqslant 0$, то може здаватися, що дана нерівність рівносильна нерівності $x - 1 \geqslant 0$. Проте проміжку $[1; +\infty)$ не належить число 0, яке є розв'язком заданої нерівності. Отже, шукана множина розв'язків складається з об'єднання множини розв'язків рівняння $|x| = 0$ і множини розв'язків нерівності $x - 1 \geqslant 0$.

Відповідь: $\{0\} \cup [1; +\infty)$.

Якщо треба знайти об'єднання множин розв'язків нерівностей (рівнянь), то кажуть, що треба розв'язати **сукупність нерівностей (рівнянь)**. Сукупність нерівностей (рівнянь) записують за допомогою квадратної дужки.

Так, щоб розв'язати нерівність $|x|(x - 1) \geqslant 0$, треба розв'язати сукупність

$$\left[\begin{array}{l} |x|=0, \\ x-1 \geqslant 0. \end{array}\right.$$

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $(x + 2)(x - 1)^2 \leqslant 0$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна сукупності

$$\left[\begin{array}{l} x+2 \leqslant 0, \\ x-1=0. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x=1. \end{array}\right.$

Відповідь: $(-\infty; -2] \cup \{1\}$.

ПРИКЛАД 8 Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x - a)^2 (x - 2) \geqslant 0$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} x-2 \geqslant 0, \\ x-a=0. \end{array}\right.$ Звідси $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 2, \\ x=a. \end{array}\right.$

Якщо $a < 2$ (рис. 24.6), то множиною розв'язків заданої нерівності є множина $\{a\} \cup [2; +\infty)$.

Якщо $a \geqslant 2$ (рис. 24.7), то проміжок $[2; +\infty)$ є множиною розв'язків даної нерівності.

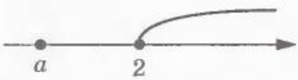


Рис. 24.6

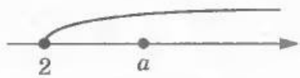
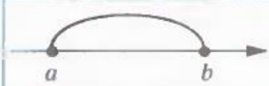
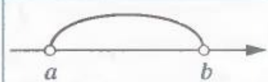
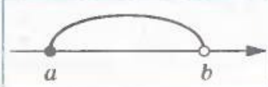


Рис. 24.7

Наприкінці наведемо таблицю позначень і зображень числових проміжків, вивчених у цьому пункті:

Нерівність	Проміжок	Назва	Зображення
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	Числовий відрізок	
$a < x < b$	$(a; b)$	Відкритий числовий відрізок	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	Числовий відрізок, відкритий зліва	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	Числовий відрізок, відкритий справа	

1. **У яких випадках кажуть, що треба розв'язати систему нерівностей?**

2. **За допомогою якого символу записують систему нерівностей?**

3. **Що називають розв'язком системи нерівностей з однією змінною?**

4. **Що означає розв'язати систему нерівностей?**

5. **Поясніть, що називають перетином двох проміжків.**

6. **Опишіть алгоритм розв'язування системи нерівностей.**

7. **Як записують, читають, називають і зображують проміжок, який є множиною розв'язків нерівності виду $a \leqslant x \leqslant b$; $a < x < b$; $a < x \leqslant b$; $a \leqslant x < b$?**

8. **У яких випадках кажуть, що треба розв'язати сукупність нерівностей (рівнянь)?**

24.1.° Які з чисел −6; −5; 0; 2; 4 є розв'язками системи нерівностей

$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ -2x \leqslant 10? \end{cases}$$

24.2.° Розв'язком яких із систем нерівностей є число −3:

1) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 1 > -1, \\ x - 2 < 0? \end{cases}$

24.3.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задається нерівністю:

1) $0 < x < 5$;
2) $\frac{1}{6} < x \leqslant 2\frac{1}{7}$;
3) $0{,}2 \leqslant x < 102$;
4) $-2{,}4 \leqslant x \leqslant -1$.

24.4.° Запишіть усі цілі числа, які належать проміжку:

1) [3; 7]; 2) (2,9; 6]; 3) [−5,2; 1]; 4) (−2; 2).

24.5.° Укажіть найменше і найбільше цілі числа, які належать проміжку:

1) [−12; −6]; 2) (5; 11]; 3) (−10,8; 1,6]; 4) [−7,8; −2,9].

24.6.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть перетин проміжків:

1) [−1; 7] і [4; 9];
2) [3; 6] і (3; 8);
3) $(-\infty; 3{,}4)$ і $(2{,}5; +\infty)$;
4) $(-\infty; 2{,}6)$ і $(2{,}8; +\infty)$;
5) $[9; +\infty)$ і $[11{,}5; +\infty)$;
6) $(-\infty; -4{,}2]$ і $(-\infty; -1{,}3)$.

24.7.° Укажіть на рисунку 24.8 зображення множини розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant 6. \end{cases}$

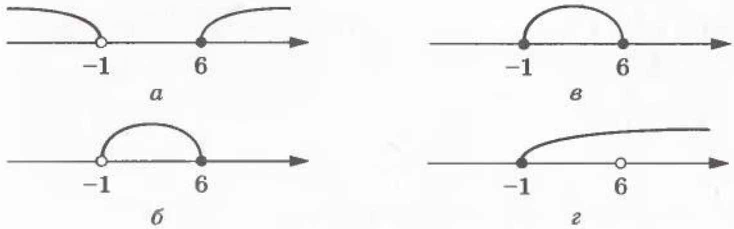


Рис. 24.8

24.8.° Укажіть на рисунку 24.9 зображення множини розв'язків подвійної нерівності $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

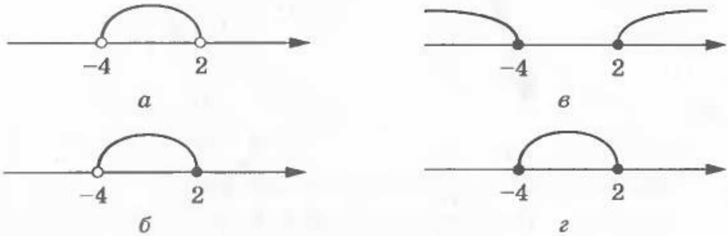


Рис. 24.9

24.9.° Який з наведених проміжків є множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x > 2: \end{cases}$

1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$?

24.10.° Відомо, що $a < b < c < d$. Який з наведених проміжків є перетином проміжків $(a; c)$ і $(b; d)$:

1) $(a; d)$; 2) $(b; c)$; 3) $(c; d)$; 4) $(a; b)$?

24.11.° Відомо, що $m < n < k < p$. Який з наведених проміжків є перетином проміжків $(m; p)$ і $(n; k)$:

1) $(m; n)$; 2) $(k; p)$; 3) $(n; k)$; 4) $(m; p)$?

24.12.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x < -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 2. \end{cases}$

24.13.° Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \geqslant -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2 > 3, \\ -3x < -12; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 6 > 2, \\ \dfrac{x}{4} < 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x+3 \geqslant 0, \\ 7-4x < 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-2 < 1+3x, \\ 5x-7 \leqslant x+9; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x+14 \geqslant 18-x, \\ 1{,}5x+1 < 3x-2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 10x-1 \geqslant 3, \\ 7-3x \geqslant 2x-3; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x-6 \leqslant x-1, \\ 11x+13 < x+3; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x+19 \leqslant 5x-1, \\ 10x < 3x+21. \end{cases}$

24.14.° Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} -4x \leqslant -12, \\ x+2 > 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2-3x < 4x-12, \\ 7+3x \geqslant 2x+10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8-x \geqslant 5, \\ x-7 \leqslant 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+3 \geqslant 8, \\ \dfrac{x+1}{3} < 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x-3 < 5x, \\ 7x-10 < 5x; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x-2 \geqslant 2x+1, \\ 2x+3 \leqslant 33-3x. \end{cases}$

24.15.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $-3 < x - 4 < 7$; 3) $0{,}8 \leqslant 6 - 2x < 1{,}4$;

2) $-2{,}4 \leqslant 3x + 0{,}6 \leqslant 3$; 4) $4 < \dfrac{x}{5} - 2 \leqslant 5$.

24.16.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2 < x + 10 \leqslant 14$; 3) $-1{,}8 \leqslant 1 - 7x \leqslant 36$;

2) $10 < 4x - 2 < 18$; 4) $1 \leqslant \dfrac{x+1}{4} < 1{,}5$.

24.17.° Скільки цілих розв'язків має система нерівностей

$$\begin{cases} -2x \geqslant -15, \\ 3x > -10\,? \end{cases}$$

24.18.° Знайдіть суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x+8 \geqslant 4, \\ 5x+1 \leqslant 9. \end{cases}$$

24.19.° Скільки цілих розв'язків має нерівність $-3 \leqslant 7x - 5 < 16$?

24.20.° Знайдіть найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} x+8 \geqslant 17, \\ \dfrac{x}{2} > 4{,}5. \end{cases}$$

24.21.° Знайдіть найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x+1 < -4, \\ 3x-6 \leqslant -12. \end{cases}$$

24.22.° Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 8(2-x)-2x>3, \\ -3(6x-1)-x<2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4}-\dfrac{2x+3}{3}>1, \\ 6(2x-1)<5(x-4)-7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x-3)\leqslant 3x+4(x+1), \\ (x-3)(x+3)\leqslant (x-4)^2-1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x+11)\geqslant 3(6-x), \\ (x-3)(x+6)\geqslant (x+5)(x-4); \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x+1}{2}\leqslant \dfrac{x+1}{3}, \\ (x+5)(x-3)+41\geqslant (x-6)^2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x+4\leqslant 2x-8, \\ (x+2)(x-1)\geqslant (x+3)(x-2); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{7}<\dfrac{x+1}{4}, \\ (x-6)(x+2)+4x<(x-7)(x+7); \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{6x+1}{6}-\dfrac{5x-1}{5}>-1, \\ 2(x+8)-3(x+2)<5-x. \end{cases}$

24.23.° Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5}-\dfrac{4x-9}{6}>1, \\ 5(x-1)+7(x+2)>3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+2}{3}<\dfrac{x+12}{6}, \\ 0{,}3x-19\leqslant 1{,}7x-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-6)^2<(x-2)^2-8, \\ 3(2x-1)-8<34-3(5x-9); \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{3}-\dfrac{4x+1}{4}\leqslant 1, \\ (x-1)(x-2)>(x+4)(x-7). \end{cases}$

24.24.° Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x-1<1{,}7-x, \\ 3x-2\geqslant x-8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{4}<1, \\ 2x-\dfrac{x}{2}\geqslant 10. \end{cases}$

24.25.° Скільки цілих розв'язків має система нерівностей:

1) $\begin{cases} 4x+3\geqslant 6x-7, \\ 3(x+8)\geqslant 4(8-x); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{x-2}{6}<2, \\ \dfrac{2x-5}{3}\geqslant -3? \end{cases}$

24.26.° Розв'яжіть нерівність:

1) $-3<\dfrac{2x-5}{2}<4;$

2) $-4\leqslant 1-\dfrac{x-2}{3}\leqslant -3.$

24.27.° Розв'яжіть нерівність:

1) $-2\leqslant \dfrac{6x+1}{4}<4;$

2) $1{,}2<\dfrac{7-3x}{5}\leqslant 1{,}4.$

24.28.° Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 2, \\ x < 3{,}6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 6 < 8, \\ 4 - 4x < 10, \\ 8x - 9 > 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0{,}4 - 8x \geqslant 3{,}6, \\ 1{,}5x - 2 < 4, \\ 4{,}1x + 10 < 1{,}6x + 5. \end{cases}$

24.29.° Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} -x < 2, \\ 2x \geqslant 7, \\ x < -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x + 2, \\ 2x + 1 > 8 - 5x, \\ 5x - 25 \leqslant 0. \end{cases}$

24.30.° Одна сторона трикутника дорівнює 4 см, а сума двох інших — 8 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо довжина кожної з них дорівнює цілому числу сантиметрів.

24.31.° Розв'яжіть сукупність нерівностей:

1) $\left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 3; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x < 3; \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x > 3; \end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < 3. \end{array}\right.$

24.32.° Розв'яжіть сукупність нерівностей:

1) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 7, \\ x < 7; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 7, \\ x > 7; \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 7, \\ x > 7; \end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l} x > 7, \\ x < 7. \end{array}\right.$

24.33.° Розв'яжіть сукупність нерівностей:

1) $\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ x \geqslant 2; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ x \leqslant 1; \end{array}\right.$ 3) $\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ x \geqslant 1; \end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2, \\ x \leqslant 2. \end{array}\right.$

24.34.• Розв'яжіть сукупність $\left[\begin{array}{l} x \neq 2, \\ x \neq 7. \end{array}\right.$

24.35.• Розв'яжіть систему:

1) $\begin{cases} x > 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3; \end{array}\right. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3; \end{array}\right. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > -3, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < 0; \end{array}\right. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x < 4, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < -2. \end{array}\right. \end{cases}$

24.36.• Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2(x + 2) > 0$; 3) $x^2(x - 2) \geqslant 0$; 5) $x^2(x + 2) \leqslant 0$;
2) $x^2(x + 2) \geqslant 0$; 4) $x^2(x - 2) < 0$; 6) $x^2(x - 2) \leqslant 0$.

24.37.• Розв'яжіть нерівність:

1) $|x - 1|(x + 3) > 0$; 4) $|x - 1|(x - 3) < 0$;
2) $|x - 1|(x + 3) \geqslant 0$; 5) $|x - 1|(x + 3) \leqslant 0$;
3) $|x - 1|(x - 3) \geqslant 0$; 6) $|x - 1|(x - 3) \leqslant 0$.

24.38.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x}{|x-1|} > 0$; 2) $\frac{x}{|x-1|} \geqslant 0$; 3) $\frac{x}{|x+1|} < 0$; 4) $\frac{x}{|x+1|} \leqslant 0$.

24.39.• При яких значеннях параметра a має хоча б один розв'язок система нерівностей:

1) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

24.40.• При яких значеннях параметра a не має розв'язків система нерівностей:

1) $\begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

24.41.• При яких значеннях параметра a множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x \geqslant a \end{cases}$ є проміжок:

1) $(-1; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$?

24.42.• Для кожного значення параметра a розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x < 2, \\ x \leqslant a. \end{cases}$

24.43.• Для кожного значення параметра a розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$

24.44.•• При яких значеннях параметра a множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x < a \end{cases}$ містить чотири цілих розв'язки?

24.45.•• При яких значеннях параметра b множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant b \end{cases}$ містить три цілих розв'язки?

24.46.•• При яких значеннях параметра a найменшим цілим розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x > a \end{cases}$ є число 9?

24.47.•• При яких значеннях параметра b найбільшим цілим розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x \leqslant b, \\ x < -2 \end{cases}$ є число -6?

24.48.•• При яких значеннях параметра a розв'язком системи $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant a + 8, \\ x \geqslant 4 \end{cases}$ є відрізок, довжина якого дорівнює 5?

24.49.•• При яких значеннях параметра a розв'язком системи $\begin{cases} a - 7 \leqslant x \leqslant a, \\ x \leqslant 3 \end{cases}$ є відрізок, довжина якого дорівнює 4?

24.50.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $(x - a)^2 (x - 1) > 0$;
2) $(x - a)^2 (x - 1) \geqslant 0$;
3) $(x - a)(x - 1)^2 < 0$;
4) $(x - a)(x - 1)^2 \leqslant 0$.

24.51.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $|x + a|(x + 1) > 0$;
2) $|x + a|(x + 1) \geqslant 0$;
3) $(x + a)|x + 1| < 0$;
4) $(x + a)|x + 1| \leqslant 0$.

25. Рівняння і нерівності, які містять знак модуля

Нагадаємо основні відомості про модуль числа.

Означення. Модулем числа a називають відстань від точки, яка зображує число a на координатній прямій, до початку відліку.

Модуль числа a позначають так: $|a|$.

З означення модуля випливає, що $|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$

Отже, щоб знайти модуль числа (або, як ще кажуть, «розкрити модуль»), треба знати знак числа.

Наприклад, $|\pi - 3| = \pi - 3$, оскільки $\pi > 3$.

$|\pi - 4| = 4 - \pi$, оскільки $\pi < 4$.

$|x^2 + 1| = x^2 + 1$, оскільки $x^2 + 1 > 0$ при будь-якому значенні x.

ПРИКЛАД 1 Розкрийте модуль $|2x - 1|$.

Розв'язання. З означення модуля числа випливає, що

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{якщо } x \geqslant \frac{1}{2}, \\ 1-2x, & \text{якщо } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Властивості модуля, які випливають з означення

1) $|a| \geqslant 0$;
2) $|a| = |-a|$;
3) якщо $|a| = |b|$, то $a = b$ або $a = -b$;
4) якщо $|a| = b$, то $b \geqslant 0$ і $a = b$ або $a = -b$;

Рис. 25.1

5) відстань між точками $A\ (a)$ і $B\ (b)$ координатної прямої дорівнює $|a - b|$ (рис. 25.1).

Розглянемо основні прийоми розв'язування рівнянь, які містять знак модуля.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $|x - 1| = 2$.

Розв'язання. З властивості 4 випливає, що дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = 2, \\ x - 1 = -2. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -1. \end{array}\right.$

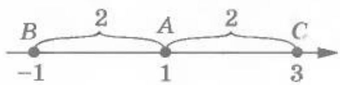


Рис. 25.2

Відповідь: -1; 3.

Це рівняння можна розв'язати інакше, якщо умову задачі «перекласти геометричною мовою»: знайдіть координати всіх точок координатної прямої, які віддалені від точки $A\ (1)$ на 2 одиничних відрізки. Очевидно, що існують дві таких точки: $B\ (-1)$ і $C\ (3)$ (рис. 25.2).

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $|2x - 1| = 3x + 1$.

Розв'язання. Якщо замінити дане рівняння на сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 3x + 1, \\ 2x - 1 = -3x - 1, \end{array}\right.$$

то ми отримаємо два значення змінної x: -2 і 0. Очевидно, що число -2 не є коренем заданого рівняння.

Певна річ, виникає запитання: «Чому заміна рівняння на сукупність призвела до появи стороннього кореня, тобто чому такий перехід від рівняння до сукупності не є рівносильним?»

Справа в тому, що ліва частина заданого рівняння набуває тільки невід'ємних значень. Тому $3x + 1 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -\frac{1}{3}$. Отже, шукані корені мають належати проміжку $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. У записаній сукупності такої вимоги немає.

Насправді задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 3x+1 \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2x-1=3x+1, \\ 2x-1=-3x-1, \end{array}\right. \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок $x = 0$.

Узагалі, *рівняння виду* $|f(x)| = g(x)$ *рівносильне системі*

$$\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Рівняння зазначеного виду можна розв'язати й іншим способом: розглянути два випадки $f(x) \geqslant 0$ і $f(x) < 0$, тобто розкрити модуль $|f(x)|$.

Таким чином, рівняння виду $|f(x)| = g(x)$ рівносильне сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x)=g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0, \\ -f(x)=g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Наприклад, розв'язання рівняння $|2x - 1| = 3x + 1$ можна записати так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ 2x-1=3x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-1<0, \\ -2x+1=3x+1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x=-2, \end{cases} \\ \begin{cases} x<\frac{1}{2}, \\ x=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Звідси $x = 0$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $|x + 1| + |x - 2| = 3$.

Розв'язання. Розіб'ємо область визначення рівняння на такі проміжки: $(-\infty; -1)$ (значення виразів $x + 1$ і $x - 2$ на цьому проміжку від'ємні), $[-1; 2]$ (вираз $x + 1$ набуває на цьому проміжку невід'ємних значень, а вираз $x - 2$ — недодатних) і $(2; +\infty)$ (значення виразів $x + 1$ і $x - 2$ на цьому проміжку додатні). Зазначимо, що точки, у яких вирази дорівнюють нулю, можна віднести до будь-якого з проміжків, але тільки до одного з них. Отже, задане рівняння рівносильне сукупності трьох систем.

1) $\begin{cases} x < -1, \\ -(x+1)-(x-2)=3. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x < -1, \\ x = -1. \end{cases}$

Ця система розв'язків не має.

2) $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ (x+1)-(x-2)=3. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0x = 0. \end{cases}$

Розв'язком цієї системи є проміжок $[-1; 2]$.

3) $\begin{cases} x > 2, \\ (x+1)+(x-2)=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ x = 2. \end{cases}$ Ця система розв'язків не має.

Відповідь: $[-1; 2]$.

Розв'язання заданого рівняння можна оформити в інший спосіб, одразу записавши сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1, \\ -x-1-x+2=3, \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x+1-x+2=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ x+1+x-2=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рис. 25.3

Також це рівняння можна розв'язати за допомогою геометричної інтерпретації: шукані корені — це координати точок координатної прямої, сума відстаней від яких до точок $A(-1)$ і $B(2)$ дорівнює 3. Зрозуміло, що координати всіх точок відрізка AB (рис. 25.3) утворюють шукану множину коренів.

Розглянемо основні методи розв'язування нерівностей, які містять знак модуля.

Теорема 25.1. ***Нерівність виду*** $|x| < a$ ***рівносильна системі***

$$\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$$

Доведення. Якщо $a \leqslant 0$, то як задана нерівність, так і записана система розв'язків не мають. Отже, вони є рівносильними.

Якщо $a > 0$, то, розкривши модуль, можна записати, що задана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ x < a,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ -x < a.\end{cases}\end{array}\right.$$

Звідси

$$\left[\begin{array}{l}0 \leqslant x < a,\\ -a < x < 0;\end{array}\right. \quad -a < x < a.$$

Очевидно, що отримана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases}x < a,\\ x > -a.\end{cases} \blacktriangle$$

Зауважимо, що для випадку, коли $a > 0$, доведення теореми можна провести, використовуючи геометричну інтерпретацію: і нерівність $|x| < a$, і систему $\begin{cases}x < a,\\ x > -a\end{cases}$ задовольняють координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, меншу ніж a.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $|3x - 1| < 2$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases}3x - 1 < 2,\\ 3x - 1 > -2.\end{cases}$$

Звідси $\begin{cases}3x < 3,\\ 3x > -1;\end{cases}$ $\begin{cases}x < 1,\\ x > -\frac{1}{3}.\end{cases}$

Відповідь: $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Узагальненням теореми 25.1 є така теорема.

Теорема 25.2. ***Нерівність виду $|f(x)| < g(x)$ рівносильна системі***

$$\begin{cases}f(x) < g(x),\\ f(x) > -g(x).\end{cases}$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 25.1.

Теорема 25.3. ***Нерівність виду $|x| > a$ рівносильна сукупності нерівностей***

$$\left[\begin{array}{l}x > a,\\ x < -a.\end{array}\right.$$

Доведення. Якщо $a = 0$, то множиною розв'язків як заданої нерівності, так і сукупності є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Якщо $a < 0$, то множиною розв'язків нерівності й сукупності є множина $(-\infty; +\infty)$. Тому якщо $a \leqslant 0$, то задана нерівність і записана сукупність нерівностей є рівносильними.

Якщо $a > 0$, то, розкривши модуль, можна записати, що задана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x > a, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ -x > a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a. \end{array}\right.$ ▲

Зауважимо, що для випадку, коли $a > 0$, доведення теореми можна провести, використовуючи геометричну інтерпретацію: і нерівність $|x| > a$, і сукупність $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a \end{array}\right.$ задовольняють координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, більшу за a.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $|4x - 3| > 5$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна сукупності нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} 4x - 3 > 5, \\ 4x - 3 < -5. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} 4x > 8, \\ 4x < -2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Узагальненням теореми 25.3 є така теорема.

Теорема 25.4. ***Нерівність виду $|f(x)| > g(x)$ рівносильна сукупності нерівностей***

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 25.3.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $|x-1|+|x-2|>x+3$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна сукупності трьох систем.

1) $\begin{cases} x<1, \\ 1-x-x+2>x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ x<0; \end{cases}$ $x<0$.

2) $\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 2, \\ x-1-x+2>x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 2, \\ x<-2. \end{cases}$ Ця система розв'язків не має.

3) $\begin{cases} x>2, \\ x-1+x-2>x+3; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2, \\ x>6; \end{cases}$ $x>6$.

Відповідь: $(-\infty;\ 0)\cup(6;\ +\infty)$.

?

1. Сформулюйте означення модуля числа.
2. Що потрібно знати, щоб розкрити модуль числа?
3. Сформулюйте властивості, які випливають з означення модуля.
4. Сформулюйте теореми про розв'язування нерівностей, які містять знак модуля.

25.1.° Розкрийте модуль:

1) $\left|\frac{\pi}{3}-1\right|$; 3) $\left|2-\frac{\pi}{3}\right|$; 5) $\left|x-\frac{x^2}{4}-1\right|$;

2) $|\pi-3{,}14|$; 4) $|x^2+1|$; 6) $|x^2+2x+2|$.

25.2.° Розкрийте модуль:

1) $\left|\frac{\pi}{4}-0{,}7\right|$; 3) $|\pi-3{,}15|$; 5) $\left|x^2+x+\frac{1}{4}\right|$;

2) $\left|\frac{\pi}{4}-0{,}8\right|$; 4) $|x^4+2|$; 6) $|x^2+4x+5|$.

25.3.° Доведіть, що:

1) $|ab|=|a|\cdot|b|$;

2) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, $b\neq 0$;

3) $(|a|)^2=|a^2|=a^2$;

4) $|a-b|=|b-a|$;

5) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

25.4.° Відомо, що $a+b<0$, $a>0$, $b<0$. Порівняйте з нулем значення виразу $|a|-|b|$.

25.5.° Відомо, що $a+b>0$, $a<0$, $b>0$. Порівняйте з нулем значення виразу $|a|-|b|$.

25.6.° Спростіть вираз:

1) $(3|x| - |y|)(3|x| + |y|)$;

2) $(2|a| - 3|b|)^2 + (2|a| + 3|b|)^2$;

3) $\frac{|m|-|n|}{|m|+|n|} - \frac{|m|+|n|}{|m|-|n|}$.

25.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $|x + 3| = 2$; 2) $|1 - 2x| = 5$; 3) $|6x + 5| = 1$.

25.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $|x - 1| = 4$; 2) $|1 - 3x| = 7$; 3) $|-4x - 1| = 8$.

25.9.° Доведіть, що:

1) нерівність $|f(x)| \leqslant g(x)$ рівносильна системі нерівностей
$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) \geqslant -g(x); \end{cases}$$

2) нерівність $|f(x)| \geqslant g(x)$ рівносильна сукупності нерівностей
$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant g(x), \\ f(x) \leqslant -g(x). \end{array}\right.$$

25.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|x + 5| < 4$;

2) $|2x - 1| > 3$;

3) $|3x + 2| \leqslant 1$;

4) $|5x - 1| \geqslant 4$.

25.11.° Розв'яжіть нерівність:

1) $|x - 3| \leqslant 6$;

2) $|3x - 2| \geqslant 3$;

3) $|1 - 4x| < 2$;

4) $|5x + 2| > 6$.

25.12.• Доведіть, що:

1) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$;

2) $|a - b| \geqslant |a| - |b|$;

3) $|a + b| = |a| + |b|$ тоді і тільки тоді, коли $ab \geqslant 0$;

4) $|a| + |b| = a + b$ тоді і тільки тоді, коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$;

5) $|a - b| = |a| + |b|$ тоді і тільки тоді, коли $ab \leqslant 0$.

25.13.• Доведіть, що:

1) $|x| + |x - 3| \geqslant 3$; 2) $|x - 1| + |x - 3| \geqslant 2$.

25.14.• Знайдіть найменше значення виразу:

1) $|x| + |x + 4|$; 2) $|x + 2| + |x - 3|$.

25.15.• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |x + y - 4| = \pi, \\ |x - 3| + |y - 1| = 3. \end{cases}$

25.16.• Розв'яжіть рівняння:

1) $||x| - 2| = 2$; 2) $||x| + 2| = 1$.

25.17.• Розв'яжіть рівняння:

1) $||x| - 3| = 1$; 2) $||x| + 1| = 1$.

25.18.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x - 1| = |3x + 2|$; 2) $|3 - 4x| = |2x + 1|$.

25.19.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $|x+2|=4x-1$;
2) $|3x+2|=2x-1$;
3) $|x-1|=4x+3$.

25.20.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $|x+2|=2(3-x)$;
2) $|3x-1|=x+1$;
3) $|3x+1|=4x-1$.

25.21.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $|x+5|<2x+3$;
2) $|1-2x|\leqslant x+1$;
3) $|4x+5|>3x-1$;
4) $|2x-7|\geqslant x-2$.

25.22.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $|x+2|<2x-1$;
2) $5x+3\geqslant|x+1|$;
3) $|3x-2|\geqslant 2x+1$;
4) $|3x-5|>9x+1$.

25.23.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $|x-2|+|x-4|=3$;
2) $|x-2|-3|3-x|+x=0$;
3) $|4-x|+|2x-2|=5-2x$;
4) $|x|-2|x+1|=5$;
5) $|x|+|3x+2|+|2x-1|=5$;
6) $|x|+|x-6|=6$;
7) $|x+2|-|x-3|=5$;
8) $|5x-2|-|7x-3|+2x=1$;
9) $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1}=1$;
10) $\dfrac{|x-3|+|x-1|}{|x-2|+|x-4|}=1$.

25.24.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $|x+1|+|x-5|=20$;
2) $|x+3|-|5-2x|=2-3x$;
3) $|x-3|+2|x+1|=4$;
4) $|x-1|+|x-2|=|x-3|+4$;
5) $|x+5|+|x-8|=13$;
6) $|x|-|x-2|=2$;
7) $|7x-12|-|7x-11|=1$;
8) $\dfrac{|x-6|}{3-|x-3|}=1$;
9) $\dfrac{|x|+|x+1|-1}{|x|-|x-2|+2}=1$.

25.25.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $|x+1|+|x+2|>2x+3$;
2) $2|x-3|+|x+1|\leqslant 3x+1$;
3) $|x+1|+|x-1|\leqslant 2$;
4) $|x|-2|x-2|+3|x+5|\geqslant 2x$.

25.26.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $2|x+1|-|x-1|>3$;
2) $|x-1|-2|x+3|>x+7$;
3) $|x-1|+|x+3|\leqslant 4$;
4) $|x|-2|x+1|+3|x+2|\geqslant 4$.

25.27.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y=|x+3|+|x-1|$;
2) $y=2|x-2|-|x-1|$.

25.28.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції $y=|x+2|+2|x-1|-x$.

25.29.$^{\bullet\bullet}$ Визначте кількість коренів рівняння залежно від значення параметра a:

1) $|3x-4|=a+x$;
2) $2x-|x|+|x-1|=a$.

25.30.** Визначте кількість коренів рівняння залежно від значення параметра a:

1) $|x-1|+|x+1|=a$; 2) $|x-2|-|x+2|=a$.

25.31.** При яких значеннях параметра a множина коренів рівняння

$$|x-1|+|x-a|=1-a$$

містить три цілих числа?

25.32.** При яких значеннях параметра a множина коренів рівняння

$$|x-3|+|x-a|=a-3$$

містить одне парне число?

§ 5. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

26. Функція $y = x^2$ та її графік

Позначимо через y площу квадрата зі стороною x. Тоді $y = x^2$. Якщо змінювати сторону x квадрата, то відповідно змінюватиметься і його площа y.

Зрозуміло, що кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y. Отже, залежність змінної y від змінної x є функціональною, а формула $y = x^2$ задає функцію.

Розглянемо функцію $y = x^2$, областю визначення якої є множина всіх чисел. У таблиці наведено деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції:

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Позначимо на координатній площині точки, координати яких наведено в таблиці (рис. 26.1).

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y = x^2$, позначимо, тим менше отримана фігура (рис. 26.2) відрізнятиметься від графіка функції $y = x^2$.

Пара чисел (0; 0) є розв'язком рівняння $y = x^2$. Отже, графік даної функції проходить через початок координат. Оскільки $y = x^2$ і $x^2 \geqslant 0$, то $y \geqslant 0$, тобто серед позначених точок не може бути таких, які мають від'ємні ординати.

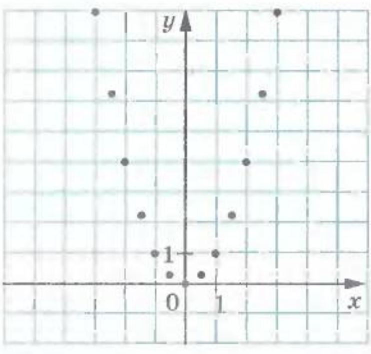


Рис. 26.1

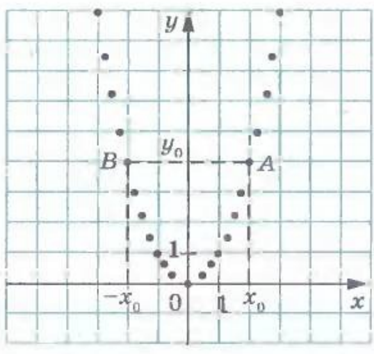


Рис. 26.2

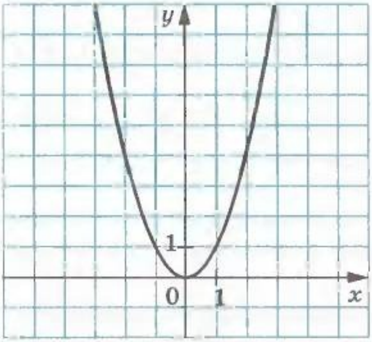


Рис. 26.3

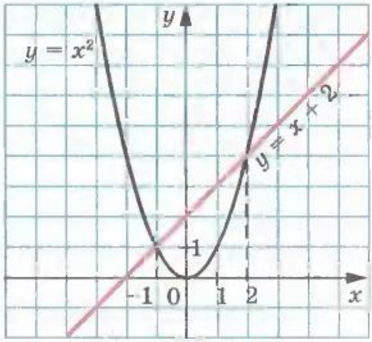


Рис. 26.4

Областю значень функції $y = x^2$ є множина всіх невід'ємних чисел.

Оскільки $x^2 = (-x)^2$, то можна зробити висновок: якщо точка $A\ (x_0;\ y_0)$ належить графіку функції, то точка $B\ (-x_0;\ y_0)$ також йому належить (рис. 26.2).

Якби можна було позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівняння $y = x^2$, то отримали б фігуру, яку називають **параболою** (рис. 26.3).

Точка з координатами (0; 0) поділяє параболу на дві рівні частини, кожну з яких називають **віткою параболи**, а саму точку — **вершиною параболи**.

У таблиці наведено властивості функції $y = x^2$, розглянуті в цьому пункті.

Область визначення	Множина всіх чисел
Область значень	Множина невід'ємних чисел
Графік	Парабола
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	$x = 0$

ПРИКЛАД Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = x + 2$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = x + 2$ (рис. 26.4). Ці графіки перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють 2 і -1. Перевірка підтверджує, що знайдені значення є коренями даного рівняння.

?

1. Яка множина є областю визначення функції $y = x^2$?
2. Яка множина є областю значень функції $y = x^2$?

3. Яка фігура є графіком функції $y = x^2$?
4. При якому значенні аргументу значення функції $y = x^2$ дорівнює нулю?
5. Порівняйте значення функції $y = x^2$ при протилежних значеннях аргументу.

26.1.° Функцію задано формулою $y = x^2$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -6; $0{,}8$; $-1{,}2$; 150;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 49; 0; 2500; $0{,}04$.

26.2.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = x^2$, визначте, чи проходить цей графік через точку:

1) $A\ (-8;\ 64)$; 2) $B\ (-9;\ -81)$; 3) $C\ (0{,}5;\ 2{,}5)$; 4) $D\ (0{,}1;\ 0{,}01)$.

26.3.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = 4x - 4$. Побудуйте графіки даних функцій і позначте знайдені точки.

26.4.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = x - 1$; 2) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 3) $x^2 = \frac{8}{x}$.

26.5.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = -4x - 3$; 2) $x^2 - 3x + 5 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x} = 0$.

26.6.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$

26.7.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$

26.8.° Функцію f задано у такий спосіб:

$$f\ (x) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$$

1) Знайдіть $f\ (-3)$, $f\ (-2)$, $f\ (-1)$, $f\ (1)$, $f\ (3)$, $f\ (0{,}5)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

26.9. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ x^2, & \text{якщо } -1 < x < 2, \\ 4, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-4)$, $f(-0{,}3)$, $f(1{,}9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

26.10. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ x + 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

26.11. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{6}{x}, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ x^2, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0{,}9)$, $f(3)$, $f(0)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

26.12. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x + 1}$; 2) $y = \dfrac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}$.

26.13. Побудуйте графік функції:

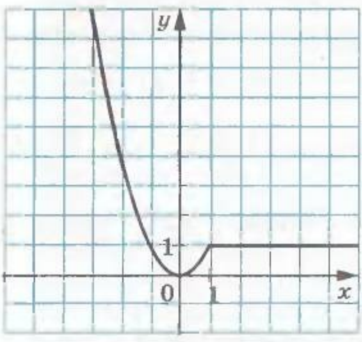
1) $y = \dfrac{x^3}{x}$; 2) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

26.14. Знайдіть область визначення, область значень і нулі функції $y = -x^2$. Побудуйте графік цієї функції.

26.15. При якому значенні параметра k графіки функцій $y = kx - 3$ і $y = x^2$ перетинаються в точці, абсциса якої дорівнює -2?

26.16. При якому значенні параметра b графіки функцій $y = 8x + b$ і $y = x^2$ перетинаються в точці, що належить осі ординат?

26.17. Задайте функцію, графік якої зображено на рисунку 26.5, у спосіб, використаний у задачі 26.8.



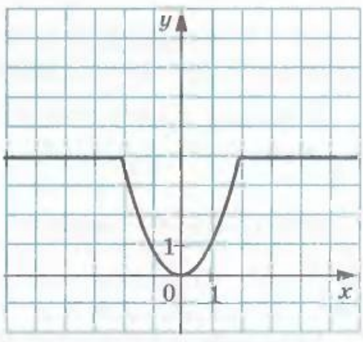


Рис. 26.5

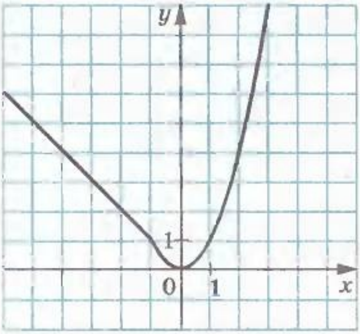


Рис. 26.6

26.18.• Задайте функцію, графік якої зображено на рисунку 26.6, у спосіб, використаний у задачі 26.8.

26.19.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $(y - x^2)(y - x) = 0$;

2) $y^2 - x^4 = 0$;

3) $\dfrac{y - x^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 0$;

4) $\dfrac{y - x^2}{y - x} = 0$.

26.20.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $(y + x^2)(y + x) = 0$;

2) $\dfrac{x^2 - y}{(x+2)^2 + (y-4)^2} = 0$.

26.21.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $(y - x)^2 + (y - x^2)^2 = 0$;
2) $(y - 2x)^2 + (y + x^2)^2 = 0$.

27. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь

Розглянемо квадрат, площа якого дорівнює 49 см^2. Нехай довжина його сторони дорівнює x см. Тоді рівняння $x^2 = 49$ можна вважати математичною моделлю задачі про знаходження сторони квадрата, площа якого дорівнює 49 квадратним одиницям.

Коренями цього рівняння є числа 7 і -7, квадрати яких дорівнюють 49. Кажуть, що числа 7 і -7 є **квадратними коренями з числа 49**.

Означення. **Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.**

Наведемо кілька прикладів.

Квадратними коренями з числа 9 є числа 3 і -3. Справді, $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$.

Квадратними коренями з числа $\dfrac{25}{4}$ є числа $\dfrac{5}{2}$ і $-\dfrac{5}{2}$. Справді, $\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$, $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$.

Квадратним коренем з числа 0 є тільки число 0.

Оскільки не існує числа, квадрат якого дорівнює від'ємному числу, то квадратний корінь з від'ємного числа не існує.

Додатний корінь рівняння $x^2 = 49$, число 7, є відповіддю до задачі про знаходження сторони квадрата. Це число називають **арифметичним квадратним коренем** з числа 49.

Означення. **Арифметичним квадратним коренем з числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.**

Арифметичний квадратний корінь з числа a позначають $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ називають **знаком квадратного кореня** або **радикалом** (від латинського слова *radix* — корінь).

Запис $\sqrt{a}$ читають: «квадратний корінь з a», опускаючи при читанні слово «арифметичний».

Вираз, який стоїть під знаком радикала, називають **підкореневим виразом**. Наприклад, у запису $\sqrt{b-5}$ двочлен $b-5$ є підкореневим виразом. З означення арифметичного квадратного кореня випливає, що *підкореневий вираз може набувати тільки невід'ємних значень*. Так, областю визначення виразу $\sqrt{b-5}$ є числовий проміжок $[5; +\infty)$.

Дію знаходження арифметичного квадратного кореня з числа називають **добуванням квадратного кореня**.

Розглянемо кілька прикладів:

$\sqrt{9} = 3$, оскільки $3 \geqslant 0$ і $3^2 = 9$;

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, оскільки $\frac{5}{2} \geqslant 0$ і $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$;

$\sqrt{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^2 = 0$.

Узагалі, ***якщо $b \geqslant 0$ і $b^2 = a$, то $\sqrt{a} = b$.***

Також з означення арифметичного квадратного кореня випливає, що ***для будь-якого невід'ємного числа a справедливо, що $\sqrt{a} \geqslant 0$ і $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.***

Наприклад, $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$, $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, $\left(\sqrt{5,2}\right)^2 = 5,2$.

Підкреслимо, що до поняття квадратного кореня ми прийшли, розв'язуючи рівняння виду $x^2 = a$, де $a \geqslant 0$. Коренями цього рівняння є числа, кожне з яких є квадратним коренем з числа a.

Знаходження коренів рівняння $x^2 = a$ проілюструємо, розв'язавши графічно рівняння $x^2 = 4$.

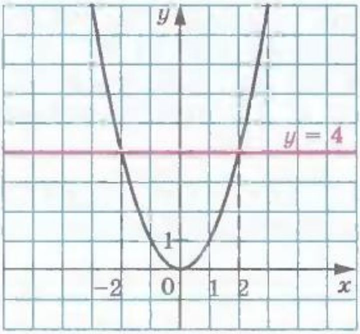


Рис. 27.1

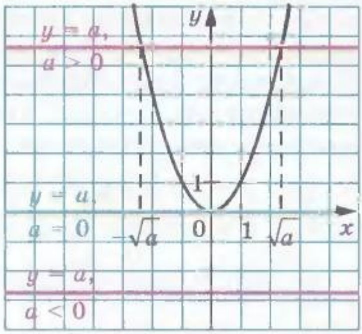


Рис. 27.2

В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 4$ (рис. 27.1). Точки перетину цих графіків мають абсциси 2 і −2, які є коренями заданого рівняння.

Зрозуміло, що рівняння $x^2 = a$ при $a < 0$ не має коренів, що підтверджують графічні міркування: графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$ при $a < 0$ спільних точок не мають (рис. 27.2).

При $a = 0$ рівняння $x^2 = a$ має єдиний корінь $x = 0$.

Графічний метод дозволяє зробити такий висновок: якщо $a > 0$, то рівняння $x^2 = a$ має два корені. Дійсно, парабола $y = x^2$ і пряма $y = a$, де $a > 0$, мають дві спільні точки (рис. 27.2). При цьому коренями рівняння $x^2 = a$ є числа $\sqrt{a}$ і $-\sqrt{a}$. Справді, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\left(-\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Наприклад, рівняння $x^2 = 5$ має два корені: $\sqrt{5}$ і $-\sqrt{5}$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу $\left(-8\sqrt{2}\right)^2$.

Розв'язання. Застосувавши правило піднесення добутку до степеня і тотожність $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, отримуємо:

$$\left(-8\sqrt{2}\right)^2 = (-8)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 64 \cdot 2 = 128.$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0$; 2) $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$.

Розв'язання

1) Маємо: $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Тоді $x = 6^2$; $x = 36$.

2) Маємо: $\sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2$; $1 + \sqrt{x+2} = 2^2$; $\sqrt{x+2} = 3$; $x + 2 = 3^2$; $x = 7$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $(x-5)^2 = 16$.

Розв'язання. Множина коренів даного рівняння дорівнює об'єднанню множин коренів таких двох рівнянь: $x - 5 = 4$ і $x - 5 = -4$, тобто дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{aligned} &x-5=4,\\ &x-5=-4.\end{aligned}\right.$$

Звідси $\left[\begin{aligned} &x=9,\\ &x=1.\end{aligned}\right.$

Відповідь: 1; 9.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $(3x-1)^2 = 2$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{aligned} &3x-1=-\sqrt{2},\\ &3x-1=\sqrt{2}.\end{aligned}\right. \quad \text{Звідси} \quad \left[\begin{aligned} &3x=1-\sqrt{2},\\ &3x=1+\sqrt{2};\end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &x=\frac{1-\sqrt{2}}{3},\\ &x=\frac{1+\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}\right.$$

Відповідь: $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$; $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

ПРИКЛАД 5 Знайдіть область визначення виразу:

1) $\frac{\sqrt{|x|-1}}{x^2-4}$;

2) $\sqrt{3-|x|}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання

1) Даний вираз має зміст, якщо одночасно виконуються дві умови: підкореневий вираз невід'ємний і знаменник дробу не дорівнює нулю, тобто $|x|-1 \geqslant 0$ і $x^2-4 \neq 0$. Отже, область визначення даного виразу дорівнює множині розв'язків системи

$$\begin{cases} |x|-1 \geqslant 0,\\ x^2-4 \neq 0.\end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x \geqslant 1,\\ &x \leqslant -1;\end{aligned}\right.\\ x \neq 2,\\ x \neq -2.\end{cases}$$

Рис. 27.3

Зобразивши розв'язки цієї системи на координатній прямій (рис. 27.3), отримуємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

2) Для знаходження області визначення даного виразу достатньо розв'язати систему

$$\begin{cases} 3 - |x| \geqslant 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} |x| \leqslant 3, \\ x > -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 3, \\ x > -1. \end{cases}$

Рис. 27.4

Звернемося до геометричної інтерпретації (рис. 27.4).
Відповідь: $(-1;\ 3]$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння: 1) $\sqrt{-x} + \sqrt{x-2} = 2$;

2) $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x-2} = 0$; 3) $(x^2 - 9)\sqrt{x-2} = 0$.

Розв'язання

1) Знайдемо область визначення даного рівняння. Для цього розв'яжемо систему $\begin{cases} -x \geqslant 0, \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$ Очевидно, що ця система розв'язків не має, а отже, не має розв'язків і задане рівняння.
Відповідь: коренів немає.

2) Ліва частина даного рівняння є сумою двох доданків, кожен з яких може набувати тільки невід'ємних значень. Тоді їх сума дорівнює нулю, якщо кожен з доданків дорівнює нулю. Отже, одночасно мають виконуватися дві умови: $\sqrt{x^2 - 2x} = 0$ і $\sqrt{x-2} = 0$. Це означає, що треба знайти спільні корені отриманих рівнянь, тобто розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} = 0, \\ \sqrt{x-2} = 0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\,(x-2) = 0, \\ x = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2, \end{array} \right. \\ x = 2. \end{cases}$

Розв'язком останньої системи є число 2.
Відповідь: 2.

3) Областю визначення даного рівняння є проміжок $[2;\ +\infty)$. Ураховуючи це і використовуючи умову рівності добутку нулю, можна записати, що дане рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = 0, \\ \begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Звідси

$$\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3, \end{array}\right. \\ x \geqslant 2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Відповідь: 2; 3.

ПРИКЛАД 7 Побудуйте графік функції $y = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2$.

Розв'язання. Область визначення даної функції — множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 1 - x \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $D(y) = [0; 1]$.

Маємо: $y = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = x + 1 - x = 1.$

Шуканий графік зображено на рисунку 27.5.

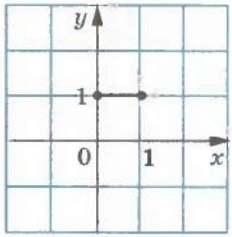


Рис. 27.5

ПРИКЛАД 8 При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)\left(\sqrt{x}-1\right) = 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Областю визначення цього рівняння є проміжок $[0; +\infty)$. Тому дане рівняння рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x} - 1 = 0, \\ \begin{cases} x - a = 0, \\ x \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$

При будь-якому значенні параметра a задане рівняння має корінь $x = 1$. Для того щоб цей корінь залишався єдиним, система повинна або мати цей самий розв'язок, або не мати розв'язків, тобто має виконуватись одна з двох умов: $a = 1$ або $a < 0$.

Відповідь: $a = 1$ або $a < 0$.

1. Що називають квадратним коренем з числа a?
2. Що називають арифметичним квадратним коренем з числа a?
3. Як позначають арифметичний квадратний корінь з числа a?
4. Як називають знак $\sqrt{}$?
5. Як читають запис $\sqrt{a}$?
6. Як називають вираз, що стоїть під знаком радикала?
7. Яких значень може набувати підкореневий вираз?

8. Як називають дію знаходження арифметичного квадратного кореня з числа?
9. Чому дорівнює значення виразу $\left(\sqrt{a}\right)^2$ для будь-якого невід'ємного значення a?
10. Скільки коренів має рівняння $x^2 = a$ при $a > 0$? Чому вони дорівнюють?
11. Чи має корені рівняння $x^2 = a$ при $a = 0$? при $a < 0$?

27.1.° Чи є правильною рівність (відповідь обґрунтуйте):

1) $\sqrt{25} = 5$; 3) $\sqrt{36} = -6$; 5) $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$;

2) $\sqrt{0} = 0$; 4) $\sqrt{0{,}4} = 0{,}2$; 6) $\sqrt{10} = 100$?

27.2.° Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{225}$; 4) $\sqrt{1{,}21}$; 7) $\sqrt{\frac{4}{9}}$;

2) $\sqrt{0{,}25}$; 5) $\sqrt{3600}$; 8) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$;

3) $\sqrt{0{,}01}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; 9) $\sqrt{0{,}0004}$.

27.3.° Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{64}$; 4) $\sqrt{0{,}49}$; 7) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$;

2) $\sqrt{144}$; 5) $\sqrt{2500}$; 8) $\sqrt{0{,}0009}$;

3) $\sqrt{0{,}04}$; 6) $\sqrt{\frac{16}{121}}$; 9) $\sqrt{0{,}0196}$.

27.4.° Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{2}$; 2) $-\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{-2}$; 4) $\sqrt{(-2)^2}$; 5) $\left(\sqrt{-2}\right)^2$?

27.5.° Арифметичний квадратний корінь з якого числа дорівнює:

1) 4; 2) 0; 3) 0,8; 4) $2\frac{1}{4}$; 5) 1,6; 6) –9?

27.6.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{7}\right)^2$; 3) $\left(-\sqrt{11}\right)^2$; 5) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{4{,}2}\right)^2$; 4) $-\left(\sqrt{10}\right)^2$; 6) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$.

27.7.° Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{6}\right)^2$; 2) $\left(-\sqrt{21}\right)^2$; 3) $\left(-4\sqrt{5}\right)^2$; 4) $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$.

27.8.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{16+9}$;
2) $\sqrt{16}+\sqrt{9}$;
3) $\sqrt{36}-\sqrt{49}$;
4) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}$;
5) $\sqrt{0,81}+\sqrt{0,01}$;
6) $-2\sqrt{0,16}+0,7$;
7) $(\sqrt{13})^2-3\cdot(\sqrt{8})^2$;
8) $\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{18})^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$;
9) $\sqrt{4\cdot5^2-6^2}$.

27.9.° Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{72-\sqrt{64}}$;
2) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{225}$;
3) $\frac{1}{3}\sqrt{900}+0,2\sqrt{1600}$;
4) $(2\sqrt{6})^2-3(\sqrt{21})^2$.

27.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=9$;
2) $\sqrt{x}=\frac{1}{4}$;
3) $\sqrt{x}-0,2=0$;
4) $\sqrt{x}+7=0$.

27.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}=20$; 2) $\sqrt{x}=-16$; 3) $\sqrt{x}-\frac{2}{3}=0$.

27.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2=25$; 2) $x^2=0,49$; 3) $x^2=3$; 4) $x^2=-25$.

27.13.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2=100$; 2) $x^2=0,81$; 3) $x^2=7$; 4) $x^2=3,6$.

27.14.° Знайдіть значення виразу:

1) $-0,06\cdot\sqrt{10\,000}+\frac{8}{\sqrt{256}}-2,5\sqrt{3,24}$;
2) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{6,25}+\sqrt{2^3+17}$;
3) $\sqrt{1\frac{11}{25}}+3\sqrt{7\frac{1}{9}}-0,6\sqrt{3025}$;
4) $\left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2+\sqrt{26^2-24^2}$;
5) $(3\sqrt{8})^2+(8\sqrt{3})^2-2(\sqrt{24})^2$;
6) $\sqrt{144}:\sqrt{0,04}-\sqrt{2,56}\cdot\sqrt{2500}$.

27.15.° Знайдіть значення виразу:

1) $0,15\sqrt{3600}-0,18\sqrt{400}+(10\sqrt{0,08})^2$;

2) $\frac{95}{\sqrt{361}} - \frac{13}{14}\sqrt{1\frac{27}{169}} + \sqrt{8^2 + 15^2}$;

3) $\left(-8\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{1,44}}{3} \cdot \sqrt{12,25}\right) : \left(0,1\sqrt{13}\right)^2$.

27.16.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt{-x}$; 3) $\sqrt{-x^2}$; 5) $\sqrt{(x-8)^2}$;

2) $\sqrt{x^2}$; 4) $\sqrt{x^2+8}$; 6) $\sqrt{|x|}$.

27.17.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt{2y}$; 3) $\sqrt{y^3}$; 5) $\sqrt{-y^4}$;

2) $\sqrt{-3y}$; 4) $\sqrt{-y^3}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{y}}$.

27.18.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{x+1}$;

2) $y = \sqrt{1-3x}$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$;

4) $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x+5}$;

5) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4x-1}}$;

6) $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{3x+1}$;

7) $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$;

8) $y = \frac{1}{\sqrt{2-3x}} - \sqrt{2x+1}$.

27.19.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; 2) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1}$; 3) $y = \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-4}}{2x-9}$.

27.20.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{5x} - 4 = 0$; 3) $\sqrt{5x-4} = 6$; 5) $\frac{18}{\sqrt{x+3}} = 9$;

2) $\sqrt{5x-4} = 0$; 4) $\frac{42}{\sqrt{x}} = 6$; 6) $\sqrt{x^2-36} = 8$.

27.21.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{3}\sqrt{x} - 2 = 0$;

2) $\sqrt{2x+3} = 11$;

3) $\frac{4}{\sqrt{x-5}} = 6$;

4) $\sqrt{130-x^2} = 9$.

27.22.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+6)^2 = 0$;

2) $(x+6)^2 = 9$;

3) $(x+6)^2 = 3$;

4) $(7x+6)^2 = 5$.

27.23.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-3)^2=25$; 2) $(x-3)^2=7$; 3) $(2x-3)^2=7$.

27.24.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt{\frac{2}{3}x-x^2-\frac{1}{9}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$; 7) $\sqrt{-|x|}$; 10) $\sqrt{-\sqrt{x}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$; 5) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$; 11) $\sqrt{-\sqrt{-x}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{-x}}$; 9) $\sqrt{\sqrt{x}+1}$; 12) $\sqrt{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

27.25.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\frac{1}{\sqrt{y}-1}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{y}+1}$; 3) $\sqrt{y^2-y+\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{y-\frac{y^2}{4}-1}$.

27.26.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{|x|-2}$;

2) $y=\sqrt{1-|x|}$;

3) $y=\sqrt{x-|x|}$;

4) $y=\sqrt{|x|-x}$;

5) $y=\frac{\sqrt{|x|-4}}{x^2-25}$;

6) $y=\sqrt{5-|x|}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

27.27.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{7-|x|}$; 2) $y=\sqrt{|x|-2}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}$.

27.28.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3+\sqrt{2+x}}=4$; 2) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$; 3) $\sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{x}}}=2$.

27.29.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{17+\sqrt{\sqrt{x}-6}}=5$; 2) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$.

27.30.° Чи можна стверджувати, що при будь-якому значенні x має зміст вираз:

1) $\sqrt{x^2-4x+4}$; 2) $\sqrt{x^2-4x+5}$?

27.31.° Доведіть, що не існує такого значення x, при якому має зміст вираз $\sqrt{-x^2+6x-12}$.

27.32.° Який з даних виразів має зміст при будь-якому значенні x:

1) $\sqrt{x^2+8x+15}$; 2) $\sqrt{x^2-10x+27}$?

27.33.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = -x$;
2) $(\sqrt{x})^2 = x$;
3) $\sqrt{x} = -x^2$;
4) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 0$;
5) $\sqrt{x-1} + \sqrt{-x-3} = 0$;
6) $\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x-1} = 0$;
7) $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4} = 0$;
8) $(x-1)\sqrt{x+1} = 0$;
9) $(x+1)\sqrt{x-1} = 0$;
10) $\sqrt{x+3}\,\sqrt{x-2} = 0$;
11) $(x^2-4)\sqrt{x-1} = 0$;
12) $(x-1)(\sqrt{-x}-1) = 0$;
13) $(x+1)(\sqrt{-x}-1) = 0$.

27.34.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0$;
2) $\sqrt{x} = -|x|$;
3) $(\sqrt{x})^2 = |x|$;
4) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 1$;
5) $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-1} = 0$;
6) $(x-2)\sqrt{x-3} = 0$;
7) $(x-1)(\sqrt{x}+1) = 0$;
8) $(x+1)(\sqrt{x}-1) = 0$;
9) $(x^2-16)\sqrt{x-3} = 0$;
10) $(x+2)(\sqrt{-x}-1) = 0$.

27.35.° При яких значеннях a рівняння $x^2 = a + 1$:

1) має два корені;
2) має один корінь;
3) не має коренів?

27.36.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x+1} > -2$;
2) $\sqrt{2x+1} \leqslant 0$;
3) $\sqrt{2x+1} < -2$;
4) $\sqrt{x} > -\sqrt{x}$;
5) $\sqrt{x} \geqslant -\sqrt{x}$;
6) $\sqrt{x} \leqslant -\sqrt{x}$.

27.37.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x-1} > -1$;
2) $\sqrt{x-1} < -1$;
3) $\sqrt{x-1} \leqslant -\sqrt{x-1}$.

27.38.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{-x^2}$;
2) $y = \sqrt{-x^2-4x-4} + 2$;
3) $y = (\sqrt{x})^4$;
4) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}$;
5) $y = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$;
6) $y = (\sqrt{1-x})^2 + 1$;
7) $y = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{-x})^2 + 2$;
8) $y = (\sqrt{3-x})^2 + (\sqrt{x-1})^2 + x - 1$.

27.39.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{2x-1-x^2} - 1$;
2) $y = (\sqrt{x})^2 + 3 - x$;

3) $y = \left(\sqrt{-x}\right)^2 + 1$;

4) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$;

5) $y = x\left(\sqrt{x}\right)^2$;

6) $y = \left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 1$.

27.40.$^\bullet$ Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння:

1) $\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3} = 0$;

2) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{y-2x+3} = 0$;

3) $\sqrt{4x+y-5} + \sqrt{x-2y+6} = 0$;

4) $\sqrt{x+4} + \sqrt{y^2-1} = 0$;

5) $\sqrt{x^2-25} + \sqrt{y^2-16} = 0$.

27.41.$^\bullet$ Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння:

1) $\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} = 0$;

2) $\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y-2} = 0$;

3) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{y+1} = 0$.

27.42.$^\bullet$ На координатній площині позначте всі точки з координатами $(x; y)$, для яких визначено вираз:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$; 2) $\sqrt{x} + \sqrt{-y}$; 3) $\sqrt{xy}$; 4) $\sqrt{x^2 y}$.

27.43.$^\bullet$ При яких значеннях a і b має зміст вираз:

1) $\sqrt{ab}$; 2) $\sqrt{-ab}$; 3) $\sqrt{ab^2}$; 4) $\sqrt{a^2b^2}$; 5) $\sqrt{-a^2b}$?

27.44.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x}\,(x+1) > 0$;

2) $\sqrt{x}\,(x+1) \geqslant 0$;

3) $\sqrt{x}\,(x+1) < 0$;

4) $\sqrt{x}\,(x+1) \leqslant 0$;

5) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} > 0$;

6) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} \geqslant 0$;

7) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} < 0$;

8) $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}} \leqslant 0$.

27.45.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x}\,(x-1) > 0$;

2) $\sqrt{x}\,(x-1) \geqslant 0$;

3) $\sqrt{x}\,(x-1) < 0$;

4) $\sqrt{x}\,(x-1) \leqslant 0$;

5) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} > 0$;

6) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \geqslant 0$;

7) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} < 0$;

8) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \leqslant 0$.

27.46.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції $y = x^3 - \left(\sqrt{x^2(x-1)}\right)^2$.

27.47.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції $y = \left(\sqrt{(x+1)^2 x}\right)^2 - x^3 - x^2 - x$.

27.48.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a не має коренів рівняння:

1) $(x-a)\left(\sqrt{x}+1\right) = 0$;

2) $(x-a)\left(\sqrt{-x}+1\right) = 0$?

27.49.•• При яких значеннях параметра a не має коренів рівняння:

1) $\frac{x-a}{\sqrt{x}-1}=0$; 2) $\frac{x-a}{\sqrt{x-1}}=0$?

27.50.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x-a)\left(\sqrt{x}-2\right)=0$$

має два різних корені?

27.51.•• При яких значеннях параметра a має єдиний розв'язок рівняння:

1) $(x+a)\left(\sqrt{x}-3\right)=0$;

2) $\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x}-a\right)=0$;

3) $\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x-a}=0$?

27.52.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\sqrt{x}-4\right)(x-a)=0$ має тільки один корінь?

27.53.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $a\sqrt{x-1}=0$;

2) $\sqrt{(a-1)x}=0$;

3) $a\sqrt{x-1}=a$;

4) $\sqrt{x-2}=a$;

5) $(x-1)\sqrt{x-a}=0$;

6) $(2-a)\sqrt{x-2}=0$.

Чи ростуть у городі радикали?

У Стародавній Греції дію добування кореня ототожнювали з пошуком сторони квадрата за його площею, а сам квадратний корінь називали «стороною».

У Стародавній Індії слово «мула» означало «початок», «основа», «корінь дерева». Це слово почали застосовувати і до сторони квадрата, виходячи, можливо, з такої асоціації: із сторони квадрата, як з кореня, виростає сам квадрат. Можливо, тому в латинській мові поняття «сторона» і «корінь» виражаються одним і тим самим словом — *radix*. Від цього слова походить термін «радикал».

Рене Декарт (1596—1650)

Слово *radix* можна також перекласти як «редис», тобто коренеплід — рослина, їстівною частиною якої є корінь.

У XIII–XV ст. європейські математики, скорочуючи слово *radix*, позначали квадратний корінь знаками R, ℞, R^2. Наприклад, запис $\sqrt{7}$ мав такий вигляд: R^27.

У XVI ст. стали використовувати знак $\surd$. Походження цього символу, мабуть, пов'язано з рукописною латинською буквою r.

У XVII ст. видатний французький математик Рене Декарт, поєднавши знак $\surd$ з горизонтальною рискою, отримав символ $\sqrt{}$, який ми і використовуємо сьогодні.

28. Множина дійсних чисел

Розглянемо множину $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді відношення $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне. Наприклад, $5 = \frac{5}{1}$; $-3 = \frac{-3}{1}$; $0{,}2 = \frac{1}{5}$; $0 = \frac{0}{7}$; $5{,}3 = \frac{53}{10}$.

З можливістю такого подання пов'язана назва «раціональне число»: одним із значень латинського слова *ratio* є «відношення».

У 6 класі ви дізналися, що кожне раціональне число можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу або у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. Для дробу $\frac{m}{n}$ таке подання можна отримати, виконавши ділення числа m на число n «куточком».

Наприклад, $\frac{5}{8} = 0{,}625$; $\frac{5}{11} = 0{,}454545...$

Число $\frac{5}{8}$ записано у вигляді скінченного десяткового дробу, а число $\frac{5}{11}$ — у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. У запису 0,454545... цифри 4 і 5 періодично повторюються. Групу цифр, яка повторюється, називають **періодом дробу**; при запису період беруть у круглі дужки. У даному випадку дріб $\frac{5}{11} = 0{,}454545...$ записують у вигляді $\frac{5}{11} = 0{,}(45)$.

Зауважимо, що будь-який скінченний десятковий дріб і будь-яке ціле число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. Наприклад,

$0{,}625 = 0{,}6250000... = 0{,}625(0)$;

$2 = 2{,}000... = 2{,}(0)$.

Отже, ***кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу***.

Справедливим є також твердження: ***кожний нескінченний періодичний десятковий дріб є записом деякого раціонального числа.*** У 9 класі ви навчитеся записувати нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу.

Сума і добуток двох натуральних чисел є натуральними числами. Проте різниця таку властивість має не завжди. Наприклад, $(5 - 7) \notin \mathbb{N}$.

Сума, різниця, добуток двох цілих чисел є цілими числами. Однак частка таку властивість не має. Наприклад, $\frac{5}{7} \notin \mathbb{Z}$.

Сума, різниця, добуток і частка (крім ділення на нуль) двох раціональних чисел є раціональними числами.

Отже, дія віднімання натуральних чисел може вивести результат за межі множини $\mathbb{N}$, дія ділення цілих чисел — за межі множини $\mathbb{Z}$, проте виконання будь-якої з чотирьох арифметичних дій з раціональними числами не виводить результат за межі множини $\mathbb{Q}$.

Ви познайомилися з новою дією — добуванням квадратного кореня. Виникає природне запитання: чи завжди квадратний корінь з невід'ємного раціонального числа є раціональним числом?

Розглянемо рівняння $x^2 = 2$. Оскільки $2 > 0$, то рівняння має два корені: $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ (рис. 28.1).

Припустимо, що число $\sqrt{2}$ — раціональне. Тоді його можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m і n — натуральні числа. Маємо:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

$$\text{Тоді } \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2;\ 2 = \frac{m^2}{n^2};\ m^2 = 2n^2.$$

З останньої рівності випливає, що число m^2 — парне. А це означає, що парним є і число m. Тоді $m = 2k$, де k — деяке натуральне число. Маємо:

$$(2k)^2 = 2n^2;\ 4k^2 = 2n^2;\ n^2 = 2k^2.$$

Звідси випливає, що число n^2, а отже, й число n — парні.

Таким чином, чисельник і знаменник дробу $\frac{m}{n}$ — парні числа, тобто цей дріб є скоротним. Отримали суперечність.

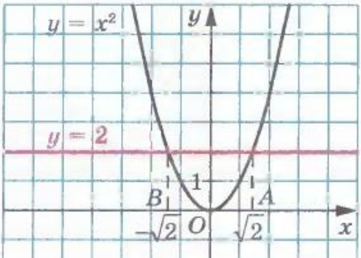


Рис. 28.1

Таким чином, *не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює* 2, тобто числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ не є раціональними. Їх називають **ірраціональними** (приставка «ір» означає заперечення).

Ми показали, що дія добування кореня з раціонального числа може вивести результат за межі множини $\mathbb{Q}$.

Жодне ірраціональне число не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, а отже, і у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Ірраціональні числа можуть бути подані у вигляді **нескінченних неперіодичних** десяткових дробів.

Наприклад, за допомогою спеціальної комп'ютерної програми можна встановити, що

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots .$$

Числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ — це не перші ірраціональні числа, з якими ви зустрічаєтесь. Число π, яке дорівнює відношенню довжини кола до його діаметра, є ірраціональним:
$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots$.

Ірраціональні числа виникають не тільки в результаті добування квадратних коренів. Їх можна конструювати, будуючи нескінченні неперіодичні десяткові дроби.

Наприклад, число 0,10100100010000100000... (після коми записують послідовно степені числа 10) є ірраціональним. Справді, якщо припустити, що цей десятковий дріб має період, який складається з n цифр, то з деякого місця він повністю складатиметься з нулів, тобто починаючи з цього місця в запису не повинно бути жодної одиниці, що суперечить конструкції числа.

Об'єднання множин ірраціональних і раціональних чисел називають **множиною дійсних чисел**. Її позначають буквою $\mathbb{R}$ (перша буква латинського слова *realis* — реальний, такий, що існує в дійсності).

Тепер «ланцюжок» $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ можна продовжити:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

У старших класах ви дізнаєтесь, що цей ланцюжок також має продовження.

Зв'язок між числовими множинами, які розглянуто в цьому пункті, ілюструє схема, зображена на рисунку 28.2.

Довжину будь-якого відрізка можна виразити дійсним числом. Цей факт дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між множиною $\mathbb{R}$ і множиною точок координатної прямої. Точ-

Рис. 28.2

ці O, початку відліку, поставимо у відповідність число 0. Кожній точці A координатної прямої, відмінної від точки O, поставимо у відповідність єдине число, яке дорівнює довжині відрізка OA, якщо точка A розміщена праворуч від точки O, і число, протилежне довжині відрізка OA, якщо точка A розміщена ліворуч від точки O. Також зрозуміло, що кожне дійсне число є відповідним єдиній точці координатної прямої.

Над дійсними числами можна виконувати чотири арифметичні дії (крім ділення на нуль), у результаті отримуватимемо дійсне число. Ці дії мають звичні для вас властивості:

$a + b = b + a$	переставна властивість додавання
$ab = ba$	переставна властивість множення
$(a + b) + c = a + (b + c)$	сполучна властивість додавання
$(ab)\,c = a\,(bc)$	сполучна властивість множення
$a\,(b + c) = ab + ac$	розподільна властивість множення

Дійсні числа можна порівнювати, використовуючи правила порівнювання десяткових дробів, тобто порівнюючи цифри у відповідних розрядах. Наприклад, $7{,}853126... < 7{,}853211...$.

Будь-яке додатне дійсне число більше за нуль і за будь-яке від'ємне дійсне число. Будь-яке від'ємне дійсне число менше від нуля.

Якщо позначити на координатній прямій два дійсних числа, то менше з них буде розміщено ліворуч від більшого.

Знаходячи довжину кола і площу круга, ви користувалися наближеним значенням числа π ($\pi \approx 3{,}14$). Аналогічно при розв'язуванні практичних задач, де необхідно виконати дії з дійсними числами, ці числа заміняють їх наближеними значеннями. Наприклад, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Наприкінці підкреслимо, що з будь-якого невід'ємного дійсного числа можна добути квадратний корінь і в результаті цієї дії отримати дійсне число, тобто дія добування квадратного кореня з невід'ємного дійсного числа не виводить результат за межі множини $\mathbb{R}$.

?

1. Які числа утворюють множину раціональних чисел?
2. У вигляді якого відношення можна подати кожне раціональне число?
3. Як пов'язані між собою раціональні числа і нескінченні періодичні десяткові дроби?
4. Як називають числа, які не є раціональними?
5. Об'єднання яких множин утворює множину дійсних чисел?
6. Якою буквою позначають множину дійсних чисел?
7. Як взаємозв'язані множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$?

28.1.° Чи є правильним твердження:

1) $1 \in \mathbb{N}$;	5) $0 \in \mathbb{N}$;	9) $-2{,}3 \in \mathbb{R}$;	13) $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$;
2) $1 \in \mathbb{Z}$;	6) $0 \notin \mathbb{Z}$;	10) $-\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$;	14) $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$;
3) $1 \in \mathbb{Q}$;	7) $0 \in \mathbb{R}$;	11) $-\frac{3}{7} \notin \mathbb{R}$;	15) $\sqrt{9} \in \mathbb{R}$;
4) $1 \in \mathbb{R}$;	8) $-2{,}3 \in \mathbb{N}$;	12) $\sqrt{7} \notin \mathbb{R}$;	16) $\frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$?

28.2.° Чи є правильним твердження:

1) будь-яке натуральне число є цілим;
2) будь-яке натуральне число є раціональним;
3) будь-яке натуральне число є дійсним;
4) будь-яке раціональне число є цілим;
5) будь-яке дійсне число є раціональним;
6) будь-яке раціональне число є дійсним;
7) будь-яке ірраціональне число є дійсним;
8) будь-яке дійсне число є раціональним або ірраціональним?

28.3.° Які з даних нескінченних дробів є записами раціональних чисел, а які — ірраціональних:

1) 0,(3);
2) 0,4(32);
3) 5,2525525552... (кількість п'ятірок між сусідніми двійками послідовно збільшується на 1)?

28.4.° Порівняйте:

1) 6,542... і 6,452...;   2) −24,064... і −24,165... .

28.5.° Порівняйте:

1) 0,234... і 0,225...; 2) −1,333... і −1,345... .

28.6.° Укажіть яке-небудь значення a, при якому рівняння $x^2 = a$:

1) має два раціональних корені;

2) має два ірраціональних корені.

28.7.° Порівняйте числа:

1) $\frac{43}{7}$ і 6,12; 4) −2,(36) і −2,36;

2) 3,(24) і 3,24; 5) 7,(18) і 7,(17).

3) π і 3,(14);

28.8.° Порівняйте числа:

1) $\frac{1}{6}$ і 0,2; 2) $\frac{7}{9}$ і 0,77; 3) −1,(645) і −1,(643).

28.9.° Запишіть у порядку спадання числа 3,(16); π; −1,82...; −0,08...; 2,(136).

28.10.° Запишіть у порядку зростання числа 1,57; 1,571...; $\frac{\pi}{2}$; 1,(56); 1,(572).

28.11.• Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка двох раціональних чисел є раціональними числами.

28.12.• Доведіть, що сума раціонального та ірраціонального чисел є число ірраціональне.

28.13.• Чи правильно, що:

1) сума будь-яких двох ірраціональних чисел є число ірраціональне;

2) добуток будь-яких двох ірраціональних чисел є число ірраціональне;

3) добуток будь-якого ірраціонального числа і будь-якого раціонального числа є число ірраціональне?

28.14.• Відомо, що сума і добуток двох чисел — раціональні числа. Чи обов'язково задані числа є раціональними?

28.15.• Знайдіть усі раціональні числа a і b такі, що число $a + b\sqrt{2}$ є раціональним.

28.16.• Знайдіть такі цілі числа a і b, що:

1) $(3 - \sqrt{2})^2 = a + b\sqrt{2}$; 2) $(\sqrt{3} - 2)^2 = a - b\sqrt{3}$.

28.17.•• Доведіть, що число $\sqrt{3}$ є ірраціональним.

28.18.•• Доведіть ірраціональність числа 0,12345... (виписано поспіль усі натуральні числа).

28.19.•• Чи можна подати число $\sqrt{2} + 1$ у вигляді арифметичного квадратного кореня з якогось раціонального числа?

28.20.** Пара чисел $(\sqrt{2}-1, -\sqrt{2})$ є розв'язком рівняння $ax + by + c = 0$, де a, b, c — раціональні числа. Доведіть, що $a = b = c$.

28.21.** Число $1+\sqrt{2}$ є коренем рівняння $x^2 + px + q = 0$, де p і q — раціональні числа. Знайдіть p і q.

28.22.** Число $\sqrt{2}-1$ є коренем рівняння $x^2 + px + q = 0$, де p і q — раціональні числа. Доведіть, що число $-\sqrt{2}-1$ також є коренем цього рівняння.

28.23.* Числа a, b і $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — раціональні. Доведіть, що $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ — раціональні числа.

28.24.* Доведіть, що між будь-якими двома раціональними числами знайдуться як раціональне число, так і ірраціональне число.

28.25.* Чи існує таке число x, що значення виразів $x+\sqrt{2}$ і $x^3+\sqrt{2}$ — раціональні числа?

28.26.* Чи існує таке число x, що значення виразів:

1) $x+\sqrt{3}$ і $\frac{1}{x}-\sqrt{3}$; 2) $x+\sqrt{3}$ і $\frac{1}{x}+\sqrt{3}$

є цілими числами?

28.27.* Площину покрито нескінченною квадратною сіткою. Чи можна через будь-який вузол провести пряму, яка не проходить більше через жодний інший вузол сітки?

Коли таємне стає явним

Графічне розв'язання рівняння $x^2 = 2$ (рис. 28.1) показує, що існують відрізки (у нашому випадку це відрізки OA і OB), довжини яких не виражаються раціональними числами, тобто *для вимірювання відрізків раціональних чисел недостатньо.*

Цей факт було відкрито в школі великого давньогрецького вченого Піфагора.

Спочатку піфагорійці вважали, що для будь-яких відрізків AB і CD завжди можна знайти такий відрізок MN, який у кожному з них вкладається ціле число разів. Звідси випливало, що відношення довжин будь-яких двох відрізків виражається відношенням натуральних чисел, тобто раціональним числом.

Піфагор
(бл. 570 — бл. 500 р. до н. е.)

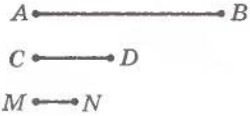


Рис. 28.3

Наприклад, на рисунку 28.3 $AB = 5MN$, $CD = 2MN$ і $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Відрізок MN називають **спільною мірою** відрізків AB і CD.

Якщо для деяких відрізків існує спільна міра, то їх називають **спільномірними**. Наприклад, відрізки AB і CD (рис. 28.3) є спільномірними.

Отже, давньогрецькі вчені вважали, що будь-які два відрізки є спільномірними. А це надавало змогу подати довжину будь-якого відрізка у вигляді раціонального числа.

Справді, нехай деякий відрізок AB обрано за одиничний. Тоді для відрізка AB і будь-якого іншого відрізка CD існує відрізок завдовжки e, який є їх спільною мірою. Отримуємо $AB = ne$, $CD = me$, де m і n — деякі натуральні числа. Звідси $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$. Оскільки $AB = 1$, то $CD = \frac{m}{n}$.

Проте самі ж піфагорійці зробили видатне відкриття. Вони довели, що діагональ і сторона квадрата неспільномірні, тобто якщо сторону квадрата взяти за одиницю, то довжину діагоналі квадрата виразити раціональним числом не можна.

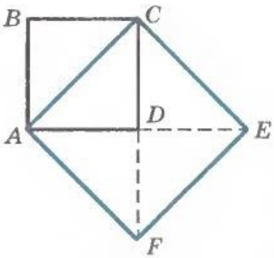


Рис. 28.4

Для доведення розглянемо довільний квадрат $ABCD$ і візьмемо його сторону за одиницю довжини. Тоді його площа дорівнює $AB^2 = 1$. На діагоналі AC побудуємо квадрат $ACEF$ (рис. 28.4). Зрозуміло, що площа квадрата $ACEF$ у 2 рази більша за площу квадрата $ABCD$. Звідси $AC^2 = 2$, тобто $AC = \sqrt{2}$. Отже, довжина діагоналі AC не виражається раціональним числом.

Це відкриття змінило один з фундаментальних постулатів давньогрецьких учених, який полягав у тому, що відношення будь-яких двох величин виражається відношенням цілих чисел.

Існує легенда про те, що піфагорійці тримали відкриття ірраціональних чисел у найсуворішій таємниці, а людину, яка розголосила цей факт, покарали боги: вона загинула під час корабельної катастрофи.

Про зліченність числових множин

Ви знаєте, що множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Q}$ — зліченні.

Виникає природне запитання: «Чи всі числові множини є зліченними?»

Покажемо, що, наприклад, множина чисел проміжку (0; 1) є незліченною.

Нехай ця множина є зліченною. Тоді всі числа з цього проміжку можна пронумерувати:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

Кожне з цих чисел можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу (якщо десятковий дріб є скінченним, то вважатимемо, що з певного місця всі цифри десяткового запису дорівнюють нулю) такого вигляду:

$$0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n,$$

де α_1, α_2, α_3, ..., α_n — будь-які цифри від 0 до 9.

Деякі з цих чисел можуть мати два записи. Наприклад, дробам 0,7000... і 0,6999... відповідає одне й те саме дійсне число. (Цей, на перший погляд, несподіваний факт буде доведено в старших класах.) Для уникнення невизначеності не будемо тут розглядати періодичні десяткові дроби з періодом 9.

Запишемо всі числа a_1, a_2, ..., a_n, ... у стовпчик. Наприклад, запис може мати такий вигляд:

$$\begin{array}{lllllllllll}
a_1 & = & 0, & \mathbf{7} & 2 & 5 & 3 & 9 & 1 & 8 & \ldots \\
a_2 & = & 0, & 1 & \mathbf{1} & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
a_3 & = & 0, & 9 & 8 & \mathbf{4} & 5 & 3 & 1 & 7 & \ldots \\
a_4 & = & 0, & 8 & 5 & 3 & \mathbf{9} & 5 & 8 & 4 & \ldots \\
\ldots & & & & & & & & & &
\end{array}$$

У цій таблиці виділено цифри, які стоять на діагоналі. Конструюємо новий десятковий нескінченний дріб (число a) за таким правилом: якщо у числа a_n на «діагональному місці» (на n-му місці після коми) стоїть цифра 1, то у числа a на цьому місці поставимо цифру 2; у решті випадків у числа a на n-му місці поставимо цифру 1. Так, для нашого прикладу отримуємо:

$$a = 0,1211\ldots .$$

Оскільки у числа a на n-му місці стоїть цифра, відмінна від n-ї цифри числа a_n, то число a не міститься серед записаних чисел. Проте $a \in (0; 1)$. Отримали суперечність. Отже, множина точок проміжку (0; 1) є незліченною.

Це доведення багато в чому аналогічне доведенню незліченності множини послідовностей, розглянутому в пункті 7. Застосований метод називають **діагональним методом Кантора**.

29. Властивості арифметичного квадратного кореня

Легко перевірити, що $\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt{1{,}4^2} = 1{,}4$, $\sqrt{0^2} = 0$. Може здатися, що взагалі $\sqrt{a^2} = a$. Проте це не так. Наприклад, рівність $\sqrt{(-5)^2} = -5$ є неправильною, оскільки $-5 < 0$. Насправді, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$. Також можна переконатися, що, наприклад, $\sqrt{(-7)^2} = 7$, $\sqrt{(-2{,}8)^2} = 2{,}8$.

Узагалі, є справедливою така теорема.

Теорема 29.1. ***Для будь-якого дійсного числа a виконується рівність***

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt{a} = b$, треба показати, що $b \geqslant 0$ і $b^2 = a$.

Маємо: $|a| \geqslant 0$ при будь-якому a.

З означення модуля також випливає, що $(|a|)^2 = a^2$. ▲

Наступна теорема узагальнює доведений факт.

Теорема 29.2 (арифметичний квадратний корінь із степеня). ***Для будь-яких дійсного числа a і натурального числа n виконується рівність***

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 29.1. Проведіть це доведення самостійно.

Теорема 29.3 (арифметичний квадратний корінь з добутку). ***Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, виконується рівність***

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доведення. Маємо: $\sqrt{a} \geqslant 0$ і $\sqrt{b} \geqslant 0$. Тоді $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. Крім того, $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Отже, вираз $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ набуває тільки невід'ємних значень і його квадрат дорівнює ab. ▲

Зазначимо, що цю теорему можна узагальнити для добутку будь-якої кількості множників. Наприклад, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ і $c \geqslant 0$, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)\,c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Зауважимо, що коли $a \leqslant 0$ і $b \leqslant 0$, то теорема про корінь з добутку виражається такою рівністю:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}.$$

Теорема 29.4 (арифметичний квадратний корінь з дробу). ***Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geqslant 0$ і $b > 0$, виконується рівність***

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 29.3.

Зауважимо, що коли $a \leqslant 0$ і $b < 0$, то теорема про корінь з дробу виражається такою рівністю:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}.$$

Зрозуміло, що з двох квадратів, площі яких S_1 і S_2 (рис. 29.1), більшу сторону має той, у якого площа більша, тобто якщо $S_1 > S_2$, то $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$. Це очевидне міркування підтверджує така теорема.

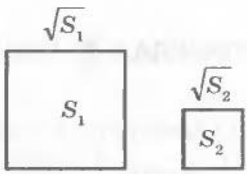


Рис. 29.1

Теорема 29.5. ***Якщо $a > b \geqslant 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.***

Доведення. Припустимо, що нерівність, яка доводиться, є неправильною, тобто $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$. Оскільки $\sqrt{a} > 0$ і $\sqrt{b} \geqslant 0$, то, використовуючи властивості числових нерівностей, отримуємо, що $\left(\sqrt{a}\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{b}\right)^2$, тобто $a \leqslant b$, що суперечить умові. ▲

Теорема 29.6. ***Якщо $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b$.***

Доведення. Оскільки $\sqrt{a} \geqslant 0$ і $\sqrt{b} \geqslant 0$, то, використовуючи властивості числових нерівностей, отримуємо, що $\left(\sqrt{a}\right)^2 > \left(\sqrt{b}\right)^2$, тобто $a > b$. ▲

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{(-7{,}3)^2}$; 2) $\sqrt{1{,}2^4}$; 3) $\sqrt{0{,}81 \cdot 225}$; 4) $\sqrt{\frac{16}{49}}$.

Розв'язання

1) $\sqrt{(-7{,}3)^2} = |-7{,}3| = 7{,}3.$

2) $\sqrt{1{,}2^4} = 1{,}2^2 = 1{,}44.$

3) $\sqrt{0{,}81 \cdot 225} = \sqrt{0{,}81} \cdot \sqrt{225} = 0{,}9 \cdot 15 = 13{,}5.$

4) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}.$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$.

Розв'язання

1) Замінивши добуток коренів коренем з добутку, дістанемо:

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6.$$

2) Замінивши частку коренів коренем з частки (дробу), матимемо:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}.$$

ПРИКЛАД 3 Порівняйте числа: 1) 6 і $\sqrt{31}$; 2) $3\sqrt{7}$ і $\sqrt{65}$.

Розв'язання

1) Оскільки $6 = \sqrt{36}$ і $36 > 31$, то $\sqrt{36} > \sqrt{31}$, тобто $6 > \sqrt{31}$.

2) Маємо $\left(3\sqrt{7}\right)^2 = 63$, $63 < 65$, тоді $\sqrt{63} < \sqrt{65}$. Отже,

$$3\sqrt{7} < \sqrt{65}.$$

ПРИКЛАД 4 Спростіть вираз: 1) $\sqrt{a^{14}}$; 2) $\sqrt{9a^6}$, якщо $a \leqslant 0$; 3) $\sqrt{m^2n^2}$, якщо $m \geqslant 0$, $n \leqslant 0$; 4) $\sqrt{a^{36}}$; 5) $\sqrt{y^2 + 4y + 4}$, якщо $y \leqslant -2$; 6) $\sqrt{(x-3)^6}$.

Розв'язання

1) За теоремою про корінь зі степеня маємо:

$$\sqrt{a^{14}} = \left| a^7 \right| = \begin{cases} a^7, & \text{якщо } a \geqslant 0, \\ -a^7, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

2) Маємо $\sqrt{9a^6} = 3 \cdot \left| a^3 \right|$. Оскільки за умовою $a \leqslant 0$, то $a^3 \leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{9a^6} = 3 \cdot \left| a^3 \right| = -3a^3.$$

3) $\sqrt{m^2n^2} = |m| \cdot |n| = m \cdot (-n) = -mn.$

4) $\sqrt{a^{36}} = \left| a^{18} \right|$. Оскільки $a^{18} \geqslant 0$, то $\sqrt{a^{36}} = \left| a^{18} \right| = a^{18}$.

5) $\sqrt{y^2 + 4y + 4} = \sqrt{(y+2)^2} = |y + 2|$. Оскільки $y \leqslant -2$, то $y + 2 \leqslant 0$ і $|y + 2| = -y - 2$.

6) $\sqrt{(x-3)^6} = |x-3|^3 = \begin{cases} (x-3)^3, \text{ якщо } x \geqslant 3, \\ (3-x)^3, \text{ якщо } x < 3. \end{cases}$

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \dfrac{\sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} - \sqrt{x + \frac{1}{x} - 2}}{\sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} + \sqrt{x + \frac{1}{x} - 2}}$.

Розв'язання. Маємо $y = \dfrac{\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}} - \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x}}}{\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}} + \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x}}}$. Отже, областю визначення даної функції є множина $D(y) = (0; +\infty)$. Звідси

$$y = \frac{\frac{|x+1|}{\sqrt{x}} - \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}}{\frac{|x+1|}{\sqrt{x}} + \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}}; \quad y = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}.$$

Оскільки $x > 0$, то $x + 1 > 0$, тоді $y = \dfrac{x+1-|x-1|}{x+1+|x-1|}$.

Якщо $0 < x \leqslant 1$, то $y = \dfrac{x+1+x-1}{x+1+1-x} = x$.

Якщо $x > 1$, то $y = \dfrac{x+1-x+1}{x+1+x-1} = \dfrac{1}{x}$.

Отже, цю функцію можна задати так:

$$y = \begin{cases} x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$$

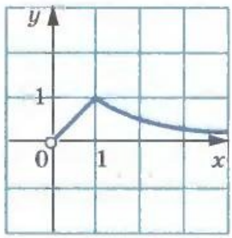


Рис. 29.2

Шуканий графік зображено на рисунку 29.2.

ПРИКЛАД 6 Скоротіть дріб $\dfrac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}}$.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що числа a і b однакового знака. Розглянемо два випадки.

Перший випадок: $a > 0$ і $b > 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$$

Другий випадок: $a < 0$ і $b < 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} + \sqrt{-b} \cdot \sqrt{-b}}{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-b}(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})}{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-a} + \sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}.$$

?

1. Якому виразу тотожно дорівнює вираз $\sqrt{a^2}$?
2. Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь зі степеня.
3. Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь з добутку.
4. Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь з дробу.
5. Відомо, що невід'ємні числа a_1 і a_2 такі, що $a_1 > a_2$. Порівняйте значення виразів $\sqrt{a_1}$ і $\sqrt{a_2}$.

29.1.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt{0,4^2}$; 3) $\sqrt{6^4}$; 5) $5\sqrt{(-10)^4}$;

2) $\sqrt{(-1,8)^2}$; 4) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 6) $-4\sqrt{(-1)^{14}}$?

29.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{a^2}$, якщо $a = 4,6$; $-18,6$; 3) $0,1\sqrt{c^6}$, якщо $c = -2$; 5.

2) $\sqrt{b^4}$, якщо $b = -3$; 1,2;

29.3.° Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{16 \cdot 2500}$; 4) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$; 7) $\sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25}}$;

2) $\sqrt{400 \cdot 1,44}$; 5) $\sqrt{0,01 \cdot 0,81 \cdot 2500}$; 8) $\sqrt{\frac{169}{36 \cdot 81}}$;

3) $\sqrt{0,09 \cdot 0,04}$; 6) $\sqrt{\frac{49}{256}}$; 9) $\sqrt{\frac{121 \cdot 256}{25 \cdot 100}}$.

29.4.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt{16 \cdot 0,25}$; 3) $\sqrt{5^2 \cdot 3^6}$; 5) $\sqrt{13\frac{4}{9}}$;

2) $\sqrt{0,36 \cdot 1,21}$; 4) $\sqrt{2,25 \cdot 0,04 \cdot 1600}$; 6) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$?

29.5.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$; 4) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0,18}$; 7) $\sqrt{\frac{2}{11}} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{11}}$;

2) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$; 5) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{26}$; 8) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$.

3) $\sqrt{0,009} \cdot \sqrt{1000}$; 6) $\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{1\frac{2}{3}}$;

29.6.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{12{,}1}$; 5) $\sqrt{1\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{2{,}8}$;

2) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{50}$; 6) $\sqrt{5\cdot 2^3}\cdot\sqrt{5^3\cdot 2^3}$.

29.7.° Знайдіть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{3{,}2}}{\sqrt{0{,}2}}$; 5) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$; 4) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$; 6) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}}$.

29.8.° Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{6{,}3}}{\sqrt{0{,}7}}$; 3) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{242}}$; 4) $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

29.9.° Порівняйте числа:

1) $\sqrt{\frac{17}{4}}$ і 2; 3) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ і 1; 5) $3\sqrt{2}$ і $2\sqrt{3}$;

2) 5 і $\sqrt{26}$; 4) -7 і $-\sqrt{48}$; 6) $\sqrt{41}$ і $2\sqrt{10}$.

29.10.° Порівняйте числа:

1) $\sqrt{33}$ і 6; 3) $\sqrt{30}$ і $2\sqrt{7}$;

2) $3\sqrt{5}$ і $\sqrt{42}$; 4) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

29.11.° Запишіть у порядку спадання числа 8; $\sqrt{62}$; 7,9; $\sqrt{65}$; 8,2.

29.12.° Запишіть у порядку зростання числа $\sqrt{38}$; 6,1; 6; $\sqrt{35}$; 5,9.

29.13.° Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число:

1) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{5}$; 5) $\sqrt{13}$; 7) $-\sqrt{10}$;

2) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{7}$; 6) $\sqrt{0{,}98}$; 8) $-\sqrt{115}$?

29.14.° Між якими двома послідовними цілими числами знаходиться на координатній прямій число:

1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{19}$; 3) $\sqrt{29}$; 4) $-\sqrt{30{,}5}$?

29.15.° Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:

1) 3 і $\sqrt{68}$; 2) $\sqrt{7}$ і $\sqrt{77}$; 3) $-\sqrt{31}$ і $-2{,}3$; 4) $-\sqrt{42}$ і 2,8.

29.16.° Укажіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:

1) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$ і $\sqrt{90}$; 3) $-\sqrt{145}$ і $-\sqrt{47}$.

29.17.° При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^2} = -a$?

29.18.° При яких значеннях змінних виконується рівність:

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; 2) $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$; 3) $\sqrt{-ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$?

29.19.° Знайдіть значення виразу, подавши попередньо підкореневий вираз у вигляді добутку квадратів раціональних чисел:

1) $\sqrt{18 \cdot 32}$; 4) $\sqrt{75 \cdot 48}$; 7) $\sqrt{2{,}7 \cdot 1{,}2}$;

2) $\sqrt{8 \cdot 98}$; 5) $\sqrt{288 \cdot 50}$; 8) $\sqrt{80 \cdot 45}$;

3) $\sqrt{3{,}6 \cdot 14{,}4}$; 6) $\sqrt{4{,}5 \cdot 72}$; 9) $\sqrt{33 \cdot 297}$.

29.20.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{18 \cdot 200}$; 3) $\sqrt{14{,}4 \cdot 0{,}9}$; 5) $\sqrt{12{,}5 \cdot 32}$;

2) $\sqrt{3{,}6 \cdot 0{,}4}$; 4) $\sqrt{13 \cdot 52}$; 6) $\sqrt{108 \cdot 27}$.

29.21.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; 2) $\sqrt{21{,}8^2 - 18{,}2^2}$; 3) $\sqrt{\dfrac{139^2 - 86^2}{98{,}5^2 - 45{,}5^2}}$.

29.22.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{6{,}8^2 - 3{,}2^2}$; 2) $\sqrt{98{,}5^2 - 97{,}5^2}$; 3) $\sqrt{\dfrac{98}{228^2 - 164^2}}$.

29.23.° Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня:

1) $\sqrt{b^2}$; 2) $-0{,}4\sqrt{c^2}$; 3) $\sqrt{a^6}$; 4) $\sqrt{m^8}$.

29.24.° Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня:

1) $1{,}2\sqrt{x^2}$; 2) $\sqrt{y^4}$; 3) $\sqrt{n^{10}}$.

29.25.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; 3) $\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{7})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$.

29.26.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2}$; 3) $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{11})^2}$; 4) $\sqrt{(2-\sqrt{6})^2} - \sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}$.

29.27.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^6} = -x$.

29.28.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{m^2}$, якщо $m > 0$;
2) $\sqrt{n^2}$, якщо $n < 0$;
3) $\sqrt{16p^2}$, якщо $p \geqslant 0$;
4) $\sqrt{0,36k^2}$, якщо $k \leqslant 0$;
5) $\sqrt{c^{12}}$;
6) $\sqrt{0,25b^{14}}$, якщо $b \leqslant 0$;
7) $\sqrt{81x^4y^2}$, якщо $y \geqslant 0$;
8) $\sqrt{0,01a^6b^{10}}$, якщо $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;
9) $-1,2x\sqrt{64x^{18}}$, якщо $x \leqslant 0$;
10) $\dfrac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}$, якщо $b < 0$;
11) $\dfrac{3,3a^4}{b^3}\sqrt{\dfrac{b^{24}}{121a^{26}}}$, якщо $a < 0$;
12) $-0,5m^5\sqrt{1,96m^6n^8}$, якщо $m \leqslant 0$.

29.29.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{9a^{16}}$;
2) $\sqrt{0,81d^6}$, якщо $d \geqslant 0$;
3) $-5\sqrt{4x^2}$, якщо $x \leqslant 0$;
4) $-0,1\sqrt{100z^{10}}$, якщо $z \geqslant 0$;
5) $\sqrt{p^6q^8}$, якщо $p \geqslant 0$;
6) $\sqrt{25m^{34}n^{38}}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;
7) $ab^2\sqrt{a^4b^{18}c^{22}}$, якщо $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$;
8) $-\dfrac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt{\dfrac{625k^{30}p^{40}}{144m^6}}$, якщо $m < 0$, $k > 0$.

29.30.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(a-4)^2}$;
2) $\sqrt{(b-15)^2}$, якщо $b \geqslant 15$;
3) $\sqrt{(c+1)^2}$, якщо $c \leqslant -1$;
4) $(10-m)\sqrt{\dfrac{400}{(m-12)^2}}$, якщо $m > 12$;
5) $\dfrac{n^2-6n+9}{n+3}\sqrt{\dfrac{(n+3)^4}{(n-3)^2}}$, якщо $n > 3$;
6) $\dfrac{p^2-1}{(p+2)^2}\sqrt{\dfrac{p^2+4p+4}{(p+1)^2}}$, якщо $p < -2$.

29.31.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(a-b)^2}$, якщо $b \geqslant a$;
2) $\sqrt{c^2+6c+9}$, якщо $c \geqslant -3$;
3) $\dfrac{\sqrt{(m-5)^4}}{m^2-10m+25}$.

29.32.° При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt{a^2} = a$;
2) $\sqrt{a^4} = a^2$;
3) $\sqrt{a^6} = a^3$;
4) $\sqrt{a^8} = a^4$;
5) $\sqrt{a^6} = -a^3$;
6) $\sqrt{(a-2)^2} = 2-a$;
7) $\sqrt{(a+3)^6} = (a+3)^3$;
8) $\sqrt{(1-a)^4} = (a-1)^2$;
9) $\sqrt{a-3} \cdot \sqrt{a-3} = a-3$;
10) $\sqrt{a(a-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a-1}$;
11) $\sqrt{a(a-1)} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{1-a}$;
12) $\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{2-a}} = \sqrt{\dfrac{a-1}{2-a}}$?

29.33.° При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt{a^{10}} = a^5$;
2) $\sqrt{a^{10}} = -a^5$;
3) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2$;
4) $\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{-a}\right)^2$;
5) $\sqrt{(a+1)^2} = -a-1$;
6) $\sqrt{(1-a)^{10}} = (1-a)^5$;
7) $\sqrt{a^4+2a^2+1} = a^2+1$;
8) $\sqrt{(a-2)(a-3)} = \sqrt{2-a} \cdot \sqrt{3-a}$;
9) $\sqrt{a(a+1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a+1}$?

29.34.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x^2} - x$, якщо $x \leqslant 0$;
2) $y = 2x + \sqrt{x^2}$;
3) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}} + 3$;
4) $y = \sqrt{(x+3)^2} + x$.

29.35.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x^2} + x$, якщо $x \geqslant 0$;
2) $y = \sqrt{(x-3)^2}$;
3) $y = \sqrt{(x-2)^2} - x$;
4) $y = \sqrt{(x+4)^2} - x - 4$.

29.36.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2} = x-4$;
2) $\sqrt{x^2} = 6-x$;
3) $2\sqrt{x^2} = x+3$;
4) $\sqrt{x^2-4x+4} = 2x-5$.

29.37.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2} = 6x-10$;
2) $\sqrt{x^2} = x+8$;
3) $\sqrt{4x^2-4x+1} = x+1$;
4) $\sqrt{9-6x+x^2} = 2x-1$.

29.38.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x^2+6x+9} < 2$;
2) $\sqrt{x^2-2x+1} \geqslant 3$.

29.39.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{9x^2+6x+1} \leqslant 1$;
2) $\sqrt{x^2-10x+25} > 4$.

29.40.** Зобразіть на координатній площині множину точок $(x; y)$, координати яких задовольняють рівняння:

1) $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$;
2) $\sqrt{xy} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y}$;
3) $\sqrt{xy} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{y}$;
4) $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{-y}$.

29.41.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, $a \neq 0$;
2) $\dfrac{b+\sqrt{ab}}{\sqrt{-b}}$;
3) $\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{\sqrt{-a}+\sqrt{-b}}$.

29.42.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a^2-2a+1+\sqrt{4a^2-12a+9}}$, якщо $a \leqslant \dfrac{3}{2}$;
2) $\sqrt{b^2+9b+17-\sqrt{b^2+2b+1}}$, якщо $b \geqslant -1$;
3) $\sqrt{b^2+4b+\sqrt{9b^4+6b^2+1}}$.

29.43.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a^2-11a+26+\sqrt{1-2a+a^2}}$, якщо $a > 1$;
2) $\sqrt{7b^2+6b+\sqrt{4b^4+4b^2+1}}$.

30. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені

Користуючись теоремою про корінь з добутку, перетворимо вираз $\sqrt{48}$:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Отже, вираз $\sqrt{48}$ ми подали у вигляді добутку раціонального числа 4 та ірраціонального числа $\sqrt{3}$. Таке перетворення називають ***винесенням множника з-під знака кореня***. У даному випадку було винесено з-під кореня множник 4.

Розглянемо виконане перетворення у зворотному порядку:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Таке перетворення називають ***внесенням множника під знак кореня***.

ПРИКЛАД 1 Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{72a^8}$; 2) $\sqrt{b^{35}}$; 3) $\sqrt{-b^{35}}$; 4) $\sqrt{a^2b^3}$, якщо $a < 0$; 5) $\sqrt{a^6b}$.

Розв'язання

1) $\sqrt{72a^8} = \sqrt{36a^8 \cdot 2} = 6a^4\sqrt{2}$.

2) З умови випливає, що $b \geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{b^{35}} = \sqrt{b^{34}b} = |b^{17}|\sqrt{b} = b^{17}\sqrt{b}.$$

3) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{-b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot (-b)} = |b^{17}|\sqrt{-b} = -b^{17}\sqrt{-b}.$$

4) З умови випливає, що $b \geqslant 0$. Тоді

$$\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a| \cdot |b|\sqrt{b} = -ab\sqrt{b}.$$

5) Зауважимо, що коли $a = 0$, то значення даного виразу дорівнює 0. Якщо $a \neq 0$, то з умови випливає, що $b \geqslant 0$. Маємо:

$$\sqrt{a^6b} = a^3\sqrt{b} \text{ при } a > 0;$$

$$\sqrt{a^6b} = -a^3\sqrt{b} \text{ при } a < 0.$$

ПРИКЛАД 2 Внесіть множник під знак кореня:

1) $-2\sqrt{7}$; 2) $a\sqrt{7}$; 3) $3b\sqrt{-\frac{b}{3}}$; 4) $c\sqrt{c^7}$.

Розв'язання

1) $-2\sqrt{7} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{28}$.

2) Якщо $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$; якщо $a < 0$, то $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}$.

3) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$3b\sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{-3b^3}.$$

4) З умови випливає, що $c \geqslant 0$. Тоді $c\sqrt{c^7} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c^7} = \sqrt{c^9}$.

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз:

1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$; 2) $(7 - 3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5})$.

Розв'язання

1) Маємо:

$$\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} = \sqrt{9 \cdot 6a} + \sqrt{4 \cdot 6a} - \sqrt{100 \cdot 6a} =$$

$$= 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a}\,(3 + 2 - 10) = \sqrt{6a} \cdot (-5) = -5\sqrt{6a}.$$

2) Застосовуючи формули скороченого множення (квадрат двочлена та добуток суми і різниці двох виразів), отримуємо:
$(7-3\sqrt{2})^2-(\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5})=7^2-2\cdot7\cdot3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2-$
$-((\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2)=49-42\sqrt{2}+18-(10-5)=62-42\sqrt{2}.$

ПРИКЛАД 4 Розкладіть на множники вираз: 1) a^2-2; 2) $b-4$, якщо $b\geqslant0$; 3) $9c-6\sqrt{5c}+5$; 4) $a+\sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3}+6$.

Розв'язання

1) Подавши даний вираз у вигляді різниці квадратів, маємо:

$$a^2-2=a^2-(\sqrt{2})^2=(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2}).$$

2) Оскільки за умовою $b\geqslant0$, то

$$b-4=(\sqrt{b})^2-4=(\sqrt{b}-2)(\sqrt{b}+2).$$

3) Застосуємо формулу квадрата різниці:

$$9c-6\sqrt{5c}+5=(3\sqrt{c})^2-2\cdot3\sqrt{c}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2=(3\sqrt{c}-\sqrt{5})^2.$$

4) Маємо: $a+\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2+\sqrt{a}=\sqrt{a}(\sqrt{a}+1).$

5) $\sqrt{3}+6=\sqrt{3}+2\cdot(\sqrt{3})^2=\sqrt{3}(1+2\sqrt{3}).$

ПРИКЛАД 5 Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{b-1}{\sqrt{b}+1}$; 2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Розв'язання

1) Розклавши чисельник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{b-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{(\sqrt{b})^2-1}{\sqrt{b}+1}=\frac{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}{\sqrt{b}+1}=\sqrt{b}-1.$$

2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{2})^2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-3.$

ПРИКЛАД 6 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу: 1) $\dfrac{15}{2\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{14}{5\sqrt{2}-1}$.

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу означає перетворити дріб так, щоб його знаменник не містив квадратного кореня.

Розв'язання

1) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на $\sqrt{3}$, отримуємо:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{15\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на вираз $5\sqrt{2}+1$, отримуємо:

$$\frac{14}{5\sqrt{2}-1} = \frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{\left(5\sqrt{2}-1\right)\left(5\sqrt{2}+1\right)} = \frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-1} = \frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{50-1} =$$

$$= \frac{14\left(5\sqrt{2}+1\right)}{49} = \frac{2\left(5\sqrt{2}+1\right)}{7} = \frac{10\sqrt{2}+2}{7}.$$

ПРИКЛАД 7 Доведіть тотожність

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) = \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Розв'язання

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\cdot\left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) =$$

$$= \frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \frac{\left(a+2\sqrt{ab}+b\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

ПРИКЛАД 8 Спростіть вираз: 1) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Розв'язання

1) Подавши підкореневий вираз у вигляді квадрата суми, отримуємо:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}} = \sqrt{9+2\cdot 3\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)^2} = 3+\sqrt{3}.$$

2) $$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1-2\sqrt{3}+3}{2}} = \sqrt{\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{2}} =$$

$$= \frac{\left|1-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

ПРИКЛАД 9 Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$, якщо $b \geqslant 2$.

Розв'язання. Оскільки $b \geqslant 2$, то

$$\sqrt{b^2-4} = \sqrt{b-2} \cdot \sqrt{b+2}, \quad b+2 = \left(\sqrt{b+2}\right)^2, \quad b-2 = \left(\sqrt{b-2}\right)^2.$$

Маємо:

$$\frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2} = \frac{\sqrt{b-2+2\sqrt{b^2-4}+b+2}}{\sqrt{(b-2)(b+2)}+\left(\sqrt{b+2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{b-2}\right)^2+2\sqrt{b-2}\cdot\sqrt{b+2}+\left(\sqrt{b+2}\right)^2}}{\sqrt{b-2}\cdot\sqrt{b+2}+\left(\sqrt{b+2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}\right)^2}}{\sqrt{b+2}\left(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}}{\sqrt{b+2}\left(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{b+2}}.$$

30.1.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{32}$; 3) $\sqrt{490}$; 5) $\sqrt{275}$; 7) $\sqrt{0,48}$;

2) $\sqrt{54}$; 4) $\sqrt{500}$; 6) $\sqrt{0,72}$; 8) $\sqrt{450}$.

30.2.° Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$;

2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 4) $-0,05\sqrt{4400}$.

30.3.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{27}$; 4) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$; 7) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$;

2) $\sqrt{20}$; 5) $-2\sqrt{0,18}$; 8) $10\sqrt{0,03}$;

3) $\sqrt{125}$; 6) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$; 9) $0,7\sqrt{1000}$.

30.4.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $7\sqrt{2}$; 3) $6\sqrt{a}$; 5) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$; 7) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;

2) $-2\sqrt{17}$; 4) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$; 6) $-0,3\sqrt{10b}$; 8) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$.

30.5.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $-11\sqrt{3}$; 2) $12\sqrt{b}$; 3) $-7\sqrt{3c}$; 4) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$.

30.6.° Спростіть вираз:

1) $4\sqrt{a}+3\sqrt{a}-5\sqrt{a}$; 3) $\sqrt{5}+7\sqrt{5}-4\sqrt{5}$.

2) $5\sqrt{c}+3\sqrt{d}-\sqrt{c}+3\sqrt{d}$;

30.7.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{c}+10\sqrt{c}-14\sqrt{c}$;
2) $9\sqrt{6}-2\sqrt{3}+8\sqrt{3}-3\sqrt{6}$.

30.8.° Замініть вираз на тотожно рівний йому:

1) $\sqrt{9a}+\sqrt{25a}-\sqrt{49a}$;
2) $2\sqrt{0,04c}-0,3\sqrt{16c}+\frac{1}{3}\sqrt{0,81c}$.

30.9.° Спростіть вираз:

1) $2\sqrt{4x}+6\sqrt{16x}-\sqrt{625x}$;
2) $3\sqrt{0,09y}-0,6\sqrt{144y}+\frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}y}$.

30.10.° Спростіть вираз:

1) $8\sqrt{2}-\sqrt{32}$;
2) $6\sqrt{3}-\sqrt{27}$;
3) $2\sqrt{500}-8\sqrt{5}$;
4) $2\sqrt{20}-\frac{1}{3}\sqrt{45}-0,6\sqrt{125}$.

30.11.° Раціональним чи ірраціональним є значення виразу:

1) $\sqrt{48}-6-4\sqrt{3}$;
2) $\sqrt{162}-9\sqrt{2}+\sqrt{27}$?

30.12.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{75}-6\sqrt{3}$;
2) $2\sqrt{50}-8\sqrt{2}$;
3) $3\sqrt{72}-4\sqrt{2}+2\sqrt{98}$;
4) $\frac{1}{3}\sqrt{108}+\sqrt{363}-\frac{2}{9}\sqrt{243}$.

30.13.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2}\left(\sqrt{50}+\sqrt{8}\right)$;
2) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{3}$;
3) $\left(3\sqrt{5}-4\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{5}$;
4) $2\sqrt{2}\left(3\sqrt{18}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+\sqrt{32}\right)$.

30.14.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}-\sqrt{28}\right)$;
2) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{72}\right)\cdot\sqrt{2}$;
3) $\left(4\sqrt{3}-\sqrt{75}+4\right)\cdot 3\sqrt{3}$;
4) $\left(\sqrt{600}+\sqrt{6}-\sqrt{24}\right)\cdot\sqrt{6}$.

30.15.° Виконайте множення:

1) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$;
2) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)$;
3) $\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$;
4) $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)$;
5) $\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}\right)$;
6) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$;
7) $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$;
8) $\left(2-3\sqrt{3}\right)^2$.

30.16.° Виконайте множення:

1) $\left(4\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)$;
2) $\left(\sqrt{p}-q\right)\left(\sqrt{p}+q\right)$;
3) $\left(\sqrt{5}-x\right)\left(\sqrt{5}+x\right)$;
4) $\left(\sqrt{19}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{19}-\sqrt{17}\right)$;
5) $\left(m+\sqrt{n}\right)^2$;
6) $\left(3-2\sqrt{15}\right)^2$.

30.17.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $(2+\sqrt{7})^2-4\sqrt{7}$; 2) $(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+6\sqrt{2}$?

30.18.° Знайдіть значення виразу:

1) $(3+\sqrt{5})^2-6\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt{12}-2\sqrt{2})^2+8\sqrt{6}$.

30.19.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{18}{\sqrt{5}}$; 3) $\frac{m}{\sqrt{n}}$; 4) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; 5) $\frac{7}{\sqrt{7}}$; 6) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$.

30.20.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{a}{\sqrt{11}}$; 2) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; 3) $\frac{30}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$.

30.21.° Розкладіть на множники вираз:

1) a^2-3;
2) $4b^2-2$;
3) $5-6c^2$;
4) $a-9$, якщо $a \geqslant 0$;
5) $m-n$, якщо $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
6) $16x-25y$, якщо $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
7) $a-2\sqrt{a}+1$;
8) $4m-28\sqrt{mn}+49n$, якщо $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
9) $b+6\sqrt{b}+9$;
10) $3+2\sqrt{3c}+c$;
11) $2+\sqrt{2}$;
12) $6\sqrt{7}-7$;
13) $a-\sqrt{a}$;
14) $\sqrt{b}+\sqrt{3b}$;
15) $\sqrt{15}-\sqrt{5}$.

30.22.° Розкладіть на множники вираз:

1) $15-x^2$;
2) $49x^2-2$;
3) $36p-64q$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$;
4) $c-100$, якщо $c \geqslant 0$;
5) $a-8b\sqrt{a}+16b^2$;
6) $m+2\sqrt{mn}+n$, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$;
7) $a-4\sqrt{a}+4$;
8) $5+\sqrt{5}$;
9) $\sqrt{3p}-p$;
10) $\sqrt{12}+\sqrt{32}$.

30.23.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2-7}{a+\sqrt{7}}$;
2) $\frac{\sqrt{3}-b}{3-b^2}$;
3) $\frac{c-9}{\sqrt{c}-3}$;
4) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
5) $\frac{5\sqrt{a}-7\sqrt{b}}{25a-49b}$;
6) $\frac{100a^2-9b}{10a+3\sqrt{b}}$;
7) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$;
8) $\frac{\sqrt{35}+\sqrt{10}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$;
9) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{5-\sqrt{10}}$;

10) $\frac{13-\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$; 11) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 12) $\frac{4b^2-4b\sqrt{c}+c}{2b-\sqrt{c}}$.

30.24.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$; 4) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; 7) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-2\sqrt{ab}+b}$;

2) $\frac{\sqrt{a}+2}{a-4}$; 5) $\frac{23-\sqrt{23}}{\sqrt{23}}$; 8) $\frac{b-8\sqrt{b}+16}{\sqrt{b}-4}$.

3) $\frac{a-3}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$; 6) $\frac{\sqrt{24}-\sqrt{28}}{\sqrt{54}-\sqrt{63}}$;

30.25.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{3a^2}$, якщо $a \geqslant 0$; 3) $\sqrt{12a^4}$;

2) $\sqrt{5b^2}$, якщо $b \leqslant 0$; 4) $\sqrt{c^5}$.

30.26.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{18x^{12}}$; 2) $\sqrt{y^9}$.

30.27.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{98}-\sqrt{50}+\sqrt{32}$;

2) $3\sqrt{8}+\sqrt{128}-\frac{1}{3}\sqrt{162}$;

3) $0{,}7\sqrt{300}-7\sqrt{\frac{3}{49}}+\frac{2}{3}\sqrt{108}$;

4) $\sqrt{5a}-2\sqrt{20a}+3\sqrt{80a}$;

5) $\sqrt{a^3b}-\frac{2}{a}\sqrt{a^5b}$, якщо $a > 0$, $b \geqslant 0$;

6) $\sqrt{c^5}+4c\sqrt{c^3}-5c^2\sqrt{c}$.

30.28.° Спростіть вираз:

1) $0{,}5\sqrt{12}-3\sqrt{27}+0{,}4\sqrt{75}$;

2) $2{,}5\sqrt{28b}+\frac{2}{3}\sqrt{63b}-10\sqrt{0{,}07b}$;

3) $\sqrt{81a^7}-5a^3\sqrt{a}+\frac{6}{a}\sqrt{a^9}$.

30.29.° Доведіть рівність:

1) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}=\sqrt{7}+2$; 2) $\sqrt{14+8\sqrt{3}}=\sqrt{8}+\sqrt{6}$.

30.30.° Спростіть вираз:

1) $(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{27}+2)$; 2) $(\sqrt{5}-2)^2-(3+\sqrt{5})^2$;

3) $\sqrt{\sqrt{17}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+4}$;

4) $(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2$;

5) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$.

30.31.° Знайдіть значення виразу:

1) $(3\sqrt{2}+1)(\sqrt{8}-2)$;

2) $(3-2\sqrt{7})^2+(3+2\sqrt{7})^2$;

3) $(10-4\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^2$;

4) $\left(\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^2$.

30.32.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5}$;

2) $\dfrac{\sqrt{28}-2\sqrt{2a}}{6a-21}$;

3) $\dfrac{a+4\sqrt{ab}+4b}{a-4b}$, якщо $a>0$, $b>0$;

4) $\dfrac{x^2-6y}{x^2+6y-x\sqrt{24y}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}$;

6) $\dfrac{m\sqrt{m}-27}{\sqrt{m}-3}$.

30.33.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a-b}{\sqrt{11b}-\sqrt{11a}}$;

2) $\dfrac{2a+10\sqrt{2ab}+25b}{6a-75b}$, якщо $a>0$, $b>0$;

3) $\dfrac{a-2\sqrt{a}+4}{a\sqrt{a}+8}$.

30.34.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$; 2) $\dfrac{19}{2\sqrt{5}-1}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

30.35.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$; 2) $\dfrac{8}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; 4) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

30.36.• Доведіть рівність:

1) $\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}+\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}=10$;

2) $\dfrac{2}{3\sqrt{2}+4}-\dfrac{2}{3\sqrt{2}-4}=-8$;

3) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=4\sqrt{2}$;

4) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+4}+2}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+4}-2}=-4$.

30.37.• Доведіть, що значенням виразу є раціональне число:

1) $\dfrac{6}{3+2\sqrt{3}}+\dfrac{6}{3-2\sqrt{3}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}$.

30.38.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a}{\sqrt{a}-2}-\frac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}$;

2) $\frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2}-\frac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}}$;

3) $\frac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y}-\frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}}$;

4) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}-\frac{a}{a-16}$;

5) $\frac{a}{\sqrt{ab}-b}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$;

6) $\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{a}+2}$;

7) $\frac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}}:\frac{c-25}{3c}$;

8) $\left(\sqrt{a}-\frac{a}{\sqrt{a}+1}\right):\frac{\sqrt{a}}{a-1}$;

9) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

10) $\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}+\frac{12\sqrt{x}}{x-9}\right):\frac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}$.

30.39.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}$;

2) $\frac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}}-\frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b}$;

3) $\frac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}}:\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6}$;

4) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}:\left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)$;

5) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{4\sqrt{x}}{x-1}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

6) $\frac{a-64}{\sqrt{a}+3}\cdot\frac{1}{a+8\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}$.

30.40.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{-m^9}$;

2) $\sqrt{96(a-3)^5}$;

3) $\sqrt{a^4b^{13}}$, якщо $a \neq 0$;

4) $\sqrt{4x^6y}$, якщо $x < 0$;

5) $\sqrt{(a+1)^6(a^2+1)^5}$, якщо $a \leqslant -1$;

6) $\sqrt{m^7n^7}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;

7) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, якщо $y < 0$;

8) $\sqrt{64a^2b^9}$, якщо $a > 0$;

9) $\sqrt{242m^{11}b^{18}}$, якщо $b < 0$;

10) $\sqrt{-m^2n^2p^{15}}$, якщо $m > 0$, $n < 0$;

11) $\sqrt{x^5(y-1)^4}$, якщо $y \neq 1$;

12) $\sqrt{-y^7(x+2)^8}$, якщо $x \neq -2$.

30.41.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{-m^{19}}$;
2) $\sqrt{48(x-1)^7}$;
3) $\sqrt{a^{23}b^{24}}$, якщо $b \neq 0$;
4) $\sqrt{49a^2b}$, якщо $a < 0$;
5) $\sqrt{(b+3)^{10}(b^4+1)^3}$, $b \leqslant -3$;
6) $\sqrt{a^9b^9}$;
7) $\sqrt{27x^{15}y^{34}}$, якщо $y < 0$;
8) $\sqrt{-8c^6n^6p^7}$, якщо $c > 0$, $n > 0$;
9) $\sqrt{a^9(b+2)^8}$, якщо $b \neq -2$;
10) $\sqrt{-x^3(y-3)^{12}}$, якщо $y \neq 3$.

30.42.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{3}$;
2) $b\sqrt{-b}$;
3) $c\sqrt{c^5}$;
4) $m\sqrt{n}$, якщо $m \geqslant 0$;
5) $xy^2\sqrt{xy}$, якщо $x \leqslant 0$;
6) $2p\sqrt{\frac{p}{2}}$;
7) $2p\sqrt{-\frac{p}{2}}$;
8) $(x-1)\sqrt{\frac{1}{x^2-2x+1}}$, якщо $x < 1$;
9) $(y+3)\sqrt{\frac{5}{y^2+6y+9}}$, якщо $y > -3$;
10) $(m+1)\sqrt{\frac{1}{m+1}}$;
11) $(2-c)\sqrt{\frac{1}{2c-4}}$;
12) $(-x-y)\sqrt{\frac{2}{x+y}}$;
13) $ab^2\sqrt{\frac{a}{b}}$, якщо $a \geqslant 0$.

30.43.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $m\sqrt{7}$, якщо $m \geqslant 0$;
2) $3n\sqrt{6}$, якщо $n \leqslant 0$;
3) $p\sqrt{p^3}$;
4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, якщо $y \leqslant 0$;
5) $7a\sqrt{\frac{3}{a}}$;
6) $(3-a)\sqrt{\frac{2}{a^2-6a+9}}$, якщо $a > 3$;
7) $(b+6)\sqrt{\frac{1}{b+6}}$;
8) $(y-4)\sqrt{\frac{1}{12-3y}}$;
9) $5ab\sqrt{-\frac{a^7}{5b}}$, якщо $a < 0$.

30.44.** Доведіть, що при $a > 0$, $b > 0$ і $a^2 - b > 0$ виконуються тотожності:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

30.45.** Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+7} - \frac{15\sqrt{a}}{a+14\sqrt{a}+49}\right) : \frac{8\sqrt{a}+41}{a-49} + \frac{7\sqrt{a}-49}{\sqrt{a}+7} = \sqrt{a}-7;$

2) $\frac{a\sqrt{a}+27}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-3}{a-3\sqrt{a}+9} - \frac{\sqrt{ab}-9}{a\sqrt{a}+27}\right) = \sqrt{a};$

3) $\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right) = \sqrt{x}+\sqrt{y};$

4) $\frac{\sqrt{x}-2}{4x-16\sqrt{x}+16} : \left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-4} - \frac{x-12}{2x-8} - \frac{2}{x+2\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x}}{4(\sqrt{x}+2)}.$

30.46.** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}};$

2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b} - \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right);$

3) $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1\right);$

4) $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$

5) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right) : \left(1+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right);$

6) $\left(\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) : \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - 2\right)\right) : \left(1+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a > 0$, $b > 0$.

30.47.** Спростіть вираз $\left(\frac{1+\sqrt{2-a}}{2-a+\sqrt{2-a}} - \frac{1-\sqrt{2-a}}{2-a-\sqrt{2-a}}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{a}-1}$, якщо $0 < a < 2$.

30.48.** Спростіть вираз $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, якщо $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a > 0$, $b > 0$.

30.49.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; 3) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$; 5) $\sqrt{37-5\sqrt{48}}$;

2) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; 6) $\sqrt{28-\sqrt{108}}$.

30.50.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$; 5) $\sqrt{18+2\sqrt{45}}$;

2) $\sqrt{15+6\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$; 6) $\sqrt{91-40\sqrt{3}}$.

30.51.** Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}$.

30.52.** Доведіть, що

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}}=\frac{\sqrt{91}-1}{2}.$$

30.53.** Доведіть, що:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2$;

2) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\times$

$\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=1$.

30.54.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$; 3) $\sqrt{8-\sqrt{28}}-\sqrt{8+\sqrt{28}}$;

2) $\sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$; 4) $\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

30.55.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$; 2) $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$.

30.56.** Доведіть, що є правильною рівність:

1) $\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$;

2) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$.

30.57.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$;
2) $\sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}}$;
3) $\sqrt{\frac{x+4}{4}+\sqrt{x}}$;
4) $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}}$, якщо $x \geqslant 1$;
5) $\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-3}-2}-1}{\sqrt{x-3}}$;
6) $\sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}}$;
7) $\sqrt{2a+3-2\sqrt{a^2+3a+2}}+\sqrt{a+1}$.

30.58.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a+4\sqrt{a-4}}$;
2) $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}$;
3) $\sqrt{\frac{a+1}{4}+\frac{\sqrt{a}}{2}}$;
4) $\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-y^2}}$, якщо $x \geqslant y > 0$;
5) $\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-4b^2}}-\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}}$;
6) $\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$, якщо $0 \leqslant a \leqslant 2$;
7) $\sqrt{3a-1+2\sqrt{2a^2-a}}$, якщо $a \geqslant \frac{1}{2}$.

31. Функція $y = \sqrt{x}$ та її графік

Якщо площа квадрата дорівнює x, то його сторону y можна знайти за формулою $y = \sqrt{x}$. Зміна площі x квадрата приводить і до зміни його сторони y.

Зрозуміло, що кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y. Отже, залежність змінної y від змінної x є функціональною, а формула $y = \sqrt{x}$ задає функцію.

Оскільки областю визначення виразу $\sqrt{x}$ є множина всіх невід'ємних чисел, то областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ є множина $D(y) = [0; +\infty)$.

Вираз $\sqrt{x}$ не може набувати від'ємних значень, тобто жодне від'ємне число не може належати області значень розглядуваної

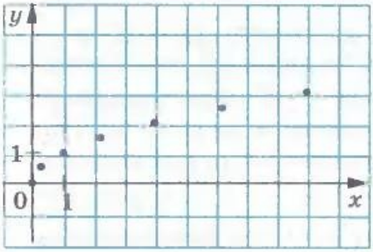


Рис. 31.1

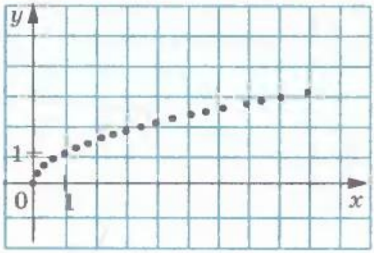


Рис. 31.2

функції. Покажемо, що функція $y = \sqrt{x}$ може набувати будь-яких невід'ємних значень. Нехай b — довільне невід'ємне число. Тоді $\sqrt{b^2} = |b| = b$, тобто існує таке значення аргументу функції $y = \sqrt{x}$, а саме $x = b^2$, що $\sqrt{x} = b$.

Отже, областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є множина $E(y) = [0; +\infty)$.

Ураховуючи область визначення та область значень функції $y = \sqrt{x}$, можна зробити висновок, що її графік розтапований тільки в першій координатній чверті.

У таблиці наведено деякі значення аргументу і відповідні їм значення функції $y = \sqrt{x}$:

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Позначимо на координатній площині точки, координати яких наведено в таблиці (рис. 31.1).

Чим більше позначити точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \sqrt{x}$, тим менше отримана фігура буде відрізнятися від графіка функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 31.2).

Якби можна було на координатній площині позначити всі такі точки, то отримали б фігуру, яку зображено на рисунку 31.3. У старших класах буде доведено, що графіком функції $y = \sqrt{x}$ є фігура, яка дорівнює вітці параболи $y = x^2$.

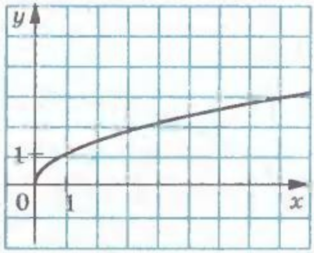


Рис. 31.3

Нехай x_1 і x_2 — два довільних значення аргументу функції $y = \sqrt{x}$ такі, що $x_1 < x_2$. Тоді з властивості арифметичного квадратного кореня випливає, що $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Це означає, що більшому

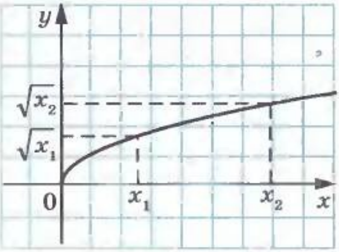


Рис. 31.4

значенню аргументу функції $y = \sqrt{x}$ відповідає більше значення функції. Справедливе й обернене твердження: більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тобто якщо $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, то $x_1 < x_2$ (рис. 31.4).

У таблиці наведено властивості функції $y = \sqrt{x}$, вивчені у цьому пункті:

Область визначення	Множина невід'ємних чисел
Область значень	Множина невід'ємних чисел
Графік	Вітка параболи
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	$x = 0$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 6 - x$ (рис. 31.5). Ці графіки перетинаються в точці, абсциса якої дорівнює 4. Перевірка підтверджує, що число 4 є коренем даного рівняння.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x} < 3$; 2) $\sqrt{x-1} > 2$; 3) $\sqrt{x+2} > \sqrt{1-3x}$.

Розв'язання

1) Запишемо дану нерівність так: $\sqrt{x} < \sqrt{9}$. Оскільки більшому значенню функції $y = \sqrt{x}$ відповідає більше значення аргументу, то можна зробити висновок, що $x < 9$. Ураховуючи, що вираз $\sqrt{x}$ має зміст тільки при $x \geqslant 0$, отримуємо, що дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x < 9, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $0 \leqslant x < 9$.

Відповідь: [0; 9).

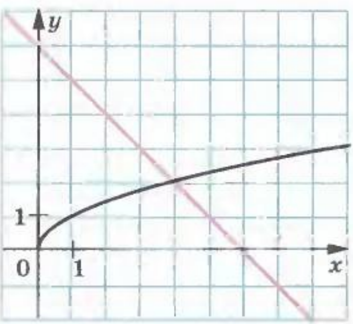


Рис. 31.5

2) Маємо: $\sqrt{x-1} > \sqrt{4}$; $x - 1 > 4$; $x > 5$.

Відповідь: (5; +∞).

3) Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x + 2 > 1 - 3x, \\ 1 - 3x \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} 4x > -1, \\ 3x \leqslant 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -\dfrac{1}{4}, \\ x \leqslant \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Відповідь: $\left(-\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{3}\right]$.

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз $A = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$A = \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1} =$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2} = \left|\sqrt{x-1} + 1\right| + \left|\sqrt{x-1} - 1\right| =$$
$$= \sqrt{x-1} + 1 + \left|\sqrt{x-1} - 1\right|.$$

Розв'яжемо нерівність $\sqrt{x-1} \leqslant 1$. Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x - 1 \leqslant 1, \\ x - 1 \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Отже, якщо $1 \leqslant x \leqslant 2$, то $A = \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} + 1 = 2$.

Розв'яжемо нерівність $\sqrt{x-1} > 1$. Маємо: $x - 1 > 1$; $x > 2$. Отже, якщо $x > 2$, то $A = \sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 = 2\sqrt{x-1}$.

Відповідь: $A = 2$, якщо $1 \leqslant x \leqslant 2$; $A = 2\sqrt{x-1}$, якщо $x > 2$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x+1}} = 1.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x+1} + 1} + \sqrt{x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4} = 1;$$
$$\sqrt{\left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x+1} - 2\right)^2} = 1;$$
$$\left|\sqrt{x+1} - 1\right| + \left|\sqrt{x+1} - 2\right| = 1.$$

Це рівняння рівносильне сукупності трьох систем.

1) $\begin{cases} \sqrt{x+1} < 1, \\ -\sqrt{x+1} + 1 - \sqrt{x+1} + 2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leqslant x + 1 < 1, \\ \sqrt{x+1} = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \leqslant x < 0, \\ x = 0. \end{cases}$

Ця система розв'язків не має.

2) $\begin{cases} 1 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 2, \\ \sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{x+1} + 2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \leqslant x+1 \leqslant 4, \\ 0x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0x = 0; \end{cases}$ $0 \leqslant x \leqslant 3.$

3) $\begin{cases} \sqrt{x+1} > 2, \\ \sqrt{x+1} - 1 + \sqrt{x+1} - 2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x+1 > 4, \\ \sqrt{x+1} = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3, \\ x = 3. \end{cases}$ Розв'язків немає.

Відповідь: [0; 3].

1. Яка область визначення функції $y = \sqrt{x}$?
2. Яка область значень функції $y = \sqrt{x}$?
3. У якій координатній чверті знаходиться графік функції $y = \sqrt{x}$?
4. Яка фігура є графіком функції $y = \sqrt{x}$?
5. Чому дорівнює нуль функції $y = \sqrt{x}$?

31.1.° Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$.
1) Чому дорівнює значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 0,16; 64; 1,44; 3600?
2) При якому значенні аргументу значення функції дорівнює: 0,2; 5; 120; −4?

31.2.° Не виконуючи побудови, визначте, через які з даних точок проходить графік функції $y = \sqrt{x}$: A (36; 6), B (4; −2), C (0,81; 0,9), D (−1; 1), E (42,25; 6,5).

31.3.° Через яку з даних точок проходить графік функції $y = \sqrt{x}$:
1) A (16; 4); 2) B (49; −7); 3) C (3,6; 0,6); 4) D (−36; 6)?

31.4.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіка функції $y = \sqrt{x}$ і прямої:
1) $y = 1$; 2) $y = 0{,}8$; 3) $y = -6$; 4) $y = 500$.

31.5.° Розв'яжіть нерівність:
1) $\sqrt{x} \geqslant 2$;
2) $\sqrt{x} < 4$;
3) $6 \leqslant \sqrt{x} < 9$;
4) $\sqrt{x+2} \geqslant 3$;
5) $\sqrt{1-2x} < 2$;
6) $\sqrt{x+3} > \sqrt{1-4x}$;
7) $\sqrt{2x+1} \leqslant \sqrt{x-5}$;
8) $\sqrt{|x|-1} \geqslant 2$;
9) $\sqrt{|x|-2} < 1$.

31.6.° При яких значеннях x виконується нерівність:
1) $\sqrt{x} \leqslant 8$;
2) $\sqrt{2x+1} > 2$;
3) $\sqrt{4x-3} \leqslant 1$;
4) $\sqrt{3x-1} > \sqrt{x+2}$;
5) $\sqrt{|x|-3} > 1$;
6) $\sqrt{|x|+1} \leqslant 3$?

31.7.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x}=x$;
3) $\sqrt{x}=x+2$;
2) $\sqrt{x}=x^2$;
4) $\sqrt{x}=1{,}5-0{,}5x$.

31.8.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x}=-x-1$; 2) $\sqrt{x}=2-x$; 3) $\sqrt{x}=\frac{8}{x}$.

31.9.• Дано функцію $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x}, & \text{якщо } x<0,\\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 0.\end{cases}$

1) Знайдіть $f(-8)$, $f(0)$, $f(9)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

31.10.• Дано функцію $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{якщо } x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$

1) Знайдіть $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.
2) Побудуйте графік даної функції.

31.11.• Знайдіть область визначення, область значень і нулі функції $y=\sqrt{-x}$. Побудуйте графік даної функції.

31.12.• Побудуйте графік функції $y=\frac{x}{\sqrt{x}}$.

31.13.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $x=\sqrt{y}$;
2) $(x+\sqrt{y})(y-\sqrt{x})=0$.

31.14.•• Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x}=a-x$ залежно від значення a?

31.15.•• Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2-4\sqrt{a}}+\sqrt{(\sqrt{a}-2)^2+8\sqrt{a}}$.

31.16.•• Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{a}-6)^2+24\sqrt{a}}-\sqrt{(\sqrt{a}+6)^2-24\sqrt{a}}$.

31.17.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x-1}$;
3) $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}-\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$;
2) $\frac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}$;
4) $\sqrt{\frac{a+1}{4}+\frac{\sqrt{a}}{2}}+\sqrt{\frac{a+1}{4}-\frac{\sqrt{a}}{2}}$.

31.18.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a+1-4\sqrt{a-3}}$;
3) $\sqrt{\frac{x+4}{4}+\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{x+4}{4}-\sqrt{x}}$.
2) $\sqrt{2a+2+2\sqrt{a^2+2a}}-\sqrt{a}$;

31.19.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6;$

2) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2.$

31.20.** Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

§ 6. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

32. Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь

Ви вмієте розв'язувати лінійні рівняння, тобто рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — параметри.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають **рівнянням першого степеня.**

Наприклад, кожне з лінійних рівнянь $2x = 3$, $3x = 0$, $\frac{1}{3}x = -7$ є рівнянням першого степеня, а лінійні рівняння $0x = 0$, $0x = 2$ не є рівняннями першого степеня.

Параметри a і b називають **коефіцієнтами рівняння першого степеня** $ax = b$.

Рівняння першого степеня завжди має один корінь.

Те, що рівняння першого степеня є окремим випадком лінійного рівняння, ілюструє схема, зображена на рисунку 32.1.

Ви також умієте розв'язувати деякі рівняння, які містять змінну в другому степені. Наприклад, ви без зусиль розв'яжете кожне з рівнянь $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$. Усі вони мають вигляд $ax^2 + bx + c = 0$.

Означення. Квадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — параметри, причому $a \neq 0$.

Параметри a, b і c називають **коефіцієнтами квадратного рівняння.** Параметр a називають **першим** або **старшим коефіцієнтом**, параметр b — **другим коефіцієнтом**, параметр c — **вільним членом.**

Наприклад, квадратне рівняння $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ має такі коефіцієнти: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають **зведеним.**

Наприклад, $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ — це зведені квадратні рівняння.

Рис. 32.1

Оскільки у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ старший коефіцієнт не дорівнює нулю, то незведене квадратне рівняння завжди можна перетворити у зведене, рівносильне даному. Розділивши обидві частини рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ на число a, отримаємо зведене квадратне рівняння $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають **неповним квадратним рівнянням.**

Існують три види неповних квадратних рівнянь:

1) при $b = c = 0$ маємо: $ax^2 = 0$;

2) при $c = 0$ і $b \neq 0$ маємо: $ax^2 + bx = 0$;

3) при $b = 0$ і $c \neq 0$ маємо: $ax^2 + c = 0$.

Розв'яжемо неповне квадратне рівняння кожного виду.

1. Оскільки $a \neq 0$, то рівняння $ax^2 = 0$ має єдиний корінь $x = 0$.
2. Рівняння $ax^2 + bx = 0$ подамо у вигляді $x(ax + b) = 0$. Це рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ ax + b = 0. \end{array}\right.$

   Звідси $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\frac{b}{a}. \end{array}\right.$ Отже, розглядуване рівняння має два корені: $x_1 = 0$ і $x_2 = -\frac{b}{a}$.
3. Рівняння $ax^2 + c = 0$ подамо у вигляді $x^2 = -\frac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$, то можливі два випадки: $-\frac{c}{a} < 0$ або $-\frac{c}{a} > 0$. Очевидно, що в першому випадку рівняння коренів не має. У другому випадку рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Отримані результати підсумовує така таблиця.

Значення коефіцієнтів b і c	Рівняння	Корені
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0,\ c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0,\ -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Коренів немає
$b = 0,\ -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

ПРИКЛАД При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - (a + 1)x + a^2 - 1 = 0$ має два корені, один з яких дорівнює нулю?

Розв'язання. Число 0 є коренем квадратного рівняння, якщо вільний член цього рівняння дорівнює нулю. Звідси $a^2 - 1 = 0$; $a = 1$ або $a = -1$.

Якщо $a = -1$, то рівняння має єдиний корінь $x = 0$. При $a = 1$ рівняння набуває вигляду: $x^2 - 2x = 0$. Звідси $x = 0$ або $x = 2$.

Відповідь: $a = 1$.

?

1. Яке рівняння називають лінійним?
2. Яке рівняння називають рівнянням першого степеня?
3. Наведіть приклад лінійного рівняння, яке є рівнянням першого степеня, і приклад лінійного рівняння, яке не є рівнянням першого степеня.
4. Яке рівняння називають квадратним?
5. Як називають коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?
6. Яке квадратне рівняння називають зведеним?
7. Яке квадратне рівняння називають неповним?
8. Які існують види неповних квадратних рівнянь? Скільки коренів може мати рівняння кожного виду?

32.1.° Укажіть серед даних рівнянь квадратні і назвіть, чому дорівнюють старший коефіцієнт, другий коефіцієнт і вільний член кожного з них:

1) $x = 0$;
2) $x^2 = 0$;
3) $x^2 + x = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$;
5) $x^2 - 4x + 2 = 0$;
6) $3x^3 - x^2 + 6 = 0$;
7) $-2x^2 + 7x - 8 = 0$;
8) $x^3 - x - 9 = 0$;
9) $6 - x^2 + 4x = 0$;
10) $-x^2 - 2x + 3 = 0$.

32.2.° Складіть квадратне рівняння, у якому:

1) старший коефіцієнт дорівнює 6, другий коефіцієнт дорівнює 7, а вільний член дорівнює 2;
2) старший коефіцієнт дорівнює 1, другий коефіцієнт дорівнює −8, а вільний член дорівнює $-\frac{1}{3}$;
3) старший коефіцієнт дорівнює 7,2, другий коефіцієнт дорівнює −2, а вільний член дорівнює 0.

32.3.° Складіть квадратне рівняння, у якому:

1) старший коефіцієнт дорівнює −1, другий коефіцієнт дорівнює −2, а вільний член дорівнює 1,6;

2) старший коефіцієнт і вільний член дорівнюють 2, а другий коефіцієнт дорівнює 0.

32.4.° Подайте дане рівняння у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, укажіть значення коефіцієнтів a, b і c:

1) $6x(3 - x) = 7 - 2x^2$;
2) $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$.

32.5.° Подайте дане рівняння у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, укажіть значення коефіцієнтів a, b і c:

1) $x(x + 10) = 8x + 3$;
2) $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$.

32.6.° Укажіть, які з даних рівнянь є зведеними, і перетворіть незведені рівняння у зведені:

1) $x^2 - 5x + 34 = 0$;
2) $2x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$;
4) $16 - 6x + x^2 = 0$;
5) $-x^2 + 8x - 7 = 0$;
6) $-0{,}2x^2 + 0{,}8x + 1 = 0$.

32.7.° Перетворіть дане квадратне рівняння у зведене:

1) $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$;
2) $-4x^2 + 20x - 16 = 0$;
3) $3x^2 + x + 2 = 0$.

32.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5x^2 - 45 = 0$;
2) $x^2 + 8x = 0$;
3) $2x^2 - 10 = 0$;
4) $2x^2 - 10x = 0$;
5) $64x^2 - 9 = 0$;
6) $x^2 + 16 = 0$.

32.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 7x = 0$;
2) $2x^2 - 11x = 0$;
3) $3x^2 - 6 = 0$;
4) $-8x^2 = 0$.

32.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)(x + 4) = -4$;
2) $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x$;
3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$.

32.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$;
2) $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$.

32.12.° Знайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 36 більший за менше з них.

32.13.° Знайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 80 більший за більше з них.

32.14.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 8x}{6} = x$;
2) $\frac{x^2 - 3}{5} - \frac{x^2 - 1}{2} = 2$.

32.15.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 + x}{7} - \frac{x}{3} = 0$;
2) $\frac{x^2 + 1}{6} - \frac{x^2 + 2}{4} = -1$.

32.16.° Складіть квадратне рівняння, один з коренів якого дорівнює 1 і яке буде:

1) повним і незведеним;
2) повним і зведеним;
3) неповним і незведеним;
4) неповним і зведеним.

32.17.° При якому значенні m:

1) число 2 є коренем рівняння $x^2 + mx - 6 = 0$;
2) число -3 є коренем рівняння $2x^2 - 7x + m = 0$;
3) число $\frac{1}{7}$ є коренем рівняння $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$?

32.18.° Доведіть, що один з коренів рівняння $mx^2 - (m + n)\,x + n = 0$ дорівнює 1.

32.19.° При якому значенні n:

1) число 6 є коренем рівняння $x^2 - nx + 3 = 0$;
2) число 0,5 є коренем рівняння $nx^2 - 8x + 10 = 0$?

32.20.° Сума квадратів двох послідовних цілих чисел на 17 більша за подвоєне більше з них. Знайдіть ці числа.

32.21.° Знайдіть два послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 1.

32.22.• При якому значенні m не є квадратним рівняння:

1) $(m - 4)\,x^2 + mx + 7 = 0$;
2) $(m^2 + 8m)\,x^2 + (m + 8)\,x + 10 = 0$;
3) $(m^2 - 81)\,x^2 - 6x + m = 0$?

32.23.• Яким числом, додатним чи від'ємним, є відмінний від нуля корінь неповного квадратного рівняння $ax^2 + bx = 0$, якщо:

1) $a > 0,\ b > 0$;
2) $a < 0,\ b > 0$;
3) $a > 0,\ b < 0$;
4) $a < 0,\ b < 0$?

32.24.• Чи має корені неповне квадратне рівняння $ax^2 + c = 0$, якщо:

1) $a > 0,\ c > 0$;
2) $a < 0,\ c > 0$;
3) $a > 0,\ c < 0$;
4) $a < 0,\ c < 0$?

32.25.• Яким многочленом можна замінити зірочку в рівнянні $3x^2 - 2x + 4 + * = 0$, щоб утворилося неповне квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 0 і 4;
2) -1 і 1?

32.26.• Яким многочленом можна замінити зірочку в рівнянні $x^2 + 5x - 1 + * = 0$, щоб утворилося неповне квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 0; -7;
2) -4; 4?

32.27.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 3\,|\,x\,| = 0$;
2) $x^2 + |\,x\,| - 2x = 0$;

3) $x^2 - \frac{|x|}{x} = 0;$ 5) $2x^2 + 5|x| = 0;$

4) $x^2 - \frac{2x^2}{|x|} = 0;$ 6) $x^2 + \frac{4x^2}{|x|} = 0.$

32.28.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 7|x| = 0;$ 3) $2x^2 - \frac{3x^2}{|x|} = 0;$

2) $x^2 - 6|x| + x = 0;$ 4) $x^2 + \frac{9|x|}{x} = 0.$

32.29.° При якому значенні параметра a рівняння $(a - 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 4 = 0$ є:

1) лінійним;
2) зведеним квадратним;
3) неповним незведеним квадратним;
4) неповним зведеним квадратним?

32.30.° Установіть, при якому значенні параметра a один з коренів квадратного рівняння дорівнює 0, і знайдіть другий корінь рівняння:

1) $x^2 + ax + a - 4 = 0;$ 3) $ax^2 + (a + 3)x + a^2 - 3a = 0.$
2) $4x^2 + (a - 8)x + a^2 + a = 0;$

32.31.° Установіть, при якому значенні параметра a корені рівняння є протилежними числами, і знайдіть їх:

1) $x^2 + (a - 2)x + a - 6 = 0;$ 3) $x^2 + (a - 1)x + a + 8 = 0.$
2) $x^2 + (a + 6)x + a + 4 = 0;$

33. Формули коренів квадратного рівняння

Знаючи коефіцієнти a і b рівняння першого степеня $ax = b$, можна знайти його корінь за формулою $x = \frac{b}{a}$.

Виведемо формулу, яка дає змогу за коефіцієнтами a, b і c квадратного рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

знаходити його корені.

Оскільки $a \neq 0$, то, помноживши обидві частини цього рівняння на $4a$, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Виділимо в лівій частині цього рівняння квадрат двочлена:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \qquad (2)$$

Існування коренів рівняння (2) та їх кількість залежить від знака виразу $b^2 - 4ac$. Цей вираз називають **дискримінантом квадратного рівняння** $ax^2 + bx + c = 0$ і позначають буквою D, тобто $D = b^2 - 4ac$. Термін «дискримінант» походить від латинського слова *discriminare*, що означає «розрізняти», «розділяти».

Тепер рівняння (2) можна записати так:

$$(2ax + b)^2 = D. \qquad (3)$$

Можливі три випадки: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Якщо $D < 0$, то рівняння (3), а отже, і рівняння (1), коренів не має. Справді, при будь-якому значенні x вираз $(2ax + b)^2$ набуває тільки невід'ємних значень.

   Висновок: ***якщо*** $D < 0$, ***то квадратне рівняння коренів не має.***

2. Якщо $D = 0$, то рівняння (3) набуває вигляду

   $$(2ax + b)^2 = 0.$$

   Звідси $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$.

   Висновок: ***якщо*** $D = 0$, ***то квадратне рівняння має один корінь*** $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Якщо $D > 0$, то рівняння (3) можна записати у вигляді

   $$(2ax + b)^2 = \left(\sqrt{D}\right)^2.$$

   Звідси $2ax + b = -\sqrt{D}$ або $2ax + b = \sqrt{D}$. Тоді $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ або $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

   Висновок: ***якщо*** $D > 0$, ***то квадратне рівняння має два корені:***

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

   Також застосовують коротку форму запису:

   $$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.}$$

Цей запис називають **формулою коренів квадратного рівняння** $ax^2 + bx + c = 0$.

Отриману формулу можна застосовувати і для випадку, коли $D = 0$. Тоді

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

При розв'язуванні квадратних рівнянь зручно керуватися таким алгоритмом:

- знайти дискримінант D квадратного рівняння;
- якщо $D < 0$, то у відповіді записати, що коренів немає;
- якщо $D \geqslant 0$, то скористатися формулою коренів квадратного рівняння.

Якщо другий коефіцієнт квадратного рівняння подати у вигляді $2k$, то можна користуватися іншою формулою, яка в багатьох випадках полегшує обчислення.

Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + 2kx + c = 0$.

Знайдемо його дискримінант: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.

Позначимо вираз $k^2 - ac$ через D_1.

Якщо $D_1 \geqslant 0$, то за формулою коренів квадратного рівняння отримуємо:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2\left(-k \pm \sqrt{D_1}\right)}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

тобто

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ де } D_1 = k^2 - ac.$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 2x - 16 = 0$;
2) $-0,5x^2 + 2x - 2 = 0$;
3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;
4) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
5) $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

Розв'язання

1) У заданому рівнянні $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$.
Дискримінант рівняння $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196$.
Отже, $x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2$, $x_2 = \frac{2 + 14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Відповідь: -2; $2\frac{2}{3}$.

2) Маємо:

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0.$$

Отже, дане рівняння має один корінь:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$

Зауважимо, що дане рівняння можна розв'язати іншим способом. Помноживши обидві частини рівняння на -2, отримуємо:

$$x^2 - 4x + 4 = 0;\ (x - 2)^2 = 0;\ x - 2 = 0;\ x = 2.$$

Відповідь: 2.

3) $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37$.

Рівняння має два корені: $x_1 = \frac{-5-\sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{-5+\sqrt{37}}{2}$.

Відповідь: $\frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

4) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 = -8 < 0$.
Отже, рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає.

5) Подамо дане рівняння у вигляді $5x^2 + 2 \cdot (-8)\,x + 3 = 0$ і застосуємо формулу для рівняння виду $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$D_1 = (-8)^2 - 5 \cdot 3 = 49;$$

$$x_1 = \frac{8-7}{5} = \frac{1}{5};\ \ x_2 = \frac{8+7}{5} = 3.$$

Відповідь: $\frac{1}{5}$; 3.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 6\sqrt{x^2} - 16 = 0$;

2) $x^2 - 10\left(\sqrt{x}\right)^2 - 24 = 0$;

3) $9x^2 - 8x + \frac{5}{x-1} = 1 + \frac{5}{x-1}$.

Розв'язання

1) Маємо: $x^2 + 6\,|\,x\,| - 16 = 0$.
Це рівняння рівносильне сукупності двох систем.

а) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 + 6x - 16 = 0. \end{cases}$ Рівняння цієї системи має два корені: −8 і 2.

Тоді можна записати $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -8. \end{array}\right. \end{cases}$ Звідси $x = 2$.

б) $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 - 6x - 16 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 8. \end{array}\right. \end{cases}$ Звідси $x = -2$.

Відповідь: −2; 2.

2) Областю визначення даного рівняння є проміжок $[0; +\infty)$. Тоді дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 10x - 24 = 0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 12; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = 12$.

Відповідь: 12.

3) Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$ Маємо:

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\dfrac{1}{9}, \end{array} \right. \\ x \neq 1; \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{9}.$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{9}$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2 - x - 8| = -x$; 2) $|x + 1| = x^2 + 3x + 1$.

Розв'язання

1) Задане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} -x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 8 = -x, \\ x^2 - x - 8 = x. \end{array} \right. \end{cases} \text{ Звідси } \begin{cases} x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 8 = 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0; \end{array} \right. \end{cases} \begin{cases} x \leqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2}, \\ x = -2\sqrt{2}, \\ x = 4, \\ x = -2. \end{array} \right. \end{cases}$$

Отримуємо, що $x = -2\sqrt{2}$ або $x = -2$.

Відповідь: $-2\sqrt{2}$; -2.

2) Задане рівняння рівносильне сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 1 \geqslant 0, \\ x + 1 = x^2 + 3x + 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + 1 < 0, \\ -x - 1 = x^2 + 3x + 1. \end{cases} \end{array} \right. \text{ Звідси } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x^2 + 2x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ x^2 + 4x + 2 = 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x = 0 \text{ або } x = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ x = -2 + \sqrt{2} \text{ або } x = -2 - \sqrt{2}; \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -2 - \sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Відповідь: 0; $-2 - \sqrt{2}$.

ПРИКЛАД 4 При якому значенні параметра b має один корінь рівняння:

1) $2x^2 - bx + 18 = 0$; 2) $(b + 6)\,x^2 - (b - 2)\,x + 1 = 0$?

Розв'язання

1) Дане рівняння є квадратним і має один корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю. Маємо:

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$
$$b^2 - 144 = 0;$$
$$b = -12 \text{ або } b = 12.$$

Відповідь: $b = -12$ або $b = 12$.

2) Звернемо увагу на поширену помилку: вважати таке рівняння квадратним. Насправді це рівняння степеня не вище другого. При $b = -6$ отримуємо лінійне рівняння $8x + 1 = 0$, яке має один корінь.

При $b \neq -6$ дане рівняння є квадратним і має один корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю:

$$D = (b - 2)^2 - 4\,(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 =$$
$$= b^2 - 8b - 20.$$

Маємо: $b^2 - 8b - 20 = 0$, звідси $b = -2$ або $b = 10$.

Відповідь: $b = -2$, або $b = 10$, або $b = -6$.

ПРИКЛАД 5 При яких значеннях параметра a рівняння

$$a\,(a + 3)\,x^2 + (2a + 6)\,x - 3a - 9 = 0$$

має більше ніж один корінь?

Розв'язання. При $a = 0$ отримуємо лінійне рівняння $6x - 9 = 0$, яке має єдиний корінь.

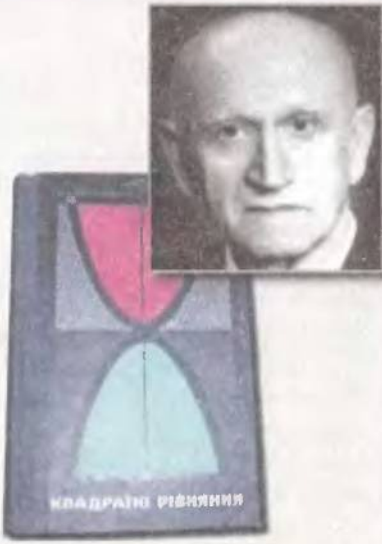
При $a = -3$ отримуємо лінійне рівняння $0x = 0$, яке має безліч коренів.

Якщо $a \neq 0$ і $a \neq -3$, то, поділивши обидві частини рівняння на $a + 3$, отримаємо квадратне рівняння $ax^2 + 2x - 3 = 0$. Дискримінант цього рівняння дорівнює $4\,(1 + 3a)$. Для виконання умови задачі він має бути додатним, тобто $4\,(1 + 3a) > 0$. Звідси $a > -\frac{1}{3}$. Проте проміжок $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ містить значення $a = 0$, при якому задане рівняння має єдиний корінь, що не задовольняє умову задачі. Цей факт слід урахувати при запису відповіді.

Відповідь: $a = -3$, або $-\frac{1}{3} < a < 0$, або $a > 0$.

Кілька поколінь учителів математики та їх учнів набували педагогічного досвіду й поглиблювали свої знання, користуючись чудовою книжкою «Квадратні рівняння» блискучого українського педагога й математика Миколи Андрійовича Чайковського (1887–1970).

М. А. Чайковський залишив велику наукову й педагогічну спадщину. Його роботи відомі далеко за межами України.



М. А. Чайковський

1. Який вираз називають дискримінантом квадратного рівняння?
2. Як залежить кількість коренів квадратного рівняння від знака дискримінанта?
3. Запишіть формулу коренів квадратного рівняння.
4. Яким алгоритмом зручно користуватися при розв'язуванні квадратних рівнянь?

33.1.° Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів рівняння:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$;
2) $x^2 - 3x + 5 = 0$;
3) $2x^2 - 6x - 3{,}5 = 0$;
4) $5x^2 - 2x + 0{,}2 = 0$.

33.2.° Яке з наведених рівнянь має два корені:

1) $x^2 + 4x + 8 = 0$;
2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$;
3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$?

33.3.° Яке з наведених рівнянь не має коренів:

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$;
2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$;
3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$;
4) $0{,}04x^2 - 0{,}4x + 1 = 0$?

33.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;
2) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

3) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
4) $x^2 + x - 56 = 0$;
5) $x^2 - 8x + 12 = 0$;
6) $x^2 + 7x + 6 = 0$;
7) $-x^2 + 6x + 55 = 0$;
8) $2x^2 - x - 6 = 0$;
9) $3x^2 - 4x - 20 = 0$;
10) $10x^2 - 7x - 3 = 0$;
11) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$;
12) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;
13) $x^2 - 4x + 1 = 0$;
14) $2x^2 - x - 4 = 0$;
15) $x^2 - 8x + 20 = 0$.

33.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 12x - 13 = 0$;
3) $x^2 - 7x + 10 = 0$;
4) $x^2 - x - 72 = 0$;
5) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;
6) $2x^2 - 7x - 4 = 0$;
7) $4x^2 - 3x - 1 = 0$;
8) $-2x^2 + x + 15 = 0$;
9) $6x^2 + 7x - 5 = 0$;
10) $18x^2 - 9x - 5 = 0$;
11) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
12) $-x^2 - 8x + 12 = 0$.

33.6.° При яких значеннях змінної значення:

1) многочленів $6x^2 - 2$ і $5 - x$ рівні;
2) двочлена $y - 6$ дорівнює значенню тричлена $y^2 - 9y + 3$;
3) тричленів $4m^2 + 4m + 2$ і $2m^2 + 10m + 8$ рівні?

33.7.° При яких значеннях змінної значення:

1) двочлена $4x + 4$ дорівнює значенню тричлена $3x^2 + 5x - 1$
2) тричленів $10p^2 + 10p + 8$ і $3p^2 - 10p + 11$ рівні?

33.8.° Знайдіть корені рівняння:

1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$;
5) $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$;
6) $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)$.

33.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;
2) $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6x - 19$;
3) $(3x - 1)(x + 4) = (2x + 3)(x + 3) - 17$.

33.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 + x\sqrt{5} - 15 = 0$;
2) $x^2 - x\left(\sqrt{6} - 1\right) - \sqrt{6} = 0$;
3) $\frac{x^2 - 4}{8} - \frac{2x + 3}{3} = -1$;
4) $\frac{4x^2 + x}{3} - \frac{x^2 + 17}{9} = \frac{5x - 1}{6}$;
5) $\frac{2x^2}{3} - \frac{x^2 + 2}{2} - \frac{x + 2}{4} = 3$.

33.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0$;

2) $x^2 - x\left(\sqrt{3} + 2\right) + 2\sqrt{3} = 0$;

3) $\frac{2x^2 + x}{3} - \frac{x + 3}{4} = x - 1$;

4) $\frac{3x^2 + x}{4} - \frac{3x^2 + 17}{10} = \frac{2 - 7x}{5}$.

33.12.° При яких значеннях параметра a число $\frac{1}{4}$ є коренем рівняння $a^2x^2 + 4ax - 5 = 0$?

33.13.° При яких значеннях параметра a число 2 є коренем рівняння $x^2 - 0{,}5ax - 3a^2 = 0$?

33.14.° Доведіть, що коли старший коефіцієнт і вільний член квадратного рівняння мають різні знаки, то рівняння має два корені.

33.15.° Знайдіть натуральне число, квадрат якого на 42 більший за дане число.

33.16.° Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює 70 см^2, а одна зі сторін на 9 см більша за другу.

33.17.° Добуток двох чисел дорівнює 84. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 8 менше від другого.

33.18.° Добуток двох послідовних натуральних чисел на 89 більший за їх суму. Знайдіть ці числа.

33.19.° Сума квадратів яких двох послідовних натуральних чисел дорівнює 365?

33.20.° Від квадратного листа картону відрізали смужку у формі прямокутника завширшки 3 см. Площа листа, що залишився, становить 40 см^2. Якою була довжина сторони квадратного листа картону?

33.21.° Від прямокутного листа паперу, довжина якого дорівнює 18 см, відрізали квадрат, сторона якого дорівнює ширині листа. Площа частини прямокутника, що залишилася, дорівнює 72 см^2. Якою була ширина листа паперу?

33.22.° Знайдіть три послідовних непарних натуральних числа, якщо квадрат першого з них на 33 більше, ніж подвоєна сума другого і третього.

33.23.° Знайдіть чотири послідовних парних натуральних числа, якщо сума першого й третього чисел у 5 разів менша, ніж добуток другого та четвертого чисел.

33.24.° (*Стародавня індійська задача.*)

На дві зграї розділившись,
Розважались в гаї мавпи.
Одна восьма їх в квадраті
Гучно разом забавлялись.

Криком радісним дванадцять
Все повітря колихали.
Разом скільки, ти дізнайся,
Мавп було у тому гаї?

33.25.° У турнірі з футболу було зіграно 36 матчів. Скільки команд брало участь у турнірі, якщо кожна команда зіграла по одному разу з кожною іншою командою?

33.26.° Скільки сторін має многокутник, якщо в ньому можна провести 90 діагоналей?

33.27.° При яких значеннях параметра b має один корінь рівняння:

1) $2x^2 + 4x - b = 0$;
2) $3x^2 - bx + 12 = 0$?

33.28.° При яких значеннях параметра b має один корінь рівняння:

1) $6x^2 - 18x + b = 0$;
2) $8x^2 + bx + 2 = 0$?

33.29.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2 + 7x - 4| = 4$;
2) $|x^2 - x - 5| = 1$;
3) $x^2 - 4|x| - 21 = 0$;
4) $5x^2 - 8|x| + 3 = 0$;
5) $x|x| + 6x - 5 = 0$;
6) $x^2 + \frac{4x^2}{|x|} - 12 = 0$;
7) $x^2 + 6|x| + 8 = 0$;
8) $x^2 - |x - 5| = 5$;
9) $x|2x + 1| - 3x - 4 = 0$;
10) $x^2 - 8\sqrt{x^2} + 15 = 0$;
11) $x^2 + 4\sqrt{x^2} - 12 = 0$;
12) $||x^2 - 6x + 4| - 3| = 1$.

33.30.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2 + 10x - 4| = 20$;
2) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$;
3) $|x^2 - x - 1| = 1$;
4) $x|x| + 12x - 45 = 0$;
5) $x|x| - 16x + 15 = 0$;
6) $3x^2 + 7|x| - 6 = 0$;
7) $2x^2 - \frac{13x^2}{|x|} + 6 = 0$;
8) $\frac{x^3}{|x|} - 14x - 15 = 0$;
9) $x^2 - 8\sqrt{x^2} - 9 = 0$;
10) $x^2 + 7\sqrt{x^2} + 12 = 0$;
11) $x^2 + |x + 4| = 4$;
12) $x|x - 2| - 6x + 8 = 0$.

33.31.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 2x + \frac{3}{x-8} = \frac{3}{x-8} + 80$;
2) $x^2 + 8(\sqrt{x})^2 - 33 = 0$;
3) $x^2 + (\sqrt{x-2})^2 - 5 = 0$;
4) $2x^2 + 9(\sqrt{x+1})^2 - 27 = 0$;
5) $x^2 - 5x\frac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0$.

33.32.• Розв'яжіть рівняння:

1) $6x^2 + 5x - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$;
2) $5x^2 - 14(\sqrt{x})^2 - 3 = 0$;

3) $x^2-(\sqrt{x+3})^2-8=0;$

4) $x^2-4(\sqrt{x+2})^2-13=0;$

5) $x^2+2x+3\frac{|x-1|}{x-1}=0.$

33.33.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2+2x}+|x^2-8x-20|=0;$

2) $\sqrt{x^2-9x+8}+x^2-16x+64=0.$

33.34.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{8x^2-7x-1}=0;$

2) $x^2+6x+9+|x^2+x-6|=0;$

3) $\sqrt{36-x^2}+|x^2+5x-6|=0.$

33.35.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sqrt{x}-2)(x^2+2x-24)=0;$

2) $(x^2+2x)(\sqrt{x}-5)(3x^2-11x-4)=0.$

33.36.* Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{x}-3)(x^2+4x-21)=0.$

33.37.* Доведіть, що при будь-якому значенні параметра p має два корені рівняння:

1) $4x^2-px-3=0;$

2) $x^2+px+p-2=0.$

33.38.* Доведіть, що при будь-якому значенні параметра m не має коренів рівняння:

1) $x^2+mx+m^2+1=0;$

2) $x^2-2mx+2m^2+9=0.$

33.39.* Доведіть, що при будь-якому значенні параметра b рівняння $x^2+bx-7=0$ має два корені.

33.40.* При яких значеннях параметра a має два корені рівняння:

1) $x^2+3x+a=0;$

2) $x^2+2ax+a^2-3a+1=0?$

33.41.** Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2+x-3|=x;$

2) $|x^2+x-1|=2x-1;$

3) $|x-2|=x^2-2x;$

4) $|2x+1|=x^2-x-1.$

33.42.** Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2-2x|=3-2x;$

2) $|x-3|=x^2-6x+3.$

33.43.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+(3a+1)x+2a^2+a=0;$

2) $x^2-(2a+4)x+8a=0;$

3) $a^2x^2-24ax-25=0;$

4) $3(2a-1)x^2-2(a+1)x+1=0.$

33.44.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-(2a-5)x-3a^2+5a=0;$

2) $x^2+(3a-4)x-12a=0;$

3) $ax^2-(a+1)x+1=0.$

33.45.** При яких значеннях параметра b має один корінь рівняння:

1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$;
2) $(b + 5)\, x^2 - (b + 6)\, x + 3 = 0$;
3) $(b - 4)\, x^2 + (2b - 8)\, x + 15 = 0$;
4) $(b + 2)\, x^2 + (b^2 + 2b)\, x + b + 2 = 0$?

33.46.** При яких значеннях параметра b має один корінь рівняння:

1) $bx^2 + x + b = 0$;
2) $(b + 3)\, x^2 + (b + 1)\, x - 2 = 0$;
3) $(b - 2)\, x^2 + (4 - 2b)\, x + 3 = 0$?

33.47.** При яких значеннях параметра a рівняння $ax^2 + 4x + 3 = 0$ має два корені?

33.48.** При яких значеннях параметра a рівняння $a\,(2a + 4)\, x^2 - (a + 2)\, x - 5a - 10 = 0$ має більше ніж один розв'язок?

34. Теорема Вієта

Франсуа Вієт (1540–1603) — французький математик, за фахом юрист. У 1591 р. упровадив буквені позначення не лише для невідомих величин, а й для коефіцієнтів рівнянь, завдяки цьому стало можливим виражати властивості рівнянь та їх корені загальними формулами. Серед своїх відкриттів сам Вієт особливо високо цінив установлення залежності між коренями і коефіцієнтами рівнянь.

Теорема 34.1 (теорема Вієта). ***Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то***

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доведення. Очевидно, що дискримінант D даного рівняння не може бути від'ємним. Нехай $D > 0$. Застосовуючи формулу коренів квадратного рівняння, запишемо:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Маємо: $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}$;

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Зауваження. Теорема Вієта є справедливою і тоді, коли $D = 0$. При цьому вважають, що $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Маємо:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \blacktriangle$$

Наслідок. ***Якщо x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то***

$$x_1 + x_2 = -b,$$
$$x_1 x_2 = c,$$

тобто *сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, узятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену.*

Теорема 34.2 (обернена до теореми Вієта). ***Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ і $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то ці числа є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.***

Доведення. Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Перетворимо його у зведене:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Згідно з умовою теореми це рівняння можна записати так:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0. \qquad (*)$$

Підставляючи у ліву частину цього рівняння замість x спочатку число α, а потім число β, отримуємо:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$
$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Таким чином, числа α і β є коренями рівняння (*), а отже, і коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. ▲

Наслідок. ***Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -b$ і $\alpha\beta = c$, то ці числа є коренями зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$.***

Застосовуючи цей наслідок, можна розв'язувати деякі квадратні рівняння усно, не використовуючи формулу коренів.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть суму й добуток коренів рівняння

$$3x^2 - 15x + 2 = 0.$$

Розв'язання. З'ясуємо, чи має дане рівняння корені.

Маємо: $D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0$. Отже, рівняння має два корені x_1 і x_2.

Тоді за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5$, $x_1 x_2 = \frac{2}{3}$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа -7 і 4.

Розв'язання. За теоремою Вієта $b = -(-7 + 4) = 3$, $c = -7 \cdot 4 = -28$.

ПРИКЛАД 3 Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють: 1) 4 і $-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{6-\sqrt{7}}{2}$ і $\frac{6+\sqrt{7}}{2}$.

Розв'язання

1) Нехай $x_1 = 4$ і $x_2 = -\frac{5}{7}$. Тоді $x_1 + x_2 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7}$,

$x_1 x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{7}$.

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - \frac{23}{7}x - \frac{20}{7} = 0$. Помноживши обидві частини цього рівняння на 7, отримуємо квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами:

$$7x^2 - 23x - 20 = 0.$$

2) Нехай $x_1 = \frac{6-\sqrt{7}}{2}$ і $x_2 = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$. Тоді $x_1 + x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} + \frac{6+\sqrt{7}}{2} = 6$,

$x_1 x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6+\sqrt{7}}{2} = \frac{36-7}{4} = \frac{29}{4}$.

Отже, x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$. Звідси шуканим є рівняння $4x^2 - 24x + 29 = 0$.

ПРИКЛАД 4 Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$;

2) $x_1^2 + x_2^2$.

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1x_2 = -\frac{9}{2}$.

Тоді маємо:

1) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{3}$;

2) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}$.

Відповідь: 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{45}{4}$.

ПРИКЛАД 5 Число 4 є коренем рівняння $3x^2 - 10x + n = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння і значення n.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — корені даного рівняння, причому $x_1 = 4$. За теоремою Вієта

$$x_1 + x_2 = \frac{10}{3}, \quad x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}, \quad n = x_1x_2 = -\frac{8}{3}.$$

Відповідь: $x_2 = -\frac{2}{3}$, $n = -\frac{8}{3}$.

ПРИКЛАД 6 Складіть квадратне рівняння, корені якого на 4 більші за відповідні корені рівняння $x^2 + 6x - 14 = 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — корені даного рівняння, x_1' і x_2' — корені шуканого рівняння.

За умовою $x_1' = x_1 + 4$, $x_2' = x_2 + 4$.

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -6$, $x_1x_2 = -14$.

Тоді маємо:

$$x_1' + x_2' = x_1 + 4 + x_2 + 4 = (x_1 + x_2) + 8 = -6 + 8 = 2;$$
$$x_1'x_2' = (x_1 + 4)(x_2 + 4) = x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 =$$
$$= -14 + 4 \cdot (-6) + 16 = -22.$$

Отже, за теоремою, оберненою до теореми Вієта, шуканим є рівняння $x^2 - 2x - 22 = 0$.

Відповідь: $x^2 - 2x - 22 = 0$.

ПРИКЛАД 7 При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a = 0$ дорівнює 3?

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — корені даного рівняння. За умовою $x_1^2 + x_2^2 = 3$, тобто $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3$. Застосовуючи теорему Вієта, можна записати: $(-a)^2 - 2a = 3$; $a^2 - 2a - 3 = 0$. Звідси $a = -1$ або $a = 3$.

Здавалося б, розв'язування завершене. Проте теорема Вієта «працює» лише для тих квадратних рівнянь, які мають корені.

А задане квадратне рівняння має корені не при всіх значеннях параметра a. Існування коренів визначається умовою $D \geqslant 0$; для даного рівняння $D = a^2 - 4a$. Отже, знайдені значення $a = -1$ і $a = 3$ мають задовольняти нерівність $a^2 - 4a \geqslant 0$. Легко встановити, що підходить тільки $a = -1$.
Відповідь: $a = -1$.

1. Сформулюйте теорему Вієта.
2. Сформулюйте наслідок з теореми Вієта.
3. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта.
4. Сформулюйте наслідок з теореми, оберненої до теореми Вієта.

34.1.° Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму й добуток його коренів:
1) $x^2 + 6x - 32 = 0$;
2) $x^2 - 10x + 4 = 0$;
3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$;
4) $10x^2 + 42x + 25 = 0$.

34.2.° Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму й добуток його коренів:
1) $x^2 - 12x - 18 = 0$;
2) $x^2 + 2x - 9 = 0$;
3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;
4) $-4x^2 - 8x + 27 = 0$.

34.3.° Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, з'ясуйте, чи є коренями рівняння:
1) $x^2 - 8x + 12 = 0$ числа 2 і 6;
2) $x^2 + x - 56 = 0$ числа -7 і 8;
3) $x^2 - 13x + 42 = 0$ числа 5 і 8;
4) $x^2 - 20x - 99 = 0$ числа 9 і 11.

34.4.° Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа:
1) -8 і 6;
2) 4 і 5.

34.5.° Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа:
1) -2 і 0,5;
2) -10 і -20.

34.6.° Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:
1) 2 і 5;
2) $-\frac{1}{3}$ і 2;
3) $-0,2$ і -10;
4) $2-\sqrt{3}$ і $2+\sqrt{3}$;
5) 0 і 6;
6) $-\sqrt{7}$ і $\sqrt{7}$.

34.7.° Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:
1) -7 і -8;
2) 5 і $-0,4$;
3) $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3}$;
4) $5-\sqrt{10}$ і $5+\sqrt{10}$.

34.8.° Число -2 є коренем рівняння $x^2 - 8x + q = 0$. Знайдіть значення q і другий корінь рівняння.

34.9.° Число 7 є коренем рівняння $x^2 + px - 42 = 0$. Знайдіть значення p і другий корінь рівняння.

34.10.° Число $\frac{1}{3}$ є коренем рівняння $6x^2 - bx + 4 = 0$. Знайдіть значення b і другий корінь рівняння.

34.11.° Число $-0{,}2$ є коренем рівняння $4x^2 - 5{,}6x + m = 0$. Знайдіть значення m і другий корінь рівняння.

34.12.° Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - 7x - 13 = 0$. Не розв'язуючи це рівняння, знайдіть значення виразу $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$.

34.13.° Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $5x^2 + 4x - 13 = 0$. Не розв'язуючи це рівняння, знайдіть значення виразу $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

34.14.° При якому значенні b корені рівняння $x^2 + bx - 17 = 0$ є протилежними числами? Знайдіть ці корені.

34.15.° Застосовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
2) $x^2 + 5x + 4 = 0$;
3) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
4) $x^2 + 2x - 8 = 0$;
5) $2x^2 + 5x + 3 = 0$;
6) $-8x^2 - 19x + 27 = 0$.

34.16.° Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, знайдіть корені рівняння:

1) $x^2 - 4x - 5 = 0$;
2) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
4) $x^2 - x - 2 = 0$;
5) $x^2 - 3x - 18 = 0$;
6) $16x^2 - 23x + 7 = 0$.

34.17.° Які з даних рівнянь мають два додатних корені, які — два від'ємних, а які — корені різних знаків:

1) $x^2 - 12x + 14 = 0$;
2) $x^2 + 6x + 2 = 0$;
3) $x^2 - 7x - 30 = 0$;
4) $x^2 + 16x - 10 = 0$;
5) $x^2 - 24x + 0{,}1 = 0$;
6) $x^2 + 20x + 3 = 0$?

34.18.• Один з коренів рівняння $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 менший від другого. Знайдіть значення c і корені рівняння.

34.19.• Корені рівняння $x^2 + 20x + a = 0$ відносяться як 7 : 3. Знайдіть значення a і корені рівняння.

34.20.• Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 7x + m = 0$ задовольняють умову $2x_1 - 5x_2 = 28$. Знайдіть корені рівняння і значення m.

34.21.• Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + 4x + n = 0$ задовольняють умову $3x_1 - x_2 = 8$. Знайдіть корені рівняння і значення n.

34.22.° Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - 9x + 6 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
2) $x_1^2 + x_2^2$;
3) $(x_1 - x_2)^2$;
4) $x_1x_2^3 + x_2x_1^3$;
5) $x_1^3 + x_2^3$.

34.23.° Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + 5x - 16 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$;
2) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$;
3) $|x_2 - x_1|$.

34.24.° Складіть квадратне рівняння, корені якого на 2 менші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 8x - 3 = 0$.

34.25.° Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 більші за відповідні корені рівняння $x^2 - 12x + 4 = 0$.

34.26.° Складіть квадратне рівняння, корені якого у 3 рази менші від відповідних коренів рівняння $2x^2 - 14x + 9 = 0$.

34.27.° Складіть квадратне рівняння, корені якого у 2 рази більші за відповідні корені рівняння $2x^2 - 15x + 4 = 0$.

34.28.°° Сума квадратів коренів рівняння $3x^2 + ax - 7 = 0$ дорівнює $\frac{46}{9}$. Знайдіть значення a.

34.29.°° Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - ax + 8 = 0$ задовольняють умову $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Знайдіть значення a.

34.30.°° Чи є правильним твердження:

1) рівняння $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ має корені різних знаків при будь-якому значенні a;
2) якщо рівняння $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ має корені, то вони від'ємні?

34.31.°° Знайдіть усі цілі значення b, при яких має цілі корені рівняння:

1) $x^2 + bx + 6 = 0$;
2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

34.32.°° Знайдіть усі цілі значення b, при яких має цілі корені рівняння:

1) $x^2 + bx + 8 = 0$;
2) $x^2 + bx - 18 = 0$.

34.33.°° Корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$ дорівнюють його коефіцієнтам b і c. Знайдіть b і c.

34.34.°° При яких значеннях параметра a сума коренів рівняння $x^2 + (a^2 + 2a - 3)x + a = 0$ дорівнює нулю?

34.35.°° При яких значеннях параметра a добуток коренів рівняння $x^2 + (a + 2)x + a^2 - 4a = 0$ дорівнює 5?

34.36.** При яких значеннях параметра a різниця коренів рівняння $2x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$ дорівнює їх добутку?

34.37.** При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 - 5x + a = 0$ на 1 менші від коренів рівняння $x^2 - 7x + 3a - 6 = 0$?

34.38.** При яких значеннях параметра a модуль різниці коренів рівняння $x^2 - ax + 2a = 0$ дорівнює 3?

34.39.** При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 4x + a = 0$ дорівнює: 1) 12; 2) 6?

34.40.** При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ дорівнює 9?

34.41.** При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + 2ax - 3 = 0$ є найменшою?

34.42.** При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a^2 - 2 = 0$ є найбільшою?

35. Квадратний тричлен

Означення. Квадратним тричленом називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b і c — параметри, причому $a \neq 0$.

Наведемо приклади многочленів, які є квадратними тричленами:

$$2x^2 - 3x + 5;\ x^2 + 7x;\ x^2 - 5;\ 3x^2.$$

Зазначимо, що ліва частина квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ є квадратним тричленом.

Означення. Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, при якому значення квадратного тричлена дорівнює нулю.

Наприклад, число 2 є коренем квадратного тричлена $x^2 - 6x + 8$.

Щоб знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв'язати відповідне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Число $D = b^2 - 4ac$ називають **дискримінантом квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.**

Якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має. Якщо $D = 0$, то квадратний тричлен має один корінь, якщо $D > 0$ — то два корені.

Розглянемо квадратний тричлен $x^2 - 3x + 2$. Розкладемо його на множники методом групування.

Маємо:

$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2).$

Про таке тотожне перетворення кажуть, що квадратний тричлен $x^2 - 3x + 2$ розкладено на **лінійні множники** $x - 1$ і $x - 2$.

Зв'язок між коренями квадратного тричлена та лінійними множниками, на які він розкладається, установлює така теорема.

Теорема 35.1. ***Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ додатний, то даний тричлен можна розкласти на лінійні множники:***

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена.

Доведення. Оскільки числа x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Тоді $a(x - x_1)(x - x_2) =$

$$= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c. \ \blacktriangle$$

Теорема 35.2. ***Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ дорівнює нулю, то його розклад на множники має вигляд:***

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Доведення. У даному квадратному тричлені виділимо квадрат двочлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right).$$

Тепер зрозуміло, що коли $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. $\blacktriangle$

Теорема 35.3. ***Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ від'ємний, то даний тричлен не можна розкласти на лінійні множники.***

Доведення. Припустимо, що квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на лінійні множники, тобто $ax^2 + bx + c = a(x - m)(x - n)$. Тоді m і n — корені даного квадратного тричлена. Отже, його дискримінант невід'ємний, що суперечить умові. $\blacktriangle$

Теорема 35.4. ***Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ від'ємний, то при всіх x значення цього тричлена мають той самий знак, що і число a, тобто:***

якщо $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при всіх x;

якщо $a < 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ при всіх x.

Доведення. Маємо: $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)$. Якщо $D < 0$, то $-\frac{D}{4a^2} > 0$. Тоді $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} > 0$ при всіх x. Отже, знак добутку $a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)$ залежить тільки від знака числа a. ▲

ПРИКЛАД 1 Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 14x - 32$; 2) $-x^2 + 17x - 30$; 3) $3x^2 - 7x + 2$.

Розв'язання

1) Знайдемо корені даного тричлена:

$$x^2 - 14x - 32 = 0;$$
$$x_1 = -2,\ x_2 = 16.$$

Отже, $x^2 - 14x - 32 = (x + 2)(x - 16)$.

2) Маємо:

$$-x^2 + 17x - 30 = 0;$$
$$x^2 - 17x + 30 = 0;$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 15.$$

Отже, $-x^2 + 17x - 30 = -(x - 2)(x - 15)$.

3) Розв'яжемо рівняння $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Маємо:

$$x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 2.$$

Тоді $3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність:

1) $-2x^2 + 3x - 3 < 0$; 2) $\sqrt{x}\,(x^2 - 2x + 3) > 0$.

Розв'язання

1) Оскільки дискримінант і старший коефіцієнт квадратного тричлена $-2x^2 + 3x - 3$ від'ємні, то даний тричлен набуває від'ємних значень при всіх x. Отже, множиною розв'язків даної нерівності є множина $\mathbb{R}$.

Відповідь: $\mathbb{R}$.

2) Оскільки дискримінант квадратного тричлена $x^2 - 2x + 3$ від'ємний, а старший коефіцієнт додатний, то $x^2 - 2x + 3 > 0$

при всіх x. Тоді задана нерівність рівносильна нерівності $\sqrt{x} > 0$. Звідси $x > 0$.

Відповідь: $(0; +\infty)$.

ПРИКЛАД 3 Скоротіть дріб $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники квадратний тричлен, який є чисельником даного дробу:

$$6a^2 - a - 1 = 0;$$

$$a_1 = -\frac{1}{3};\ a_2 = \frac{1}{2};$$

$$6a^2 - a - 1 = 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) = (3a+1)(2a-1).$$

Тоді маємо:

$$\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1} = \frac{(3a+1)(2a-1)}{(3a+1)(3a-1)} = \frac{2a-1}{3a-1}.$$

Відповідь: $\frac{2a-1}{3a-1}$.

ПРИКЛАД 4 При якому значенні m розклад на множники тричлена $2x^2 + 9x + m$ містить множник $(x + 5)$?

Розв'язання. Оскільки розклад даного тричлена на множники має містити множник $(x + 5)$, то один з коренів цього тричлена дорівнює -5.

Тоді маємо:

$$2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m = 0;$$

$$m = -5.$$

Відповідь: $m = -5$.

ПРИКЛАД 5 Розкладіть на множники многочлен

$$2x^2 + xy - 6y^2.$$

Розв'язання. Розглянемо даний многочлен як квадратний тричлен зі змінною x, вважаючи y параметром. Знайдемо його корені.

$$2x^2 + xy - 6y^2 = 0;\ x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 48y^2}}{4};\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{-y + 7y}{4}; \\ x = \frac{-y - 7y}{4}; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2}y; \\ x = -2y. \end{array}\right.$$

Звідси $2x^2 + xy - 6y^2 = 2(x + 2y)\left(x - \frac{3y}{2}\right) = (x + 2y)(2x - 3y)$.

ПРИКЛАД 6 При яких значеннях параметра a нерівність $ax^2 - 2x + 3 > 0$ виконується при всіх x?

Розв'язання. Якщо $a = 0$, то задана нерівність набуває вигляду $-2x + 3 > 0$. Множиною розв'язків цієї нерівності не є множина $\mathbb{R}$.

Якщо $a \neq 0$, то ліва частина заданої нерівності — квадратний тричлен. Щоб він набував додатних значень при всіх x, його дискримінант має бути від'ємним, а старший коефіцієнт — додатним. Тому шукані значення параметра a є розв'язками системи $\begin{cases} a > 0, \\ 4 - 12a < 0. \end{cases}$ Звідси $a > \frac{1}{3}$.

Відповідь: $a > \frac{1}{3}$.

1. Який многочлен називають квадратним тричленом?
2. Що називають коренем квадратного тричлена?
3. Що називають дискримінантом квадратного тричлена?
4. У якому випадку квадратний тричлен не має коренів? має один корінь? має два корені?
5. У якому випадку квадратний тричлен можна розкласти на лінійні множники?
6. За якою формулою квадратний тричлен можна розкласти на лінійні множники?
7. У якому випадку квадратний тричлен не можна розкласти на лінійні множники?
8. Яких значень набуває квадратний тричлен з від'ємним дискримінантом?

35.1.° Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 7x + 12$;
2) $x^2 + 8x + 15$;
3) $x^2 - 3x - 10$;
4) $-x^2 - 5x - 6$;
5) $-x^2 + x + 2$;
6) $6x^2 - 5x - 1$;
7) $4x^2 + 3x - 22$;
8) $-3a^2 + 8a + 3$;
9) $\frac{1}{6}b^2 - \frac{5}{6}b + 1$;
10) $-2x^2 - 0{,}5x + 1{,}5$;
11) $0{,}4x^2 - 2x + 2{,}5$;
12) $-1{,}2m^2 + 2{,}6m - 1$.

35.2.° Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 3x - 18$;
2) $x^2 + 5x - 14$;
3) $-x^2 + 3x + 4$;
4) $5x^2 + 8x - 4$;
5) $2a^2 - 3a + 1$;
6) $4b^2 - 11b - 3$;
7) $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$;
8) $0{,}3m^2 - 3m + 7{,}5$;
9) $-0{,}5x^2 + x + 1{,}5$.

35.3.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x - 15}{x^2 - x - 20}$;
2) $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 3x}$;
3) $\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 8}$;

4) $\frac{4a^2-9}{2a^2-9a-18}$; 6) $\frac{c^2-5c-6}{c^2-8c+12}$; 8) $\frac{x^2-16}{32-4x-x^2}$;

5) $\frac{2b^2-7b+3}{4b^2-4b+1}$; 7) $\frac{m^3-1}{m^2+9m-10}$; 9) $\frac{4n^2-9n+2}{2+9n-5n^2}$.

35.4.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{2x+12}{x^2+3x-18}$; 3) $\frac{4x^2+x-3}{x^2-1}$; 5) $\frac{a^2+5a+4}{a^2-a-20}$;

2) $\frac{x^2+9x+14}{x^2+7x}$; 4) $\frac{2y^2+3y-5}{y^2-2y+1}$; 6) $\frac{3+20b-7b^2}{7b^2-6b-1}$.

35.5.• Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2+x+1>0$; 3) $(2x-1)(2x^2-3x+5)<0$;

2) $-x^2+x-1\leqslant 0$; 4) $\sqrt{x-1}\,(-5x^2+8x-5)\geqslant 0$.

35.6.• Розв'яжіть нерівність:

1) $7x^2-9x+3\geqslant 0$;

2) $-5y^2+11y-11<0$;

3) $(2x+3)(3x^2-8x+6)\geqslant 0$;

4) $|x+1|(4x^2-5x+2)\leqslant 0$.

35.7.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\frac{\sqrt{x^2-3x+4}}{x+2}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{5x^2-4x+1}}$.

35.8.• При якому значенні параметра b розклад на лінійні множники тричлена:

1) $2x^2-5x+b$ містить множник $(x-3)$;

2) $-4x^2+bx+2$ містить множник $(x+1)$;

3) $3x^2-4x+b$ містить множник $(3x-2)$?

35.9.• При якому значенні параметра a розклад на лінійні множники тричлена:

1) $2x^2-7x+a$ містить множник $(x-4)$;

2) $4x^2-ax+6$ містить множник $(2x+1)$?

35.10.• Спростіть вираз:

1) $\frac{9a^2-4}{2a^2-5a+2}\cdot\frac{a-2}{3a+2}+\frac{a-1}{1-2a}$;

2) $\frac{b-4}{b^3-b}:\left(\frac{b-1}{2b^2+3b+1}-\frac{1}{b^2-1}\right)$;

3) $\left(\frac{c+2}{c^2-c-6}-\frac{2c}{c^2-6c+9}\right):\frac{c^2+3c}{(2c-6)^2}$;

4) $\left(\frac{3}{m-4}+\frac{2m}{m+1}+\frac{4m-6}{m^2-3m-4}\right)\cdot\frac{4m-16}{2m-3}$.

35.11.[•] Доведіть, що при всіх допустимих значеннях a значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $\frac{25a^2-36}{10a^2-9a+2} : \frac{5a+6}{5a-2} + \frac{9a-8}{1-2a}$;

2) $\left(\frac{2a}{a+3} + \frac{1}{a-1} - \frac{4}{a^2+2a-3}\right) : \frac{2a+1}{a+3}$.

35.12.[•] Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2-6x+5}{x-1}$;
2) $y = \frac{3x^2-10x+3}{x-3} - \frac{x^2-4}{x+2}$.

35.13.[•] Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2-2x-8}{x-4}$;
2) $y = \frac{x^2-x-2}{x+1} - \frac{x^2-x-30}{x+5}$.

35.14.[••] Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2 - 6xy + 5y^2$;
3) $3m^2 - 8mn - 3n^2$;
2) $a^2 + 5ab - 36b^2$;
4) $4x^2 - 5xy + y^2$.

35.15.[••] Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^2 - 14ab + 40b^2$;
2) $12b^2 + bc - 6c^2$.

35.16.[••] Скоротіть дріб:

1) $\frac{2a^2+ab-15b^2}{-2a^2+9ab-10b^2}$;
2) $\frac{6x^2-13xy-5y^2}{12x^2-5xy-3y^2}$.

35.17.[••] Скоротіть дріб:

1) $\frac{3n^2+mn-4m^2}{8m^2+18mn+9n^2}$;
2) $\frac{12u^2-4ut-5t^2}{-5t^2+21ut-18u^2}$.

35.18.[••] Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівність:

1) $8x^2 - 6xy + y^2 = 0$;
2) $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 2x + 7y - 2 = 0$.

35.19.[••] Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $(a^2 - a - 6)x = a^2 - 9$;
2) $(a^2 - 8a + 7)x = 2a^2 - 13a - 7$.

35.20.[••] Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння $(a^2 + 7a - 8)x = a^2 + 16a + 64$.

35.21.[••] При яких значеннях параметра a нерівність виконується при всіх x:

1) $(a - 1)x^2 - x + 2 > 0$;
2) $ax^2 - (2a - 1)x + a + 1 < 0$?

35.22.[*] Один з коренів рівняння $x^{12} - abx + a^2 = 0$ більший, ніж 2. Доведіть, що $|b| > 64$.

35.23.[*] Розв'яжіть рівняння $x^3 - (\sqrt{2}+1)x^2 + 2 = 0$.

35.24.[*] Розв'яжіть рівняння $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$.

36. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2+2x}{x-6}=\frac{5x+18}{x-6}$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2+2x=5x+18, \\ x-6\neq 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x^2-3x-18=0, \\ x\neq 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3; \\ x=6, \end{array}\right. \\ x\neq 6; \end{cases}$$

$$x=-3.$$

Відповідь: -3.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{5}{x^2-4x+4}-\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{5}{(x-2)^2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x+2}=0;$$

$$\frac{5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)}=0.$$

Отже, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2=0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} 5x+10-4x+8-x^2+4x-4=0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x-14=0, \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=-2, \end{array}\right. \\ x\neq 2, \\ x\neq -2; \end{cases}$$

$$x=7.$$

Відповідь: 7.

ПРИКЛАД 3 Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння

$$1-\frac{3}{x+a-1}=\frac{5a}{(x+a-1)(x+1)}.$$

Розв'язання. $\frac{(x+a-1)(x+1)-3(x+1)-5a}{(x+a-1)(x+1)}=0$. Це рівняння рівносильне системі $\begin{cases}(x+a-1)(x+1)-3(x+1)-5a=0,\\ x\neq 1-a,\\ x\neq -1.\end{cases}$ Звідси

$$\begin{cases}x^2+x(a-3)-4a-4=0,\\ x\neq 1-a,\\ x\neq -1.\end{cases}$$

Квадратне рівняння системи має два корені: $x_1=4$, $x_2=-a-1$. Ці значення змінної будуть коренями заданого рівняння тільки при виконанні таких умов: $x_1\neq 1-a$, $x_1\neq -1$, $x_2\neq 1-a$, $x_2\neq -1$. Очевидно, що умови $4\neq -1$ і $-a-1\neq 1-a$ виконуються завжди.

Якщо $x_1=1-a$, тобто $4=1-a$, то $a=-3$. Отже, при $a=-3$ корінь x_1 є стороннім. Разом з тим для $a=-3$ отримуємо $x_2=-a-1=2$, і $x_2=2$ є коренем заданого рівняння.

Якщо $x_2=-1$, тобто $-a-1=-1$, то $a=0$. Отже, при $a=0$ корінь x_2 є стороннім, а $x_1=4$ є коренем.

Запишемо отримані результати у відповідь.

Відповідь: якщо $a=-3$, то $x=2$; якщо $a=0$, то $x=4$; якщо $a\neq 0$ і $a\neq -3$, то $x=4$ або $x=-a-1$.

ПРИКЛАД 4 Знайдіть усі значення параметра b, при яких рівняння $\frac{x^2-(3b-1)x+2b^2-2}{x^2-3x-4}=0$ має один корінь.

Розв'язання. Задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}x^2-(3b-1)x+2b^2-2=0,\\ x\neq 4,\\ x\neq -1.\end{cases}$$

Розв'язавши квадратне рівняння системи, отримуємо $x_1=2b-2$, $x_2=b+1$.

Спочатку розглянемо випадок, коли квадратне рівняння системи має єдиний корінь. Для цього треба, щоб $x_1=x_2$, тобто $2b-2=b+1$. Звідси $b=3$. Проте при $b=3$ $x_1=x_2=4$, тобто квадратне рівняння має єдиний корінь, але він не належить області визначення заданого рівняння.

Тепер розглянемо випадок, коли корені квадратного рівняння системи є різними. Для того щоб x_1 і x_2 були коренями заданого рівняння, мають виконуватися такі умови: $x_1 \neq 4$, $x_1 \neq -1$, $x_2 \neq 4$, $x_2 \neq -1$. Тому, щоб розв'язок був єдиним, знайдемо вимоги, за яких залишається лише один корінь в області визначення заданого рівняння:

1) $\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 \neq 4, \\ x_2 \neq -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 \neq 4, \\ x_2 \neq -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_2 = 4, \\ x_1 \neq 4, \\ x_1 \neq -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_2 = -1, \\ x_1 \neq 4, \\ x_1 \neq -1. \end{cases}$

Легко впевнитися (переконайтеся в цьому самостійно), що перша і третя системи розв'язків не мають, а з другої і четвертої відповідно отримуємо $b = \frac{1}{2}$, $b = -2$.

Відповідь: $b = \frac{1}{2}$ або $b = -2$.

36.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} = 0$;
2) $\frac{3x^2 - x - 2}{1 - x} = 0$;
3) $\frac{x^2 - 14}{x + 2} = \frac{5x}{x + 2}$;
4) $\frac{x^2 + 4x}{x - 5} - \frac{9x + 50}{x - 5} = 0$;
5) $\frac{x^2 - 6x}{x - 3} + \frac{15 - 2x}{x - 3} = 0$;
6) $\frac{5x + 18}{x - 2} = x$;
7) $x + 1 = \frac{6}{x}$;
8) $5 - \frac{8}{x^2} = \frac{18}{x}$.

36.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 5x - 6}{x - 6} = 0$;
2) $\frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2} = 0$;
3) $\frac{2x^2 + 6}{x + 8} = \frac{13x}{x + 8}$;
4) $\frac{x^2 + 4x}{x + 7} = \frac{5x + 56}{x + 7}$;
5) $\frac{x^2 + 12x}{x + 4} - \frac{5x - 12}{x + 4} = 0$;
6) $\frac{x^2 - 3x}{x + 6} = 6$;
7) $\frac{2 - 33y}{y - 4} = 7y$;
8) $y - \frac{39}{y} = 10$.

36.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 9} = 0$;
2) $\frac{3x^2 - 14x - 5}{3x^2 + x} = 0$;

3) $\frac{x^2-12x+35}{x^2-10x+25}=0$; 4) $\frac{x^2-7x+6}{x^2+2x-3}=0$.

36.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-9x-10}{x^2-1}=0$; 2) $\frac{x^2+5x-14}{x^2-6x+8}=0$.

36.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2y}{y-3}=\frac{3y+3}{y}$;

2) $\frac{3x+4}{x-3}=\frac{2x-9}{x+1}$;

3) $\frac{5x+2}{x-1}=\frac{4x+13}{x+7}$;

4) $\frac{2x^2-3x+1}{x-1}=3x-4$.

36.6.° Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{2x-13}{x-6}=\frac{x+6}{x}$; 2) $\frac{3x^2-4x-20}{x+2}=2x-5$.

36.7.° Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$;

2) $\frac{x-1}{x+3}+\frac{x+1}{x-3}=\frac{2x+18}{x^2-9}$;

3) $\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2-5x}=\frac{3-x}{x-5}$;

4) $\frac{4x}{x^2+4x+4}-\frac{x-2}{x^2+2x}=\frac{1}{x}$;

5) $\frac{6}{x^2-36}-\frac{3}{x^2-6x}+\frac{x-12}{x^2+6x}=0$;

6) $\frac{x}{x+7}+\frac{x+7}{x-7}=\frac{63-5x}{x^2-49}$;

7) $\frac{4}{x^2-10x+25}-\frac{1}{x+5}=\frac{10}{x^2-25}$.

36.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$;

2) $\frac{2y+3}{2y+2}-\frac{y+1}{2y-2}+\frac{1}{y^2-1}=0$;

3) $\frac{3x}{x^2-10x+25}-\frac{x-3}{x^2-5x}=\frac{1}{x}$;

4) $\frac{x-20}{x^2+10x}+\frac{10}{x^2-100}-\frac{5}{x^2-10x}=0$.

36.9.° При якому значенні змінної:

1) сума дробів $\frac{24}{x-2}$ і $\frac{16}{x+2}$ дорівнює 3;

2) значення дробу $\frac{42}{x}$ на $\frac{1}{4}$ більше за значення дробу $\frac{36}{x+20}$?

36.10.° При якому значенні змінної:

1) значення дробу $\frac{30}{x+3}$ на $\frac{1}{2}$ менше від значення дробу $\frac{30}{x}$;

2) значення дробу $\frac{20}{x}$ на 9 більше за значення дробу $\frac{20}{x+18}$?

36.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-10}{x^3+1}+\frac{4}{x+1}=\frac{5x-1}{x^2-x+1}$; 3) $\frac{4x-6}{x+2}-\frac{x}{x+1}=\frac{14}{x^2+3x+2}$;

2) $\frac{6}{x^2-4x+3}+\frac{5-2x}{x-1}=\frac{3}{x-3}$; 4) $\frac{x}{x^2-4}-\frac{3x-1}{x^2+x-6}=\frac{2}{x^2+5x+6}$.

36.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x+2}{x^2+2x+4}+\frac{x^2+39}{x^3-8}=\frac{5}{x-2}$; 2) $\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x+3}=\frac{8}{x^2+2x-3}$.

36.13.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x-7}{x-1}+4$;

2) $\frac{x^2+4x+4}{x+4}-\frac{2x+6}{x+2}=\frac{x^2+x+1}{x+1}-\frac{2x+9}{x+3}$;

3) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}$.

36.14.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+4}{x-1}+\frac{x-4}{x+1}=\frac{x+8}{x-2}+\frac{x-8}{x+2}$;

2) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{x-3}{x+3}-\frac{x-4}{x+4}$;

3) $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}$.

36.15.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-8x+7}{x-a}=0$; 3) $\frac{x^2-(3a+2)x+6a}{x-6}=0$.

2) $\frac{x-a}{x^2-8x+7}=0$;

36.16.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{2a}+\frac{2}{x-2}=\frac{3x-2a}{2(x-2)}$; 4) $\frac{x}{x+a}-\frac{a-2}{x-a}=\frac{4a-2a^2}{x^2-a^2}$;

2) $\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}=\frac{8a^2}{x^2-a^2}$; 5) $\frac{2a^2+x^2}{a^3-x^3}-\frac{2x}{ax+a^2+x^2}+\frac{1}{x-a}=0$.

3) $\frac{1}{x+2}-\frac{2a-1}{x^2-2x+4}=\frac{6-4a}{x^3+8}$;

36.17.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+2}{a+1}=\frac{2x-a-1}{x-2}$; 3) $\frac{x^2-(2a+1)x+a+a^2}{x(x-2)}=0$;

2) $\frac{x^2+(3a+1)x+2a+2a^2}{(x-1)(x+2)}=0$; 4) $\frac{(a-2)x}{a-1}-1=\frac{a+2}{a-1}-\frac{2x^2+a+1}{(a-1)x}$.

36.18.•• При яких значеннях параметра a має один корінь рівняння:

1) $\frac{x^2 - ax + 5}{x - 1} = 0$;

2) $\frac{x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + 3a - 2}{x^2 - 6x + 5} = 0$;

3) $\frac{x^2 - (a + 4)x + 3a + 3}{\sqrt{x - 2}} = 0$?

36.19.•• При яких значеннях параметра a має один корінь рівняння:

1) $\frac{x^2 - ax + 1}{x + 3} = 0$;

2) $\frac{x^2 + (3 - 2a)x + 4a - 10}{x^2 - 4x + 3} = 0$;

3) $\frac{x^2 - ax + a - 1}{\sqrt{x + 1}} = 0$?

37. Розв'язування рівнянь методом заміни змінної

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Розв'язання. Позначимо $x^2 = t$. Тоді $x^4 = t^2$. Отримуємо квадратне рівняння зі змінною t:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо: $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Оскільки $t = x^2$, то розв'язування заданого рівняння зводиться до розв'язування сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 4, \\ x^2 = 9. \end{array}\right.$$

Звідси $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Відповідь: -2; 2; -3; 3.

Означення. **Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — параметри, причому $a \neq 0$, називають біквадратним рівнянням.**

Заміною $x^2 = t$ біквадратне рівняння зводиться до квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$. Такий спосіб розв'язування рівнянь називають **методом заміни змінної.**

Метод заміни змінної можна використовувати не тільки при розв'язуванні біквадратних рівнянь.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $(2x - 1)^2 = t$. Тоді дане рівняння зводиться до квадратного рівняння

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

Звідси $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Тепер треба розв'язати таку сукупність

$$\left[\begin{array}{l}(2x-1)^2=-2,\\(2x-1)^2=1.\end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності коренів не має. З другого рівняння отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l}2x-1=-1,\\2x-1=1.\end{array}\right.$$

Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Відповідь: 0; 1.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $6x+5\sqrt{x}+1=0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x}=t$. Тоді $x = t^2$. Маємо: $6t^2 + 5t + 1 = 0$.

Звідси $t_1=-\frac{1}{3}$, $t_2=-\frac{1}{2}$.

Отримуємо таку сукупність:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=-\frac{1}{3},\\\sqrt{x}=-\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Оскільки $\sqrt{x}\geqslant 0$, то ця сукупність розв'язків не має, а отже, і задане рівняння коренів не має.

Відповідь: коренів немає.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2$.

Розв'язання. Нехай $\frac{x^2-3x-6}{x}=t$. Тоді $\frac{8x}{x^2-3x-6}=\frac{8}{t}$. Отримуємо рівняння $t-\frac{8}{t}=-2$, яке рівносильне системі

$$\begin{cases}t^2+2t-8=0,\\t\neq 0.\end{cases}$$

Звідси $t_1 = -4$, $t_2 = 2$.

Тепер розв'язування заданого рівняння зводиться до розв'язування сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x^2-3x-6}{x}=-4,\\\frac{x^2-3x-6}{x}=2.\end{array}\right.$$

Розв'яжіть цю сукупність самостійно.

Відповідь: −3; −1; 2; 6.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0.$$

Розв'язання. Запишемо це рівняння так:

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 5 + 4 = 0;$$
$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5\,(2x^2 + 3x - 1) + 4 = 0.$$

Нехай $2x^2 + 3x - 1 = t$. Тоді $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Отже, $2x^2 + 3x - 1 = 1$ або $2x^2 + 3x - 1 = 4$.

Розв'язавши ці два квадратних рівняння, дістанемо відповідь.

Відповідь: -2; $\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 1.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $(x - 1)\,x\,(x + 1)\,(x + 2) = 24$.

Розв'язання. При розв'язуванні рівнянь такого виду треба знайти «вигідний» спосіб групування множників. У цьому прикладі він буде таким: $((x - 1)\,(x + 2))\,(x\,(x + 1)) = 24$.

Маємо: $(x^2 + x - 2)\,(x^2 + x) = 24$. Зробимо заміну: $x^2 + x = t$. Тоді $t\,(t - 2) = 24$; $t^2 - 2t - 24 = 0$; $t_1 = -4$, $t_2 = 6$. Отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + x = -4, \\ x^2 + x = 6. \end{array}\right.$$

Відповідь: -3; 2.

У цьому прикладі використовувалася заміна змінної, яка застосовна до рівнянь виду

$$(x + a)\,(x + b)\,(x + c)\,(x + d) = f,$$

де $a + d = b + c$.

Це рівняння можна записати так:

$$(x^2 + (a + d)\,x + ad)\,(x^2 + (b + c)\,x + bc) = f$$

і далі зробити заміну $x^2 + (a + d)\,x = t$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 2 = 0$.

Розв'язання. Виділимо в лівій частині рівняння квадрат двочлена:

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - x^2 + 4x - 2 = 0;$$
$$(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 2 = 0.$$

Зробивши заміну $x^2 - 4x = t$, отримуємо рівняння $t^2 - t - 2 = 0$.

Звідси $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x = 2, \\ x^2 - 4x = -1. \end{array}\right.$

Відповідь: $2 + \sqrt{6}$; $2 - \sqrt{6}$; $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння

$$(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2.$$

Розв'язання. За допомогою перевірки легко переконатися, що число 0 не є коренем даного рівняння. Тоді, поділивши обидві частини даного рівняння на x^2, перейдемо до рівносильного рівняння

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = 9.$$

Звідси $\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9.$

Зробимо заміну: $2x + \frac{1}{x} - 3 = t$. Тоді $t(t + 8) = 9$, звідки $t_1 = 1$, $t_2 = -9$.

З урахуванням заміни отримуємо два рівняння:

1) $2x + \frac{1}{x} - 3 = 1;$ 2) $2x + \frac{1}{x} - 3 = -9.$

Пропонуємо розв'язати ці рівняння самостійно.

Відповідь: $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$; $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$; $\frac{-3 - \sqrt{7}}{2}$; $\frac{-3 + \sqrt{7}}{2}$.

Розглянуте рівняння має вид

$$(ax^2 + bx + c)(ax^2 + dx + c) = kx^2.$$

Якщо $c \neq 0$, то воно рівносильне рівнянню $\left(ax + \frac{c}{x} + b\right)\left(ax + \frac{c}{x} + d\right) = k$, для розв'язування якого можна скористатися заміною $ax + \frac{c}{x} = t$.

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9.$

Розв'язання. Нехай $x + \frac{1}{x} = t$. Тоді $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$; $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$

Маємо:

$$7t - 2(t^2 - 2) = 9;$$
$$2t^2 - 7t + 5 = 0.$$

Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{5}{2}$.

Отже, $x + \frac{1}{x} = 1$ або $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$.

Пропонуємо розв'язати ці рівняння самостійно.

Відповідь: $\frac{1}{2}$; 2.

Метод, за допомогою якого розв'язане це рівняння, застосовний до рівнянь виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $a \neq 0$. У цьому рівнянні коефіцієнти одночленів ax^4 і a, bx^3 і bx рівні. Таке рівняння називають **зворотним рівнянням четвертого степеня**. Воно рівносильне рівнянню $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$. Звідси $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$. Далі застосовуємо заміну $x + \frac{1}{x} = t$.

ПРИКЛАД 10 Розв'яжіть рівняння $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$.

Розв'язання. Очевидно, що число 0 не є коренем даного рівняння. Тоді, розділивши обидві частини рівняння на x^2, отримаємо рівняння, рівносильне заданому:

$$x^2 - 3x - 8 + \frac{12}{x} + \frac{16}{x^2} = 0;$$

$$x^2 + \frac{16}{x^2} - 3\left(x - \frac{4}{x}\right) - 8 = 0.$$

Нехай $x - \frac{4}{x} = t$. Тоді $x^2 + \frac{16}{x^2} = t^2 + 8$. Звідси $t^2 + 8 - 3t - 8 = 0$; $t\,(t - 3) = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 3. \end{array}\right.$ Далі $\left[\begin{array}{l} x - \frac{4}{x} = 0, \\ x - \frac{4}{x} = 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 - 3x - 4 = 0. \end{array}\right.$

Відповідь: -2; 2; -1; 4.

Рівняння, розв'язане в прикладі 10, є рівнянням виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$. Його називають **узагальненим зворотним рівнянням четвертого степеня**. Воно зводиться до квадратного рівняння за допомогою заміни $x + \frac{k}{x} = t$.

ПРИКЛАД 11 Розв'яжіть рівняння

$$(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x\,(x^2 - 2x + 2) = 10x^2.$$

Розв'язання. Виконавши перевірку, можна переконатися, що число 0 не є коренем даного рівняння. Тоді рівняння

$$\frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^2} + \frac{3\,(x^2 - 2x + 2)}{x} = 10,$$

отримане в результаті ділення обох частин заданого рівняння на x^2, рівносильне даному.

Заміна $\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = t$ приводить до квадратного рівняння

$$t^2 + 3t - 10 = 0.$$

Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $2-\sqrt{2}$; $2+\sqrt{2}$; -1; -2.

Якщо в розглянутому рівнянні зробити заміни $x^2 - 2x + 2 = u$, $x = v$, то отримаємо:

$$u^2 + 3uv - 10v^2 = 0.$$

Усі одночлени в лівій частині цього рівняння мають однаковий степінь, а його права частина дорівнює нулю. Таке рівняння називають **однорідним рівнянням другого степеня** відносно u і v.

Для його розв'язання спочатку треба перевірити, які розв'язки рівняння $v = 0$ є коренями заданого рівняння.

При $v \neq 0$ задане рівняння рівносильне такому:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 3\frac{u}{v} - 10 = 0.$$

Далі заміна $\frac{u}{v} = t$ стає очевидною.

ПРИКЛАД 12 Розв'яжіть рівняння $(x+1)^4 + (x+5)^4 = 32$.

Розв'язання. Нехай $t = x - \frac{-1+(-5)}{2}$, тобто $x = t - 3$. Тоді $x + 1 = t - 2$, $x + 5 = t + 2$, а задане рівняння набуває вигляду

$$(t-2)^4 + (t+2)^4 = 32.$$

Після піднесення до степеня і зведення подібних доданків отримуємо рівняння $t^4 + 24t^2 = 0$. Звідси $t = 0$, а отже, $x = -3$.

Відповідь: -3.

У рівнянні виду $(x-a)^4 + (x-b)^4 = c$ заміна $t = x - \frac{a+b}{2}$ завжди приводить до біквадратного рівняння відносно t.

ПРИКЛАД 13 Розв'яжіть рівняння $\frac{2x}{x^2-4x+2} + \frac{3x}{x^2+x+2} = -\frac{5}{4}$.

Розв'язання. Оскільки число 0 не є коренем даного рівняння, то, поділивши чисельник і знаменник кожного з дробів лівої частини рівняння на x, отримуємо рівняння, рівносильне заданому:

$$\frac{2}{x-4+\frac{2}{x}} + \frac{3}{x+1+\frac{2}{x}} = -\frac{5}{4}.$$

Зробимо заміну: $x + \frac{2}{x} = t$. Тоді

$$\frac{2}{t-4} + \frac{3}{t+1} + \frac{5}{4} = 0;\quad \frac{t^2+t-12}{4(t-4)(t+1)} = 0;\quad \begin{cases} t^2+t-12=0, \\ (t-4)(t+1)\neq 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} t=-4, \\ t=3. \end{array}\right.$$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{2}{x} = -4, \\ x + \dfrac{2}{x} = 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 + 4x + 2 = 0, \\ x^2 - 3x + 2 = 0. \end{array}\right.$

Відповідь: $-2 + \sqrt{2}$; $-2 - \sqrt{2}$; 1; 2.

ПРИКЛАД 14 Розв'яжіть рівняння $x^2 + \dfrac{81x^2}{(x+9)^2} = 40.$

Розв'язання. Виділимо квадрат різниці в лівій частині рівняння:

$$x^2 - \frac{18x^2}{x+9} + \frac{81x^2}{(x+9)^2} + \frac{18x^2}{x+9} = 40;$$

$$\left(x - \frac{9x}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} = 40;$$

$$\left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} = 40.$$

Нехай $\dfrac{x^2}{x+9} = t$. Тоді $t^2 + 18t - 40 = 0$, звідки $t = -20$ або $t = 2$.

Маємо: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x+9} = -20, \\ \dfrac{x^2}{x+9} = 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 + 20x + 180 = 0, \\ x^2 - 2x - 18 = 0. \end{array}\right.$

Відповідь: $1 + \sqrt{19}$; $1 - \sqrt{19}$.

Може виникнути запитання: чому в прикладах 1–14 при розв'язуванні рівнянь ми не пробували спростити їх за допомогою тотожних перетворень?

Справа в тому, що використання тотожних перетворень привело б до необхідності розв'язувати рівняння виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (ви можете переконатися в цьому самостійно). При $a \neq 0$ таке рівняння називають **рівнянням четвертого степеня**, при $a = 0$ і $b \neq 0$ — **рівнянням третього степеня**. Окремим видом цього рівняння при $b = 0$ і $d = 0$ є біквадратне рівняння.

У загальному випадку для розв'язування рівнянь третього й четвертого степенів необхідно знати формули знаходження їх коренів. З історією відкриття цих формул ви можете ознайомитися в оповіданні після цього пункту.

37.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
3) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;
4) $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$;

5) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;
6) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$.

37.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;
2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;
3) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$;
4) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0$;
5) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;
6) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

37.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)^4 - 3(x + 3)^2 - 4 = 0$;
2) $(2x + 1)^4 - 10(2x + 1)^2 + 9 = 0$;
3) $(6x - 7)^4 + 4(6x - 7)^2 + 3 = 0$;
4) $(x - 4)^4 + 2(x - 4)^2 - 8 = 0$.

37.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)^4 - 20(3x - 1)^2 + 64 = 0$;
2) $(2x + 3)^4 - 24(2x + 3)^2 - 25 = 0$.

37.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$;
2) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$;
3) $8\sqrt{x} + x + 7 = 0$;
4) $8x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$.

37.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$; 2) $x - 5\sqrt{x} - 50 = 0$; 3) $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$.

37.7.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $(x^2 - 2)^2 - 8(x^2 - 2) + 7 = 0$;
2) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$;
3) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 3) = 3$;
4) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 4) = -5$.

37.8.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 - \frac{6(2x-1)}{x} + 5 = 0$;
2) $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{3x-1} = 3\frac{1}{3}$.

37.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 - 6x)^2 + (x^2 - 6x) - 56 = 0$;
2) $(x^2 + 8x + 3)(x^2 + 8x + 5) = 63$;
3) $\frac{x^4}{(x-2)^2} - \frac{4x^2}{x-2} - 5 = 0$;
4) $\frac{x+4}{x-3} - \frac{x-3}{x+4} = \frac{3}{2}$.

37.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} = 1$;
2) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}$;
3) $\frac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3} = 4 + 2x + x^2$;
4) $\frac{3x^2-9x}{2} - \frac{12}{x^2-3x} = 3$;
5) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$.

37.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+3}=\frac{6}{x^2-2x+4}$;

2) $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$;

3) $\frac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2$;

4) $\frac{x^2+x-3}{2}-\frac{3}{2x^2+2x-6}=1$;

5) $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

37.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(8x^2-3x+1)^2=32x^2-12x+1$;

2) $(x^2-5x+7)(x-2)(x-3)=2$.

37.13.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2+x+1)^2-3x^2-3x-1=0$;

2) $(x^2-5x)(x+3)(x-8)+108=0$.

37.14.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$;

2) $x(x+3)(x+5)(x+8)=100$.

37.15.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-4)(x+2)(x+8)(x+14)=1204$;

2) $(x+3)(x+1)(x+5)(x+7)=-16$.

37.16.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4+8x^3+10x^2-24x+5=0$;

2) $x^4+4x^3-10x^2-28x-15=0$;

3) $10x^2(x-2)^2=9(x^2+(x-2)^2)$.

37.17.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x^2-5x+2)(2x^2+7x+2)=-20x^2$;

2) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$.

37.18.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0$;

2) $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2)=18x^2$.

37.19.°° Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$;

2) $2\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{3}\right)=\frac{2}{x^2}+\frac{x^2}{18}+\frac{4}{3}$;

3) $12x^2+\frac{1}{3x^2}+10\left(2x+\frac{1}{3x}\right)+11=0$;

4) $\frac{x(x-1)^2}{(x^2-x+1)^2}=\frac{2}{9}$;

5) $x^4-2x^3-18x^2-6x+9=0$.

37.20.** Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2+5x+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}=16$;

2) $x^2+\frac{36}{x^2}=\frac{112}{5}\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{x}\right)$;

3) $\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{625}{112}$;

4) $4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=0$.

37.21.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$;

2) $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

37.22.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4+5x^2(x+1)=6(x+1)^2$;

2) $(x^2-3x+1)^2+3(x-1)(x^2-3x+1)=4(x-1)^2$.

37.23.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+3)^4+(x+1)^4=16$;

2) $x^4+(x-1)^4=97$.

37.24.** Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-2)^4+(x-3)^4=1$;

2) $(x-6)^4+(x-4)^4=82$.

37.25.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$;

2) $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15}$;

3) $\frac{x^2-3x+1}{x}+\frac{2x}{x^2-2x+1}=\frac{7}{2}$.

37.26.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x}{x^2+1-4x}-\frac{2x}{x^2+1+x}=\frac{8}{3}$;

2) $\frac{2x}{x^2-2x+5}+\frac{3x}{x^2+2x+5}=\frac{7}{8}$;

3) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\frac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\frac{13}{3}=0$.

37.27.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8$;

2) $x^2+\left(\frac{x}{2x-1}\right)^2=2$;

3) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=90$;

4) $x^2+\frac{25x^2}{(5+2x)^2}=104$.

37.28.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=3$;

2) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=\frac{40}{9}$;

3) $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}=5$.

Таємна зброя Сципіона Даль Ферро

Ви легко розв'яжете кожне з таких рівнянь третього степеня:

$$x^3 - 8 = 0,\ x^3 + x^2 = 0,\ x^3 - x = 0.$$

Усі вони є окремими видами рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де x — змінна, a, b, c і d — параметри, причому $a \neq 0$. Вивести формулу його коренів — задача складна. Недарма появу цієї формули вважають значним математичним відкриттям XVI ст.

Першим винайшов розв'язання рівняння виду $x^3 + px = q$, де p і q — додатні числа, італійський математик Сципіон Даль Ферро (1465–1526). Знайдену формулу він зберігав у секреті. Це було зумовлено тим, що кар'єра вченого того часу багато в чому залежала від його виступів у публічних математичних турнірах. Було вигідно зберігати відкриття в таємниці, розраховуючи використати їх як «секретну зброю».

Після смерті Даль Ферро його учень Фіоре, володіючи секретною формулою, викликав на математичний двобій талановитого математика-самоучку Нікколо Тарталья (1499–1557). За кілька днів до турніру Тарталья сам вивів формулу коренів рівняння третього степеня. Диспут, на якому Тарталья здобув переконливу перемогу, відбувся 20 лютого 1535 року.

Уперше секретну формулу було опубліковано в книзі відомого італійського вченого Джероламо Кардано (1501–1576) «Велике мистецтво». У цій роботі також описано метод розв'язування рівняння четвертого степеня, відкритий Лудовіко Феррарі (1522–1565).

У XVII–XVIII ст. зусилля багатьох провідних математиків зосередилися на пошуку формули для розв'язання рівнянь п'ято-

Нікколо Тарталья

Джероламо Кардано

Нільс Хенрік Абель

го степеня. Отриманню результату сприяли роботи італійського математика Паоло Руффіні (1765–1822) і норвезького математика Нільса Хенріка Абеля (1802–1829). Сам результат виявився цілком несподіваним: було доведено, що не існує формули, за якою можна виразити корені будь-якого рівняння п'ятого степеня і вище через коефіцієнти рівняння, використовуючи лише чотири арифметичні дії та дію добування кореня.

38. Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій

У пункті 15 ви вже ознайомилися з використанням раціональних рівнянь як математичних моделей реальних ситуацій. Розглянемо ще кілька прикладів.

ПРИКЛАД 1 З пункту A виїхав велосипедист, а через 45 хв після цього в тому самому напрямку виїхала вантажівка, яка наздогнала велосипедиста на відстані 15 км від пункту A. Знайдіть швидкість велосипедиста і швидкість вантажівки, якщо швидкість вантажівки на 18 км/год більша за швидкість велосипедиста.

Розв'язання. Нехай швидкість велосипедиста дорівнює x км/год, тоді швидкість вантажівки становить $(x + 18)$ км/год. Велосипедист проїжджає 15 км за $\frac{15}{x}$ год, а вантажівка — за $\frac{15}{x+18}$ год. Оскільки вантажівка проїхала 15 км на 45 хв, тобто на $\frac{3}{4}$ год, швидше, ніж велосипедист, то $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4}$.

Маємо:

$$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4};$$

$$\frac{5}{x} - \frac{5}{x+18} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{20x + 360 - 20x - x^2 - 18x}{4x\,(x+18)} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 360 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -18; \end{cases}$$

$$x = 12 \text{ або } x = -30.$$

Корінь −30 не задовольняє умову задачі.

Отже, швидкість велосипедиста дорівнює 12 км/год, а швидкість вантажівки становить 12 + 18 = 30 (км/год).

Відповідь: 12 км/год, 30 км/год.

ПРИКЛАД 2 Одна бригада працювала на ремонті дороги 7 год, після чого до неї приєдналася друга бригада. Через 2 год спільної роботи ремонт було закінчено. За скільки годин може відремонтувати дорогу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо першій для цього потрібно на 4 год більше, ніж другій?

Розв'язання. Нехай перша бригада може самостійно відремонтувати дорогу за x год, тоді другій для цього потрібно $(x - 4)$ год. За 1 год перша бригада ремонтує $\frac{1}{x}$ частину дороги, а друга — $\frac{1}{x-4}$ частину дороги. Перша бригада працювала 9 год і відремонтувала $\frac{9}{x}$ дороги, а друга працювала 2 год і відремонтувала відповідно $\frac{2}{x-4}$ дороги. Оскільки в результаті було відремонтовано всю дорогу, то $\frac{9}{x}+\frac{2}{x-4}=1$.

Отримане рівняння має два корені: $x_1 = 12$ і $x_2 = 3$. Другий корінь не задовольняє умову задачі, оскільки тоді друга бригада мала б відремонтувати дорогу за 3 − 4 = −1 (год), що не має змісту.

Отже, перша бригада може відремонтувати дорогу за 12 год, а друга — за 8 год.

Відповідь: 12 год, 8 год.

ПРИКЛАД 3 Водний розчин солі містив 120 г води. Після того як до розчину додали 10 г солі, її концентрація збільшилася на 5 %. Скільки грамів солі містив розчин спочатку?

Розв'язання. Нехай початковий розчин містив x г солі. Тоді його маса дорівнювала $(x + 120)$ г, а маса солі становила $\frac{x}{x+120}$ частину маси всього розчину. Після того як до розчину додали 10 г солі, її маса в розчині склала $(x + 10)$ г, а маса розчину — $(x + 130)$ г. Тепер сіль становить $\frac{x+10}{x+130}$ частину розчину, що на 5 %, тобто на $\frac{1}{20}$, більше, ніж $\frac{x}{x+120}$. Звідси маємо

$$\frac{x+10}{x+130}-\frac{x}{x+120}=\frac{1}{20}.$$

Отримане рівняння має два корені: $x_1 = 30$ і $x_2 = -280$, з яких другий корінь не задовольняє умову задачі.

Отже, розчин містив спочатку 30 г солі.

Відповідь: 30 г.

38.1.° Перші 150 км дороги з міста A до міста B автомобіль проїхав з певною швидкістю, а решту 240 км — із швидкістю на 5 км/год більшою. Знайдіть початкову швидкість автомобіля, якщо на весь шлях з міста A до міста B він витратив 5 год.

38.2.° Перший мотоцикліст проїжджає 90 км на 18 хв швидше за другого, оскільки його швидкість на 10 км/год більша за швидкість другого мотоцикліста. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста.

38.3.° З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 240 км, виїхали одночасно автобус і автомобіль. Автобус рухався зі швидкістю на 20 км/год меншою, ніж автомобіль, і прибув до пункту призначення на 1 год пізніше за автомобіль. Знайдіть швидкість автомобіля і швидкість автобуса.

38.4.° Поїзд запізнювався на 10 хв. Щоб прибути на станцію призначення вчасно, він за 80 км від цієї станції збільшив свою швидкість на 16 км/год. Знайдіть початкову швидкість поїзда.

38.5.° Із села Вишневе в село Яблуневе, відстань між якими дорівнює 15 км, вершник проскакав з певною швидкістю, а повертався зі швидкістю на 3 км/год більшою і витратив на 15 хв менше, ніж на шлях з Вишневого до Яблуневого. Знайдіть початкову швидкість вершника.

38.6.° Друкарка мала за певний час надрукувати 180 сторінок. Проте вона виконала цю роботу на 5 год раніше строку, оскільки друкувала щогодини на 3 сторінки більше, ніж планувала. Скільки сторінок вона друкувала щогодини?

38.7.° Перший насос перекачує 90 м^3 води на 1 год швидше, ніж другий 100 м^3. Скільки води щогодини перекачує кожен насос, якщо перший перекачує за годину на 5 м^3 води більше, ніж другий?

38.8.° Робітник мав за певний час виготовити 72 деталі. Проте щодня він виготовляв на 4 деталі більше, ніж планував, і закінчив роботу на 3 дні раніше терміну. За скільки днів він виконав роботу?

38.9.° Катер пройшов 16 км за течією річки і 30 км проти течії, витративши на весь шлях 1 год 30 хв. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії становить 1 км/год.

38.10.° Човен проплив 15 км за течією річки і повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 1 год більше. Знайдіть швидкість човна за течією річки, якщо швидкість течії становить 2 км/год.

38.11.° За течією річки від пристані відійшов пліт. Через 4 год від цієї пристані в тому самому напрямку відійшов човен, який наздогнав пліт на відстані 15 км від пристані. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна становить 12 км/год.

38.12.° Катер проплив 45 км за течією річки і 28 км проти течії, витративши на весь шлях 4 год. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість катера становить 18 км/год.

38.13.° Турист проїхав $\frac{5}{8}$ всього шляху на катері, а решту — на автомобілі. Швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість катера. Автомобілем він їхав на 1 год 30 хв менше, ніж катером. Знайдіть швидкість автомобіля й швидкість катера, якщо всього турист подолав 160 км.

38.14.° Міжміський автобус мав проїхати 72 км. Коли він проїхав 24 км, то був затриманий біля залізничного переїзду на 12 хв. Потім він збільшив швидкість на 12 км/год і прибув у пункт призначення із запізненням на 4 хв. Знайдіть початкову швидкість автобуса.

38.15.° Група школярів виїхала на екскурсію з міста A до міста B автобусом, а повернулася до міста A залізницею, витративши на зворотний шлях на 30 хв більше, ніж на шлях до міста B. Знайдіть швидкість поїзда, якщо вона на 20 км/год менша, ніж швидкість автобуса, довжина шосе між містами A і B становить 160 км, а довжина залізниці — 150 км.

38.16.° Турист проплив на байдарці 4 км по озеру і 5 км за течією річки за той самий час, за який проплив би 6 км проти течії. З якою швидкістю турист плив по озеру, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год?

38.17.° Теплохід пройшов 16 км по озеру, а потім 18 км по річці, яка бере початок з цього озера, за 1 год. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії становить 4 км/год.

38.18.° Знаменник звичайного дробу на 3 більший за його чисельник. Якщо чисельник цього дробу збільшити на 4, а знаменник — на 8, то отриманий дріб буде на $\frac{1}{6}$ більший за даний. Знайдіть даний дріб.

38.19.* Чисельник звичайного дробу на 5 менший від його знаменника. Якщо чисельник цього дробу зменшити на 3, а знаменник збільшити на 4, то отриманий дріб буде на $\frac{1}{3}$ менший від даного. Знайдіть цей дріб.

38.20.* Два робітники, працюючи разом, можуть виконати виробниче завдання за 20 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожен із них, працюючи самостійно, якщо одному для цього потрібно на 9 днів більше, ніж другому?

38.21.* Одному маляру треба на 5 год більше, ніж другому, щоб пофарбувати фасад будинку. Коли перший маляр пропрацював 3 год, а потім його змінив другий, який пропрацював 2 год, то виявилося, що пофарбовано 40 % фасаду. За скільки годин може пофарбувати фасад кожний маляр, працюючи самостійно?

38.22.* Першого дня тракторист працював на оранці поля 6 год. Наступного дня до нього приєднався другий тракторист, і через 8 год спільної роботи вони закінчили оранку. За скільки годин може зорати це поле кожний тракторист, працюючи окремо, якщо першому для цього потрібно на 3 год менше, ніж другому?

38.23.* До розчину, який містить 20 г солі, додали 100 г води, після чого концентрація солі зменшилася на 10 %. Скільки грамів води містив розчин спочатку?

38.24.* Сплав міді й цинку, який містив 10 кг цинку, сплавили із 10 кг міді. Одержаний сплав містить на 5 % міді більше, ніж початковий. Скільки кілограмів міді містив початковий сплав?

38.25.** Через 2 год 40 хв після відправлення плоту від пристані *A* за течією річки назустріч йому від пристані *B* відійшов катер. Знайдіть швидкість течії річки, якщо пліт і катер зустрілися на відстані 14 км від пристані *A*, швидкість катера в стоячій воді дорівнює 12 км/год, а відстань між пристанями *A* і *B* дорівнює 32 км.

38.26.** До басейну підведено дві труби. Через першу трубу басейн наповнюють водою, а через другу спорожнюють, причому для спорожнення басейну треба на 1 год більше, ніж на його наповнення. Якщо ж відкрити обидві труби одночасно, то басейн наповниться водою за 30 год. За скільки годин можна наповнити порожній басейн водою через першу трубу?

38.27.** Для наповнення басейну через першу трубу треба стільки часу, як і для наповнення через другу й третю труби одночасно. Через першу трубу басейн наповнюється на 2 год швидше, ніж через другу, і на 8 год швидше, ніж через третю. Скільки часу потрібно для наповнення басейну через кожну трубу?

38.28.** Автобус мав проїхати відстань між двома містами, яка дорівнює 400 км, з деякою швидкістю. Проїхавши 2 год із запланованою швидкістю, він зупинився на 20 хв і, щоб прибути у пункт призначення вчасно, збільшив швидкість руху на 10 км/год. З якою швидкістю автобус мав проїхати відстань між містами?

38.29.** Робітник мав за певний строк виготовити 360 деталей. Перші 5 днів він виготовляв щоденно заплановану кількість деталей, а потім щодня виготовляв на 4 деталі більше й уже за день до строку виготовив 372 деталі. Скільки деталей щодня мав виготовляти за планом робітник?

38.30.* Щоб виконати певне виробниче завдання, одному робітникові треба на 12 год менше, ніж другому, і на 4 год більше, ніж обом робітникам для спільного виконання завдання. За скільки годин може виконати це завдання перший робітник?

§ 7. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОДІЛЬНОСТІ

39. Подільність націло та її властивості

З властивостями подільності націло ви познайомилися в 6 класі. Вивчаючи цей параграф, ви не тільки навчитеся їх доводити, але й ознайомитеся з низкою нових понять і теорем, пов'язаних з подільністю цілих чисел.

Означення. **Кажуть, що ціле число a ділиться націло на ціле число b, $b \neq 0$, якщо існує таке ціле число k, що $a = bk$.**

Якщо a ділиться націло на b, то пишуть: $a \vdots b$. Наприклад, $12 \vdots -3$, $0 \vdots 1000$, $-2 \vdots -1$.

Якщо $a \vdots b$, то число b називають **дільником** числа a, а число a — **кратним** числа b. Також кажуть, що число a кратне числу b.

Наприклад, $\{-4, 4, -2, 2, -1, 1\}$ — множина дільників числа 4; $\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ — множина чисел, кратних числу 3.

Розглянемо основні властивості подільності націло (буквами позначено цілі числа).

1. Якщо $a \neq 0$, то $a \vdots a$.
2. Якщо $a \neq 0$, то $0 \vdots a$.
3. Якщо $a \vdots b$, то $ka \vdots b$.
4. Якщо $a \vdots b$ і $b \vdots c$, то $a \vdots c$.
5. Якщо $a \vdots m$ і $b \vdots n$, то $ab \vdots mn$.
6. Якщо $a \vdots c$ і $b \vdots c$, то $(a \pm b) \vdots c$.

Ці властивості доводять за допомогою означення ділення націло. Доведемо, наприклад, властивість 6 (решту властивостей доведіть самостійно).

Оскільки $a \vdots c$ і $b \vdots c$, то існують такі цілі числа m і n, що $a = mc$ і $b = nc$.

Маємо: $a \pm b = mc \pm nc = (m \pm n)\,c$. Оскільки $(m \pm n) \in \mathbb{Z}$, то за означенням ділення націло $(a \pm b) \vdots c$.

ПРИКЛАД 1 Цілі числа a, b і c такі, що $(a + b) \vdots c$, $ab \vdots c$. Доведіть, що $(a^3 - b^3) \vdots c$.

Розв'язання. Маємо: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b) \times$ $\times ((a + b)^2 - ab)$. Оскільки $(a + b)^2 \vdots c$ і $ab \vdots c$, то за властивістю 6

$((a + b)^2 - ab) \vdots c$. Тоді з властивості 3 випливає справедливість твердження, що доводиться.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$x^2 + xy - x - y = 5.$$

Розв'язання. **Розв'язати рівняння з двома змінними в цілих числах** означає знайти всі пари цілих чисел, які є розв'язками цього рівняння.

Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$x(x + y) - (x + y) = 5; \ (x + y)(x - 1) = 5.$$

Звідси отримуємо, що значення виразів $x + y$ і $x - 1$ є дільниками числа 5. Тоді можливі чотири випадки:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - 1 = 1; \end{cases} \begin{cases} y = 3, \\ x = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - 1 = 5; \end{cases} \begin{cases} y = -5, \\ x = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -5, \\ x - 1 = -1; \end{cases} \begin{cases} y = -5, \\ x = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x - 1 = -5; \end{cases} \begin{cases} y = 3, \\ x = -4. \end{cases}$

Відповідь: (2; 3); (6; –5); (0; –5); (–4; 3).

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть у цілих числах рівняння $x^2 - y^2 = 14$.

Розв'язання. Маємо: $(x + y)(x - y) = 14$. Далі можна скористатися методом, описаним у прикладі 2. Проте набагато зручніше керуватися таким очевидним міркуванням: значення виразів $x + y$ і $x - y$ завжди мають однакову парність (або обидва парні, або обидва непарні), отже, їх добуток є або числом непарним, або числом, яке кратне 4.

Тепер зрозуміло, що рівняння, яке розглядається, не має розв'язків у цілих числах.

ПРИКЛАД 4 Цілі числа x і y такі, що $(6x + 11y) \vdots 31$. Доведіть, що $(x + 7y) \vdots 31$.

Розв'язання. Маємо: $x + 7y = 31(x + 2y) - 5(6x + 11y)$. Оскільки $31(x + 2y) \vdots 31$, а з умови і властивості 3 випливає, що $5(6x + 11y) \vdots 31$, то за властивістю 6 різниця, що розглядається, кратна 31.

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що коли $P(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами, то для будь-яких цілих чисел p і q, $p \neq q$, $(P(p) - P(q)) \vdots (p - q)$.

Розв'язання. Нехай

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Тоді

$$P(p) - P(q) = a_n (p^n - q^n) + a_{n-1} (p^{n-1} - q^{n-1}) + \ldots + a_1 (p - q).$$

З формули розкладання на множники виразів виду $a^n - b^n$ випливає, що різницю $P(p) - P(q)$ можна подати у вигляді $(p - q)k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

?

1. Коли кажуть, що ціле число a ділиться націло на ціле число b?
2. Що означає запис $a \vdots b$?
3. Яке число називають дільником числа a?
4. Яке число називають кратним числа b?
5. Сформулюйте властивості подільності націло.

39.1.° Число[1] a кратне 5. Доведіть, що $8a \vdots 40$.

39.2.° Число b кратне 7. Доведіть, що $6b \vdots 42$.

39.3.° Число m кратне 6. Доведіть, що $(m^2 - 4m) \vdots 12$.

39.4.° Число n кратне 4. Доведіть, що $(n^2 + 8n) \vdots 16$.

39.5.° Числа c і d такі, що $c \vdots 4$, $d \vdots 6$. Доведіть, що $(6c + 4d) \vdots 24$.

39.6.° Числа p і q такі, що $p \vdots 5$, $q \vdots 8$. Доведіть, що $(8p - 5q) \vdots 40$.

39.7.° Доведіть, що коли $a \vdots c$ і $(a + b) \vdots c$, то $b \vdots c$.

39.8.° Числа a і b такі, що кожне з чисел $a + 3$ і $b + 29$ кратне 13. Доведіть, що число $a - b$ також кратне 13.

39.9.° Числа m і n такі, що кожне з чисел $m + 5$ і $39 - n$ кратне 17. Доведіть, що число $m + n$ також кратне 17.

39.10.° Доведіть, що $(\overline{ab} + \overline{ba}) \vdots 11$.

39.11.° Доведіть, що $(\overline{ab} - \overline{ba}) \vdots 9$.

39.12.° Доведіть, що $(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) \vdots 111$.

39.13.° Доведіть, що $(\overline{abc} - \overline{cba}) \vdots 99$.

39.14.° Доведіть, що при будь-яких значеннях a і b значення виразу $a^2b - b^2a$ є парним числом.

39.15.• Числа a, b, m такі, що $am \vdots (a + b)$. Доведіть, що $bm \vdots (a + b)$.

---

[1] У цьому пункті буквами позначено цілі числа. Випадки, коли буквою позначено натуральне число, будуть обумовлені окремо.

39.16.$^{\bullet}$ Числа x, y, z такі, що $xz \vdots (z - y)$. Доведіть, що $xy \vdots (z - y)$.

39.17.$^{\bullet}$ Числа m, n, k такі, що $(m - n) \vdots k$ і $mn \vdots k$. Доведіть, що $(m^3 + n^3) \vdots k$.

39.18.$^{\bullet}$ Числа a, b, m, n такі, що $(ab - mn) \vdots (b - m)$. Доведіть, що $(am - bn) \vdots (b - m)$.

39.19.$^{\bullet}$ Числа a, b, c, d такі, що $(ab + cd) \vdots (a + c)$. Доведіть, що $(ad + bc) \vdots (a + c)$.

39.20.$^{\bullet}$ Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $9x^2 - y^2 = 6$;
2) $x^2 + 2xy = 2x + 9$;
3) $x^2 + 2xy - x - 2y = 4$;
4) $x^2 - 4xy + 3y^2 = 3$;
5) $x^2 + xy - 6y^2 = 6$;
6) $x^2 - 2xy - 3y^2 + x + y = 14$.

39.21.$^{\bullet}$ Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $x^2 - 4y^2 = 5$;
2) $y^2 + 3xy = 15 + y$;
3) $x^2 - 3xy + 3y - x = 10$;
4) $2y^2 - xy - x^2 = 2$.

39.22.$^{\bullet}$ Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $xy = x + y$;
2) $xy - x - 2y = 5$.

39.23.$^{\bullet}$ Розв'яжіть у цілих числах рівняння $2xy + 2x - 3y - 4 = 0$.

39.24.$^{\bullet}$ Доведіть, що при будь-яких непарних натуральних значеннях n значення виразу $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + 9^n$:

1) кратне 5;
2) не кратне 10.

39.25.$^{\bullet}$ Доведіть, що при будь-яких непарних натуральних значеннях $n > 1$ значення виразу $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + 99^n$ кратне 100.

39.26.$^{\bullet}$ Чи існує многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами такий, що $P(1) = 17$, $P(9) = 53$?

39.27.$^{\bullet}$ Знайдіть усі двоцифрові числа $\overline{ab}$ такі, що значення виразу $\overline{ab} - \overline{ba}$ є квадратом натурального числа.

39.28.$^{\bullet}$ Чи існує таке трицифрове число $\overline{abc}$, що значення виразу $\overline{abc} - \overline{cba}$ є квадратом натурального числа?

39.29.$^{\bullet}$ Чи існує таке трицифрове число $\overline{abc}$, що значення виразу $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ є квадратом натурального числа?

39.30.$^{\bullet\bullet}$ Числа x і y такі, що значення виразу $3x + 8y$ кратне 19. Доведіть, що значення виразу $13x + 3y$ кратне 19.

39.31.$^{\bullet\bullet}$ Числа c і d такі, що значення виразу $2c + 5d$ кратне 17. Доведіть, що значення виразу $11c + 2d$ кратне 17.

39.32.$^{\bullet\bullet}$ Числа x і y такі, що $(3x + 10y) \vdots 13$. Доведіть, що $(3x + 10y)(3y + 10x) \vdots 169$.

39.33.$^{\bullet\bullet}$ Натуральні числа m і n такі, що $n^2 \vdots (m + n)$. Доведіть, що $m^3 \vdots (m + n)$.

39.34.** Натуральні числа a і b такі, що $a^3 \vdots (a^2 + b^2)$. Доведіть, що $b^4 \vdots (a^2 + b^2)$.

39.35.** Трицифрове число $\overline{abc}$ кратне числу 37. Доведіть, що сума чисел $\overline{bca}$ і $\overline{cab}$ також кратна числу 37.

39.36.** Цифри a і b трицифрового числа $m = \overline{aba}$ такі, що $(a + b) \vdots 7$. Доведіть, що $m \vdots 7$.

39.37.** Сума п'яти натуральних чисел дорівнює 200. Чи може остання цифра їх добутку бути рівною 7?

39.38.** На який найбільший степінь числа 2 може ділитися націло значення виразу $3^{2n+1} + 1$ при $n \in \mathbb{N}$?

39.39.** Доведіть, що кількість дільників квадрата натурального числа — число непарне. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

39.40.* П'ятицифрове число $A = \overline{abcde}$ кратне числу 41. Доведіть, що число $B = \overline{bcdea}$ також кратне числу 41.

39.41.* Шестицифрове число $A = \overline{abcdef}$ кратне числу 37. Доведіть, що число $B = \overline{bcdefa}$ також кратне числу 37.

39.42.* Дано 19-цифрове число, десятковий запис якого не містить нулів. Доведіть, що в запису цього числа можна закреслити кілька цифр так, щоб число, отримане в результаті, було кратним числу 111.

39.43.* Дано многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами. Різні числа a, b і c такі, що $P(a) = P(b) = P(c) = -1$. Доведіть, що не існує такого $x_0 \in \mathbb{Z}$, що $P(x_0) = 0$.

40. Ділення з остачею. Конгруенції та їх властивості

З курсу математики молодших класів ви знаєте, що коли натуральне число a не ділиться націло на натуральне число b і $a > b$, то можна виконати ділення з остачею.

Наприклад, при діленні числа 47 на 5 у частці отримуємо 9, а в остачі 2. Пишуть: $47 : 5 = 9$ (ост 2) або $47 = 5 \cdot 9 + 2$ і кажуть, що число 47 при діленні на 5 дає в остачі число 2.

Розширимо тепер поняття «ділення з остачею» на випадок, коли ділене є цілим числом.

Теорема 40.1. ***Для будь-якого цілого числа a і натурального числа b існує єдина пара цілих чисел q і r таких, що $a = bq + r$, де $0 \leqslant r < b$.***

Якщо $r \neq 0$, то число q називають **неповною часткою**. Число r називають **остачею**.

Наступні приклади ілюструють цю теорему.

Для чисел $a = 2$, $b = 7$ існує пара $q = 0$ і $r = 2$, тобто $2 = 7 \cdot 0 + 2$.

Для чисел $a = -2$, $b = 5$ існує пара $q = -1$ і $r = 3$, тобто $-2 = 5 \cdot (-1) + 3$.

Для чисел $a = -8$, $b = 4$ існує пара $q = -2$ і $r = 0$, тобто $-8 = 4 \cdot (-2) + 0$.

Тепер доведемо теорему.

Доведення. Якщо $a \,\vdots\, b$, то існує єдине ціле число q таке, що $a = bq$. У цьому випадку $r = 0$.

Нехай тепер a не ділиться націло на b. Зобразимо на координатній прямій множину чисел, кратних b (рис. 40.1):

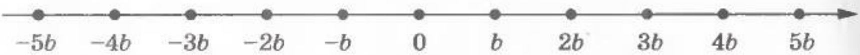


Рис. 40.1

Число a не збігається з жодною з позначених точок і належить одному з проміжків виду $(bq;\ bq + b)$, тобто $bq < a < bq + b$ (рис. 40.2). Звідси $0 < a - bq < b$.

Рис. 40.2

Позначимо різницю $a - bq$ буквою r. Тоді $0 < r < b$.

Маємо: $a - bq = r$, $a = bq + r$.

Оскільки проміжок $(bq;\ bq + b)$, якому належить число a, визначається однозначно, то однозначно визначається й пара чисел q і r. ▲

З доведеної теореми випливає, наприклад, що будь-яке ціле число при діленні на 2 дає в остачі або 0, або 1. Ми цим часто користуємось, розбиваючи множину цілих чисел на дві підмножини, які не перетинаються: множину парних чисел $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ і множину непарних чисел $\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

При діленні цілого числа на 3 можна отримати тільки такі остачі: 0, 1, 2. Тому множину $\mathbb{Z}$ можна розбити на 3 підмножини, які не перетинаються:

$$\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Узагалі, для заданого натурального числа m, де $m > 1$, множину $\mathbb{Z}$ можна розбити на m підмножин, які не перетинаються, таким чином, що першій підмножині належатимуть усі числа, які при діленні на m дають в остачі 0, другій — які дають в остачі 1, третій — які дають в остачі 2, і т. д., m-й — які дають в остачі $m - 1$:

$$\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{mk + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \ldots \cup \{mk + m - 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Теорема 40.2. ***Якщо цілі числа a і b при діленні на натуральне число m дають однакові остачі, то $(a - b) \vdots m$.***

Доведення. Нехай $a = mq_1 + r$, $b = mq_2 + r$, де $0 \leqslant r < m$. Тоді $a - b = m(q_1 - q_2)$. Звідси $(a - b) \vdots m$. ▲

Справедлива й обернена теорема.

Теорема 40.3. ***Якщо цілі числа a і b такі, що $(a - b) \vdots m$, де $m \in \mathbb{N}$, то числа a і b дають однакові остачі при діленні на m.***

Скориставшись методом доведення від супротивного, доведіть цю теорему самостійно.

Означення. Цілі числа a і b називають конгруентними за модулем m ($m \in \mathbb{N}$), якщо остачі при діленні їх на число m рівні.

Пишуть $a \equiv b \pmod{m}$. Такий запис називають **конгруенцією**. Читають: «a конгруентне b за модулем m».

Наприклад, $5 \equiv 8 \pmod 3$, $7 \equiv -1 \pmod 4$, $18 \equiv 0 \pmod 9$, $25 \equiv 35 \pmod 5$.

Поняття конгруентності за модулем впровадив у математику видатний німецький математик Карл Фрідріх Гаусс.

Роботи Гаусса справили значний вплив на розвиток алгебри, теорії чисел, диференціальної геометрії, теорії електрики і магнетизму, геодезії, теоретичної астрономії.

Карл Фрідріх Гаусс (1777–1855)

Теорема 40.4. ***Для того щоб цілі числа a і b були конгруентними за модулем m, де $m \in \mathbb{N}$, необхідно й достатньо, щоб різниця $a - b$ ділилася націло на m.***

Справедливість цієї теореми випливає з теорем 40.2 і 40.3. Переконайтеся в цьому самостійно.

Розглянемо основні властивості конгруенцій (буквами a, b, c, d позначено цілі числа, m і n — натуральні).

1. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
2. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.
3. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $ac \equiv bc \pmod{m}$.
4. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$ і $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.
5. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$ і $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.
6. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Доведемо властивість 5.

З умови випливає, що $(a - b) \vdots m$, тобто $a = b + mt_1$, де $t_1 \in \mathbb{Z}$. Також $(c - d) \vdots m$, тобто $c = d + mt_2$, де $t_2 \in \mathbb{Z}$.

Маємо:

$$ac - bd = (b + mt_1)(d + mt_2) - bd = bmt_2 + dmt_1 + m^2 t_1 t_2 = m(bt_2 + dt_1 + mt_1 t_2).$$

Отже, $(ac - bd) \vdots m$. Тоді $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Доведемо властивість 6.

Маємо:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

З умови випливає, що $(a - b) \vdots m$. Тоді $(a^n - b^n) \vdots m$.

Решту властивостей доведіть самостійно.

Властивості 4 і 5 узагальнюються й для тих випадків, коли конгруенцій більше двох.

Якщо $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, ..., $a_n \equiv b_n \pmod{m}$, то

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_n \pmod{m} \text{ і}$$
$$a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \equiv b_1 b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \pmod{m}.$$

ПРИКЛАД 1 Непарне число m ділиться націло на 3. Чому дорівнює остача при діленні числа m на 6?

Розв'язання. При діленні цілого числа на 6 можуть бути отримані остачі 0, 1, 2, 3, 4, 5. Тому будь-яке ціле число можна подати в одному з таких виглядів:

$6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, $6k + 5$, де $k \in \mathbb{Z}$.

З цих чисел кратні 3 тільки числа виду $6k$ і $6k + 3$. Оскільки число m непарне, то воно може бути тільки виду $6k + 3$. Отже, число m при діленні на 6 дає в остачі 3.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що серед п'яти послідовних цілих чисел є тільки одне, яке кратне 5.

Розв'язання. Розглянемо п'ять послідовних цілих чисел: n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$. Оскільки модуль різниці будь-яких двох таких чисел менший від 5 і не дорівнює нулю, то він не ді-

ділиться націло на 5. Отже, усі ці п'ять чисел дають різні остачі при діленні на 5. Різних остач при діленні на 5 також 5. Отже, одне з цих чисел при діленні на 5 дає в остачі 0.

З а у в а ж е н н я. Міркуючи аналогічно, можна довести, що серед m послідовних цілих чисел є тільки одне, яке кратне m.

ПРИКЛАД 3 Чому може дорівнювати остача при діленні числа n^4 на 5, де $n \in \mathbb{Z}$?

Розв'язання. Має місце одна з п'яти конгруенцій: $n \equiv 0 \pmod 5$, $n \equiv 1 \pmod 5$, $n \equiv 2 \pmod 5$, $n \equiv 3 \pmod 5$, $n \equiv 4 \pmod 5$.

Піднесемо обидві частини кожної з цих конгруенцій до четвертого степеня.

$$n^4 \equiv 0 \pmod 5,$$
$$n^4 \equiv 1 \pmod 5,$$
$$n^4 \equiv 16 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5,$$
$$n^4 \equiv 81 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5,$$
$$n^4 \equiv 256 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5.$$

Отже, при діленні числа n^4 на 5 в остачі можуть бути отримані тільки числа 0 і 1.

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n}$ кратне 7.

Розв'язання. Маємо:

$$2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n} = 8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n.$$

Очевидно, що $16 \equiv 9 \pmod 7$. Застосовуючи послідовно властивості 6, 3, 2 конгруенцій, запишемо:

$$16^n \equiv 9^n \pmod 7,$$
$$8 \cdot 16^n \equiv 8 \cdot 9^n \pmod 7,$$
$$8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n \equiv 8 \cdot 9^n + 13 \cdot 9^n \pmod 7,$$
$$8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n \equiv 21 \cdot 9^n \pmod 7.$$

Права частина останньої конгруенції при діленні на 7 дає в остачі 0. Отже, така властивість притаманна й лівій частині конгруенції.

ПРИКЛАД 5 Знайдіть остачу від ділення числа 7^{29} на 5.

Розв'язання. Задача зводиться до того, щоб знайти ціле число x, яке задовольняє дві умови: $0 \leqslant x < 5$ і $7^{29} \equiv x \pmod 5$. Маємо:

$$7^2 \equiv -1 \pmod 5;$$
$$7^{28} \equiv (-1)^{14} \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5;$$
$$7^{29} \equiv 7 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 5.$$

Отже, шуканою остачею є число 2.

Розв'язання цієї задачі припускає й інші схеми. Наприклад,

$$7 \equiv 2 \pmod 5;$$
$$7^4 \equiv 2^4 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5;$$
$$7^{28} \equiv 1^7 \pmod 5;$$
$$7^{29} \equiv 7 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 5.$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що з $n + 1$ натуральних чисел завжди можна вибрати два таких, що їх різниця ділиться націло на n.

Розв'язання. При діленні цілих чисел на n можна отримати n різних остач: 0, 1, ..., $n - 1$. Оскільки заданих чисел $n + 1$, то щонайменше два з них дають однакові остачі при діленні на n. Тоді їх різниця буде ділитися націло на n.

1. Сформулюйте теорему про ділення з остачею.
2. Яку властивість має різниця цілих чисел a і b, які при діленні на натуральне число m дають однакові остачі?
3. Яку властивість мають остачі при діленні цілих чисел a і b на натуральне число m, якщо $(a - b) \vdots m$?
4. Які числа називають конгруентними за модулем m, де $m \in \mathbb{N}$?
5. Сформулюйте необхідну й достатню умову того, що цілі числа a і b конгруентні за модулем m, де $m \in \mathbb{N}$.
6. Сформулюйте властивості конгруенцій.

40.1.° Знайдіть неповну частку і остачу при діленні числа[1] a на число b, якщо:

1) $a = 253$, $b = 19$;
2) $a = 8$, $b = 13$;
3) $a = -26$, $b = 3$;
4) $a = -1$, $b = 7$.

40.2.° Знайдіть неповну частку і остачу при діленні числа m на число n, якщо:

1) $m = 9$, $n = 15$; 2) $m = -31$, $n = 10$; 3) $m = -6$, $n = 11$.

40.3.° Які остачі можна отримати при діленні цілого числа на 7?

40.4.° Задайте всі множини, кожна з яких складається з усіх цілих чисел, які мають однакові остачі при діленні на 4.

40.5.° Дано множини A, B, X, які попарно не перетинаються, і $A \cup B \cup X = \mathbb{Z}$. Знайдіть множину X, якщо $A = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

40.6.° Яку остачу при діленні на 3 дає число виду $3k - 2$, де $k \in \mathbb{Z}$?

40.7.° Яку остачу при діленні на 6 дає число виду $6n - 1$, де $n \in \mathbb{Z}$?

[1] Тут і далі буквами позначено цілі числа.

40.8.° Відомо, що при діленні числа m на 18 остача дорівнює 11. Знайдіть остачу при діленні числа m: 1) на 2; 2) на 3; 3) на 6; 4) на 9.

40.9.° Відомо, що при діленні числа n на 16 остача дорівнює 9. Знайдіть остачу при діленні числа n: 1) на 2; 2) на 4; 3) на 8.

40.10.° Число m кратне 6. Чому може дорівнювати остача при діленні числа m на 18?

40.11.° Число n кратне 4. Чому може дорівнювати остача при діленні числа m на 16?

40.12.° Число a при діленні на 6 дає в остачі 3, а при діленні на 4 дає в остачі 1. Знайдіть остачу при діленні числа a на 12.

40.13.° Число b при діленні на 5 дає в остачі 2, а при діленні на 3 дає в остачі 1. Знайдіть остачу при діленні числа b на 15.

40.14.° Число m дає рівні остачі при діленні на 3 і на 4. Чому може дорівнювати остача при діленні числа m на 12?

40.15.° Замість знака $*$ запишіть таке найменше невід'ємне число, щоб отримана конгруенція була правильною:

1) $56 \equiv * \pmod 8$;
2) $23 \equiv * \pmod 7$;
3) $-43 \equiv * \pmod 5$;
4) $* \equiv 3 \pmod{15}$;
5) $* \equiv -2 \pmod{18}$;
6) $* \equiv 6 \pmod 2$.

40.16.° Замість знака $*$ запишіть таке найменше невід'ємне число, щоб отримана конгруенція була правильною:

1) $84 \equiv * \pmod 9$;
2) $-26 \equiv * \pmod 6$;
3) $* \equiv -3 \pmod{11}$.

40.17.° Відомо, що $a \equiv -11 \pmod 8$, $b \equiv -2 \pmod 8$. Знайдіть остачу при діленні на 8 числа: 1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $2a - 3b$; 4) ab; 5) a^2; 6) b^3.

40.18.° Відомо, що $a \equiv -4 \pmod 6$, $b \equiv -9 \pmod 6$. Знайдіть остачу при діленні на 6 числа: 1) $3a + 4b$; 2) $a^2 - b$; 3) $b^2 + ba$.

40.19.° Чи існує ціле число, яке при діленні на 6 дає остачу 4, а при діленні на 9 остачу 5?

40.20.• Доведіть, що остача при діленні на 3 квадрата цілого числа може дорівнювати тільки 0 або 1.

40.21.• Доведіть, що остача при діленні на 4 квадрата цілого числа може дорівнювати тільки 0 або 1.

40.22.• Доведіть, що квадрат непарного числа при діленні на 8 дає в остачі 1.

40.23.• Чому може дорівнювати остача при діленні числа m^3 на 7?

40.24.• Чому може дорівнювати остача при діленні числа k^3 на 9?

40.25.° Числа a і b такі, що $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$. Доведіть, що $a \equiv 0 \pmod 3$ і $b \equiv 0 \pmod 3$.

40.26.° Числа m і n такі, що $m^2 + n^2 \equiv 0 \pmod 7$. Доведіть, що $m \equiv 0 \pmod 7$ і $n \equiv 0 \pmod 7$.

40.27.° Відомо, що $(a^2 + b^2) \vdots 3$. Доведіть, що $(a^2 + b^2) \vdots 9$.

40.28.° Відомо, що $(m^2 + n^2) \vdots 7$. Доведіть, що $(m^2 + n^2) \vdots 49$.

40.29.° Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $x^2 - 3y = 8$;
2) $x^2 - 4y^3 = 11$;
3) $m^3 - 7n^2 = 19$;
4) $z^3 - 9t = 16$.

40.30.° Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

1) $x^2 - 3y^2 = 17$;
2) $9x^2 - 28y = 15$;
3) $8x^3 + 7y^3 = 38$;
4) $16x^4 - 5y^3 = 18$.

40.31.° Використовуючи конгруенції, доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу:

1) $11^n + 14 \cdot 6^n$ кратне 5;
2) $3^{2n} + 11 \cdot 5^n$ кратне 4;
3) $21^n + 2^{2n+4}$ кратне 17;
4) $4 \cdot 13^n + 37^n + 1$ кратне 6;
5) $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ кратне 23;
6) $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ кратне 19;
7) $5^n + 8^n - 2^{n+1}$ кратне 3;
8) $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ кратне 37.

40.32.° Використовуючи конгруенції, доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу:

1) $17^n + 25 \cdot 4^n$ кратне 13;
2) $16^n + 4^{2n+1}$ кратне 5;
3) $15^n + 2^{3n} - 30$ кратне 7;
4) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ кратне 11;
5) $17 \cdot 21^{2n+1} + 9 \cdot 43^{2n+1}$ кратне 8;
6) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ кратне 17.

40.33.° Знайдіть остачу від ділення числа a на число b, якщо:

1) $a = 5^{99}$, $b = 3$;
2) $a = 7^{36}$, $b = 4$;
3) $a = 3^{101}$, $b = 7$;
4) $a = 3^{70} + 2^{52}$, $b = 5$.

40.34.° Знайдіть остачу від ділення числа m на число n, якщо:

1) $m = 11^{43}$, $n = 7$;
2) $m = 13^{52}$, $n = 17$;
3) $m = 3^{30}$, $n = 31$.

40.35.° Сума остач від ділення натурального числа n на числа 3, 6 і 9 дорівнює 15. Знайдіть ці остачі.

40.36.°° Доведіть, що серед чисел виду $4^n + 4^m$ (m і n — натуральні числа) немає жодного квадрата натурального числа.

40.37.°° Доведіть, що серед чисел виду $5^n + 5^m$ (m і n — натуральні числа) немає жодного квадрата натурального числа.

40.38.°° Про числа m, n, p, q, r, s відомо, що $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 = s^2$. Доведіть, що хоча б одне з цих чисел парне.

40.39.°° Відомо, що p і q — непарні числа. Доведіть, що рівняння $x^2 + px + q = 0$ не має раціональних коренів.

40.40.°° Числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ не діляться націло на 5, а значення виразу $x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_k^4$ кратне 5. Доведіть, що $k \vdots 5$.

40.41.** Доведіть, що при жодному натуральному n значення виразу $1 + n + n^2 + n^3$ не є степенем числа 3.

40.42.** Остача від ділення трицифрового числа $n = \overline{aa5}$ на деяке одноцифрове число дорівнює 8. Знайдіть число n.

40.43.** Остача від ділення трицифрового числа $m = \overline{2bb}$ на деяке одноцифрове число дорівнює 8. Знайдіть число m.

40.44.* Яку найбільшу кількість натуральних чисел від 1 до 100 можна вибрати так, щоб сума будь-яких двох з цих чисел ділилася націло на 6?

40.45.* При діленні натурального числа n на 9 остача дорівнює неповній частці, і при діленні n на 14 остача теж дорівнює неповній частці. Знайдіть усі можливі значення n.

40.46.* При діленні натурального числа n на 26 остача дорівнює неповній частці, і при діленні n на 29 остача теж дорівнює неповній частці. Знайдіть усі можливі значення n.

40.47.* Доведіть, що існує безліч натуральних чисел, які не можна подати у вигляді:
1) суми кубів двох натуральних чисел;
2) суми кубів трьох натуральних чисел.

40.48.* Доведіть, що серед натуральних степенів числа 2 існують два таких, що їх різниця кратна числу 2009.

40.49.* Доведіть, що для будь-якого натурального числа n знайдеться натуральне число, кратне n, у запису якого використовуються тільки цифри 1 і 0.

40.50.* Відомо, що $a + b + c = (a - b)(b - c)(c - a)$. Доведіть, що значення виразу $a + b + c$ є парним і кратним 27.

41. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне двох натуральних чисел. Взаємно прості числа

Якщо кожне з чисел[1] a і b ділиться націло на число d, то число d називають **спільним дільником** чисел a і b.

Зрозуміло, що $d \leqslant a$ і $d \leqslant b$. Отже, множина спільних дільників чисел a і b є скінченною. Виберемо в цій множині найбільший

[1] У цьому пункті буквами позначено натуральні числа. Випадки, коли буквою позначено ціле число, будуть обумовлені окремо.

елемент. Його називають **найбільшим спільним дільником** чисел a і b і позначають НСД $(a; b)$.

Наприклад, НСД (18; 12) = 6, НСД (5; 6) = 1, НСД (7; 14) = 7.

Теорема 41.1. ***Якщо $a > b$, то НСД $(a; b)$ = НСД $(a - b; b)$.***

Доведення. Нехай $a \vdots d$ і $b \vdots d$, тоді $(a - b) \vdots d$. Нехай $(a - b) \vdots d_1$ і $b \vdots d_1$, тоді $a \vdots d_1$. Маємо, що будь-який спільний дільник чисел a і b є спільним дільником чисел $a - b$ і b. І навпаки, будь-який спільний дільник чисел $a - b$ і b є спільним дільником чисел a і b. Отже, множина спільних дільників чисел a і b збігається з множиною спільних дільників чисел $a - b$ і b. Звідси НСД $(a; b)$ = = НСД $(a - b; b)$. ▲

ПРИКЛАД 1 Знайдіть НСД $(6n + 3; 3n)$.

Розв'язання. За теоремою 41.1 можна записати
НСД $(6n + 3; 3n)$ = НСД $(6n + 3 - 3n; 3n)$ = НСД $(3n + 3; 3n)$ = = НСД $(3n + 3 - 3n; 3n)$ = НСД $(3; 3n) = 3$.

Тепер ми познайомимося з іншим, більш загальним методом знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел.

Якщо $a \vdots b$, то очевидно, що НСД $(a; b) = b$.

Розглянемо випадок, коли a не ділиться націло на b. Для визначеності вважатимемо, що $a > b$.

Лема[1] **1.** ***Якщо $a = bq + r$, де $0 < r < b$, то НСД $(a; b)$ = = НСД $(b; r)$.***

Доведення цієї леми аналогічне доведенню теореми 41.1. Проведіть його самостійно.

З леми випливає, що знаходження НСД $(a; b)$ зводиться до знаходження НСД $(b; r)$.

Позначимо через r_1 остачу від ділення числа b на число r. Тоді за лемою НСД $(b; r)$ = НСД $(r; r_1)$. Далі позначимо через r_2 остачу від ділення числа r на число r_1. Тоді НСД $(r; r_1)$ = НСД $(r_1; r_2)$ і т. д.

Випишемо відповідні рівності:

$$a = bq + r,\ 0 < r < b;$$
$$b = rq_1 + r_1,\ 0 < r_1 < r;$$
$$r = r_1q_2 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1;$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2;$$
$$\ldots$$

[1] Лемою називають допоміжну теорему, яку використовують для доведення інших теорем.

Маємо ланцюжок нерівностей $b > r > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots \geqslant 0$. Як бачимо, остачі зменшуються. Отже, на якомусь кроці остача дорівнюватиме нулю. Нехай r_n — остання ненульова остача, тобто

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n;$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}.$$

Із леми випливає, що

НСД $(a; b)$ = НСД $(b; r)$ = НСД $(r; r_1) = \ldots =$ НСД $(r_{n-1}; r_n)$.

Оскільки $r_{n-1} \vdots r_n$, то НСД $(r_{n-1}; r_n) = r_n$. Отже, НСД $(a; b) = r_n$.

Описаний метод знаходження НСД $(a; b)$ називають **алгоритмом Евкліда**.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть НСД (525; 231).

Розв'язання. $525 = 231 \cdot 2 + 63;$

$$231 = 63 \cdot 3 + 42;$$
$$63 = 42 \cdot 1 + 21;$$
$$42 = 21 \cdot 2 + 0.$$

Отже, НСД (525; 231) = 21.

ПРИКЛАД 3 Один майстер робить на довгій стрічці позначки синім олівцем через кожні 25 см, а другий — червоним через кожні 36 см, починаючи з одного й того самого місця. Чи може яка-небудь синя позначка виявитися на відстані 1 см від якої-небудь червоної?

Розв'язання. Нехай x і y — кількість позначок, зроблених першим і другим майстрами відповідно. Відповідь на запитання задачі буде позитивною, якщо рівняння $25x - 36y = 1$ має розв'язок у натуральних числах.

Застосуємо алгоритм Евкліда до чисел 36 і 25:

$$36 = 25 \cdot 1 + 11;$$
$$25 = 11 \cdot 2 + 3;$$
$$11 = 3 \cdot 3 + 2;$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1.$$

Перепишемо ці рівності так:

$$11 = 36 - 25 \cdot 1;$$
$$3 = 25 - 11 \cdot 2;$$
$$2 = 11 - 3 \cdot 3;$$
$$1 = 3 - 2 \cdot 1.$$

Звідси $1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (11 - 3 \cdot 3) = 4 \cdot 3 - 11 = 4(25 - 11 \cdot 2) - 11 = 4 \cdot 25 - 9 \cdot 11 = 4 \cdot 25 - 9(36 - 25 \cdot 1) = 13 \cdot 25 - 9 \cdot 36$.

Отже, $13 \cdot 25 - 9 \cdot 36 = 1$, тобто пара (13; 9) є розв'язком рівняння $25x - 36y = 1$.

Виникає природне запитання: «Чому за допомогою алгоритму Евкліда нам вдалося знайти цілі розв'язки розглядуваного рівняння?» Річ у тім, що справедливе таке твердження: рівняння $ax + by =$ НСД $(a; b)$ завжди має розв'язки в цілих числах, причому один з розв'язків $(x_0; y_0)$ можна знайти за допомогою алгоритму Евкліда. Більш того, усі цілі розв'язки цього рівняння задаються формулами $x = x_0 - bt$, $y = y_0 + at$, де $t \in \mathbb{Z}$. Цей факт ви зможете довести на заняттях математичного гуртка.

Якщо числа a і b є дільниками числа k, то число k називають **спільним кратним** чисел a і b.

Серед спільних кратних чисел a і b є найменше. Його називають **найменшим спільним кратним** чисел a і b і позначають НСК $(a; b)$.

Наприклад, НСК $(8; 12) = 24$, НСК $(7; 8) = 56$, НСК $(64; 16) = 64$.

Теорема 41.2. ***НСК** $(a; b)$ **є дільником будь-якого спільного кратного чисел** a **і** b.*

Доведення. Нехай НСК $(a; b) = k$ і k_1 — спільне кратне чисел a і b, $k_1 > k$.

Припустимо, що k_1 не ділиться націло на k. Тоді $k_1 = kq + r$, де $0 < r < k$. Звідси $r = k_1 - kq$. Кожне з чисел k_1 і k кратне і a, і b, отже, $r \vdots a$ і $r \vdots b$, тобто r — спільне кратне чисел a і b. Проте $r < k$. Отримали суперечність. ▲

Теорема 41.3. ***Якщо** $a \vdots c$ **і** $b \vdots c$, **то** $\frac{ab}{c}$ **— спільне кратне чисел** a **і** b.*

Доведення. З умови випливає, що існують такі числа m і n, що $a = cm$ і $b = cn$. Тоді $\frac{ab}{c} = \frac{cmcn}{c} = cmn = an = bm$. Отже, число $\frac{ab}{c}$ кратне числам a і b. ▲

Теорема 41.4. ***НСК** $(a; b) \cdot$ **НСД** $(a; b) = ab$.*

Доведення. Нехай НСК $(a; b) = k$, НСД $(a; b) = d$. Очевидно, що число ab є спільним кратним чисел a і b. Тоді за теоремою 41.2 маємо $ab \vdots k$. Отже, існує таке число c, що

$$ab = ck.$$

Оскільки $k \vdots a$, то існує таке число m, що $k = ma$. Маємо: $ab = cma$. Звідси $b = cm$. Отже, $b \vdots c$.

Аналогічно доводиться, що $a \vdots c$. Отже, c — спільний дільник чисел a і b. Тоді $d \geqslant c$. З рівності $ab = ck$ маємо:

$$k = \frac{ab}{c} \geqslant \frac{ab}{d}. \quad (1)$$

З іншого боку, за теоремою 41.3 число $\frac{ab}{d}$ є спільним кратним чисел a і b. Отже,

$$\frac{ab}{d} \geqslant k. \quad (2)$$

З нерівностей (1) і (2) отримуємо, що $\frac{ab}{d} = k$. ▲

Означення. **Якщо НСД $(a; b) = 1$, то числа a і b називають взаємно простими.**

Наприклад, 9 і 25, 16 і 1, 28 і 29 — пари взаємно простих чисел.

Теорема 41.5. ***Якщо НСД $(a; b) = 1$, то НСК $(a; b) = ab$.***

Справедливість цього твердження випливає з теореми 41.4.

Теорема 41.6. ***Якщо НСД $(b; c) = 1$, $a \vdots b$ і $a \vdots c$, то $a \vdots bc$.***

Доведення. Оскільки НСД $(b; c) = 1$, то НСК $(b; c) = bc$. З умови випливає, що a — спільне кратне чисел b і c. Тоді за теоремою 41.2 $a \vdots$ НСК $(b; c)$, тобто $a \vdots bc$. ▲

Теорема 41.7. ***Якщо НСД $(a; b) = 1$ і $ac \vdots b$, то $c \vdots b$.***

Доведення. З умови випливає, що НСК $(a; b) = ab$. Також зрозуміло, що ac — спільне кратне чисел a і b. Отже, $ac \vdots ab$. Тоді існує таке число k, що $ac = kab$. Звідси $c = kb$. Отже, $c \vdots b$. ▲

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що значення виразу $n^3 - n$ ділиться націло на 6 при будь-якому значенні n.

Розв'язання. Маємо: $n^3 - n = (n-1)\,n\,(n+1)$. Оскільки з двох послідовних натуральних чисел одне кратне 2, а з трьох послідовних натуральних чисел одне кратне 3, то за теоремою 41.6 значення даного виразу кратне $2 \cdot 3$, тобто 6.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $x\,(y-1)^2 = 8y$.

Розв'язання. Очевидно, що $y \neq 1$. Оскільки ліва частина рівняння кратна $y - 1$, то й права частина рівняння кратна $y - 1$. Числа y і $y - 1$ взаємно прості (доведіть це самостійно). Тоді за

теоремою 41.7 маємо, що $8 \vdots (y-1)^2$. Звідси $(y-1)^2 = 1$ або $(y-1)^2 = 4$. З урахуванням $y \in \mathbb{N}$ отримуємо $y = 2$ або $y = 3$. Далі отримуємо, що $x = 16$ або $x = 6$.
Відповідь: (16; 2); (6; 3).

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що коли $a \equiv b \pmod{m}$, $a \vdots n$, $b \vdots n$, НСД $(m; n) = 1$, то $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod{m}$.

Розв'язання. З умови випливає, що існують такі числа k_1 і k_2, що $a = nk_1$ і $b = nk_2$. Маємо: $a - b = n(k_1 - k_2) \vdots m$. Оскільки НСД $(m; n) = 1$, то за теоремою 41.7 $(k_1 - k_2) \vdots m$, тобто $k_1 \equiv$ $\equiv k_2 \pmod{m}$. Звідси $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod{m}$.

?

1. Яке число називають найбільшим спільним дільником чисел a і b?
2. Чому дорівнює НСД $(a; b)$, якщо $a \vdots b$?
3. Опишіть алгоритм Евкліда.
4. Яке число називають найменшим спільним кратним чисел a і b?
5. Чому дорівнює добуток НСК $(a; b) \cdot$ НСД $(a; b)$?
6. Які числа називають взаємно простими?
7. Чому дорівнює найменше спільне кратне взаємно простих чисел?

41.1.° Знайдіть НСД чисел:
1) 253 і 299; 2) 2491 і 2773.

41.2.° Знайдіть НСД чисел:
1) 899 і 1073; 2) 4757 і 5561.

41.3.° Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$:
1) НСД $(n; n + 1) = 1$; 2) НСД $(2n; 2n + 2) = 2$.

41.4.° Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$:
1) НСД $(n; 2n + 1) = 1$; 2) НСД $(8n + 4; 4n) = 4$.

41.5.° Чому може дорівнювати НСД $(a; b)$, якщо:
1) $a = n$, $b = n + 2$; 2) $a = n$, $b = 4n + 3$?

41.6.° Чому може дорівнювати НСД $(a; b)$, якщо:
1) $a = 2n + 1$, $b = 2n + 3$; 2) $a = 2n + 1$, $b = 8n + 7$?

41.7.° Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ є нескоротним дріб:
1) $\frac{4n+3}{20n+23}$; 2) $\frac{12n+1}{30n+2}$.

41.8.° Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ є нескоротним дріб:

1) $\frac{3n+1}{15n+14}$; 2) $\frac{16n+1}{40n+2}$.

41.9.° Ціле число n кратне 3 і кратне 4. Чи правильно, що n кратне 12?

41.10.° Ціле число n кратне 6 і кратне 8. Чи правильно, що n кратне 48?

41.11.° Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{Z}$ значення виразу:

1) $n^2 + n$ кратне 2;
2) $n^3 + 3n^2 + 2n$ кратне 6;
3) $n^4 - n^2$ кратне 12.

41.12.° Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{Z}$ значення виразу:

1) $n^2 - n$ кратне 2;
2) $n^3 + 11n$ кратне 6;
3) $(n^2 - 1)(n^2 - 2n)$ кратне 24.

41.13.• Чи існують такі цілі числа a, b, c, що:

1) $a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 = 1001$;
2) $a^3 + b^3 + c^3 - a - b - c = 1004$?

41.14.• Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{Z}$ є цілим числом значення виразу:

1) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$; 2) $\frac{n^5 - n}{30}$; 3) $\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{120}$.

41.15.• Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{Z}$ є цілим числом значення виразу:

1) $\frac{n^3 + 5n}{6}$; 2) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$; 3) $\frac{(n^2-1)(n^2+2n)}{24}$.

41.16.• Знайдіть натуральні числа m і n, якщо:

1) $\frac{m}{n} = \frac{7}{3}$, НСД $(m; n) = 5$;

2) $\frac{m}{n} = \frac{4}{11}$, НСК $(m; n) = 88$;

3) НСД $(m; n) = 3$, $mn = 117$;

4) НСД $(m; n) = 7$, НСК $(m; n) = 1001$.

41.17.• Знайдіть натуральні числа a і b, якщо:

1) $\frac{a}{b} = \frac{13}{5}$, НСД $(a; b) = 3$; 2) $\frac{a}{b} = \frac{7}{8}$, НСК $(a; b) = 224$.

41.18.•• Від прямокутника розмірами 324×141 мм відрізають квадрати зі стороною 141 мм, поки не залишиться прямокутник, у якого довжина однієї сторони менша ніж 141 мм. Від отриманого прямокутника знову відрізають квадрати, сторона яких дорівнює довжині його меншої сторони, і т. д. Яка довжина сторони останнього квадрата?

41.19.** Із 100 послідовних натуральних чисел вибрали 51 число. Доведіть, що серед вибраних чисел є такі числа a і b, що НСД $(a; b) = 1$.

41.20.** Найменше спільне кратне деяких двох натуральних чисел у 16 разів більше за їх найбільший спільний дільник. Доведіть, що одне з цих чисел кратне другому.

41.21.** Найменше спільне кратне деяких двох натуральних чисел у 27 разів більше за їх найбільший спільний дільник. Доведіть, що одне з цих чисел кратне другому.

41.22.** Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $x(y+1)^2 = 243y$.

41.23.* Натуральні числа m і n такі, що НСК $(m; n)$ + НСД $(m; n) = m + n$. Доведіть, що одне з чисел (m або n) ділиться націло на друге.

41.24.* Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ дріб $\dfrac{n^4+4n^2+3}{n^4+6n^2+8}$ є нескоротним.

41.25.* Натуральне число n таке, що значення виразу

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

кратне 2000. Знайдіть найменше значення n.

41.26.* Знайдіть усі пари натуральних чисел m і n таких, що НСК $(m; n)$ − НСД $(m; n) = \dfrac{mn}{3}$.

41.27.* Три автомати друкують на картках пари цілих чисел. Кожний автомат, прочитавши деяку картку, видає нову картку. Прочитавши картку з парою чисел $(m; n)$, перший автомат видає картку з числами $(m - n; n)$; другий — картку з числами $(m + n; n)$, третій — картку з числами $(n; m)$. Спочатку є картка з парою чисел $(46; 51)$. Чи можна, використовуючи автомати в деякому порядку, отримати картку з парою чисел $(15; 33)$?

42. Ознаки подільності

Ви знаєте, що ознаки подільності дають змогу за властивостями десяткового запису діленого, не виконуючи ділення, визначати, чи є деяке число його дільником.

Вам відомі ознаки подільності на 2, 5, 10, 3 і 9. Тепер за допомогою «мови конгруенцій» узагальнимо ці ознаки й доведемо нові.

Теорема 42.1. $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9$.

Доведення. Запишемо очевидні конгруенції:

$$1 \equiv 1 \pmod 9,$$
$$10 \equiv 1 \pmod 9,$$
$$10^2 \equiv 1 \pmod 9,$$
$$\ldots$$
$$10^{n-1} \equiv 1 \pmod 9,$$
$$10^n \equiv 1 \pmod 9.$$

Помножимо обидві частини першої конгруенції на a_0, другої — на a_1, третьої — на a_2 і т. д., $(n + 1)$-ї — на a_n. Маємо:

$$a_0 \equiv a_0 \pmod 9,$$
$$10a_1 \equiv a_1 \pmod 9,$$
$$10^2 \cdot a_2 \equiv a_2 \pmod 9,$$
$$\ldots$$
$$10^{n-1} \cdot a_{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod 9,$$
$$10^n \cdot a_n \equiv a_n \pmod 9.$$

Додавши ці конгруенції, отримаємо:

$$10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0 \equiv$$
$$\equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9;$$

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9. \quad \blacktriangle$$

Наслідок (ознака подільності на 9). ***Натуральне число ділиться націло на 9 тоді й тільки тоді, коли сума цифр його десяткового запису ділиться націло на 9.***

Теорема 42.2. $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 3$.

Доведіть цю теорему самостійно.

Наслідок (ознака подільності на 3). ***Натуральне число ділиться націло на 3 тоді й тільки тоді, коли сума цифр його десяткового запису ділиться націло на 3.***

Теорема 42.3. $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}$.

Доведення. Запишемо очевидні конгруенції:

$$1 \equiv 1 \pmod{11},$$
$$10 \equiv -1 \pmod{11},$$
$$10^2 \equiv 1 \pmod{11},$$
$$10^3 \equiv -1 \pmod{11},$$
$$\ldots$$
$$10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}.$$

Звідси

$$a_0 \equiv a_0 \pmod{11},$$
$$10a_1 \equiv -a_1 \pmod{11},$$
$$10^2 \cdot a_2 \equiv a_2 \pmod{11},$$
$$10^3 \cdot a_3 \equiv -a_3 \pmod{11},$$
$$\ldots$$
$$10^n \cdot a_n \equiv (-1)^n \cdot a_n \pmod{11}.$$

Додавши ці конгруенції, отримаємо:

$$10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0 \equiv$$
$$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11};$$

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11}. \ \blacktriangle$$

Наслідок (ознака подільності на 11). ***Пронумеруємо цифри десяткового запису натурального числа справа наліво числами 0, 1, 2, ..., n. Натуральне число ділиться націло на 11 тоді й тільки тоді, коли різниця між сумою цифр з парними номерами і сумою цифр з непарними номерами ділиться націло на 11.***

Наприклад, для числа 2 387 605 маємо: $(5 + 6 + 8 + 2) - (0 + 7 + 3) = 11$. Отже, це число кратне 11.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що число 1 000 003 000 001 не є квадратом натурального числа.

Розв'язання. Сума цифр даного числа дорівнює 5. Отже, це число при діленні на 3 дає в остачі 2. Проте квадрат натурального числа при діленні на 3 дає в остачі або 0, або 1 (див. задачу 40.20).

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що різниця числа, яке має непарну кількість цифр, і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться націло на 99.

Розв'язання. Нехай одне число дорівнює a, а друге, отримане перестановкою цифр числа a, дорівнює b.

Позначимо[1] через $S(n)$ суму цифр натурального числа n. Очевидно, що $S(a) = S(b)$.

Маємо:

$$a \equiv S(a) \pmod{9};$$
$$b \equiv S(b) \pmod{9};$$

[1] Таке позначення буде використано й далі в задачах цього пункту.

$$a - b \equiv 0 \pmod 9,$$

тобто $(a - b) \vdots 9$.

Пронумеруємо цифри числа a справа наліво числами 0, 1, 2, ..., $2n$.

Позначимо через $P(n)$ різницю між сумою цифр з парними номерами і сумою цифр з непарними номерами числа n. Тоді:

$P(a) = (a_0 + a_2 + ... + a_{2n-2} + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + ... + a_{2n-3} + a_{2n-1})$;

$P(b) = (a_{2n} + a_{2n-2} + ... + a_2 + a_0) - (a_{2n-1} + a_{2n-3} + ... + a_3 + a_1)$.

Очевидно, що $P(a) = P(b)$.

Маємо:

$$a \equiv P(a) \pmod{11};$$
$$b \equiv P(b) \pmod{11};$$
$$a - b \equiv 0 \pmod{11},$$

тобто $(a - b) \vdots 11$.

Оскільки НСД $(9; 11) = 1$, то $(a - b) \vdots 99$.

1. Сформулюйте ознаку подільності на 3.
2. Сформулюйте ознаку подільності на 9.
3. Сформулюйте ознаку подільності на 11.

42.1.° Які з чисел 485 761, 44 253, 1 757 217, 2 223 075 діляться націло: 1) на 3; 2) на 9; 3) на 11?

42.2.° Доведіть[1], що $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod 4$.

42.3.° Доведіть, що $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{25}$.

42.4.° Доведіть, що $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod 8$.

42.5.° Доведіть, що $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod{125}$.

42.6.° Доведіть, що $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_k a_{k-1} \ldots a_0} \equiv \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_0} \pmod{2^k}$.

42.7.° Доведіть, що $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_k a_{k-1} \ldots a_0} \equiv \overline{a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_0} \pmod{5^k}$.

42.8.° Запишіть, використовуючи по одному разу кожну з цифр 0; 1; 4; 7, найбільше і найменше чотирицифрові числа, які кратні 15.

---

[1] У задачах 42.2–42.7, якщо перша зліва цифра числа, записаного в правій частині конгруенції, дорівнює нулю, то запис цього числа потрібно читати починаючи з наступної цифри.

42.9.° До числа 15 допишіть зліва і справа по одній цифрі так, щоб утворене число було кратне 15. Скільки розв'язків має задача?

42.10.° До числа 34 допишіть зліва і справа по одній цифрі так, щоб утворене число було кратне 45. Скільки розв'язків має задача?

42.11.° Замість зірочок поставте такі цифри, щоб число *74* ділилося націло на 18. Знайдіть усі можливі розв'язки.

42.12.° Замість зірочок поставте такі цифри, щоб число 3*4* ділилося націло на 9. Знайдіть усі можливі розв'язки.

42.13.° Замість зірочки поставте таку цифру, щоб семицифрове число 1 876 74* ділилося націло на 33.

42.14.° Замість зірочок поставте такі цифри, щоб семицифрове число 2 83* 64* ділилося націло на 55.

42.15.° Замість зірочок поставте такі цифри, щоб число 42 *4* ділилося націло на 72.

42.16.° Замість зірочок поставте такі цифри, щоб число 6 2** 427 ділилося націло на 99.

42.17.° Шестицифрове число кратне 8. Яку найбільшу суму цифр воно може мати?

42.18.° Знайдіть найменше натуральне число, кратне 36, у запису якого зустрічаються всі 10 цифр.

42.19.° Чи існує натуральне число, добуток цифр якого дорівнює 143 341 143?

42.20.° Доведіть, що десяткове число, у запису якого використано один раз цифру 1, два рази — цифру 2, три рази — цифру 3 і чотири рази — цифру 4, не є квадратом натурального числа.

42.21.•• Чи може натуральне число, у запису якого є тільки цифри 0 і 6, бути квадратом натурального числа?

42.22.•• Спочатку обчислили суму цифр числа, яке дорівнює добутку $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 999 \cdot 1000$. Потім обчислили суму цифр отриманого числа. Так робили доти, доки не отримали одноцифрове число. Що це за число?

42.23.•• У десятковому запису числа 28^{101} порахували суму цифр. В отриманому числі знов порахували суму цифр, і так доти, доки не отримали одноцифрове число. Яке це число?

42.24.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $n + S(n) = 1000$; 2) $n^2 + (S(n))^2 = 1000$.

42.25.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $n + S(n) = 1001$; 2) $n + S(n) + S(S(n)) = 2000$.

42.26.[**] Натуральне число n таке, що $S(n) = S(5n)$. Доведіть, що n кратне 9.

42.27.[*] Натуральне число n таке, що число $n^2 + 1$ — десятицифрове. Доведіть, що в запису числа $n^2 + 1$ знайдуться дві однакові цифри.

42.28.[*] Чи можна, використовуючи кожну з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 по одному разу, записати шестицифрове число, яке ділиться націло на 11?

42.29.[*] Числа 2000, 2001, ..., 2010 записали одне за одним у деякому порядку. Доведіть, що отримане 44-цифрове число має принаймні чотири різних натуральних дільники.

42.30.[*] Знайдіть усі $n \in \mathbb{N}$, для яких має місце така властивість: якщо сума цифр натурального числа ділиться націло на n, то й саме число ділиться націло на n.

43. Прості і складені числа

Число 1 має тільки один натуральний дільник, а саме 1. Будь-яке інше натуральне число n має щонайменше два натуральних дільники: 1 і n.

Число 5 має тільки два натуральних дільники: 1 і 5. Таку саму властивість мають, наприклад, числа 2, 7, 11, 13. Такі числа називають простими.

Означення. **Натуральне число називають *простим*, якщо воно має тільки два різних натуральних дільники: одиницю і саме це число.**

Число 4 має три натуральних дільники: 1, 2, 4.

Число 6 має чотири натуральних дільники: 1, 2, 3, 6.

Означення. **Натуральне число, яке має більше ніж два натуральних дільники, називають *складеним*.**

Числа 4 і 6 — складені числа.

Оскільки число 1 має тільки один натуральний дільник, то його не вважають ні простим, ні складеним.

Якщо послідовно виписувати натуральні числа, то легко помітити, що прості числа зустрічаються набагато рідше, ніж складені. Так, перша тисяча натуральних чисел містить 168 простих чисел, друга — 135, третя — 127. Більш того, можна вказати проміжки натурального ряду будь-якої довжини, які не містять жодного простого числа.

Наприклад, серед n послідовних натуральних чисел $(n + 1)! + 2$, $(n + 1)! + 3$, ..., $(n + 1)! + n + 1$, де $n > 1$, немає жодного простого числа[1]. Справді, перше число ділиться націло на 2 і більше за 2, друге число ділиться націло на 3 і більше за 3, і т. д.

Може виникнути гіпотеза, що в натуральному ряді, починаючи з деякого місця, взагалі неможливо зустріти просте число. Але це не так. Давньогрецький учений Евклід у своїй знаменитій книзі «Начала» довів, що простих чисел безліч.

Теорема 43.1. ***Множина простих чисел є нескінченною.***

Доведення. Нехай множина простих чисел є скінченною і складається з простих чисел $p_1, p_2, ..., p_n$.

Розглянемо число $p = p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$.

Жодне з чисел $p_1, p_2, ..., p_n$ не є дільником числа p: число p при діленні на кожне з цих чисел дає в остачі 1.

Нехай m — найменший дільник числа p, відмінний від 1. Якщо число m — складене, то існує дільник числа p, який менший, ніж m, відмінний від 1. Отже, число m — просте і не міститься серед чисел $p_1, p_2, ..., p_n$. Отримали суперечність. ▲

Розглянемо деякі властивості простих чисел.

Теорема 43.2. ***Якщо просте число p_1 ділиться націло на просте число p_2, то $p_1 = p_2$.***

Доведення. Число p_1 має тільки два натуральних дільники: 1 і p_1. Оскільки $p_2 \neq 1$, то $p_2 = p_1$. ▲

Теорема 43.3. ***Для будь-якого натурального числа n і даного простого числа p справедливе одне з двох тверджень: $n \vdots p$ або НСД $(n; p) = 1$.***

Доведення. Число p має тільки два натуральних дільники: 1 і p. Отже, НСД $(n; p)$ може набувати тільки двох значень: 1 і p. Якщо НСД $(n; p) = p$, то $n \vdots p$. ▲

Теорема 43.4. ***Якщо $ab \vdots p$, де $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, p — просте число, то або $a \vdots p$, або $b \vdots p$.***

---

[1] Символом $k!$ позначають добуток k перших натуральних чисел (читають: «k факторіал»). Наприклад, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Домовилися вважати, що $1! = 1$ і $0! = 1$.

Доведення. Якщо $a \vdots p$, то теорему доведено. Якщо число a не кратне числу p, то за теоремою 43.3 маємо, що НСД $(a; p) = 1$. Тоді за теоремою 41.7 $b \vdots p$. ▲

Наслідок. ***Якщо добуток $a_1a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ натуральних чисел ділиться націло на просте число p, то хоча б один з множників $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ділиться націло на p.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Інтуїтивно зрозуміло, що будь-яке складене число можна подати у вигляді добутку простих чисел (розкласти на прості множники). Цей факт підкреслює особливу роль простих чисел як елементів, з яких будується будь-яке натуральне число.

Тому теорему, яка обґрунтовує існування такого розкладу, називають **основною теоремою арифметики**. Першим довів її К. Ф. Гаусс.

Теорема 43.5 (основна теорема арифметики). ***Будь-яке натуральне число, відмінне від 1, або є простим, або може бути подано у вигляді добутку простих чисел. Два розклади натурального числа на прості множники можуть відрізнятися один від одного лише порядком слідування множників.***

Доведення. Розглянемо складене число n. Його можна подати у вигляді добутку натуральних чисел, відмінних від одиниці. Існує таке натуральне число k, що $2^k \geqslant n$. Тоді кількість множників, на які розкладено число n, не більше, ніж k. Справді, кожний з цих множників не менший від 2. Якби їх кількість була більшою за k, то їх добуток був би більшим за 2^k, що суперечить нерівності $2^k \geqslant n$.

Оскільки кількість множників у розкладі числа n не більша за k, то розглянемо той з розкладів, який містить найбільшу кількість множників. Це і є розклад числа n на прості множники. Справді, якщо якийсь із множників є складеним, то, розклавши його на множники, отримаємо «довший» розклад числа n на множники.

Доведемо, що такий розклад єдиний. Нехай число n можна подати у вигляді добутку простих чисел двома способами, тобто $n = p_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$ і $n = q_1q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$, де $m \geqslant 2$, $t \geqslant 2$.

Маємо:

$$p_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = q_1q_2 \cdot \ldots \cdot q_t.$$

Ліва частина цієї рівності ділиться націло на p_1. Тоді й права частина ділиться націло на p_1. За наслідком з теореми 43.4 один з множників правої частини ділиться націло на p_1. Оскільки всі множники правої частини рівності є простими числами, то за теоремою 43.2 один з них дорівнює p_1. Нехай, наприклад, це число q_1. Поділивши обидві частини рівності на p_1, отримаємо:

$$p_2 p_3 \cdot \ldots \cdot p_m = q_2 q_3 \cdot \ldots \cdot q_t.$$

Міркуючи аналогічно, можна отримати рівність $p_3 p_4 \cdot \ldots \cdot p_m = q_3 q_4 \cdot \ldots \cdot q_t$ і т. д. Зрозуміло, що врешті-решт прийдемо до рівності $1 = 1$.

Таким чином, зазначені множники розбиваються на пари рівних простих чисел, а це доводить, що розклад натурального числа на прості множники — єдиний. ▲

Якщо в розкладі натурального числа деякі прості множники повторюються, то їх добуток записують у вигляді степеня.

Наприклад, $2940 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Узагалі, розклад числа на прості множники можна записати у вигляді:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральні числа, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно різні прості числа.

Такий запис називають **канонічним розкладом натурального числа.**

Розглянемо ще одну важливу властивість простих чисел.

Теорема 43.6 (мала теорема Ферма). ***Якщо натуральне число a не ділиться націло на просте число p, то*** $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Доведення. Розглянемо $p - 1$ число: $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$. Очевидно, що кожне з цих чисел не ділиться націло на p. Нехай $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ — їх остачі при діленні на p відповідно. Доведемо,

П'єр Ферма (1601–1665) — французький математик, за фахом юрист. Є одним з фундаторів теорії чисел. Автор ряду видатних робіт у різних галузях математики, які здійснили значний вплив на подальший розвиток математики.

що жодні два з розглядуваних чисел не дають однакових остач при діленні на p.

Припустимо, що такі два числа знайдуться. Позначимо їх ma і na, де $1 \leqslant m \leqslant p - 1$, $1 \leqslant n \leqslant p - 1$, $m > n$. Тоді $(ma - na) \vdots p$, тобто $(m - n)\, a \vdots p$. Проте НСД $(a; p) = 1$. Тоді $(m - n) \vdots p$, що неможливо, оскільки $0 < m - n < p$.

Оскільки при діленні на число p існує $p - 1$ ненульова остача, а числа a, $2a$, $3a$, $(p - 1)\, a$ дають різні остачі при діленні на p, то

$$\{r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}\} = \{1, 2, \ldots, p - 1\}. \qquad (*)$$

Маємо:

$$a \equiv r_1 \pmod{p},$$
$$2a \equiv r_2 \pmod{p},$$
$$\ldots$$
$$(p - 1)\, a \equiv r_{p-1} \pmod{p}.$$

Звідси $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \ldots \cdot (p - 1)\, a \equiv r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_{p-1} \pmod{p}$. Ураховуючи рівність (*), можна записати:

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p - 1)\, a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p - 1) \pmod{p};$$
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \ \blacktriangle$$

Наслідок. ***Для будь-якого натурального числа a і простого числа p маємо $a^p \equiv a$ (mod p).***

Доведіть цю теорему самостійно.

Задача. Відомо, що всі дільники числа n, які відмінні від 1, більші, ніж $\sqrt{n}$. Доведіть, що число n — просте.

Розв'язання. Нехай число n — складене. Тоді $n = k_1 \cdot k_2$, де $k_1 > 1$ і $k_2 > 1$. За умовою $k_1 > \sqrt{n}$ і $k_2 > \sqrt{n}$. Звідси $k_1 \cdot k_2 > n$. Отримали суперечність.

Доведена властивість дає змогу скоротити технічну роботу при визначенні того, чи є дане число n простим: досить обмежитися перевіркою подільності числа n на прості числа, які не перебільшують $\sqrt{n}$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть усі такі натуральні числа n, що числа $n + 1$, $n + 11$, $n + 27$ є простими.

Розв'язання. Оскільки різниця жодних з двох даних чисел не ділиться націло на 3, то всі вони дають різні остачі при діленні на 3. Отже, одне з цих чисел кратне 3, а оскільки воно є простим, то саме воно дорівнює 3. Зрозуміло, що це може бути тільки число $n + 1$. Звідси $n = 2$. Тоді $n + 11 = 13$, $n + 27 = 29$.

ПРИКЛАД 2 Натуральне число n таке, що $2n = p_1 + p_2$, де p_1 і p_2 — послідовні прості числа, більші за 2. Доведіть, що число n — складене.

Розв'язання. Нехай $p_1 < p_2$. Тоді $p_1 < \frac{p_1 + p_2}{2} < p_2$, тобто $p_1 < n < p_2$. Оскільки p_1 і p_2 — послідовні прості числа, то число n — складене.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть у простих числах рівняння $x^y + 1 = z$.

Розв'язання. Якщо $x \neq 2$, то x — непарне число, і ліва частина рівняння більша за 2 і є парним числом. У цьому випадку число z простим бути не може.

Отже, $x = 2$. Маємо $2^y + 1 = z$. Якщо y — непарне число, то число $2^y + 1$ можна розкласти на множники, кожний з яких більший за 1. Знов-таки в цьому випадку число z простим числом бути не може. Звідси y — парне просте число, тобто $y = 2$. Тоді $z = 2^2 + 1 = 5$.

Відповідь: $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$.

ПРИКЛАД 4 Знайдіть остачу від ділення числа 3^{102} на 101.

Розв'язання. Оскільки 101 — просте число, то за малою теоремою Ферма

$$3^{100} \equiv 1 \pmod{101}.$$

Звідси

$$3^{102} \equiv 9 \pmod{101}.$$

Відповідь: 9.

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що коли натуральне число n не ділиться націло на 17, то або $(n^8 - 1) \vdots 17$, або $(n^8 + 1) \vdots 17$.

Розв'язання. За малою теоремою Ферма

$$n^{16} \equiv 1 \pmod{17}.$$

Звідси

$$(n^{16} - 1) \vdots 17;$$
$$(n^8 - 1)(n^8 + 1) \vdots 17.$$

Оскільки 17 є простим числом, то твердження задачі випливає з теореми 43.4.

1. Яке число називають простим?
2. Яке число називають складеним?
3. Скінченною чи нескінченною є множина простих чисел?

4. Сформулюйте основну теорему арифметики.
5. Що називають канонічним розкладом натурального числа?
6. Сформулюйте малу теорему Ферма.

43.1.° Чи може добуток двох натуральних чисел бути простим числом?

43.2.° Чи може сума двох простих чисел бути простим числом?

43.3.° Чи може різниця двох простих чисел бути простим числом?

43.4.° Знайдіть усі натуральні значення n, при яких числа n і $n + 1$ є простими.

43.5.° Знайдіть усі натуральні значення n, при яких числа n і $n + 3$ є простими.

43.6.° Відомо, що числа[1] a і b такі, що $ab \vdots q$. Чи є правильним твердження, що $a \vdots q$ або $b \vdots q$, якщо: 1) $q = 13$; 2) $q = 21$?

43.7.° Відомо, що числа m і n такі, що $mn \vdots p$. Чи є правильним твердження, що $m \vdots p$ або $n \vdots p$, якщо: 1) $p = 29$; 2) $p = 39$?

43.8.° Доведіть, що остача при діленні простого числа на 30 дорівнює 1 або простому числу.

43.9.° Доведіть, що кожне просте число p ($p > 3$) можна записати у вигляді $6k + 1$ або $6k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

43.10.° Знайдіть усі натуральні n, при яких значення виразу $n^2 + n$ є простим числом.

43.11.° Знайдіть усі натуральні n, при яких значення виразу $n^2 - 1$ є простим числом.

43.12.• Знайдіть усі натуральні n, при яких є простим числом значення виразу:

1) $n^3 - 1$; 2) $4n^2 + 5n - 21$; 3) $3^n - 1$.

43.13.• Знайдіть усі натуральні n, при яких є простим числом значення виразу:

1) $n^3 + 1$; 2) $3n^2 + 4n - 15$; 3) $8^n - 1$.

43.14.• Доведіть, що коли p — просте число і $p > 3$, то $(p^2 - 1) \vdots 24$.

43.15.• Прості числа p і q такі, що $p > 3$, $q > 3$. Доведіть, що $(p^2 - q^2) \vdots 24$.

43.16.• Знайдіть усі прості числа p такі, що числа $p + 26$ і $p + 28$ також прості.

43.17.• Знайдіть усі прості числа p такі, що числа $2p + 1$ і $4p + 1$ також прості.

---

[1] Тут і далі буквами позначено натуральні числа. Випадки, коли буквою позначено ціле число, будуть обумовлені окремо.

43.18.$^{\bullet}$ Числа a і b такі, що $56a = 65b$. Доведіть, що число $a + b$ є складеним.

43.19.$^{\bullet}$ Числа m і n такі, що $37m = 55n$. Доведіть, що число $m - n$ є складеним.

43.20.$^{\bullet}$ Цілі числа a і b такі, що значення виразу $a^2 + 9ab + b^2$ кратне 11. Доведіть, що значення виразу $a - b$ кратне 11.

43.21.$^{\bullet}$ Цілі числа m і n такі, що значення виразу $m^2 - 15mn + n^2$ кратне 17. Доведіть, що значення виразу $m + n$ кратне 17.

43.22.$^{\bullet\bullet}$ Числа p і $8p^2 + 1$ є простими. Знайдіть p.

43.23.$^{\bullet\bullet}$ Числа p і $p^{p+1} + 2$ є простими. Знайдіть p.

43.24.$^{\bullet\bullet}$ Числа p і $p^2 + 2$ є простими. Доведіть, що число $p^3 + 2$ теж просте.

43.25.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що число $8\underbrace{00\ldots0}_{10}27$ є складеним.

43.26.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що число 999 999 973 є складеним.

43.27.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі прості числа p і q, які задовольняють рівняння $p^2 - 2q^2 = 1$.

43.28.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі прості числа p і q, які задовольняють рівняння $q - p^2 = 2$.

43.29.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі прості числа p такі, що число $4p + 1$ є квадратом натурального числа.

43.30.$^{\bullet\bullet}$ Натуральне число n таке, що числа $2n - 1$ і $n + 12$ діляться націло на просте число p. Знайдіть p.

43.31.$^{\bullet\bullet}$ Натуральне число n таке, що числа $5n - 1$ і $n - 10$ діляться націло на просте число p. Знайдіть p.

43.32.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі значення n, при яких кожне з чисел $2^n - 1$ і $2^n + 1$ є простим.

43.33.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі натуральні n, при яких значення виразу $n^4 + 4$ є простим числом.

43.34.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі натуральні m, при яких значення виразу $m^4 + m^2 + 1$ є простим числом.

43.35.$^{\bullet\bullet}$ Натуральні числа m, n, k такі, що числа $p = m + n$, $q = n + k$ і $r = m + k$ є простими. Доведіть, що одне з чисел p, q, r дорівнює 2.

43.36.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі прості числа, які можна подати як у вигляді суми, так і у вигляді різниці двох простих чисел.

43.37.$^{\bullet\bullet}$ Натуральні числа a, b, c такі, що $(a + b + c) \,\vdots\, 13$. Доведіть, що число $a^{13} + b^{13} + c^{13}$ також кратне 13.

43.38.$^{\bullet\bullet}$ Використовуючи малу теорему Ферма, знайдіть остачу від ділення числа a на число b, якщо:

1) $a = 5^{52}$, $b = 53$; 2) $a = 2^{47}$, $b = 41$.

43.39.** Доведіть, що число $24^{24} - 1$ кратне 35.

43.40.** Натуральне число a не ділиться націло на 29. Доведіть, що одне з чисел $a^{14} - 1$ або $a^{14} + 1$ ділиться націло на 29.

43.41.* Знайдіть усі прості p такі, що число $p^2 + 11$ має 6 різних натуральних дільників.

43.42.* Розкладіть число $989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$ на прості множники.

43.43.* Доведіть, що значення виразу $42^{47} + 47^{42}$ є складеним числом.

43.44.* Доведіть, що $p^q + q^p \equiv (p + q) \pmod{pq}$, де p і q — різні прості числа.

Про проблеми, пов'язані з простими числами

На уроках інформатики ви можете створити комп'ютерні програми, які дають змогу скласти таблицю, що містить набагато більше простих чисел, ніж та, що розміщена на форзаці підручника.

Таблиці простих чисел складали ще стародавні вчені. Розв'язання такої задачі без сучасної обчислювальної техніки — праця нелегка. Тому пошук простих чисел був нерозривно пов'язаний зі спробами винайти зручну формулу, користуючись якою можна було б знаходити прості числа.

Багато видатних математиків доклали чимало зусиль, щоб знайти «формулу простих чисел». Часто їм здавалося, що мету досягнуто, проте пізніше виявлялося, що знайдені формули неправильні.

Так, П'єр Ферма висловив припущення, що всі числа виду

$$F(n) = 2^{2^n} + 1 \qquad (1)$$

при цілому невід'ємному n є простими. Справді, $F(0) = 3$, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4) = 65\,537$ — прості числа. Проте в 1732 р. видатний математик Л. Ейлер установив, що число $F(5)$ — складене:

$$F(5) = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

Отже, серед чисел, отриманих за допомогою формули (1), є як прості, так і складені. Проте досі залишається невідомим, скінченною чи нескінченною є множина простих чисел Ферма (так називають прості числа, отримані за допомогою формули (1)).

З числами Ферма пов'язана ще одна знаменита проблема. Ще вчені Стародавньої Греції помітили, що деякі правильні n-кутники ($n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$) побудувати за допомогою циркуля

Леонард Ейлер (1707–1783) — математик, механік і фізик, член Петербурзької і Берлінської Академій наук, автор більш ніж 850 наукових праць, понад 100 з яких стосуються теорії чисел.

і лінійки досить просто, а при деяких інших значеннях n ($n = 7$, 9, 11, 13) це не вдається.

У кінці XVIII ст. Карл Фрідріх Гаусс довів, що за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати правильний n-кутник тоді і тільки тоді, коли $n = 2^k$, де $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, або $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$, де k — ціле невід'ємне число, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — різні прості числа Ферма.

У XVIII ст. Леонард Ейлер довів, що не існує многочлена $F(x)$ з цілими коефіцієнтами, значення якого при всіх натуральних значеннях x були б простими числами.

Разом з тим Ейлер указав такі многочлени:

$$h(n) = n^2 - n + 17;$$
$$f(n) = n^2 - n + 41;$$
$$g(n) = n^2 - 79n + 1601.$$

Цікаво, що значення многочлена $h(n)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots, 16$ є простими числами. Але $h(17)$ є складеним числом.

Значеннями многочленів $f(n)$ і $g(n)$ є прості числа при $n = 0, 1, 2, \ldots, 40$ і $n = 0, 1, 2, \ldots, 79$ відповідно.

Юрій Матіясевич

На жаль, математики досі не знайшли зручної формули, яка давала б змогу отримувати всі прості числа одне за одним.

З проблемою пошуку формули простих чисел нерозривно пов'язана задача знаходження закономірності розподілу простих чисел в натуральному ряді.

Видатний радянський математик, автор цілої низки фундаментальних відкриттів у галузі теорії чисел Ю. В. Матіясевич писав: «Прості числа розкидані в натуральному ряді дуже примхливим чином».

Справді, досить навіть побіжного погляду на таблицю простих чисел, щоб побачити нерівномірний розподіл їх серед натуральних чисел.

Як визначити проміжки натурального ряду, які містять щонайменше одне просте число? Як визначити кількість простих чисел на заданому проміжку натурального ряду? Зокрема, скільки існує простих чисел, які не перевищують заданого натурального числа n?

Відповіді на ці запитання є ключем до розв'язання проблеми розподілу простих чисел.

Указати проміжок натурального ряду, який містить щонайменше одне просте число, досить просто. Покажемо, наприклад, що будь-якому проміжку $[n; n! + 1]$, $n \in \mathbb{N}$, належить просте число.

Якщо число $n! + 1$ — просте, то твердження очевидне.

Нехай $n! + 1$ є складеним числом і k — його простий дільник. Оскільки жодне з чисел 2, 3, ..., n не є дільником числа $n! + 1$, то $n < k < n! + 1$.

З доведеного твердження випливає, що числа 2, $2! + 1$, $(2! + 1)! + 1$, ... розбивають натуральний ряд на проміжки, кожний з яких містить щонайменше одне просте число. Цей факт можна розглядати як ще одне доведення нескінченності множини простих чисел.

Оскільки жодне з чисел 2, 3, ..., $p - 1$ не є дільником $(p - 1)! + 1$, то коли $((p - 1)! + 1) \vdots p$, $p > 1$, то p — просте число. Цей факт є частиною відомої теореми Вільсона (критерія перевірки того, чи є задане натуральне число простим).

Для того щоб натуральне число $n > 1$ було простим, необхідно й достатньо, щоб число $(n - 1)! + 1$ ділилося націло на n.

Достатню умову ми фактично довели. Необхідну умову ви зможете довести на заняттях математичного гуртка.

Жозеф Луї Франсуа Бертран

Зрозуміло, що зі зростанням n довжина відрізка $[n; n! + 1]$ швидко збільшується. Тому було б природним шукати відрізок якомога меншої довжини, який так само містить просте число.

Досліджуючи таблиці простих чисел, французький математик Жозеф Луї Франсуа Бертран (1822–1900) висунув припущення, що

Пафнутій Львович Чебишев (1821–1894) — російський математик і механік, засновник петербурзької математичної школи, автор понад 70 наукових праць з теорії чисел, теорії ймовірностей, теорії функцій та інших галузей математики, фундатор теорії машин і механізмів.

при $n \geqslant 3$ між числами n і $2n - 2$ міститься хоча б одне просте число. Довести цю гіпотезу він не зміг і користувався нею як постулатом — твердженням, що приймається без доведення. Першим довів постулат Бертрана видатний російський математик П. Л. Чебишев.

Позначимо через $\pi(n)$ кількість простих чисел, які не більші за число n. Для маленьких n легко встановити, що, наприклад, $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, $\pi(10) = 4$, $\pi(100) = 25$.

Складний розподіл простих чисел не дозволяє знайти просту формулу для знаходження $\pi(n)$. Тому математики зосередили свої зусилля на пошуку наближеної формули.

Відношення $\frac{\pi(n)}{n}$ називають **густиною розподілу простих чисел.**

n	$\pi(n)$	$\frac{\pi(n)}{n}$
10	4	0,4
100	25	0,25
1000	168	0,17
10 000	1229	0,12
100 000	9592	0,096
1 000 000	78 498	0,078
10 000 000	664 579	0,066
100 000 000	5 761 455	0,058
1 000 000 000	50 847 478	0,051

З таблиці видно, що густина зі збільшенням n стає все меншою і меншою.

Л. Ейлер довів, що зі збільшенням n густина $\frac{\pi(n)}{n}$ прямує до нуля. П. Л. Чебишеву вдалося знайти більш точну оцінку величини $\frac{\pi(n)}{n}$.

Розглянемо ще одну проблему, пов'язану з простими числами. Стародавні математики приділяли особливу увагу двом числам: 6 і 28. Їх приваблювала дивовижна властивість цих чисел:

$$6 = 1 + 2 + 3,$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$$

тобто кожне з них дорівнює сумі своїх дільників, відмінних від самого числа. Такі числа називають **досконалими**.

Ще Евклід довів, що будь-яке натуральне число, яке можна подати у вигляді $2^{n-1}(2^n - 1)$, де $2^n - 1$ — просте число, є досконалим.

Переконаємося в цьому і ми. Позначимо $2^n - 1 = p$ і запишемо суму всіх дільників розглядуваного числа:

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + p + 2p + 2^2p + \ldots + 2^{n-1}p =$$
$$= (1 + p)(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) =$$
$$= (1 + p)(2 - 1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1) =$$
$$= (1 + p)(2^n - 1) = 2^n(2^n - 1).$$

До записаної суми входить саме число $2^{n-1}(2^n - 1)$. Тоді сума дільників, відмінних від самого числа, дорівнює

$$2^n(2^n - 1) - 2^{n-1}(2^n - 1) = (2^n - 1)(2^n - 2^{n-1}) =$$
$$= 2^{n-1}(2^n - 1).$$

Підставивши у вираз $2^{n-1}(2^n - 1)$ числа $n = 2$ і $n = 3$, отримуємо вже відомі досконалі числа 6 і 28.

Завдяки доведеній властивості Евклід знайшов ще два досконалих числа. При $n = 5$ маємо: $2^5 - 1 = 31$ — просте число, при $n = 7$ маємо $2^7 - 1 = 127$ — просте число. Значення виразів $2^{5-1}(2^5 - 1)$ і $2^{7-1}(2^7 - 1)$ відповідно дорівнюють 496 і 8128. За доведеною вище властивістю ці числа є досконалими.

Майже півтора тисячоліття люди знали тільки чотири досконалих числа 6, 28, 496 і 8128. Пошук нових досконалих чисел був нерозривно пов'язаний з пошуком простих чисел виду $2^n - 1$. Прості числа такого виду називають **простими числами Мерсенна** на честь Марена Мерсенна, французького математика, фізика й музиканта, який у 1664 р., не наводячи доведень, проголосив, що при $n = 17, 19, 31, 67, 127, 257$ число $2^n - 1$ є простим.

Л. Ейлер установив, що числа $2^{17} - 1$, $2^{19} - 1$, $2^{31} - 1$ є простими. Пізніше з'ясувалося, що число $2^{127} - 1$ також є простим, а ось числа $2^{67} - 1$ і $2^{257} - 1$ є складеними, причому висновок про число $2^{257} - 1$ було отримано лише в 1932 р.

Л. Ейлер довів, що всі парні досконалі числа мають вигляд, указаний Евклідом. Досі не знайдено жодного непарного досконалого числа. Також залишається відкритим питання, скінченною чи нескінченною є множина простих чисел Мерсенна, а отже, невідомо, скінченною чи нескінченною є множина парних досконалих чисел.

Пошук нових досконалих чисел потребує великого обсягу обчислень. І тут, звісно, незамінну допомогу надає сучасна обчислювальна техніка. За даними на лютий 2008 р. відомо 44 простих числа Мерсенна, а отже, 44 парних досконалих числа. Також за допомогою сучасних комп'ютерів установлено: якщо існує непарне досконале число, то воно більше за 10^{300}.

У світі простих чисел є багато й інших нерозв'язаних задач. Наприклад, у таблиці простих чисел (див. форзац) червоним кольором виділено прості числа, які відрізняються на 2. Це, зокрема, 3 і 5, 5 і 7, 419 і 421. Такі пари чисел називають **числами-близнюками**. Скінченною чи нескінченною є кількість пар чисел-близнюків, поки що невідомо.

44. Ділення многочленів

Ви вмієте додавати, віднімати і множити многочлени. У цьому пункті ми домовимося про дію ділення многочленів.

Ви знаєте, що ціле число a ділиться націло на ціле число b ($b \neq 0$), якщо існує таке ціле число c, що $a = bc$. Засновуючись на цих міркуваннях, приймемо таке означення.

Означення. **Кажуть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на тотожно не рівний нулю многочлен $B(x)$, якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.**

Многочлен $A(x)$ називають **діленим**, многочлен $B(x)$ — **дільником**, многочлен $Q(x)$ — **часткою**.

Якщо многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$, то це позначають так: $A(x) \vdots B(x)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Многочлен $x^3 + 1$ ділиться націло на многочлен $x + 1$. Справді, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Тут роль частки виконує многочлен $x^2 - x + 1$.

Многочлен $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$ ділиться націло на многочлен $2x^2 - x + 1$. Справді, $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x = (2x^2 - x + 1)(3x^2 - x)$.

Пошук частки від ділення двох многочленів можна здійснювати за алгоритмом ділення «куточком», аналогічно тому, як це роблять при діленні чисел:

$$\begin{array}{rr|l}
- & x^3+1 & x+1 \\ \cline{3-3}
 & x^3+x^2 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2}
- & -x^2+1 & \\
 & -x^2-x & \\ \cline{2-2}
- & x+1 & \\
 & x+1 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr|l}
- & 6x^4-5x^3+4x^2-x & 2x^2-x+1 \\ \cline{3-3}
 & 6x^4-3x^3+3x^2 & 3x^2-x \\ \cline{2-2}
- & -2x^3+x^2-x & \\
 & -2x^3+x^2-x & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Якщо $A(x) \vdots B(x)$ і $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, то очевидно, що степінь многочлена $A(x)$ дорівнює сумі степенів многочленів $B(x)$ і $Q(x)$. Тому для ділення націло многочленів необхідно, щоб степінь діленого був не меншим від степеня дільника. Проте ця умова не є достатньою. Так, многочлен $x^3 + 1$ не ділиться націло на многочлен $x - 1$. Справді, якби існував многочлен $Q(x)$ такий, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконувалася рівність $x^3 + 1 = (x - 1)Q(x)$, то при $x = 1$ отримали б неправильну рівність $1^3 + 1 = 0$.

Якщо одне ціле число не ділиться націло на інше, то можна розглядати ділення з остачею. Введемо поняття ділення многочленів з остачею.

Теорема 44.1. ***Для будь-якого многочлена $A(x)$ і многочлена $B(x)$, який тотожно не дорівнює нулю, існує єдина пара многочленів $Q(x)$ і $R(x)$ таких, що***

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

де степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $B(x)$.

У цій рівності многочлен $Q(x)$ називають **неповною часткою**, а многочлен $R(x)$ — **остачею**.

Ви зможете довести цю теорему на заняттях математичного гуртка.

Розглянемо многочлени $A(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 1$ і $B(x) = x^2 - 3x + 2$. Знайдемо для цих многочленів неповну частку й остачу. Це можна зробити за допомогою ділення «куточком»:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} 2x^4 - x^3 + x^2 - 1 \\ 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 \\ \hline 2x^2 + 5x + 12 \text{ (неповна частка)} \end{array} \\ \hline -\begin{array}{l} 5x^3 - 3x^2 - 1 \\ 5x^3 - 15x^2 + 10x \end{array} & \\ \hline -\begin{array}{l} 12x^2 - 10x - 1 \\ 12x^2 - 36x + 24 \end{array} & \\ \hline 26x - 25 \text{ (остача)} & \end{array}$$

Тепер можна записати:

$$2x^4 - x^3 + x^2 - 1 = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 5x + 12) + 26x - 25. \quad (1)$$

Розглянемо раціональний дріб $\frac{2x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$. За допомогою рівності (1) можна записати:

$$\frac{2x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = 2x^2 + 5x + 12 + \frac{26x - 25}{x^2 - 3x + 2}.$$

Права частина цієї рівності є сумою многочлена і дробу. У чисельнику дробу записано многочлен, степінь якого менша від степеня многочлена, який записано в знаменнику. Такий дріб називають **правильним**. Подання раціонального дробу у вигляді суми многочлена і правильного дробу називають **виділенням цілої частини з раціонального дробу**.

?

1. У якому випадку кажуть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$?
2. Яка необхідна умова ділення многочленів націло?
3. Сформулюйте теорему про ділення многочленів з остачею.
4. Як називають многочлени $Q(x)$ і $R(x)$ в запису $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, якщо степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $B(x)$?
5. Подання в якому вигляді раціонального дробу називають виділенням цілої частини з раціонального дробу?

44.1.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$:

1) $A(x) = x^2 - 7x + 6$, $B(x) = x - 6$;
2) $A(x) = x^4 - 1$, $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;
3) $A(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x - 1$, $B(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

44.2.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$:

1) $A(x) = x^3 - 1$, $B(x) = x^2 + x + 1$;

2) $A(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 1$, $B(x) = 2x^2 - 3x + 1$;
3) $A(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1$, $B(x) = x^2 - x + 1$.

44.3.° Поділивши «куточком» многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, знайдіть неповну частку й остачу:
1) $A(x) = 2x^5 + 5x^3 + 6x - 7$, $B(x) = x^3 + x$;
2) $A(x) = x^4 + x + 1$, $B(x) = x^2 + x + 1$;
3) $A(x) = x^4 + x^2 + 1$, $B(x) = x + 5$.

44.4.° Поділивши «куточком» многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, знайдіть неповну частку й остачу:
1) $A(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$, $B(x) = x^2 - x + 1$;
2) $A(x) = x^7 - 1$, $B(x) = x^3 + x + 1$;
3) $A(x) = x^3 + 5x^2 - 6x - 6$, $B(x) = x - 2$.

44.5.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ не ділиться націло на многочлен $B(x)$:
1) $A(x) = x^2 + 1$, $B(x) = x - 1$;
2) $A(x) = x^3 + x - 1$, $B(x) = x + 1$;
3) $A(x) = 2x^4 - 3x^3 - x + 1$, $B(x) = x^2 - 3x + 2$.

44.6.• Доведіть, що $(x^n - a^n) \vdots (x^k - a^k)$, якщо $n \vdots k$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.

44.7.• Виділіть цілу частину з раціонального дробу:
1) $\dfrac{x^3 - x + 2}{x^2 + 1}$;
2) $\dfrac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1}{x^2 - 1}$;
3) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1}{x^2 + x - 2}$.

44.8.• Виділіть цілу частину з раціонального дробу:
1) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1}{x^2 - x}$;
2) $\dfrac{5x^4 - 3x^5 + 3x - 1}{x + 1 - x^2}$;
3) $\dfrac{x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 1}$.

45. Корені многочлена. Теорема Безу

Означення. Число α називають **коренем многочлена** $A(x)$, якщо $A(\alpha) = 0$.

Зрозуміло, що корінь многочлена $A(x)$ — це корінь рівняння $A(x) = 0$.

Легко знайти множину коренів рівняння

$$(3x - 7)(5x + 1)(2x - 9)(x + 1) = 0.$$

Проте, якщо ліву частину рівняння подати у вигляді многочлена $30x^4 - 169x^3 + 75x^2 + 337x + 63$, то задача пошуку його коренів стає непростою.

Тому при розв'язуванні рівнянь виду $A(x) = 0$, де $A(x)$ — многочлен, важливо навчитися виділяти в многочлені лінійний множник, тобто подавати многочлен у вигляді добутку: $A(x) = (x - \alpha) B(x)$, де $B(x)$ — деякий многочлен, степінь якого на 1 менший від степеня многочлена $A(x)$.

Цьому значною мірою сприятиме така теорема.

Теорема 45.1 (**теорема Безу**). ***Остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює $A(\alpha)$.***

Доведення. Оскільки степінь дільника (двочлена $x - \alpha$) дорівнює 1, то степінь остачі має дорівнювати нулю, тобто шукана остача — це деяке число r. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ маємо

$$A(x) = (x - \alpha) Q(x) + r.$$

Поклавши в цій рівності $x = \alpha$, отримаємо

$$A(\alpha) = (\alpha - \alpha) Q(\alpha) + r.$$

Звідси $A(\alpha) = r$. ▲

Ет'єн Безу́ (1730–1783) — французький математик, основні роботи якого стосуються вищої алгебри. Викладав математику в училищі гардемаринів, Королівському артилерійському корпусі. Автор шеститомної праці «Курс математики».

Теорема 45.2. ***Для того щоб число α було коренем многочлена $A(x)$, необхідно й достатньо, щоб многочлен $A(x)$ ділився націло на двочлен $x - \alpha$.***

Доведення. Нехай $A(\alpha) = 0$. Доведемо, що $A(x) \vdots (x - \alpha)$.

За теоремою Безу $A(\alpha)$ є остачею від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$. Проте $A(\alpha) = 0$, отже, $A(x) \vdots (x - \alpha)$.

Нехай тепер $A(x) \vdots (x - \alpha)$. Доведемо, що $A(\alpha) = 0$.

Оскільки $A(x) \vdots (x - \alpha)$, то остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює 0, тобто $A(\alpha) = 0$. ▲

Наслідок 1. ***Якщо*** $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ ***— множина коренів многочлена*** $A(x)$***, який тотожно не дорівнює нулю, то*** $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q(x)$***, де*** $Q(x)$ ***— деякий многочлен.***

Доведення. Якщо α_1 — корінь многочлена $A(x)$, то за теоремою 45.2 маємо $A(x) = (x - \alpha_1) Q_1(x)$. Покладемо в цій рівності $x = \alpha_2$. Отримаємо $(\alpha_2 - \alpha_1) Q_1(\alpha_2) = 0$. Отже, α_2 — корінь многочлена $Q_1(x)$. Тоді за теоремою 45.2 маємо $Q_1(x) = (x - \alpha_2) Q_2(x)$. Отримуємо $A(x) = (x - \alpha_1) Q_1(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) Q_2(x)$.

Застосовуючи аналогічні перетворення для коренів $\alpha_3, \alpha_4, ..., \alpha_n$, отримуємо, що $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q_n(x)$. ▲

Наслідок 2. ***Множина коренів многочлена степеня n містить не більше ніж n елементів.***

Доведення. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$ — корені многочлена $A(x)$, степінь якого дорівнює n. Тоді згідно з наслідком 1 можна записати:

$$A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_{n+1}) \cdot Q(x).$$

Проте ця рівність неможлива, оскільки в лівій частині записано многочлен степеня n, а в правій — вираз, який тотожно дорівнює многочлену, степінь якого більша за n. ▲

Наслідок 3. ***Якщо множина коренів многочлена*** $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ ***містить більше ніж n елементів, то*** $a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = a_0 = 0$***, тобто цей многочлен тотожно дорівнює нулю.***

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що вираз $A(x) = (x - 2)^{100} + (x - 1)^{50} - 1$ ділиться націло на многочлен $B(x) = x^2 - 3x + 2$.

Розв'язання. Маємо: $B(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$. Оскільки $A(1) = A(2) = 0$, то за теоремою 45.2 многочлен $A(x)$ ділиться націло на $(x - 1)(x - 2)$, тобто ділиться націло на многочлен $x^2 - 3x + 2$.

ПРИКЛАД 2 Остачі від ділення многочлена $P(x)$ на двочлени $x - 2$ і $x - 3$ відповідно дорівнюють 5 і 7. Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 - 5x + 6$.

Розв'язання. Оскільки степінь многочлена $x^2 - 5x + 6$ дорівнює 2, то степінь шуканої остачі не більша за 1. Тому остача — це многочлен виду $ax + b$.

Маємо:

$$P(x) = (x^2 - 5x + 6)\,Q(x) + ax + b;$$
$$P(x) = (x - 2)(x - 3)\,Q(x) + ax + b.$$

Підставимо по черзі в цю рівність $x = 2$ і $x = 3$. Отримуємо:

$$P(2) = 2a + b,\ P(3) = 3a + b.$$

Застосовуючи теорему Безу, маємо: $P(2) = 5$ і $P(3) = 7$. Тоді отримуємо систему $\begin{cases} 2a + b = 5, \\ 3a + b = 7. \end{cases}$

Звідси $a = 2$, $b = 1$. Тоді шуканою остачею є многочлен $2x + 1$.

Відповідь: $2x + 1$.

ПРИКЛАД 3 При яких натуральних n многочлен $f(x) = x^n + a^n$ ділиться націло на двочлен $x + a$?

Розв'язання. Маємо: $x + a = x - (-a)$. З'ясуємо, при яких натуральних n виконується рівність $f(-a) = 0$, тобто $(-a)^n + a^n = 0$. Очевидно, ця рівність виконується тільки при всіх непарних n.

ПРИКЛАД 4 Доведіть тотожність

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - 1 = 0.$$

Розв'язання. Очевидно, що $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$. Зазначимо, що вираз $f(x)$, записаний в лівій частині рівності, яку треба довести, тотожно дорівнює многочлену, степінь якого не більший за 2.

Легко перевірити, що $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Отримуємо, що многочлен степеня, не вищого за 2, має три різних корені. Отже, цей многочлен тотожно дорівнює нулю.

?

1. Що називають коренем многочлена?
2. Сформулюйте теорему Безу.
3. Сформулюйте необхідну й достатню умову, при якій число α є коренем многочлена $A(x)$.
4. Яку найбільшу кількість елементів може містити множина коренів многочлена n-го степеня?
5. Що можна сказати про многочлен степеня n, якщо множина його коренів містить більше ніж n елементів?

45.1.° Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$:

1) $A(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $B(x) = x - 1$;
2) $A(x) = 2x^4 - 4x^3 - x - 1$, $B(x) = x + 2$.

45.2.° Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 3$, $B(x) = x - 4$;

2) $A(x) = 6x^4 - 5x^3 - 53x^2 + 45x - 9$, $B(x) = x + 1$.

45.3.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на двочлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$, $B(x) = x + 2$;

2) $A(x) = 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 5x - 2$, $B(x) = x - 2$;

3) $A(x) = 5x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 1$, $B(x) = x - 1$;

4) $A(x) = x^6 - 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 3$, $B(x) = x - 3$.

45.4.° Доведіть, що вираз $(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ ділиться націло на вираз $x(x + 1)(2x + 1)$, де $n \in \mathbb{N}$.

45.5.° Доведіть, що вираз $(x^2 + x - 1)^{2n} + (x^2 - x + 1)^{2n} - 2$ ділиться націло на многочлен $x^2 - x$, де $n \in \mathbb{N}$.

45.6.• Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$:

1) $A(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20$, $B(x) = x^2 - x - 2$;

2) $A(x) = x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 41x - 42$, $B(x) = x^2 + x - 2$;

3) $A(x) = x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 18x^2 - 27x + 27$, $B(x) = x^2 - 4x + 3$.

45.7.• При якому значенні параметра a остача від ділення многочлена:

1) $x^4 + ax^3 - 2x^2 + x - 1$ на двочлен $x - 1$ дорівнює 5;

2) $2x^4 - 3x^3 - ax^2 - x - 2$ на двочлен $x + 1$ дорівнює 3?

45.8.• При яких значеннях параметра b многочлен $x^3 + 3x^2 - bx + 6$ ділиться націло на двочлен $x + 2$?

45.9.• При яких значеннях параметрів a і b многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$, $B(x) = x^2 - 1$;

2) $A(x) = 6x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 4$, $B(x) = x^2 - 4$?

45.10.• При яких значеннях параметрів a і b многочлен $A(x) = 3x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + 10$ ділиться націло на многочлен $B(x) = x^2 + x - 2$?

45.11.• При яких значеннях параметрів a, b і c многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ ділиться націло на двочлени $x - 1$ і $x + 2$, а при діленні на двочлен $x + 1$ дає в остачі 10?

45.12.• При яких значеннях параметрів a і b многочлен $x^3 + ax^2 + bx + ab$ при діленні на $x - 2$ дає в остачі 15, а при діленні на $x + 1$ дає в остачі 0?

45.13.• Остачі від ділення многочлена $A(x)$ на двочлени $x - 3$ і $x - 1$ відповідно дорівнюють 6 і 4. Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на многочлен $x^2 - 4x + 3$.

45.14.** Доведіть, що вираз $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ ділиться націло на вираз $(a-b)(b-c)(c-a)$.

45.15.** Доведіть, що:

1) вираз $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ ділиться націло на вираз $a+b$;

2) вираз $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ділиться націло на вираз $x+y+z$.

45.16.** Доведіть тотожність:

1) $a\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x;$

2) $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$

45.17.* Числа 1 і 5 є коренями многочлена $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+2010$, де $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ — цілі числа. Чи існує таке ціле число x_0, що $P(x_0)=1000$?

46. Ціле раціональне рівняння

Означення. **Рівняння виду $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$, де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — параметри, називають цілим раціональним рівнянням.**

Число a_0 називають **вільним членом** цього рівняння.

Теорема 46.1. ***Якщо ціле раціональне рівняння з цілими коефіцієнтами має цілий корінь, то він є дільником вільного члена.***

Доведення. Нехай x_0 — цілий корінь рівняння

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — цілі числа. Тоді виконується рівність

$$a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0=0.$$

Звідси

$$a_0=-a_nx_0^n-a_{n-1}x_0^{n-1}-\ldots-a_1x_0;$$
$$a_0=x_0(-a_nx_0^{n-1}-a_{n-1}x_0^{n-2}-\ldots-a_1).$$

Отже, ціле число a_0 дорівнює добутку двох цілих чисел, одне з яких дорівнює x_0. Тоді $a_0 \vdots x_0$. ▲

Зауваження. З доведеної теореми не випливає, що дільник вільного члена цілого раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами обов'язково є коренем рівняння. У теоремі йде мова лише про те, що цілі корені цілого раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами слід шукати серед дільників вільного члена.

Іншими словами: для того щоб число було цілим коренем цілого раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами, необхідно, щоб воно було дільником вільного члена (рис. 46.1). Однак ця умова не є достатньою.

Рис. 46.1

Наприклад, числа -2 і 2 є дільниками вільного члена рівняння $3x^2 - 5x - 2 = 0$. Проте тільки одне з них є коренем рівняння.

Також зазначимо, що теорема 46.1 допомагає розв'язувати ті цілі раціональні рівняння з цілими коефіцієнтами, які мають цілі корені. Переконаємося в цьому на такому прикладі.

ПРИКЛАД Розв'яжіть рівняння $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$.

Розв'язання. Щоб перевірити наявність цілих коренів у цього рівняння, випишемо всі дільники його вільного члена: $1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6$.

Перевіркою встановлюємо, що $x = -1$ є коренем даного рівняння. Отже, многочлен $f(x)$, який стоїть у лівій частині рівняння, ділиться націло на двочлен $x + 1$, тобто $f(x) = (x + 1)\,g(x)$.

Многочлен $g(x)$ можна знайти, виконавши ділення «куточком» многочлена $f(x)$ на двочлен $x + 1$. Проте існує ще й інший спосіб.

Оскільки $f(x) = (x + 1)\,g(x)$, то многочлен $f(x)$ можна записати в такому вигляді, щоб можна було винести за дужки спільний множник $x + 1$. Подамо многочлен $f(x)$ у вигляді суми двочленів, кожний з яких ділиться на $x + 1$. Маємо:

$$2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 = 2x^4 + \underbrace{2x^3 - 7x^3}_{= -5x^3} \underbrace{- 7x^2 + 5x^2}_{= -2x^2} + \underbrace{5x - 6x}_{= -x} - 6 =$$

$$= 2x^3(x + 1) - 7x^2(x + 1) + 5x(x + 1) - 6(x + 1) =$$

$$= (x + 1)(2x^3 - 7x^2 + 5x - 6).$$

Отже, $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6$.

З'ясуємо, чи має цілі корені рівняння $2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 = 0$. Випишемо дільники вільного члена: $1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6$.

Перевіркою встановлюємо, що $x = 3$ є коренем цього рівняння. Тоді $g(x) = (x - 3)\,h(x)$. Знайдемо многочлен $h(x)$. Для цього подамо многочлен $g(x)$ у вигляді суми двочленів, кожний з яких ділиться націло на $x - 3$:

$$2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 = 2x^3 \underbrace{- 6x^2 - x^2}_{= -7x^2} + \underbrace{3x + 2x}_{= 5x} - 6 =$$

$$= 2x^2(x - 3) - x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(2x^2 - x + 2).$$

Отже, $h(x) = 2x^2 - x + 2$.

Очевидно, що рівняння $h(x) = 0$ коренів не має. Таким чином, задане рівняння має два корені: -1 і 3.

Відповідь: -1; 3.

1. Яке рівняння називають цілим раціональним?
2. Яку властивість мають цілі корені цілого раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами?
3. Яке співвідношення між множиною дільників вільного члена цілого раціонального рівняння з цілими коефіцієнтами і множиною його цілих коренів?

46.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$;
2) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
4) $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$;
5) $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = 0$;
6) $x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 35x^2 + 28x + 12 = 0$.

46.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$;
2) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$;
3) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$;
4) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$;
5) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$;
6) $3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10 = 0$.

46.3.•• Доведіть, що коли ціле раціональне рівняння з цілими коефіцієнтами

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

має раціональний корінь, то він є цілим числом.

46.4.•• Доведіть, що коли ціле раціональне рівняння з цілими коефіцієнтами

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

має раціональний корінь $x_0 = \frac{p}{q}$, де $\frac{p}{q}$ — нескоротний дріб, то p — дільник вільного члена a_0, q — дільник старшого коефіцієнта a_n.

Відомості з курсу алгебри 7 класу

Лінійне рівняння з однією змінною. Цілі вирази

1. Лінійне рівняння з однією змінною

Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Якщо $a \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння $ax = b$ на a, отримаємо $x = \frac{b}{a}$. Отже, якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ має єдиний корінь, що дорівнює $\frac{b}{a}$.

Якщо $a = 0$, то лінійне рівняння набуває такого вигляду: $0x = b$. Тут можливі два випадки: $b = 0$ або $b \neq 0$.

У першому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$. Звідси, якщо $a = 0$ і $b = 0$, то рівняння $ax = b$ має безліч коренів: будь-яке число є його коренем.

У другому випадку, коли $b \neq 0$, то при будь-якому значенні x маємо хибну рівність $0x = b$. Звідси, якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння $ax = b$ коренів не має.

Наведені міркування підсумовує така таблиця.

Рівняння $ax = b$	$a \neq 0$	$a = 0,\ b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
	$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	коренів немає

2. Тотожно рівні вирази. Тотожності

Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називають тотожно рівними.

Рівність, правильну при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають тотожністю.

Заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому, називають тотожним перетворенням.

Для доведення тотожностей використовують такі прийоми (методи):

- тотожно перетворюють одну з частин даної рівності, отримуючи іншу частину;
- тотожно перетворюють кожну з частин даної рівності, отримуючи один і той самий вираз;
- показують, що різниця лівої і правої частин даної рівності тотожно дорівнює нулю.

3. Степінь з натуральним показником

Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.

Для будь-якого числа a і будь-яких натуральних чисел m і n справджується рівність

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

тобто при множенні степенів з однаковими основами показники додають, а основу залишають тією самою.

Для будь-якого числа a, відмінного від нуля, і будь-яких натуральних чисел m і n таких, що $m > n$, справджується рівність

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

тобто при діленні степенів з однаковими основами від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника, а основу залишають тією самою.

Для будь-якого числа a і будь-яких натуральних чисел m і n справджується рівність

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

тобто при піднесенні степеня до степеня показники перемножують, а основу залишають тією самою.

Для будь-яких чисел a і b і будь-якого натурального числа n справджується рівність

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

тобто при піднесенні добутку до степеня кожний множник підносять до степеня і отримані результати перемножують.

4. Одночлени

Вирази, які є добутками чисел, змінних та їх степенів, називають одночленами.

Одночлен, який містить тільки один відмінний від нуля числовий множник, що стоїть на першому місці, а всі інші множники якого — степені з різними основами, називають стандартним виглядом одночлена. До одночленів стандартного вигляду також відносять числа, відмінні від нуля, змінні та їх степені.

Число 0, а також одночлени, які тотожно дорівнюють нулю, називають нуль-одночленами. Їх не відносять до одночленів стандартного вигляду.

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом одночлена.

Одночлени, які мають однакові буквені складові, називають подібними.

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Степінь одночлена, який є числом, відмінним від нуля, вважають таким, що дорівнює нулю.

Вважають, що нуль-одночлен степеня не має.

5. Многочлени

Вираз, який є сумою кількох одночленів, називають многочленом.

Одночлени, з яких складено многочлен, називають членами многочлена.

Многочлен, який складається з двох членів, називають двочленом, а з трьох членів — тричленом. Одночлен є окремим випадком многочлена. Вважають, що такий многочлен складається з одного члена.

Зв'язки між многочленами, одночленами та їх окремим видом — числами ілюструє схема, зображена на рисунку 1.

Рис. 1

Якщо серед одночленів, з яких складається многочлен, є подібні, то їх називають подібними членами многочлена.

Щоб помножити одночлен на многочлен, треба помножити цей одночлен на кожний член многочлена й отримані добутки додати.

Щоб помножити многочлен на многочлен, можна кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого і отримані добутки додати.

6. Формули скороченого множення

Добуток різниці двох виразів та їх суми дорівнює різниці квадратів цих виразів:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їх суми:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Многочлен $a^2 - ab + b^2$ називають неповним квадратом різниці. Многочлен $a^2 + ab + b^2$ називають неповним квадратом суми.

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

7. Розкладання многочлена на множники

Які способи і в якій послідовності треба застосовувати при розкладанні многочлена на множники? Універсальних рекомендацій не існує, усе залежить від конкретного многочлена. І все ж дамо кілька загальних порад:

1) якщо це можливо, то розкладання треба починати з винесення спільного множника за дужки;
2) перевірити, чи можна застосувати формули скороченого множення;
3) якщо не вдасться застосувати формули, то спробуйте скористатися методом групування.

Функції

8. Функція. Область визначення і область значень функції

Правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної, називають функцією, а відповідну залежність однієї змінної від другої — функціональною.

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Якщо змінна y функціонально залежить від змінної x, то цей факт позначають так: $y = f(x)$ (читають: «ігрек дорівнює еф від ікс»).

Незалежну змінну ще називають аргументом функції.

Для функції f кожному значенню аргументу x відповідає деяке значення залежної змінної y. Значення залежної змінної називають також значенням функції та позначають $f(x)$.

Усі значення, яких набуває аргумент, утворюють область визначення функції. Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють область значень функції.

9. Способи задання функції

Функція вважається заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за допомогою якого можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

Оскільки функція — це правило, то її можна задати за допомогою речень. Такий спосіб задання функції називають заданням функції описом.

Найпоширенішим способом задання функції є задання функції за допомогою формули.

Ще одним способом задання функції є табличний. Усі числа, записані в першому рядку таблиці, складають область визначення даної функції; у другому рядку записують відповідні значення функції.

10. Графік функції

Графіком функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ обов'язково належить графіку;
2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Фігура може бути графіком деякої функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше за одну спільну точку.

11. Лінійна функція, її графік і властивості

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна, називають лінійною.

Графіком лінійної функції, область визначення якої — усі числа, є пряма. Оскільки пряма однозначно задається будь-якими двома своїми точками, то для побудови графіка лінійної функції достатньо обрати два довільних значення аргументу і скласти таблицю, яка має лише два числових стовпці.

Лінійну функцію, яку задають формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, називають прямою пропорційністю.

Рис. 2

Пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції (це виражає схема, зображена на рисунку 2). Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат.

Якщо у формулі $y = kx + b$ покласти $k = 0$, то отримаємо $y = b$. Графіком такої функції є пряма, паралельна осі абсцис.

Системи лінійних рівнянь з двома змінними

12. Рівняння з двома змінними

Рівності $3x + 2y = 450$, $x^2 + y^2 = 100$, $x + y = 90$, $xy = 12$, $5x + 7y = 19$, які містять по дві змінні x і y, є прикладами рівнянь з двома змінними.

Пару значень змінних, яка перетворює рівняння з двома змінними в правильну рівність, називають розв'язком рівняння з двома змінними. Той факт, що пара чисел $x = a$, $y = b$ є розв'язком рівняння, прийнято записувати так: $(a; b)$ є розв'язком рівняння. У дужках на першому місці пишуть значення змінної x, а на другому — значення змінної y.

Розв'язати рівняння з двома змінними — це означає знайти всі його розв'язки або показати, що воно не має розв'язків.

Властивості рівнянь з двома змінними:

- Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.
- Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.
- Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.

Графіком рівняння з двома змінними називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких (пари чисел) є розв'язками даного рівняння.

Коли якась фігура є графіком рівняння, то виконуються дві умови:

1) усі розв'язки рівняння є координатами точок, які належать графіку;

2) координати будь-якої точки, що належить графіку, — це пара чисел, яка є розв'язком даного рівняння.

13. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік

Лінійним рівнянням з двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа.

Рівняння	Значення a, b, c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c — будь-які	Невертикальна пряма
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — будь-яке	Вертикальна пряма
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	Уся координатна площина
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

14. Системи рівнянь з двома змінними

Якщо треба знайти усі спільні розв'язки кількох рівнянь, то говорять, що треба розв'язати систему рівнянь.

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки.

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, які перетворюють кожне рівняння на правильну рівність.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Графічний метод розв'язування системи рівнянь полягає в такому:

- побудувати на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять до системи;
- знайти координати всіх точок перетину побудованих графіків;
- отримані пари чисел і будуть шуканими розв'язками.

Графічний метод є ефективним тоді, коли треба визначити кількість розв'язків системи.

Якщо графіками рівнянь, що входять в систему лінійних рівнянь, є прямі, то кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розміщення двох прямих на площині:

- якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;
- якщо прямі збігаються, то система має нескінченно багато розв'язків;
- якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має.

15. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом підстановки, треба:

1) виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;
2) підставити в друге рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом додавання, треба:

1) дібравши «вигідні» множники, перетворити одне або обидва рівняння системи так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;
2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь, отриманих на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене на третьому кроці значення змінної у будь-яке з рівнянь вихідної системи;
5) обчислити значення другої змінної.

1.2. 1) 1; 2) $\frac{19}{34}$. **1.16.** b — будь-яке число. **1.23.** 1) $x^{n+5} - x^{n+1}$; 2) $x^{2n+2} - 7x$. **1.24.** 1) $5x^{n+1}$; 2) $x^{n+4} - x^{2n+2} + x^n$. **1.37.** 4) $(a + b)^2 + (a - b)^2$. **1.38.** 1) $x = -1$, $y = 0,5$; 2) таких значень не існує. **1.45.** 7 або −7. **1.46.** 4 або −4. **1.50.** 1. *Вказівка.* $x^6 + 3x^2y^2 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + 3x^2y^2$. **1.51.** 8. **1.54.** *Вказівка.* Подайте даний многочлен у вигляді суми кубів. **1.56.** *Вказівка.* Помножте обидві частини другої рівності на 3. **1.58.** 2^{171}. **1.59.** $171 = \frac{(171^9)^9}{(171^8)^{10}}$.

1.61. 1) 6; 2) 1; 3) 9. **1.62.** 3) $31^{11} < 17^{14}$. *Вказівка.* $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56}$. **1.63.** 2. *Вказівка.* $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) + y^2$. **1.64.** 8. **1.66.** *Вказівка.* Позначимо $1002 = n$. Тоді даний вираз набуває вигляду $(n - 3)(n - 1)(n + 1)(n + 3) + 16$. Покажіть, що отриманий вираз тотожно дорівнює $(n^2 - 5)^2$. **1.67.** *Вказівка.* Позначимо $1000 = n$. Тоді даний вираз набуває вигляду $n^2 + n^2(n + 1)^2 + (n + 1)^2$. Покажіть, що отриманий вираз тотожно дорівнює $(n^2 + n + 1)^2$. **1.69.** *Вказівка.* Помножте і поділіть вираз, що стоїть у лівій частині рівності, на $1 + 2 + 2^2$. **1.70.** 5) *Вказівка.* $m^5 + m^4 + 1 = m^5 + m^4 + m^3 - m^3 + 1$. **1.71.** 5) *Вказівка.* $x^8 + x^7 + 1 = x^8 + x^7 + x^6 - x^6 - x^5 - x^4 + x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1$. **1.72.** 1) *Вказівка.* $x^4 - 8x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4 - 4x^2$. **1.75.** 0. *Вказівка.* Задану рівність подайте у вигляді $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 0$. **1.76.** *Вказівка.* Розгляньте вираз $(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$. **1.77.** *Вказівка.* $x^4 - x + \frac{1}{2} = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4}$. **1.78.** 59. **1.80.** 2 або −2. *Вказівка.* $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$. **1.81.** *Вказівка.* $a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ab + 4ac + 4bc = a^2 + b^2 + 4c^2 + 2ab + 4ac + 4bc - c^2$. **1.83.** *Вказівка.* Маємо $a + b = -c$, звідки $(a + b)^3 = -c^3$. **2.4.** Так. Усі натуральні числа. **2.11.** $S(x) = 40(40 - x)$. Область визначення: усі такі числа x, що $0 < x < 40$. **2.12.** $V(x) = (100 - 2x)^2 \cdot x$. Область визначення: усі такі числа x, що $0 < x < 50$. **2.13.** $y = 4x + 1$. **2.14.** $y = x^3 + x$. **2.22.** Див. рисунок до задачі 2.22. **2.40.** Можна. *Вказівка.* Покажіть, що при будь-якому k графіки перетинаються в точці $M(-1; 2)$. **3.9.** (3; 3). **3.10.** (4; −4). **3.11.** −12. **3.12.** −4. **3.13.** $a = 7$, $b = -3$. **3.16.** 1) $a = 3$, $b = -2,5$; 2) $a = 4$, $b = -6$. **3.17.** $a = 3$, $b = 5$. **3.19.** 1) При $a \neq 17$;

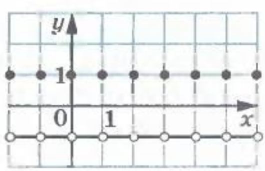


Рис. до задачі 2.22

2) при $a = -10$. **3.21.** 1) $(-2; 2)$; $(1; 1)$; 2) $(1; -1)$; $(3; 3)$; 3) $(1; 1)$; $(-3; 3)$. **3.22.** 1) $(8; 6)$; 2) $(-5; -4)$. **3.23.** 1) $(1; -1)$; 2) $(14; 2)$. **3.24.** 1) $(-3; -4)$; 2) $(2; -2)$. **3.25.** 1) $(-0{,}6; -3{,}2)$; 2) $(1; 3)$. **3.26.** $a = 5{,}6$, $b = 0{,}8$. **3.27.** 1) $y = -0{,}4x + 1{,}8$; 2) $y = -x + 2$. **3.28.** 1) $(3; -3)$; 2) $(1{,}5; 0{,}75)$; 3) $\left(4; -\frac{2}{3}\right)$; 4) $(-5; 6)$; 5) $(-2{,}4; -4)$. **3.29.** 1) $(10; 5)$; 2) $(0{,}5; 1{,}5)$; 3) $(-8; -28)$. **4.13.** Якщо точки A, B і C не лежать на одній прямій, то шукана множина складається з однієї точки — центра описаного кола $\Delta\ ABC$. Якщо точки A, B і C лежать на одній прямій, то шукана множина порожня. **4.15.** $A = C$. **4.18.** *Вказівка.* $3k - 1 = 3k - 1 + 3 - 3 = 3\,(k - 1) + 2$; $3n + 2 = 3n + 2 - 3 + 3 = 3\,(n + 1) - 1$. **5.29.** 2) Множина всіх натуральних чисел, крім 1; 3) множина, яка складається з усіх непарних чисел і числа 2. **6.4.** 6 днів. **6.11.** Більше чисел, усі цифри яких непарні. **6.13.** Однакова кількість. *Вказівка.* Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною менших сторін прямокутників одного виду і множиною менших сторін прямокутників другого виду. **6.14.** *Вказівка.* Нехай $B \subset A$. Множині B поставимо у відповідність таку множину C, що $C \cap B = \varnothing$ і $C \cup B = A$. Очевидно, що числа $n\,(B)$ і $n\,(C)$ мають різну парність. **6.16.** Більше тих чисел, у яких друга цифра менша від першої і третьої. *Вказівка.* Числа, у яких друга цифра найбільша, назвемо числами першого виду, а ті, у яких друга цифра найменша, — числами другого виду. Зрозуміло, що жодне з чисел першого виду не починається з цифри 9. Кожному числу $\overline{abc}$ першого виду поставимо у відповідність число $999 - \overline{abc}$, яке є числом другого виду. **6.17.** *Вказівка.* «Щасливому» квитку з номером $\overline{abcdef}$ поставте у відповідність квиток з номером $999\,999 - \overline{abcdef}$. Доведіть, що він є теж «щасливим». **6.18.** Однакова кількість. *Вказівка.* Доведіть, що довжини сторін трикутників, периметр яких дорівнює 1000, більші за 1. Тоді трикутнику зі сторонами a, b, c і периметром, який дорівнює 1000, відповідає трикутник зі сторонами $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$ з периметром, який дорівнює 997. **6.19.** Многокутників, які містять вершину A_1, більше. *Вказівка.* Кожному n-кутнику з вершиною A_1 при $n \geqslant 4$ можна поставити у відповідність $(n - 1)$-кутник, який отримано вилученням точки A_1 з числа вершин. Таким чином можна отримати всі многокутники, які не містять вершину A_1. Проте для трикутників з вершиною A_1 відповідних пар не існує. **6.20.** Однакова кількість. *Вказівка.* Кожному числу виду $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ такому, що $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$,

поставте у відповідність число $\overline{(a_5-4)(a_4-3)(a_3-2)(a_2-1)a_1}$. **6.21.** *Вказівка.* Якщо пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язком рівняння $x^2+y^2=n$, то пара $(x_0-y_0; x_0+y_0)$ — розв'язок рівняння $x^2+y^2=2n$. Якщо пара $(x_1; y_1)$ — розв'язок рівняння $x^2+y^2=2n$, то числа x_1 і y_1 мають однакову парність і пара $\left(\frac{x_1+y_1}{2}; \frac{y_1-x_1}{2}\right)$ є розв'язком рівняння $x^2+y^2=n$. **6.22.** *Вказівка.* Розглянемо елемент $a \in A$. Кожній підмножині B множини A такій, що $a \notin B$, поставимо у відповідність підмножину $C = B \cup \{a\}$. Зрозуміло, що числа $n(B)$ і $n(C)$ різної парності. Зазначимо, що це розв'язання не залежить від парності кількості елементів множини A. Тому задачу 6.14 можна розв'язати також і цим способом. **7.6.** Показнику степеня числа 2^n можна поставити у відповідність кількість нулів, які використано в запису десяткового дробу. **7.8.** Див. рисунок до задачі 7.8. **7.10.** *Вказівка.* Пронумеруємо елементи заданої зліченної множини. Нехай елементи даної підмножини мають номери $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$. Множина цих номерів є або скінченною, або зліченною. **7.11.** Кожний із заданих відрізків містить щонайменше одну точку з цілою координатою, а оскільки відрізки не перетинаються, то всі ці точки різні. Тепер можна скористатися результатом задачі 7.10. **7.12.** Див. рисунок до задачі 7.12. **7.13.** 1) Кожній точці $M(x_0)$ відрізка OA можна поставити у відповідність точку $N(5x_0)$ відрізка OB; 2) кожній точці $M(x_0)$ відрізка OA (крім точки O) можна поставити у відповідність точку $N\left(\frac{1}{x_0}\right)$ променя AB. **7.15.** *Вказівка.* Можна скористатися двійковою системою запису натуральних чисел. **7.16.** Схему нумерації елементів даної множини наведено на рисунку до задачі 7.16. **7.17.** *Вказівка.* Якщо ввести систему координат, то кожний із зазначених квадратів міститиме точку з цілими координатами. Оскільки квадрати не перетинаються, то ці точки різні. Далі скористайтеся результатами задач 7.16 і 7.10. **8.5.** 3) *Вказівка.*

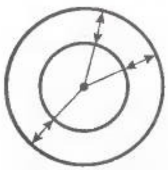


Рис. до задачі 7.8

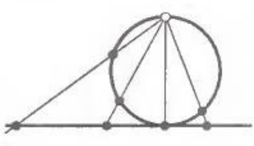


Рис. до задачі 7.12

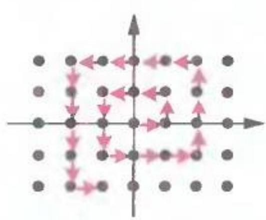


Рис. до задачі 7.16

$5 \cdot 25^n + 13 \cdot 13^{2n} = 5^{2n+1} + 13^{2n+1}$; 4) *Вказівка.* $21^n + 4^{n+2} = 21^n - 4^n + 17 \cdot 4^n$. **8.8.** 1) *Вказівка.* $2^{1234} + 1 = (2^2)^{617} + 1$. **8.9.** 1) *Вказівка.* Помножте вирази, які записані в обох частинах рівності, на вираз $x - 1$. **8.10.** 1) 3^{100}. *Вказівка.* Помножте даний вираз на $3 - 2 = 1$; 2) $\frac{4^{21} + 3^{21}}{7}$. **8.11.** $a = 2$. **8.13.** 1) 0; 2) 0; −1. **8.14.** 1) *Вказівка.* $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n - 7 \cdot 6^n + 19 \cdot 6^n$. **9.7.** 6) $D(y) = \{x \mid x \neq -1$ і $x \neq 0\}$. **10.21.** 0,3. **10.22.** 5. **10.24.** $\frac{1}{32}$. **10.25.** 1) $-\frac{1}{8}$; 2) −12,5. **10.30.** 1) x — будь-яке число, крім −1; 2) коренів немає; 3) коренів немає. **10.31.** 1) Коренів немає; 2) −7. **10.32.** 1) Якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; 2) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) якщо $a = 6$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 6$, то $x = a - 6$; 4) якщо $a = -2$, то коренів немає; якщо $a = 2$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq -2$ і $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a+2}$. **10.33.** 1) Якщо $a = -3$, то коренів немає; якщо $a \neq -3$, то $x = \frac{3}{a+3}$; 2) якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a = 9$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 9$, то $x = \frac{a-9}{a}$.
10.37. 3) *Вказівка.* Подайте чисельник дробу у вигляді $b^3 + (b+1)^3$; 5) $a^2 - 2a + 2$; 9) $b^{24} + 1$. *Вказівка.* Помножимо чисельник і знаменник дробу на $b - 1$. Маємо: $\frac{(b-1)(b^{47} + b^{46} + \ldots + b + 1)}{(b-1)(b^{23} + b^{22} + \ldots + b + 1)} = \frac{b^{48} - 1}{b^{24} - 1} = b^{24} + 1$.
10.38. 4) $z^2 - z + 4$; 6) $a^{40} - a^{20} + 1$. **10.39.** *Вказівка.* Скористайтеся результатом задачі 10.36. **10.40.** 1) −1; 2) $\frac{1}{2}$. *Вказівка.* $2a^4 + 14a^2 - 17a + 3 = 2a(a^3 + 7a - 9) + a + 3$. **10.41.** $x^3 - x^2 + 1$. *Вказівка.* Подайте вираз $x^5 + x + 1$ у вигляді $(x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$. **10.42.** *Вказівка.* $a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1 = \frac{a^{10} - 1}{a^2 - 1} = \frac{(a^5 - 1)(a^5 + 1)}{(a-1)(a+1)}$.
11.9. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{m+2}$; 3) $\frac{1}{1-k}$. **11.10.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a-5}{a+5}$. **11.11.** 1) $\frac{1}{1-a}$; 2) $\frac{3}{b-2}$; 3) $\frac{m}{n-5}$; 4) 1. **11.12.** 1) $\frac{1}{(x-7)^2}$; 2) $\frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{(a-2b)^2}$; 3) $\frac{y+6}{y+2}$.
11.20. 2) 5; 3) $4\frac{1}{4}$. **11.21.** 2) −3; 3) −4,5. **11.22.** 1) {1, 2, 3, 6}; 2) {1, 2, 7, 14}; 3) {1, 2, 8}. **11.23.** 1) {1, 3, 9}; 2) {1, 2, 4, 8}; 3) {2}.
11.25. 1) {−10, −4, −2, 4}; 2) {−15, 1, 3, 19}. **11.26.** 1) *Вказівка.* $n^3 -$

$-2n+1=(n^3+n^2-n)-(n^2+n-1)$. **11.27.** *Вказівка.* a^2+b^2+ $+c^2=(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ac$. **12.11.** 6) $\frac{5}{p-5}$; 7) $\frac{16}{16y-y^3}$; 8) $\frac{2b+1}{12b-6}$. **12.12.** 5) $\frac{1}{x}$; 6) $\frac{8}{y+2}$. **12.15.** 2) 4. **12.16.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2,5; 3) 0,1. **12.17.** 1) 0,8; 2) $\frac{7}{17}$. **12.20.** 2) $\frac{3}{b^2-3b+9}$. **12.21.** 1) $\frac{2n^3}{9m^2-n^2}$; 2) $\frac{2-2b}{8b^3+1}$. **12.23.** 1) $-\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{1}{2x}$; 3) $\frac{100b^2}{(a^2-25b^2)^2}$; 4) $\frac{1}{y-2}$. **12.27.** $\frac{35}{36}$. **12.29.** 1) $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$. *Вказівка.* Подайте кожний з доданків у вигляді різниці двох дробів. Наприклад, $\frac{1}{(a-1)(a-2)}=\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}$; 2) $\frac{4}{a(a+12)}$. **12.30.** 1) $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$; 2) $\frac{5}{x(x+5)}$. **12.34.** *Вказівка.* До кожного з дробів лівої частини рівності додайте **1**, а до правої частини додайте 3. **12.35.** *Вказівка.* Розгляньте різницю лівої і правої частин даної рівності. **12.36.** 12. *Вказівка.* Покажіть, що з першої рівності випливає, що $(a-b)(a+b+c)=0$. Також цю задачу можна розв'язати, скориставшись результатом задачі 10.36. **12.37.** 12. *Вказівка.* Скористайтеся результатом задачі 10.36. **12.38.** *Вказівка.* Доведіть, що виконується одна з рівностей $a+b=0$, $b+c=0$ або $c+a=0$. **12.39.** 2. *Вказівка.* Можна записати $\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{xy+1}=\frac{1}{xy+1}-\frac{1}{y^2+1}$. Звідси $\frac{x(y-x)}{(x^2+1)(xy+1)}=$ $=\frac{y(y-x)}{(y^2+1)(xy+1)}$. З урахуванням $x\neq y$ можна показати, що $xy=1$. **12.40.** *Вказівка.* Доведіть, що $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=$ $=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. **12.41.** 1) $\frac{89}{60}$. *Вказівка.* Скориставшись результатом задачі 12.40, покажіть, що $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}=\frac{1}{30}$ (*), і відніміть від обох частин цієї рівності 3; 2) $\frac{91}{60}$. *Вказівка.* Додайте 3 до обох частин рівності (*). **12.42.** $\frac{9}{4}$. *Вказівка.* Скористайтесь результатом задачі 12.25. **12.43.** *Вказівка.* $\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}=$ $=\frac{abc}{c^3}+\frac{bca}{a^3}+\frac{cab}{b^3}=abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$. Далі скористайтесь тотожністю $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$,

доведеною в задачі 1.43. **12.44.** –1 або 8. *Вказівка.* До кожної частини подвійної рівності додайте 2. **12.45.** 1. *Вказівка.* $\frac{1}{1+x+xy}+$
$+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{x}{x+xy+xyz}+\frac{xy}{xy+xyz+x^2yz}$.
13.18. 1) 0,9; 2) –5; 3) –3,2. **13.19.** 1) $\frac{40}{21}$; 2) $\frac{4}{11}$. **13.20.** 1) ac^3b;
2) $\frac{a^n-b^n}{a^{2n}-a^nb^n+b^{2n}}$. **13.21.** 1) $x^2y^{n+1}z^{n+1}$; 2) $\frac{x^n+2y^n}{x^{2n}+2x^ny^n+4y^{2n}}$. **13.22.** 83.
13.23. 10. **13.24.** 7 або –7. **13.25.** 2 або –2. **13.26.** 1) 1; 2) 1.
13.27. 1) $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$; 2) 1. **13.30.** 1) $\frac{a+b-1}{a-b+1}$; 2) $\frac{(x+3)(x+7)}{(x-3)(x-7)}$. **13.31.** 1) $\left(\frac{n-3}{n+1}\right)^2$;
2) a^2-1. **14.1.** 1) $\frac{3}{1-a}$; 2) $\frac{2}{b-3}$; 3) $\frac{1}{a-2b}$; 4) $\frac{2}{a+5}$; 5) $\frac{x-3}{x+3}$.
14.2. 1) $\frac{2}{3-b}$; 2) $x+y$; 3) $\frac{a+2}{a-2}$. **14.3.** 1) $\frac{x+8}{x-8}$; 2) $\frac{1}{b}$; 3) $\frac{a-1}{a}$; 4) 2;
5) $a-2$. **14.4.** 1) $\frac{7+x}{7-x}$; 2) $c-5$; 3) –2; 4) $\frac{y+2}{6}$. **14.7.** 1) Не залежить;
2) залежить. **14.9.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $a-3$; 3) $\frac{a+1}{a}$; 4) $\frac{a+b}{a}$. **14.10.** 1) $\frac{a^2+b^2}{b^2}$;
2) $-a$. **14.11.** 1) $-\frac{a+b}{2ab}$; 2) $\frac{1}{a}$; 3) $a+b$. **14.12.** 1) $-y$; 2) $\frac{a+b}{a-b}$.
14.15. 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) 1; 3) $b+a$. **14.16.** 1) $\frac{a+2}{(a-2)(a-1)}$; 2) $\frac{1}{x+y}$; 3) $0{,}5a(a+$
$+c-b)$. **14.18.** $\frac{x+2}{2}$. **14.20.** $\frac{1}{a^3b^3}$. **14.21.** $\frac{b-a}{a^4b^4}$. **14.22.** 1,9. *Вказівка.*
Розгляньте добуток $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$. **14.23.** *Вказівка.* Розгляньте добуток $\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$.
14.24. 1. *Вказівка.* Шукана сума має вигляд $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}+\frac{1}{2+a}$.
15.9. 3) Може звузитися на число –1, тобто може бути загублено корінь $x=-1$. Якщо $-1\notin D(f)$ або $f(-1)=1$, то множина коренів не зміниться. 4) Якщо $-1\in D(f)\cap D(g)$ і $f(-1)=g(-1)$, то буде отримано сторонній корінь $x=-1$; якщо $-1\notin D(f)\cap D(g)$ або $f(-1)\neq g(-1)$, то множина коренів не зміниться. **15.10.** 1) $\frac{13}{4}$;
2) коренів немає; 3) 7; 4) 0; –2; 5) коренів немає; 6) –17; 7) 0; 8) коренів немає. **15.11.** 1) 10; 2) –0,5; 3) –3; 4) –4; 4; 5) коренів немає; 6) –5. **15.12.** 2 км/год. **15.13.** 29 км/год. **15.14.** 15 год,

10 год. **15.15.** 10 год, 40 год. **15.16.** 9 км/год. **15.17.** 1) Коренів немає; 2) 9; 3) 0. **15.18.** 1) 0,6; 2) 0. **16.1.** 1) Якщо $a = 1$, то коренів немає; якщо $a \neq 1$, то $x = a$; 2) якщо $a = -2$, то коренів немає; якщо $a \neq -2$, то $x = -2$; 4) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число, крім 3; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 3$, то $x = a$; якщо $a = 3$, то коренів немає; 6) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число, крім 0; якщо $a = 4$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 4$, то $x = 4$. **16.2.** 3) Якщо $b = -\frac{1}{2}$, то коренів немає; якщо $b \neq -\frac{1}{2}$, то $x = 3b$. **16.3.** 1) Якщо $a = 1$, то $x = -1$; якщо $a = -1$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -1$, то $x = 1$ або $x = -1$; 2) якщо $a \neq -2$, то $x = a$ або $x = 0$; якщо $a = -2$, то $x = 0$; 3) якщо $a \neq 7$, то $x = a$ або $x = 6$; якщо $a = 7$, то $x = 6$; 4) якщо $a \neq 4$ і $a \neq -2$, то $x = 4$ або $x = -2$; якщо $a = 4$, то $x = -2$; якщо $a = -2$, то $x = 4$; 7) якщо $a = 5$ або $a = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq 5$ і $a \neq 0$, то $x = -a$; 8) якщо $a = 0$, то $x = 2$; якщо $a = 1$, то $x = 1$; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 1$, то $x = a$ або $x = 2$. **16.4.** 2) Якщо $b = -4$ або $b = 1$, то коренів немає; якщо $b \neq -4$ і $b \neq 1$, то $x = -b$; 4) якщо $b = 0$, то $x = 3$; якщо $b = 3$, то $x = -6$; якщо $b \neq 0$ і $b \neq 3$, то $x = 3$ або $x = -2b$. **16.5.** 1) Якщо $a = 2$, то коренем є будь-яке число, крім $x = 2$; якщо $a \neq 2$, то $x = a + 1$; 2) якщо $a = 2$ або $a = 3$, то коренів немає; якщо $a \neq 2$ і $a \neq 3$, то $x = \frac{1}{3-a}$; 3) якщо $a = 3$ або $a = 7$, то коренів немає; якщо $a \neq 3$ і $a \neq 7$, то $x = \frac{a-5}{2}$; 4) якщо $a = \frac{1}{3}$ або $a = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq \frac{1}{3}$ і $a \neq 0$, то $x = 3a$; 5) якщо $a = 0$ або $a = 1$, то коренів немає; якщо $a = -3$, то коренем є будь-яке число, крім чисел -2 і -3; якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$ і $a \neq -3$, то $x = a - 3$; 6) якщо $a = -2$, то x — будь-яке число, крім $x = 2$; якщо $a = 2$, або $a = \frac{5}{2}$, або $a = 1$, то коренів немає; якщо $a \neq 2$, $a \neq \frac{5}{2}$, $a \neq 1$, $a \neq -2$, то $x = \frac{1}{a-2}$. **16.6.** 2) Якщо $b = \frac{1}{2}$ або $b = -\frac{5}{2}$, то коренів немає; якщо $b \neq \frac{1}{2}$ і $b \neq -\frac{5}{2}$, то $x = \frac{4\,(b+1)}{3}$; 3) якщо $b = 0$, або $b = -3$, або $b = -1$, то коренів немає; якщо $b \neq 0$, $b \neq -3$ і $b \neq -1$, то $x = \frac{b^2 - b}{b+1}$; 4) якщо $b = 3$, або $b = \frac{8}{3}$, або $b = \frac{13}{4}$, то коренів немає; якщо $b = -3$, то x — будь-яке число, крім 3 і -4; якщо $b \neq 3$, $b \neq \frac{8}{3}$ і $b \neq \frac{13}{4}$, $b \neq -3$, то $x = \frac{1}{3-b}$. **16.7.** 3) $a = 0$, або $a = 3$, або $a = -1$; 4) $a = 1$, або $a = 0$, або $a = 2$; 5) $a = -3$ або

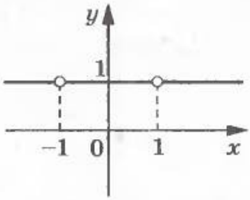


Рис. до задачі 18.21.3

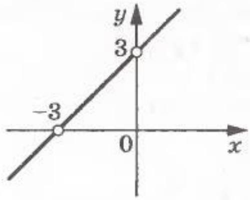


Рис. до задачі 18.21.5

$a = -\frac{1}{3}$; 6) $a = 1$, або $a = -1$, або $a = 2$, або $a = -2$, або $a = 0$. **16.8.** 1) $b = -8$ або $b = 3$; 2) $b = 0$, або $b = -1$, або $b = \frac{1}{2}$; 3) $b = -\frac{1}{2}$ або $b = -2$; 4) $b = -1$, або $b = \frac{3}{5}$, або $b = 0$, або $b = 5$, або $b = -3$. **16.9.** 2) $a = 0$ або $a = 2$; 3) $a = 0$ або $a = 3$; 5) $a = 1$; 6) $a = -1$; 7) $a = 0$; 8) $a = 0$ або $a = 1$. **16.10.** 1) $\{b \mid b \neq -4\}$; 2) $b = -1$ або $b = -3$; 3) $b = 0$; 4) $b = 2$; 5) таких значень b не існує. **17.21.** 1) 2,7; 2) $9\frac{47}{125}$. **17.30.** 5. **17.31.** 6. **18.5.** 6) $-\frac{1}{6}$; 7) $\frac{4}{9}$; 8) $\frac{4}{7}$. **18.6.** 5) 16; 6) 144. **18.15.** 8 хв. **18.16.** 5,34 кг. **18.17.** У 81 раз. **18.21.** 3) Див. рисунок до задачі 18.21.3; 5) Див. рисунок до задачі 18.21.5. **18.25.** 1) −3; 2) −5; 3) −2; 4) −7; 5) 0; 6) 2. **18.26.** 1) 4; 2) 1; 3) −1; 4) 6. **18.27.** 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-4b^2$; 3) $15c^3 + 5$; 4) $-\frac{1}{m^4}$; 5) $\frac{a}{a+b}$. **18.28.** 1) $\frac{2a^2}{3a^2-1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$; 3) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$. **18.29.** 1) −1 або 0; 2) 3 або 4; 3) 4 або 5; 4) 2 або 3. **18.30.** 1) 6 або 7; 2) 4 або 5; 3) 4 або 5; 4) 4 або 5. **19.20.** 1) 2; 2) −1; 3; 3) коренів немає. **19.21.** 1) 2; 4; 2) −1; 1; 3) коренів немає. **19.30.** Якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок. **19.36.** 3) Див. рисунок до задачі 19.36.3. **19.37.** 3) Див. рисунок до задачі 19.37.3. **19.38.** *Вказівка*. Функція f така, що $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}$. **19.41.** $f(x) = -\frac{2}{x}$.

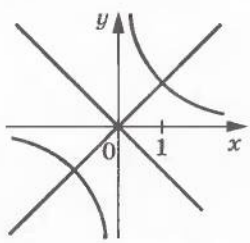


Рис. до задачі 19.36.3

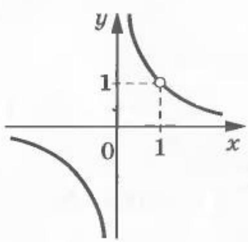


Рис. до задачі 19.37.3

Вказівка. Замінивши в даній рівності x на $-x$, отримуємо $3f(-x)+2f(x)=\frac{2}{x}$; $f(-x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}-2f(x)\right)$. Тепер можна знайдений вираз для $f(-x)$ підставити в рівність, задану в умові. Зробіть перевірку. **19.42.** $f(x)=-\frac{3}{x}$. **20.20.** 3) Порівняти неможливо. **21.17.** 1) $a \geqslant 1$; 2) $a \leqslant 2$; 3) $-1 \leqslant a \leqslant 1$. **23.16.** 2) $(-\infty; -5]$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $\left(-\infty; \frac{6}{11}\right]$; 5) $(-\infty; 7,5]$; 6) $(-\infty; +\infty)$; 7) $\varnothing$; 8) $(-\infty; +\infty)$; 9) $(-\infty; 0)$. **23.17.** 1) $[-6; +\infty)$; 2) $\varnothing$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $(-3,5; +\infty)$. **23.18.** 1) -8; 2) -1. **23.19.** 1) -6; 2) -3. **23.20.** 5 розв'язків. **23.21.** 8 розв'язків. **23.24.** 12 км. **23.25.** Таких чисел не існує. **23.26.** 18 кульок. **23.27.** 21. **23.32.** 3) При $a > -1$ і $a \neq 1$. **23.33.** 2) При $m < 7$ і $m \neq 0$. **23.34.** 1) $a = 3$; 2) $a = -1$. **23.35.** 1) $a = -7$; 2) $a = -4$ і $a = 4$. **23.36.** 1) Якщо $a > 0$, то $x > 0$; якщо $a < 0$, то $x < 0$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; 2) якщо $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$; якщо $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; 3) якщо $a > 0$, то $x \geqslant 1$; якщо $a < 0$, то $x \leqslant 1$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; 4) якщо $a > 2$, то $x > a + 2$; якщо $a < 2$, то $x < a + 2$; якщо $a = 2$, то розв'язків немає; 5) якщо $a > -3$, то $x \leqslant a - 3$; якщо $a < -3$, то $x \geqslant a - 3$; якщо $a = -3$, то x — будь-яке число; 6) якщо $a < 2$, то $x < -2$; якщо $a > 2$, то $x > -2$; якщо $a = 2$, то розв'язків немає. **23.37.** 1) Якщо $a \neq 0$, то $x \leqslant 0$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; 2) якщо $a > -4$, то $x > \frac{1}{a+4}$; якщо $a < -4$, то $x < \frac{1}{a+4}$; якщо $a = -4$, то розв'язків немає; 3) якщо $a > -1$, то $x < \frac{2-a}{a+1}$; якщо $a < -1$, то $x > \frac{2-a}{a+1}$; якщо $a = -1$, то x — будь-яке число. **23.38.** 1) $a \leqslant \frac{6}{5}$; 2) $a \leqslant \frac{12}{5}$; 3) $a < -1$; 4) $a \leqslant 0$; 5) $a \geqslant 0$. **23.39.** 1) $a = \frac{6}{5}$; 2) таких значень a не існує; 3) $a = -\frac{3}{2}$; 4) $a = 3$; 5) $a = 0$; 6) $a = 0$ або $a = \frac{2}{3}$. **24.22.** 1) $\left(\frac{1}{7}; \frac{13}{10}\right)$; 2) $(-\infty; -4,2)$; 3) $[-2; 3]$; 4) $[-0,8; +\infty)$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $(-\infty; -4]$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **24.23.** 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$; 2) $[-10; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **24.24.** 1) -3; -2; -1; 0; 2) 7; 8; 9; 10; 11. **24.25.** 1) 4 розв'язки; 2) 6 розв'язків. **24.26.** 1) $-0,5 < x < 6,5$; 2) $14 \leqslant x \leqslant 17$. **24.27.** 1) $-1,5 \leqslant x < 2,5$; 2) $0 \leqslant x < \frac{1}{3}$. **24.28.** 2) $(1,5; 7)$; 3) $(-\infty; -2)$.

24.29. 1) $\varnothing$; 2) $(1; 3)$. **24.30.** 3 см, 5 см або 4 см, 4 см. **24.34.** $(-\infty; +\infty)$. **24.36.** 1) $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $[-2; +\infty)$; 3) $[2; +\infty) \cup \{0\}$; 4) $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$; 5) $(-\infty; -2] \cup \{0\}$; 6) $(-\infty; 2]$. **24.37.** 1) $(-3; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $[-3; +\infty)$; 3) $\{1\} \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1) \cup (1; 3)$; 5) $(-\infty; -3] \cup \{1\}$; 6) $(-\infty; 3]$. **24.38.** 1) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $[0; 1) \cup (1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0]$. **24.39.** 1) При $a > 3$; 2) при $a \leqslant 3$. **24.40.** 1) При $a \leqslant 4$; 2) при $a > 1$. **24.41.** 1) При $a \leqslant -1$; 2) при $a = 1$. **24.42.** Якщо $a < 2$, то $x \leqslant a$, якщо $a \geqslant 2$, то $x < 2$. **24.43.** Якщо $a < -3$, то $a < x < -3$; якщо $a \geqslant -3$, то розв'язків немає. **24.44.** При $10 < a \leqslant 11$. **24.45.** При $1 < b \leqslant 2$. **24.46.** При $8 \leqslant a < 9$. **24.47.** При $-6 \leqslant b < -5$. **24.48.** $a = 1$. **24.49.** $a = 6$. **24.50.** 1) Якщо $a > 1$, то $(1; a) \cup (a; +\infty)$; якщо $a \leqslant 1$, то $(1; +\infty)$; 2) якщо $a \geqslant 1$, то $[1; +\infty)$; якщо $a < 1$, то $[1; +\infty) \cup \{a\}$; 3) якщо $a \leqslant 1$, то $(-\infty; a)$; якщо $a > 1$, то $(-\infty; 1) \cup (1; a)$; 4) якщо $a < 1$, то $(-\infty; a] \cup \{1\}$; якщо $a \geqslant 1$, то $(-\infty; a]$. **24.51.** 1) Якщо $a \geqslant 1$, то $(-1; +\infty)$; якщо $a < 1$, то $(-1; -a) \cup (-a; +\infty)$; 2) якщо $a \leqslant 1$, то $[-1; +\infty)$; якщо $a > 1$, то $[-1; +\infty) \cup \{-a\}$; 3) якщо $a \geqslant 1$, то $(-\infty; -a)$; якщо $a < 1$, то $(-\infty; -1) \cup (-1; -a)$; 4) якщо $a \leqslant 1$, то $(-\infty; -a]$; якщо $a > 1$, то $(-\infty; -a] \cup \{-1\}$. **25.13.** *Вказівка.* Скористайтеся геометричною інтерпретацією. **25.14.** 1) 4; 2) 5. **25.15.** Розв'язків немає. *Вказівка.* Запишіть перше рівняння системи у вигляді $|x - 3 + y - 1| = \pi$. **25.16.** 1) -4; 0; 4; 2) розв'язків немає. **25.17.** 1) -4; -2; 2; 4; 2) 0. **25.18.** 1) -3; $-\frac{1}{5}$; 2) 2; $\frac{1}{3}$. **25.19.** 1) 1; 2) розв'язків немає; 3) $-\frac{2}{5}$. **25.20.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 0; 1; 3) 2. **25.21.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $[0; 2]$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$. **25.22.** 1) $(3; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right] \cup [3; +\infty)$; 4) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. **25.23.** 1) $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{11}{5}$; 7; 3) 1; 4) розв'язків немає; 5) -1; $\frac{2}{3}$; 6) $[0; 6]$; 7) $[3; +\infty)$; 8) $\left[\frac{3}{7}; +\infty\right)$; 9) $(2; +\infty)$; 10) $[2; 3]$. **25.24.** 1) -8; 12; 2) $\frac{2}{3}$; 3) -1; 4) ± 4; 5) $[-5; 8]$; 6) $[2; +\infty)$; 7) $\left(-\infty; \frac{11}{7}\right]$; 8) $[3; 6)$; 9) $(0; 2]$. **25.25.** 1) $(-\infty; -1)$; 2) $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **25.26.** 1) $(-\infty; -6) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 2) $\varnothing$; 3) $[-3; 1]$; 4) $(-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$. **25.29.** 1) Якщо $a < -\frac{4}{3}$, то розв'язків немає; якщо $a = -\frac{4}{3}$, то один розв'язок; якщо $a > -\frac{4}{3}$, то два розв'язки. *Вказівка*. Запишіть рівняння у вигляді $|3x-4|-x=a$ і побудуйте графік функції $y=|3x-4|-x$; 2) якщо $a\neq 1$, то один розв'язок; якщо $a=1$, то безліч розв'язків. **25.30.** 1) Якщо $a<2$, то розв'язків немає; якщо $a=2$, то безліч розв'язків; якщо $a>2$, то два розв'язки; 2) якщо $a<-4$ або $a>4$, то розв'язків немає; якщо $a=\pm 4$, то безліч розв'язків; якщо $-4<a<4$, то один розв'язок. **25.31.** $-2<a\leqslant -1$. *Вказівка*. Скористайтесь геометричною інтерпретацією. **25.32.** $4\leqslant a<6$. **26.4.** 1) Коренів немає; 2) -1; 3; 3) 2. **26.5.** 1) -3; -1; 2) коренів немає; 3) -1. **26.15.** $k=-3{,}5$. **26.21.** 1) Графік складається з двох точок: (0; 0) і (1; 1); 2) графік складається з двох точок: (0; 0) і (-2; -4). **27.14.** 1) -10; 2) 25; 3) $-23{,}8$; 4) 13; 5) 216; 6) -20. **27.15.** 1) 13,4; 2) 21; 3) -20. **27.16.** 1) $(-\infty;\ 0]$; 2) $(-\infty;\ +\infty)$; 3) $\{0\}$; 6) $(-\infty;\ +\infty)$. **27.17.** 2) $(-\infty;\ 0]$; 3) $[0;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ 0]$; 5) $\{0\}$; 6) $(0;\ +\infty)$. **27.18.** 4) $[3;\ +\infty)$; 5) $\left(\frac{1}{4};\ +\infty\right)$; 7) $\{3\}$. **27.19.** 1) $(1;\ +\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; 3) $[4;\ 4{,}5)\cup(4{,}5;\ +\infty)$. **27.20.** 6) -10; 10. **27.21.** 4) -7; 7. **27.24.** 1) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; 2) $(-\infty;\ 8)\cup(8;\ +\infty)$; 3) $[0;\ 9)\cup(9;\ +\infty)$; 4) $[0;\ +\infty)$; 5) $\{0\}$; 6) $\varnothing$; 7) $\{0\}$; 8) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 11) $\{0\}$. **27.25.** 1) $[0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; 2) $[0;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ +\infty)$; 4) $\{2\}$. **27.26.** 4) $(-\infty;\ +\infty)$; 6) $[-5;\ 2)$. **27.27.** 1) $[-7;\ 7]$; 2) $(-3;\ -2]\cup[2;\ +\infty)$. **27.28.** 1) 167; 2) 2116; 3) коренів немає. **27.29.** 1) 4900; 2) коренів немає. **27.30.** 2) *Вказівка*. $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$. **27.31.** *Вказівка*. $-x^2+6x-12=-(x-3)^2-3$. **27.32.** Вираз 2). **27.33.** 1) 0; 2) $[0;\ +\infty)$; 3) 0; 4) коренів немає; 5) коренів немає; 6) 1; 7) -2; 8) -1; 1; 9) 1; 10) 2; 11) 2; 1; 12) -1; 13) -1. **27.34.** 1) 0; 2) 0; 3) $[0;\ +\infty)$; 4) коренів немає; 5) 1; 6) 3; 7) 1; 8) 1; 9) 3; 4; 10) -2; -1. **27.35.** 1) $a>-1$; 2) $a=-1$; 3) $a<-1$. **27.36.** 1) $[-0{,}5;\ +\infty)$; 2) $\{-0{,}5\}$; 3) $\varnothing$; 4) $(0;\ +\infty)$; 5) $[0;\ +\infty)$; 6) $\{0\}$. **27.37.** 1) $[1;\ +\infty)$; 2) $\varnothing$; 3) $\{1\}$. **27.38.** 3) Див. рис. до задачі 27.38.3; 6) див. рис. до задачі 27.38.6; 8) див. рис. до задачі 27.38.8. **27.40.** 5) (5; 4); (5; -4); (-5; 4); (-5; -4). **27.42.** 3) Ко-

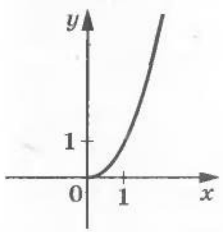


Рис. до задачі 27.38.3

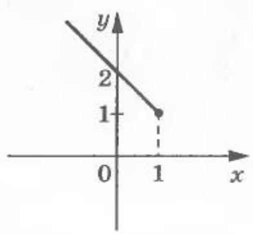


Рис. до задачі 27.38.6

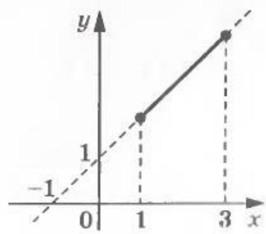


Рис. до задачі 27.38.8

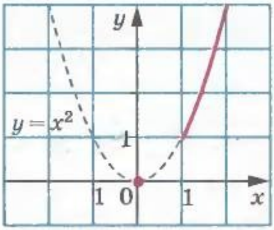


Рис. до задачі 27.46

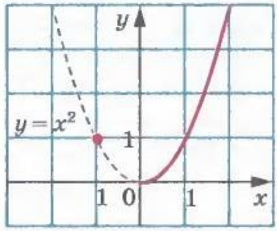


Рис. до задачі 27.47

ординатні осі та всі точки першої і третьої чверті; 4) координатні осі та всі точки першої і другої чверті. **27.43.** 1) Якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то a і b — числа одного знака; якщо $a = 0$, то b — будь-яке число; якщо $b = 0$, то a — будь-яке число; 3) якщо $b \neq 0$, то $a \geqslant 0$; якщо $b = 0$, то a — будь-яке число; 5) якщо $a \neq 0$, то $b \leqslant 0$; якщо $a = 0$, то b — будь-яке число. **27.44.** 1) $(0; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $\{0\}$; 5) $(0; +\infty)$; 6) $[0; +\infty)$; 7) $(-1; 0)$; 8) $(-1; 0]$. **27.45.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $[1; +\infty) \cup \{0\}$; 3) $(0; 1)$; 4) $[0; 1]$; 5) $(1; +\infty)$; 6) $(1; +\infty)$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **27.46.** Див. рис. до задачі 27.46. *Вказівка.* $D(y) = \{0\} \cup [1; +\infty)$. **27.47.** Див. рис. до задачі 27.47. **27.48.** 1) $a < 0$; 2) $a > 0$. **27.49.** 1) $a < 0$ або $a = 1$; 2) $a \leqslant 1$. **27.50.** $0 \leqslant a < 4$ або $a > 4$. **27.51.** 1) $a = -9$ або $a > 0$; 2) $a \leqslant 0$ або $a = 1$; 3) $a = 0$ або $a \geqslant 1$. **27.52.** $a < 0$ або $a = 16$. **27.53.** 1) Якщо $a = 0$, то $x \geqslant 1$; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 2) якщо $a = 1$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 1$, то $x = 0$; 3) якщо $a = 0$, то $x \geqslant 1$; якщо $a \neq 0$, то $x = 2$; 4) якщо $a < 0$, то немає коренів; якщо $a \geqslant 0$, то $x = a^2 + 2$; 5) якщо $a < 1$, то $x = 1$ або $x = a$; якщо $a \geqslant 1$, то $x = a$; 6) якщо $a = 2$, то $x \geqslant 2$; якщо $a \neq 2$, то $x = 2$. **28.11.** *Вказівка.* Нехай $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ — дані раціональні числа. Тоді їх сума дорівнює $\frac{mq + np}{nq}$, тобто є числом виду $\frac{s}{t}$, де $s \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$. **28.12.** *Вказівка.* Якщо припустити, що дана сума є число раціональне, то з цього випливає, що дане ірраціональне число можна подати у вигляді різниці двох раціональних чисел. **28.13.** 1) Ні, наприклад, $\sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right) = 0$; 2) ні, наприклад, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$; 3) ні, наприклад, $\sqrt{3} \cdot 0 = 0$. **28.15.** $a \in \mathbb{Q}$, $b = 0$. **28.16.** 1) $a = 11$, $b = -6$; 2) $a = 7$, $b = 4$. **28.20.** *Вказівка.* Покажіть, що виконується рівність $\sqrt{2}\,(a - b) = a - c$. **28.21.** $p = -2$, $q = -1$. *Вказівка.* Покажіть, що виконується рівність $\sqrt{2}\,(2 + p) = -p - q - 3$. **28.23.** *Вказівка.* Із рівності $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ випливає, що число $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ — раціональне. **28.24.** *Вказівка.* Нехай $a < b$, $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. Розгляньте числа $\frac{a+b}{2}$ і $a+\frac{b-a}{\sqrt{2}}$. **28.25.** Ні. *Вказівка.* Нехай $x+\sqrt{2}=a$, $a \in \mathbb{Q}$. Звідси $x=a-\sqrt{2}$. Покажіть, що $x^3+\sqrt{2}=a^3+6a-(3a^2+1)\sqrt{2}$, і скористайтеся тим, що $3a^2+1 \neq 0$. **28.26.** 1) Існує, наприклад, $x=2-\sqrt{3}$; 2) не існує. *Вказівка.* Нехай $x+\sqrt{3}=n$, $\frac{1}{x}+\sqrt{3}=m$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$. Тоді $x=n-\sqrt{3}$ і $\frac{1}{x}=m-\sqrt{3}$. Звідси $(n-\sqrt{3})(m-\sqrt{3})=1$. Доведіть, що при цілих m і n отримана рівність суперечлива. **28.27.** *Вказівка.* Розгляньте систему координат, початком координат якої є довільний вузол сітки, а координатні осі направлені по лініях сітки. За одиничний відрізок візьміть довжину сторони квадрата сітки. Тоді кожний вузол сітки матиме цілі координати. Розгляньте пряму $y=\sqrt{2}x$. **29.25.** 4) $5-2\sqrt{3}$. **29.26.** 3) $-\sqrt{2}$. **29.27.** 0; -1. *Вказівка.* Ліва і права частини цього рівняння набувають тільки невід'ємних значень. **29.36.** 1) Коренів немає; 2) 3; 3) -1; 3. **29.37.** 1) 2; 2) -4. **29.40.** 3) Шукана множина точок — це об'єднання двох променів: додатної півосі ординат і від'ємної півосі абсцис, включаючи початок координат. **29.41.** 1) $\sqrt{\frac{a}{b}}$, якщо $a>0$ і $b>0$; $-\sqrt{\frac{a}{b}}$, якщо $a<0$ і $b<0$; 2) $\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$. **29.42.** 1) $2-a$; 2) $b+4$; 3) $-2b-1$, якщо $b<-\frac{1}{2}$; $2b+1$, якщо $b \geqslant -\frac{1}{2}$. **29.43.** 1) $5-a$, якщо $1<a<5$; $a-5$, якщо $a \geqslant 5$; 2) $-3b-1$, якщо $b<-\frac{1}{3}$; $3b+1$, якщо $b \geqslant -\frac{1}{3}$. **30.27.** 1) $6\sqrt{2}$; 2) $11\sqrt{2}$; 3) $10\sqrt{3}$; 4) $9\sqrt{5a}$; 5) $-a\sqrt{ab}$; 6) 0. **30.28.** 1) $-6\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{7b}$; 3) $10a^3\sqrt{a}$. **30.30.** 1) $16+\sqrt{3}$; 2) $-10\sqrt{5}-5$; 3) 1; 4) 1; 5) 4. **30.31.** 1) $10-4\sqrt{2}$; 2) 74; 3) 4; 4) 32. **30.38.** 1) $\sqrt{a}-2$; 2) $\frac{6}{m-2\sqrt{m}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{xy}}$; 4) $\frac{4\sqrt{a}}{16-a}$; 5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$; 7) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+5}$; 8) $\sqrt{a}-1$; 9) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; 10) $\sqrt{x}$. **30.39.** 1) $\frac{4}{a+\sqrt{a}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; 5) $\sqrt{x}$; 6) $\frac{22}{9-a}$. **30.40.** 1) $m^4\sqrt{-m}$;

3) $a^2b^6\sqrt{b}$; 4) $-2x^3\sqrt{y}$; 6) $m^3n^3\sqrt{mn}$; 7) $-3xy^7\sqrt{5x}$; 8) $8ab^4\sqrt{b}$; 9) $-11m^5b^9\sqrt{2m}$; 10) $mnp^7\sqrt{-p}$. **30.41.** 1) $-m^9\sqrt{-m}$; 3) $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$; 4) $-7a\sqrt{b}$; 6) $a^4b^4\sqrt{ab}$; 7) $-3x^7y^{17}\sqrt{3x}$; 8) $-2c^3n^3p^3\sqrt{-2p}$. **30.42.** 2) Оскільки з умови випливає, що $b \leqslant 0$, то $b\sqrt{-b} = -\sqrt{-b^3}$; 3) $\sqrt{c^7}$; 5) $-\sqrt{x^3y^5}$; 13) $\sqrt{a^3b^3}$. **30.43.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$; 9) $-\sqrt{-5a^9b}$. **30.46.** 1) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\sqrt{a}$; 3) $-\sqrt{ab}$; 4) $\frac{a-b+\sqrt{ab}}{a-b}$; 5) $\frac{\sqrt{a-b}}{b}$; 6) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. **30.47.** $\frac{2\sqrt{a}}{a}$. **30.48.** $a+b$. **30.49.** 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+2$; 3) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 5) $5-2\sqrt{3}$; 6) $3\sqrt{3}-1$. **30.50.** 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}+3$; 3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{5}-1$; 5) $\sqrt{15}+\sqrt{3}$; 6) $5\sqrt{3}-4$. **30.51.** 1) 9; 2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **30.54.** 1) $4+\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}+1$; 3) -2. **30.57.** 1) $\sqrt{a-1}+1$; 2) $\sqrt{a-3}+2$; 3) $\frac{\sqrt{x}}{2}+1$; 4) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$; 5) 1; 6) 2; 7) $\sqrt{a+2}$. **30.58.** 1) $\sqrt{a-4}+2$; 2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2}$; 3) $\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{1}{2}$; 7) $\sqrt{2a-1}+\sqrt{a}$. **31.7.** 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) коренів немає; 4) 1. **31.14.** Якщо $a \geqslant 0$, то один корінь; якщо $a < 0$, то коренів немає. **31.15.** $2\sqrt{a}+1$ при $a > 1$; 3 при $0 \leqslant a \leqslant 1$. **31.16.** 12 при $a > 36$; $2\sqrt{a}$ при $0 \leqslant a \leqslant 36$. **31.17.** 1) $\sqrt{x+1}$; 2) якщо $4 < x < 8$, то $\frac{4-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}}$; якщо $x \geqslant 8$, то 1; 3) якщо $2 \leqslant x \leqslant 4$, то $2\sqrt{x-2}$; якщо $x > 4$, то $2\sqrt{2}$; 4) якщо $0 \leqslant a < 1$, то 1; якщо $a \geqslant 1$, то $\sqrt{a}$. **31.18.** 1) Якщо $3 \leqslant a \leqslant 7$, то $2-\sqrt{a-3}$; якщо $a > 7$, то $\sqrt{a-3}-2$; 3) якщо $0 \leqslant x \leqslant 4$, то 2; якщо $x > 4$, то $\sqrt{x}$. **31.19.** 1) 4; 2) $[-1; 0]$. **31.20.** 15. **32.12.** 6; 7. **32.13.** 9; 10. **32.14.** 1) 0; 14; 2) коренів немає. **32.15.** 1) 0; $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **32.20.** -3; -2 або 3; 4. **32.21.** -1; 0 або 0; 1. **32.22.** 1) 4; 2) 0; -8; 3) -9; 9. **32.27.** 1) 0; -3; 3; 2) 0; 1; 3) 1; 4) -2; 2; 5) 0; 6) коренів немає. **32.28.** 1) 0; 7; -7; 2) 0; 5; -7; 3) $-1{,}5$; $1{,}5$; 4) -3. **32.29.** 1) 2; 2) 3; 3) 0,5; -2; 4) такого значення не існує. **32.30.** 1) $a = 4$, $x_2 = -4$; 2) $a = 0$, $x_2 = 2$ або $a = -1$, $x_2 = \frac{9}{4}$; 3) $a = 3$, $x_2 = -2$. **32.31.** 1) $a = 2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; 2) $a = -6$, $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$; 3) такого значення

не існує. **33.6.** 1) 1; $-\frac{7}{6}$; 2) 1; 9; 3) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$. **33.7.** 1) 2; $-\frac{7}{3}$; 2) −3; $\frac{1}{7}$. **33.8.** 1) 4; −3,5; 2) 1; $-\frac{1}{25}$; 3) 2; $\frac{4}{3}$; 4) $-3 \pm \sqrt{15}$; 5) 3; 6; 6) $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$. **33.9.** 1) 3; 9; 2) $\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$; 3) коренів немає. **33.10.** 1) $\sqrt{5}$; $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$; 2) −1; $\sqrt{6}$; 3) 6; $-\frac{2}{3}$; 4) −1; $\frac{31}{22}$; 5) 6; −4,5. **33.11.** 1) $-\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$; 2) 2; $\sqrt{3}$; 3) 1; $\frac{3}{8}$; 4) 1; $-\frac{14}{3}$. **33.12.** −20; 4. **33.13.** 1; $-\frac{4}{3}$. **33.15.** 7. **33.16.** 38 см. **33.17.** 6 і 14 або −14 і −6. **33.18.** 10; 11. **33.19.** 13; 14. **33.20.** 8 см. **33.21.** 6 см або 12 см. **33.22.** 9; 11; 13. **33.23.** 4; 6; 8; 10. **33.24.** 16 мавп або 48 мавп. **33.25.** 9 команд. **33.26.** 15 сторін. **33.27.** 1) $b = -2$; 2) $b = -12$ або $b = 12$. **33.28.** 1) $b = 13{,}5$; 2) $b = -8$ або $b = 8$. **33.29.** 1) −8; −7; 0; 1; 2) −2; 3; $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$; 3) −7; 7; 4) −1; 1; 0,6; −0,6; 5) $-3 + \sqrt{14}$; 6) −2; 2; 7) коренів немає; 8) $\frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}$; 9) 2; 10) 3; 5; −3; −5; 11) 2; −2; 12) 0; 2; 4; 6; $3 \pm \sqrt{7}$; $3 \pm \sqrt{3}$. **33.30.** 1) −12; 2; −2; −8; 4) 3; 5) 1; 15; $-8 - \sqrt{79}$; 6) $\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 7) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; −6; 6; 8) 15; $-7 \pm \sqrt{34}$; 9) 9; −9; 10) коренів немає; 11) 0; −1; 12) $-2 \pm 2\sqrt{3}$; $4 + 2\sqrt{2}$. **33.31.** 1) −10; 2) 3; 4) 1,5; 5) −7; 7. **33.32.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 3; 4) 7. **33.33.** 1) −2; 2) 8. **33.34.** 1) 1; 2) −3; 3) −6. **33.35.** 1) 4; 2) 0; 25; 4. **33.36.** 9; 3. **33.41.** 1) $\sqrt{3}$; 1; 2) $\frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$; 1; 3) −1; 2; 4) $\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$; −1. **33.42.** 1) $-\sqrt{3}$; 1; 2) 0; 6. **33.43.** 1) $x = -2a - 1$ або $x = -a$; 2) $x = 2a$ або $x = 4$; 3) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{25}{a}$ або $x = -\frac{1}{a}$; якщо $a = 0$, то коренів немає; 4) якщо $a = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$; якщо $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$ або $x = \frac{1}{2a - 1}$. **33.44.** 1) $x = 3a - 5$ або $x = -a$; 2) $x = -3a$ або $x = 4$; 3) якщо $a = 0$, то $x = 1$; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$ або $x = \frac{1}{a}$. **33.45.** 1) $b = 0$ або $b = -\frac{9}{7}$; 2) $b = -5$, або $b = 2\sqrt{6}$, або $b = -2\sqrt{6}$; 3) $b = 19$; 4) $b = 2$. **33.46.** 1) $b = 0$, або $b = -0{,}5$, або $b = 0{,}5$; 2) $b = -3$ або $b = -5$; 3) $b = 5$. **33.47.** $a < 0$ або $0 < a < \frac{4}{3}$.

34.8. $x_2 = 10$, $q = -20$. **34.9.** $x_2 = -6$, $p = -1$. **34.10.** $x_2 = 2$, $b = 14$. **34.11.** $x_2 = 1{,}6$, $m = -1{,}28$. **34.12.** $-20{,}5$. **34.13.** -7. **34.18.** $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $c = 9$. **34.19.** $x_1 = -14$, $x_2 = -6$, $a = 84$. **34.20.** $x_1 = 9$, $x_2 = -2$, $m = -18$. **34.21.** $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $n = -5$. **34.22.** 1) 1,5; 2) 69. *Вказівка.* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; 3) 57; 4) 414; 5) 567. **34.23.** 1) 80; 2) $-\frac{57}{16}$; 3) $\sqrt{89}$. *Вказівка.* $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$. **34.24.** $x^2 + 12x + 17 = 0$. **34.25.** $x^2 - 18x + 49 = 0$. **34.26.** $6x^2 - 14x + 3 = 0$. **34.27.** $x^2 - 15x + 8 = 0$. **34.28.** $a = 2$ або $a = -2$. **34.29.** $a = 6$ або $a = -6$. **34.31.** 1) 7; -7; 5; -5; 2) -11; 11; -1; 1; -4; 4. **34.32.** 1) -9; 9; -6; 6; 2) -17; 17; -7; 7; -3; 3. **34.33.** $b = c = 0$ або $b = 1$, $c = -2$. **34.34.** $a = -3$. **34.35.** $a = 5$. **34.36.** $a = 2$. **34.37.** $a = 6$. **34.38.** $a = 9$ або $a = -1$. **34.39.** 1) $a = 2$; 2) такого значення a не існує. **34.40.** $a = 2$. **34.41.** $a = 0$. **34.42.** $a = 0$. **35.3.** 4) $\frac{2a-3}{a-6}$; 5) $\frac{b-3}{2b-1}$; 6) $\frac{c+1}{c-2}$; 7) $\frac{m^2+m+1}{m+10}$; 8) $-\frac{x+4}{x+8}$; 9) $\frac{1-4n}{5n+1}$. **35.4.** 3) $\frac{4x-3}{x-1}$; 4) $\frac{2y+5}{y-1}$; 5) $\frac{a+1}{a-5}$; 6) $\frac{3-b}{b-1}$. **35.5.** 3) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; 4) $x = 1$. **35.7.** 1) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; 2) $\mathbb{R}$. **35.8.** 1) -3; 2) -2; 3) $\frac{4}{3}$. **35.9.** 1) -4; 2) -14. **35.10.** 1) 1; 2) $\frac{2b+1}{b^2}$; 3) $-\frac{4}{c}$; 4) 4. **35.14.** 1) $(x-y)(x-5y)$; 2) $(a+9b)(a-4b)$; 3) $(3m+n)(m-3n)$; 4) $(4x-y)(x-y)$. **35.15.** 1) $(a-4b)(a-10b)$; 2) $(3b-2c)(4b+3c)$. **35.16.** 1) $\frac{a+3b}{2b-a}$. **35.17.** 2) $\frac{2u+t}{t-3u}$. **35.18.** 1) Об'єднання прямих $y = 2x$ і $y = 4x$; 2) об'єднання прямих $2x - 3y + 1 = 0$ і $2x + y - 2 = 0$. *Вказівка.* Запишіть рівняння у вигляді: $4x^2 - (4y + 2)x - 3y^2 + 7y - 2 = 0$. **35.19.** 1) Якщо $a = 3$, то x — будь-яке число; якщо $a = -2$, то коренів немає; якщо $a \neq 3$ і $a \neq -2$, то $x = \frac{a+3}{a+2}$; 2) якщо $a = 7$, то x — будь-яке число; якщо $a = 1$, то коренів немає; якщо $a \neq 7$ і $a \neq 1$, то $x = \frac{2a+1}{a-1}$. **35.20.** Якщо $a = -8$, то x — будь-яке число; якщо $a = 1$, то коренів немає; якщо $a \neq -8$ і $a \neq 1$, то $x = \frac{a+8}{a-1}$. **35.21.** 1) $a > \frac{9}{8}$; 2) таких a не існує. **35.22.** *Вказівка.* Розгляньте ліву частину даного рівняння як квадратний тричлен відносно a; дискримінант цього квадратного тричлена має бути невід'ємним. **35.23.** $\sqrt{2}$;

$\frac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$. *Вказівка.* Маємо: $(\sqrt{2})^2 - x^2\sqrt{2} + x^3 - x^2 = 0$. Розгляньте ліву частину рівняння як квадратний тричлен відносно $\sqrt{2}$. **35.24.** $\frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$. **36.1.** 1) –4; 1; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) 7; 4) –5; 10; 5) 5; 6) –2; 9; 7) –3; 2; 8) 4; –0,4. **36.2.** 1) –1; 2) –0,25; 3) 0,5; 6; 4) 8; 5) –3; 6) –3; 12; 7) –1; $\frac{2}{7}$; 8) –3; 13. **36.3.** 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. **36.4.** 1) 10; 2) –7. **36.5.** 1) $3 \pm 3\sqrt{2}$; 2) –23; 1; 3) –27; –1; 4) 3. **36.6.** 1) 4; 9; 2) 5. **36.7.** 1) –1,5; 2) –2; 3) –3; 4) 2; 5) 9; 6) 1; 7) 9. **36.8.** 1) –3; 2) 2; 3) –20; 2; 4) 15. **36.9.** 1) $-\frac{2}{3}$; 14; 2) –56; 60. **36.10.** 1) –15; 12; 2) –20; 2. **36.11.** 1) –5; 2) коренів немає; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) 1. **36.12.** 1) –15; 1; 2) 1,5. **36.13.** 1) $-\frac{5}{4}$; 5; 2) 0; $\frac{-5 \pm \sqrt{3}}{2}$; 3) –4; $-\frac{1}{2}$. **36.14.** 1) 0; 2) $-\frac{5}{2}$; 0; 3) $-\frac{5}{2}$; 0. **36.15.** 1) Якщо $a = 1$, то $x = 7$; якщо $a = 7$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 7$, то $x = 1$ або $x = 7$; 2) якщо $a \neq 1$ і $a \neq 7$, то $x = a$; якщо $a = 1$ або $a = 7$, то коренів немає; 3) якщо $a \neq 2$ і $a \neq \frac{2}{3}$, то $x = 3a$ або $x = 2$; якщо $a = 2$ або $a = \frac{2}{3}$, то $x = 2$. **36.16.** 1) Якщо $a \neq 1$ і $a \neq 0$, то $x = 2a$ або $x = a + 2$; якщо $a = 1$, то $x = 3$; якщо $a = 0$, то рівняння невизначене; 2) якщо $a \neq 0$, то $x = 3a$ або $x = -2a$; якщо $a = 0$, то коренів немає; 3) якщо $a \neq -1{,}5$, то $x = 0$ або $x = 2a + 1$; якщо $a = -1{,}5$, то $x = 0$; 4) якщо $a \neq 1$, то $x = a - 2$; якщо $a = 1$, то коренів немає; 5) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{2}$; якщо $a = 0$, то коренів немає. **36.17.** 1) Якщо $a \neq 3$, $a \neq -1$, то $x = a + 3$ або $x = a - 1$; якщо $a = 3$, то $x = 6$; якщо $a = -1$, то рівняння невизначене; 2) якщо $a \neq -2$, $a \neq -0{,}5$, $a \neq 1$, то $x = -2a$ або $x = -a - 1$; якщо $a = -2$, то $x = 4$; якщо $a = -0{,}5$, то $x = -0{,}5$; якщо $a = 1$, то розв'язків немає; 3) якщо $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = a$ або $x = a + 1$; якщо $a = -1$, то $x = -1$; якщо $a = 0$ або $a = 1$, то $x = 1$; якщо $a = 2$, то $x = 3$; 4) якщо $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{a+1}{a}$ або $x = 1$; якщо $a = 0$ або $a = -1$, то $x = 1$; якщо $a = 1$, то рівняння невизначене. **36.18.** 1) $a = 2\sqrt{5}$, або $a = -2\sqrt{5}$, або $a = 6$; 2) $a = \pm 1$; 3) $a = 2$ або $a \leqslant 1$. **36.19.** 1) $a = \pm 2$, $a = -\frac{10}{3}$; 2) $a = 3$, або $a = 4$, або $a = \frac{7}{2}$;

3) $a \leqslant 0$ або $a = 2$. **37.7.** 1) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; -3; 3; 2) -6; -4; -1; 1; 3) 0; 3; 4) -1; -3; 1. **37.8.** 1) $-\frac{1}{3}$; 1; 2) 0,5. **37.9.** 1) -1; 7; 2; 4; 2) -6; -2; $-4 \pm 2\sqrt{5}$; 3) -2; 1; 4) $-\frac{5}{3}$; 10. **37.10.** 1) 0; 1; 2) 0; -2; 3) -1; 4) -1; 1; 2; 4; 5) -3; 1. **37.11.** 1) 1; 2) 0; -2; $\frac{-2 \pm \sqrt{54}}{2}$; 3) -2; -1; 0; 1; 4) -3; -2; 1; 2; 5) -3; 0; $\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$. **37.12.** 1) 0; $\frac{3}{8}$; $\frac{3 \pm \sqrt{73}}{16}$; 2) $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. **37.13.** 1) -1; 0; $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 2) -1; 6; $\frac{5 \pm \sqrt{97}}{2}$. **37.14.** 1) -1; 12; 2) $-4 \pm \sqrt{21}$. **37.15.** 1) $-5 \pm \sqrt{95}$; 2) $-4 \pm \sqrt{5}$. **37.16.** 1) -5; $-2 \pm \sqrt{5}$; 1; 2) -5; -1; 3; 3) -1; 3. *Вказівка*. Зробіть заміну $x^2 - 2x = t$. **37.17.** 1) -2; $-\frac{1}{2}$; 2) -6; -4; $\frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$. **37.18.** 1) -8; $-\frac{15}{2}$; $\frac{-35 \pm \sqrt{265}}{4}$; 2) -4; 5; $-5 \pm 3\sqrt{5}$. **37.19.** 1) $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}$; 2) $-3 \pm \sqrt{15}$; 3) -1; $-\frac{1}{6}$; 4) 2; $\frac{1}{2}$; $2 \pm \sqrt{3}$; 5) -1; -3; $3 \pm \sqrt{6}$. **37.20.** 1) 1; $\frac{-11 \pm \sqrt{85}}{6}$; 2) $5 \pm \sqrt{31}$; $\frac{3 \pm \sqrt{159}}{5}$; 3) 7; $\frac{1}{7}$; 4) $\frac{1}{2}$; 2. **37.21.** 1) 2; 4; -1; $-\frac{1}{2}$; 2) 3; $\frac{2}{3}$. **37.22.** 1) $-3 \pm \sqrt{3}$; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 2) $2 \pm \sqrt{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. **37.23.** 1) -3; -1; 2) -2; 3. **37.24.** 1) 2; 3; 2) 3; 7. **37.25.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{2}$; 2) 3; 5; $9 \pm \sqrt{66}$; 3) $\frac{1}{2}$; 2; $3 \pm 2\sqrt{2}$. **37.26.** 1) $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$; 2) 1; 5; 3) 1; 4. **37.27.** 1) 2; $-1 \pm \sqrt{3}$; 2) 1; $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$; 3) $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\pm\frac{3\sqrt{11}}{11}$. **37.28.** 1) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 2) -1; 3; $\frac{11 \pm \sqrt{55}}{11}$; 3) -1; 2. **38.1.** 75 км/год. **38.2.** 50 км/год, 60 км/год. **38.3.** 80 км/год, 60 км/год. **38.4.** 80 км/год. **38.5.** 12 км/год. **38.6.** 12 сторінок. **38.7.** 30 $м^3$, 25 $м^3$. **38.8.** 6 днів. **38.9.** 31 км/год. **38.10.** 10 км/год. **38.11.** 3 км/год. **38.12.** 2 км/год або 2,25 км/год. **38.13.** 60 км/год, 40 км/год. **38.14.** 60 км/год. **38.15.** 60 км/год. **38.16.** 8 км/год. **38.17.** 32 км/год. **38.18.** $\frac{1}{4}$. **38.19.** $\frac{7}{12}$. **38.20.** 45 днів, 36 днів. **38.21.** 15 год, 10 год. **38.22.** 21 год, 24 год. **38.23.** 80 г. **38.24.** 30 кг. **38.25.** 3 км/год. **38.26.** 5 год. **38.27.** 4 год, 6 год, 12 год. **38.28.** 80 км/год. **38.29.** 24 де-

талі. **38.30.** 12 год. **39.15.** *Вказівка*. Скористайтесь задачею 39.7. **39.18.** *Вказівка*. $(ab - mn) - (am - bn) = (a + n)(b - m)$. **39.20.** 1) Розв'язків немає; 2) (1; 5); (9; −3); (−1; −3); (−9; 5); (3; 1); (−3; 1); 3) (2; 1); (5; −2); (0; −2); (−3; 1); 4) (0; 1); (0; −1); (−4; −1); (4; 1). *Вказівка*. $x^2 - 4xy + 3y^2 = (x - y)(x - 3y)$; 5) (4; −1); (−4; 1); (3; 1); (−3; −1); 6) (4; −3); (−11; −3); (3; −1); (−6; −1). *Вказівка*. $x^2 - 2xy - 3y^2 + x + y = (x + y)(x - 3y) + (x + y) = (x + y)(x - 3y + 1)$. **39.21.** 1) (3; 1); (3; −1); (−3; 1); (−3; −1); 2) (5; 1); (1; 3); (1; −5); (5; −15); 3) розв'язків немає; 4) (0; 1); (0; −1); (−1; 1); (1; −1). **39.22.** 1) (0; 0); (2; 2). *Вказівка*. Подайте рівняння у вигляді $(x - 1)(y - 1) = 1$; 2) (9; 2); (−5; 0); (3; 8); (1; −6). **39.23.** (2; 0); (1; −2). **39.24.** *Вказівка*. Запишіть даний вираз у вигляді $(1^n + 9^n) + (2^n + 8^n) + (3^n + 7^n) + (4^n + 6^n) + 5^n$. **39.26.** Не існує. *Вказівка*. Якщо припустити супротивне, то $(P(9) - P(1)) \vdots (9 - 1)$ (див. приклад 5 пункту 39), а це не так. **39.27.** Усі двоцифрові числа, крім 10 і 40, для яких виконується одна з умов: $a - b = 1$ або $a - b = 4$. **39.28.** Не існує. **39.29.** Не існує. *Вказівка*. $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 3 \cdot 37\,(a + b + c)$. Далі скористайтеся тим, що $a + b + c \leqslant 27$. **39.30.** *Вказівка*. $19(x + y) - 2(3x + 8y) = 13x + 3y$. **39.32.** *Вказівка*. $(3x + 10y) + (3y + 10x) = 13(x + y) \vdots 13$. Звідси випливає, що $(3y + 10x) \vdots 13$. **39.35.** *Вказівка*. $(\overline{abc} + \overline{bac} + \overline{cab}) \vdots 37$. **39.36.** *Вказівка*. $\overline{aba} = 101a + 10b = 10(a + b) + 91a$. **39.37.** Не може. *Вказівка*. Сума непарної кількості непарних доданків — число непарне. **39.38.** 2^2. *Вказівка*. $3^{2n+1} + 1 = 4(3^{2n} - 3^{2n-1} + \ldots - 3 + 1)$. Слід зауважити, що в дужках маємо суму непарної кількості непарних доданків, яка дорівнює непарному числу. **39.39.** *Вказівка*. Усі дільники числа n^2, крім одного, можна розбити на пари виду $\left(d; \frac{n^2}{d}\right)$, де $d \neq \frac{n^2}{d}$. **39.40.** *Вказівка*. $10A - B = 99\,999a$. Переконайтеся, що $99\,999 \vdots 41$. **39.42.** *Вказівка*. Доведіть, що в запису даного числа є три однакові цифри. Тоді можна закреслити решту 16 цифр. **39.43.** *Вказівка*. Припустимо, що $x_0 \in \mathbb{Z}$ таке, що $P(x_0) = 0$. Тоді $P(x_0) - P(a) = P(x_0) - P(b) = P(x_0) - P(c) = 1$. Звідси 3 різних числа $x_0 - a$, $x_0 - b$, $x_0 - c$ є дільниками числа 1. **40.10.** 0, 6, 12. **40.12.** 9. **40.14.** 0, 1, 2. **40.19.** Не існує. *Вказівка*. Розгляньте остачі при діленні даного числа на 18. **40.22.** *Вказівка*. $(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1$. Покажіть, що $4n(n + 1) \equiv 0 \pmod 8$. **40.23.** 0, 1, 6. **40.24.** 0, 1, 8. **40.29.** Усі рівняння розв'язків не мають. *Вказівка*. Скористайтесь результатами задач 40.20, 40.21, 40.23, 40.24 відповідно. **40.30.** *Вказівка*. Скористайтесь результатами задач 40.20, 40.21, 40.23 і прикладу 3 з пункту 40. **40.33.** 1) 2. *Вказівка*. $5^2 \equiv 1 \pmod 3$; 2) 1; 3) 5; 4) 0. **40.34.** 1) 4; 2) 1; 3) 1. **40.35.** 2, 5, 8. *Вказівка*. $n = 3k_1 + r_1$, $n = 6k_2 + r_2$, $n = 9k_3 + r_3$, де $r_1 \leqslant 2$, $r_2 \leqslant 5$, $r_3 \leqslant 8$. Звідси $r_1 + r_2 + r_3 \leqslant 15$. З урахуванням того, що $r_1 + r_2 + r_3 = 15$, маємо $r_1 = 2$, $r_2 = 5$, $r_3 = 8$. **40.36.** *Вказівка*. $4^n + 4^m \equiv 2 \pmod 3$. Далі скористайтеся результатами задачі 40.20. **40.37.** *Вказівка*. Скористайтеся результатами задачі 40.21. **40.38.** *Вказівка*. Якщо припустити, що всі числа є непарними, то із задачі 40.22 випливає, що $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 \equiv 5 \pmod 8$. **40.39.** *Вказівка*. Нехай $p = 2n + 1$, $q = 2k + 1$. Тоді дискримінант даного рівняння $4n(n + 1) - 8(k + 1) + 5 \equiv 5 \pmod 8$. **40.40.** *Вказівка*. Скористайтеся прикладом 3 п. 40. **40.41.** *Вказівка*. $1 + n + n^2 + n^3 = (1 + n)(1 + n^2)$, але $1 + n^2$ не ділиться націло на 3. **40.42.** 665. *Вказівка*. Дільник дорівнює 9. **40.43.** 233. **40.44.** 17. *Вказівка*. Це всі натуральні числа виду $6k + 3$, які менші від 100. **40.45.** 30; 60. *Вказівка*. $n = 9q_1 + q_1 = 10q_1$, $q_1 \leqslant 8$, $n = 14q_2 + q_2 = 15q_2$, $q_2 \leqslant 13$. Звідси $n \leqslant 80$ і $n \,\vdots\, 30$. **40.46.** 270; 540. **40.47.** 1) *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, числа виду $7n + 3$; 2) *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, числа виду $9n + 5$. **40.48.** *Вказівка*. Розгляньте числа 2, 2^2, 2^3, ..., 2^{2010}. **40.49.** *Вказівка*. Розгляньте числа 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ одиниця}}$. Якісь два з них дають при діленні на n рівні остачі. **40.50.** *Вказівка*. Доведіть, що числа a, b і c дають однакові остачі при діленні на 3. **41.1.** 1) 23; 2) 47. **41.2.** 1) 29; 2) 67. **41.5.** 1) 1 або 2; 2) 1 або 3. **41.13.** 2) Не існують. *Вказівка*. $(a^3 - a) \,\vdots\, 6$. **41.14.** 3) *Вказівка*. Подайте чисельник дробу у вигляді $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$. **41.16.** 1) $m = 35$, $n = 15$; 2) $m = 8$, $n = 22$; 3) $m = 3$, $n = 39$ або $m = 39$, $n = 3$; 4) $m = 7$, $n = 1001$, або $m = 77$, $n = 91$, або $m = 1001$, $n = 7$, або $m = 91$, $n = 77$. **41.18.** 3 мм. *Вказівка*. Довжина сторони останнього квадрата дорівнює НСД (324; 141). **41.19.** *Вказівка*. Серед вибраних чисел є два послідовних. **41.20.** *Вказівка*. Оскільки НСК $(a; b) = 2^4 \cdot$ НСД $(a; b)$, то $a = 2^k \cdot$ НСД $(a; b)$, $b = 2^m \cdot$ НСД $(a; b)$. **41.22.** $x = 54$, $y = 2$ або $x = 24$, $y = 8$. *Вказівка*. Оскільки НСД $(y; (y + 1)^2) = 1$, то $\frac{243}{(y+1)^2}$ — ціле число. **41.23.** *Вказівка*. Оскільки НСК $(m; n) \cdot$ НСД $(m; n) = mn$, то НСД $(m; n)$ і НСК $(m; n)$ — корені рівняння $x^2 - (m + n)x + mn = 0$. **41.24.** *Вказівка*. $\frac{n^4 + 4n^2 + 3}{n^4 + 6n^2 + 8} = \frac{(n^2 + 1)(n^2 + 3)}{(n^2 + 2)(n^2 + 4)}$. НСД $(n^2 + 1; n^2 + 2) =$

= НСД (n^2+3; n^2+2) = НСД (n^2+3; n^2+4) = 1. Оскільки (n^2+ $+4$) − (n^2+1) = 3, то НСД (n^2+1; n^2+4) $\leqslant$ 3. Проте числа n^2+1 і n^2+4 різної парності і n^2+1 не ділиться націло на 3. 41.25. $n=122$. *Вказівка.* Доведіть, що один з множників ділиться націло на 125, звідки $n \geqslant 121$. **41.26.** $m=2$, $n=6$ або $m=6$, $n=2$. *Вказівка.* Оскільки mn = НСК (m; n)·НСД (m; n), то НСК (m; n) − НСД (m; n) = $\dfrac{\text{НСК}(m;\,n)\cdot\text{НСД}(m;\,n)}{3}$. Позначивши НСК ($m$; n) = x, НСД (m; n) = y, розгляньте рівняння $3x-3y=xy$. **41.27.** Ні. *Вказівка.* Зазначені операції зберігають НСД записаних на картці чисел. **42.14.** 2 834 645. **42.17.** 51. **42.18.** 1 023 457 896. **42.20.** *Вказівка.* Це число кратне 3, але не кратне 9. **42.21.** Не може. *Вказівка.* Числа виду $\overline{x66}$ і $\overline{x06}$ кратні 2, але не кратні 4. **42.23.** 1. *Вказівка.* $28^{101} \equiv 1 \pmod 9$. **42.24.** 1) 977. *Вказівка.* $S(n) \leqslant 27$. Крім того, скористайтеся тим, що $n \equiv S(n) \equiv 2 \pmod 3$; 2) розв'язків немає. *Вказівка.* $n^2 \equiv (S(n))^2 \equiv 1 \pmod 3$ або $n^2 \equiv (S(n))^2 \equiv 0 \pmod 3$. **42.25.** 1) 982; 2) розв'язків немає. *Вказівка.* $n + S(n) + S(S(n)) \equiv 0 \pmod 3$. **42.26.** *Вказівка.* $S(5n) \equiv 5n \pmod 9$, $S(n) \equiv n \pmod 9$, отже, $4n \equiv 0 \pmod 9$. **42.27.** *Вказівка.* Число n^2+1 не кратне 9. **42.28.** Ні. *Вказівка.* Нехай $n=\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ — шукане число. $|P(n)| = |(a_0+a_2+a_4)-(a_1+a_3+a_5)| \leqslant |(4+$ $+5+6)-(1+2+3)| = 9$. Доведіть також, що $P(n)$ — непарне число. **42.29.** *Вказівка.* Доведіть, що дане число ділиться націло на 11. **42.30.** 1, 3 і 9. *Вказівка.* Розгляньте числа $a=\underbrace{111\,\ldots\,1}_{n\,-\,2\text{ цифри}}2$ і $b=\underbrace{111\,\ldots\,1}_{n\,-\,3\text{ цифри}}21$, $S(a)=S(b)=n$, а тому за умовою кожне з цих чисел кратне n. Тоді різниця $b-a=9$ також кратна n. **43.10.** 1. **43.11.** 2. **43.12.** 1) 2; 2) 2. *Вказівка.* $4n^2+5n-21=(4n-7)\times$ $\times(n+3)$; 3) 1. **43.13.** 1) 1; 2) 2; 3) 1. **43.14.** *Вказівка.* Скористайтесь результатом задачі 43.9. **43.16.** 3. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що числа p, $p+26$ і $p+28$ дають різні остачі при діленні на 3. **43.17.** 3. **43.20.** *Вказівка.* $a^2+9ab+b^2=(a-b)^2+11ab$. **43.22.** 3. **43.23.** 3. **43.25.** *Вказівка.* $8\underbrace{00\,\ldots\,0}_{10\text{ нулів}}27=(2\cdot10^4)^3+3^3$. **43.26.** *Вказівка.* $999\,999\,973=(10^3)^3-3^3$. **43.27.** $p=3$, $q=2$. *Вказівка.* Число p^2-1 кратне 8. **43.28.** $p=3$, $q=11$. *Вказівка.* Якщо $p \neq 3$, то $(p^2+2)\,\vdots\,3$. **43.29.** 2. *Вказівка.* Нехай $4p+1=m^2$. Доведіть, що число m^2-1 ділиться націло на 8. **43.30.** 5. *Вказівка.* Число $2(n+12)-(2n-1)=25$ кратне p. **43.31.** 7. **43.32.** 2.

Вказівка. Якщо $n = 2^k$, $k > 1$, то число $2^n - 1$ складене. Якщо $n \neq 2^k$, то складеним є число $2^n + 1$. **43.33.** 1. *Вказівка*. $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$. **43.36.** 5. *Вказівка*. Для шуканого числа p можна записати дві рівності: $p = q_1 + 2$, $p = q_2 - 2$, де q_1 і q_2 — прості числа. Далі доведіть, що одне з чисел p, q_1, q_2 кратне 3. **43.37.** *Вказівка*. За малою теоремою Ферма число $(a^{13} - a) + (b^{13} - b) + (c^{13} - c)$ кратне 13. **43.39.** *Вказівка*. $24^{24} - 1 = (24^6)^4 - 1 = (24^4)^6 - 1$. **43.41.** 3. *Вказівка*. $p^2 + 11 = (p^2 - 1) + 12$. Якщо $p > 3$, то $((p^2 - 1) + 12) \vdots 12$ (див. задачу 43.14), а отже, має більше ніж 6 дільників. **43.42.** $991 \cdot 997 \cdot 1009$. *Вказівка*. Нехай $997 = x$. Тоді $989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320 = (x - 8)(x + 10)(x + 4) + 320 = x^3 + 6x^2 - 72x$. **43.43.** *Вказівка*. Значення кожного з виразів $42^{47} + 1$ і $47^{42} - 1$ кратне 43. **43.44.** *Вказівка*. Кожне з чисел $p^q - p$ і $q^p - q$ ділиться націло на pq. **45.6.** 1) *Вказівка*. $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Доведіть, що числа 2 і -1 є коренями многочлена $A(x)$. **45.7.** 1) $a = 6$. **45.8.** $b = -5$. **45.9.** 1) $a = -2$, $b = 1$; 2) $a = -25$, $b = 4$. **45.10.** $a = -9$, $b = -9$. **45.11.** $a = -3$, $b = -6$, $c = 8$. **45.12.** $a = 1$, $b = 1$ або $a = 3$, $b = -1$. **45.13.** $x + 3$. **45.14.** *Вказівка*. Розгляньте даний вираз як многочлен відносно a з параметрами b і c. Покажіть, що b є коренем цього многочлена. **45.17.** Ні. *Вказівка*. Доведіть, що при всіх цілих значеннях x значення многочлена кратне 3. **46.1.** 1) -1; -3; -5; 2) -1; 2; $-\frac{1}{2}$; 3) 1; -1; $-\frac{2}{3}$; 4) 1; -2; 5) 2; -1; $\frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$; 6) -2; -3. **46.2.** 1) 1; $\pm\sqrt{3} - 1$; 2) 2; -3; 3) -1; -2; 4) 1; -1; $\pm\sqrt{5} - 2$; 5) 1; 2; $\frac{\pm\sqrt{17} - 5}{2}$; 6) 1; -2; $-\frac{5}{3}$.

Предметний покажчик

ДОДАТОК 1

Зміст програми з алгебри (8 клас) для класів з поглибленим вивченням математики

Затверджено Міністерством освіти і науки України (лист № 1/11–2151 від 30.05.2008 р.)

Структура програми

Програма подана у формі таблиці, яка містить дві частини: зміст навчального матеріалу і вимоги до підготовки учнів.

У частину «Зміст навчального матеріалу», яка оформлена прямим шрифтом, включено зміст програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Текст, оформлений курсивом, містить навчальний матеріал, який вивчається у класах з поглибленим рівнем математики.

Програма передбачає можливість вивчення змісту курсу з різним степенем повноти. Додаткові питання і теми, узяті в квадратні дужки, можна не вивчати, що дозволяє вчителеві залежно від конкретних умов варіювати об'єм матеріалу, який вивчається, і відповідно ступінь поглиблення і розширення курсу.

8-й клас. Алгебра
(175 год. I семестр — 80 год, 5 год на тиждень, II семестр — 95 год, 5 год на тиждень)

К-ть год	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
10	**Тема 1. ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ 7 КЛАСУ** *Цілі вирази. Тотожні вирази. Тотожність. Степінь з натуральним показником і його властивості. Одночлени і многочлени та дії над ними. Формули скороченого множення. Розкладання многочлена на множники.* *Функція. Область визначення і область значень. Способи задання функції. Графік функції. Лінійна функція, її властивості і графік. Системи лінійних рівнянь з двома змінними.*	

К-ть год	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
10	**Тема 2. МНОЖИНИ І ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ** *Множина. Елемент множини. Порожня множина. Переріз і об'єднання множин. Підмножина. Круги Ейлера.* *Числові множини. Взаємно однозначна відповідність між елементами множин. Рівнопотужні множини. [Рівнопотужність множин точок відрізка і прямої.] Нескінченні множини. Зліченні множини. Зліченність множини цілих чисел.*	**Описує** поняття множина, елемент множини, множини натуральних, цілих і раціональних чисел, взаємно однозначна відповідність, рівнопотужні множини, нескінченна множина, зліченна множина. **Формулює** означення: підмножини, порожньої множини, об'єднання і перерізу множин; теорему про кількість елементів множини, яка є об'єднанням двох скінченних множин. **Застосовує** символіку теорії множин, вивчений теоретичний матеріал для розв'язування задач.
40	**Тема 3. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ** Дробові вирази. Раціональні вирази. *Множина допустимих значень змінних.* Тотожність. Основна властивість дробу. Додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня раціональних дробів. Тотожні перетворення раціональних виразів. *Формули розкладання на множники різниці $x^n - y^n$ і суми $x^{2n+1} + y^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.* Раціональні рівняння. Рівносильні рівняння. *Рівняння-наслідок даного.* Розв'язування раціональних рівнянь. *Розв'язування раціональних рівнянь з параметрами. Графічний метод розв'язування рівнянь.* Степінь з цілим показником і його властивості. Стандартний вигляд числа. Функція $y = \frac{k}{x}$, її властивості і графік.	**Розпізнає** цілі й дробові раціональні вирази. **Описує** алгоритми: дій над раціональними дробами, графічного методу розв'язування рівнянь. **Формулює** означення: степеня з цілим показником, стандартного вигляду числа, рівносильних рівнянь, рівняння-наслідку даного; основну властивість дробу. **Доводить** властивості степеня з цілим показником, формули для розкладання на множники виразів $x^n - y^n$ і $x^{2n+1} + y^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. **Розв'язує** вправи, які передбачають: тотожні перетворення раціональних виразів, розв'язування раціональних рівнянь, які зводяться до лінійних, запис числа у стандартному вигляді, побудову графіка функції $y = \frac{k}{x}$.

К-ть год	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
20	**Тема 4. НЕРІВНОСТІ** Числові нерівності та їх властивості. Числові проміжки. Об'єднання та переріз числових проміжків. Нерівності з однією змінною. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. *Рівносильні нерівності. Нерівність-наслідок даної.* Системи *і сукупності* лінійних нерівностей з однією змінною. *Розв'язування лінійних нерівностей з параметром.* *Розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем.*	**Описує** поняття: числова нерівність, нерівність зі змінною. **Формулює** означення понять: розв'язок нерівності з однією змінною, рівносильні нерівності, нерівність-наслідок даної, розв'язок системи і сукупності кількох нерівностей з однією змінною. **Доводить** властивості числових нерівностей. **Зображує** на числовій прямій множини, задані за допомогою нерівностей. **Розв'язує** лінійні нерівності, а також системи і сукупності лінійних нерівностей з однією змінною.
20	**Тема 5. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА** Функція $y = x^2$ та її графік. Квадратний корінь. Арифметичний квадратний корінь. Ірраціональні числа. Множина дійсних чисел. *Взаємно однозначна відповідність між множиною точок прямої та множиною дійсних чисел.* [*Зліченність множини раціональних чисел. Незліченність множини точок відрізка.*] Етапи розвитку числа. Арифметичний квадратний корінь з добутку, дробу і степеня. Добуток і частка квадратних коренів. Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені. Функція $y = \sqrt{x}$, її властивості і графік.	**Описує** поняття: раціональне число, ірраціональне число, дійсне число. **Наводить приклади** раціональних та ірраціональних чисел. **Формулює** означення: квадратного кореня з числа, арифметичного квадратного кореня з числа; теореми: про зліченність множини раціональних чисел, про незліченність множини точок відрізка. **Доводить** властивості арифметичного квадратного кореня. **Розв'язує** вправи, які передбачають: спрощення виразів, які містять арифметичний квадратний корінь; побудову графіків функцій $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

К-ть год	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня підготовки учнів
33	**Тема 6. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ** Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння, їх розв'язування. Формула коренів квадратного рівняння. Теорема Вієта. *Теорема, обернена до теореми Вієта.* *Розв'язування квадратних рівнянь з параметрами.* Квадратний тричлен, його корені. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники. Властивість квадратного тричлена з від'ємним дискримінантом. Розв'язування раціональних рівнянь, які зводяться до квадратних. *Метод заміни змінної при розв'язуванні раціональних рівнянь.* Розв'язування текстових задач за допомогою квадратних рівнянь і рівнянь, які зводяться до квадратних.	**Наводить приклади** квадратних рівнянь різних видів (повних, неповних, зведених, незведених). **Описує** алгоритми: розв'язування неповних і повних квадратних рівнянь, розкладання квадратного тричлена на множники, розв'язування біквадратного рівняння. **Формулює** означення: квадратного рівняння, біквадратного рівняння. **Доводить** формулу коренів квадратного рівняння; теорему Вієта, теорему про розкладання квадратного тричлена на множники. **Застосовує** вивчений матеріал і теореми для розв'язування задач.
28	**Тема 7. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОДІЛЬНОСТІ** *Подільність цілих чисел. Основні властивості подільності. Ділення з остачею. Конгруенції за модулем. Ознаки подільності на 3, 9, 11, 2^n, 5^n, $n \in \mathbb{N}$. Найбільший спільний дільник (НСД) і найменше спільне кратне (НСК). Взаємно прості числа. Алгоритм Евкліда. Прості й складені числа. Основна теорема арифметики.* [*Числа-близнюки. Доскональні числа. Прості числа Мерсенна і Ферма. Мала теорема Ферма.*] *Ділення многочленів. Теорема Безу та наслідки з неї.*	**Формулює** означення: дільника і кратного, НСД і НСК двох натуральних чисел, двох взаємно простих чисел, простого і складеного чисел, кореня многочлена з однією змінною; теорему про ділення з остачею, основну теорему арифметики, теорему Безу та наслідки з неї. **Описує** алгоритм Евкліда. **Доводить** властивості подільності, ознаки подільності (на 2, 3, 5, 9, 11), теорему про нескінченність множини простих чисел. **Застосовує** вивчені означення і теореми для розв'язування задач.
14	**Тема 8. ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ**	

ДОДАТОК 2

Орієнтовне календарне планування з алгебри (8 клас) для класів з поглибленим вивченням математики

№ з/п	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин
1	2	3
	I. Повторення і систематизація навчального матеріалу з курсу алгебри 7 класу (10 год)	
1	Лінійне рівняння з однією змінною. Цілі вирази	4
2	Функція. Лінійна функція	3
3	Рівняння з двома змінними	2
4	Тематичне оцінювання № 1	1
	II. Множини і операції над ними (10 год)	
5	Множина та її елементи	1
6	Підмножина. Операції над множинами	2
7	Скінченні множини. Взаємно однозначна відповідність між елементами множин	2
8	Нескінченні множини. Зліченні множини	3
9	Підготовка до тематичного оцінювання	1
10	Тематичне оцінювання № 2	1
	III. Раціональні вирази (40 год)	
11	Формули для розкладання на множники виразів виду $a^n - b^n$ і $a^{2n+1} + b^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$	2
12	Раціональні дроби	1
13	Основна властивість раціонального дробу	3
14	Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками	2
15	Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками	4
16	Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня	3
17	Тотожні перетворення раціональних виразів	6
18	Підготовка до тематичного оцінювання	1
19	Тематичне оцінювання № 3	1
20	Рівносильні рівняння. Рівняння-наслідок. Раціональні рівняння	4
21	Раціональні рівняння з параметрами	4
22	Степінь з цілим від'ємним показником	1

Продовж. табл.

1	2	3
23	Стандартний вигляд числа	1
24	Властивості степеня з цілим показником	2
25	Функція $y = \frac{k}{x}$ та її графік	2
26	Підготовка до тематичного оцінювання	2
27	Тематичне оцінювання № 4	1
	IV. Нерівності (20 год)	
28	Числові нерівності та їх властивості	2
29	Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу	2
30	Нерівності з однією змінною	1
31	Розв'язування нерівностей з однією змінною. Числові проміжки	3
32	Системи і сукупності лінійних нерівностей з однією змінною	4
33	Рівняння і нерівності, які містять знак модуля	5
34	Підготовка до тематичного оцінювання	2
35	Тематичне оцінювання № 5	1
	V. Квадратні корені. Дійсні числа (20 год)	
36	Функція $y = x^2$ та її графік	2
37	Квадратний корінь. Арифметичний квадратний корінь	4
38	Множина дійсних чисел	3
39	Властивості арифметичного квадратного кореня	3
40	Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені	4
41	Функція $y = \sqrt{x}$ та її графік	2
42	Підготовка до тематичного оцінювання	1
43	Тематичне оцінювання № 6	1
	VI. Квадратні рівняння (33 год)	
44	Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь	2
45	Формула коренів квадратного рівняння	4
46	Теорема Вієта	3
47	Підготовка до тематичного оцінювання	1
48	Тематичне оцінювання № 7	1
49	Квадратний тричлен	3
50	Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь	4

Продовж. табл.

1	2	3
51	Розв'язування рівнянь методом заміни змінної	7
52	Розв'язування задач за допомогою раціональних рівнянь (Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій)	5
53	Підготовка до тематичного оцінювання	2
54	Тематичне оцінювання № 8	1
	VII. Основи теорії подільності (28 год)	
55	Подільність націло та її властивості	3
56	Ділення з остачею. Конгруенції та їх властивості	4
57	Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне двох натуральних чисел. Взаємно прості числа	5
58	Ознаки подільності	3
59	Прості й складені числа	3
60	Ділення многочленів	2
61	Корені многочлена. Теорема Безу	3
62	Ціле раціональне рівняння	2
63	Підготовка до тематичного оцінювання	2
64	Тематичне оцінювання № 9	1
	VIII. Повторення і систематизація навчального матеріалу (14 год)	
65	Повторення і систематизація навчального матеріалу	12
66	Підсумкове тематичне оцінювання	2

Зміст

§4. Нерівності

§5. Квадратні корені. Дійсні числа

§6. Квадратні рівняння

§7. Основи теорії подільності

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу
з поглибленим вивченням математики

Для середнього шкільного віку

Відповідальний за випуск *В. Л. Маркіанов*
Редактор *М. В. Москаленко*
Художник *С. Е. Кулинич*
Художній редактор *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *І. В. Чернухи*
Коректор *І. Л. Безсонова*

Підписано до друку 03.07.2008. Формат 60×90/16. Гарнітура шкільна.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 23,0. Зам. 169

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

ТОВ ТО «Гімназія»
61103, м. Харків, вул. Дерев'янка, 16а
Тел. (057) 758-83-93, 719-17-26

Віддруковано з готових діапозитивів
у друкарні ПП «Модем», м. Харків
Тел. (057) 758-15-80