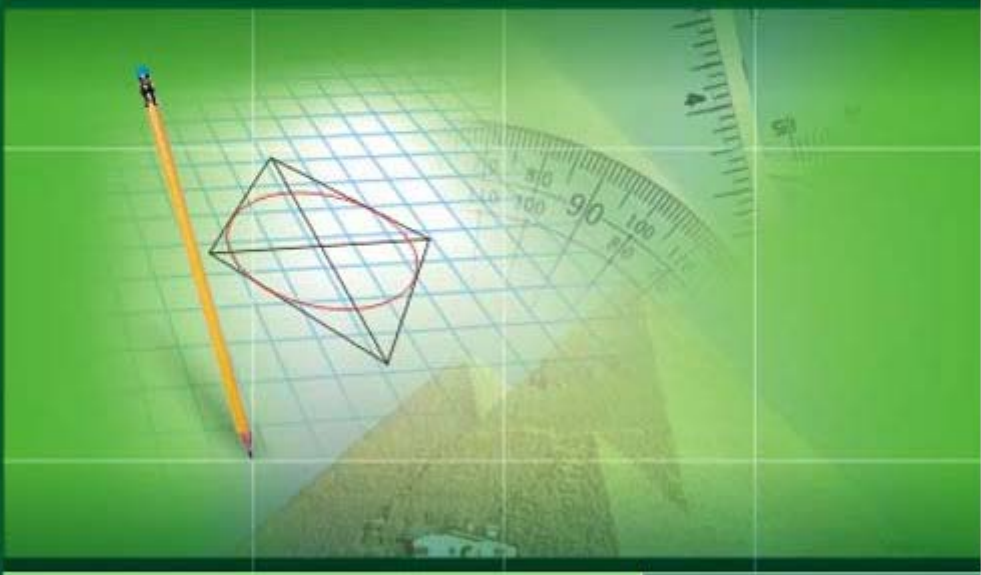
А. П. Ершова, В. В. Голобородько, А. Ф. Крижан

Геометрия 8 класс



- общеобразовательная программа
- допрофильная подготовка
- углубленное обучение

АН ГРО ПЛЮС
ИЗДАТЕЛЬСТВО
РАНОК

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

В мире геометрии вы уже не ощущаете себя чужими: в седьмом классе вы познакомились со многими выдающимися событиями в истории ее развития, начали осваивать ее язык и овладевать ее законами. Но геометрию неспроста считают удивительной — вечно нова и непредсказуема, она открывает свои бесценные сокровища лишь тому, кто проникся ее духом и стремится не останавливаться на достигнутом.

В школьном курсе геометрии можно условно выделить несколько направлений. На начальном этапе преобладает «геометрия доказательств» — вы впервые встретились с понятием доказательства, овладели его методами и логикой, научились получать из одних утверждений другие, обосновывать свои выводы. Последняя часть прошлогоднего курса была посвящена «геометрии построений» — это направление объединяет элементы доказательства и правила построения простейших фигур с помощью циркуля и линейки. В течение этого учебного года основное место будет отведено «геометрии вычислений». Многие теоремы, которые вы будете изучать, содержат формулы, позволяющие получать новые числовые характеристики геометрических фигур. Важнейшей из этих теорем является знаменитая теорема Пифагора, встреча с которой ждет вас именно в восьмом классе.

Однако изучение геометрии не сводится к одним вычислениям. С помощью этого учебника вы исследуете новые геометрические фигуры, углубите свои знания в области логики, приобретете опыт решения задач оригинальными методами, узнаете о жизни и достижениях выдающихся ученых прошлого. Надеемся, что каждый шаг на пути познания прибавит вам уверенности в собственных силах и приблизит к новым горизонтам науки.

Как пользоваться учебником

В учебнике четыре главы, каждая из которых состоит из параграфов, а параграфы — из пунктов. В тексте содержится как теоретический материал, так и примеры решения задач. Важнейшие понятия и факты выделены полужирным шрифтом.

Упражнения и задачи, представленные в учебнике, делятся на несколько групп.

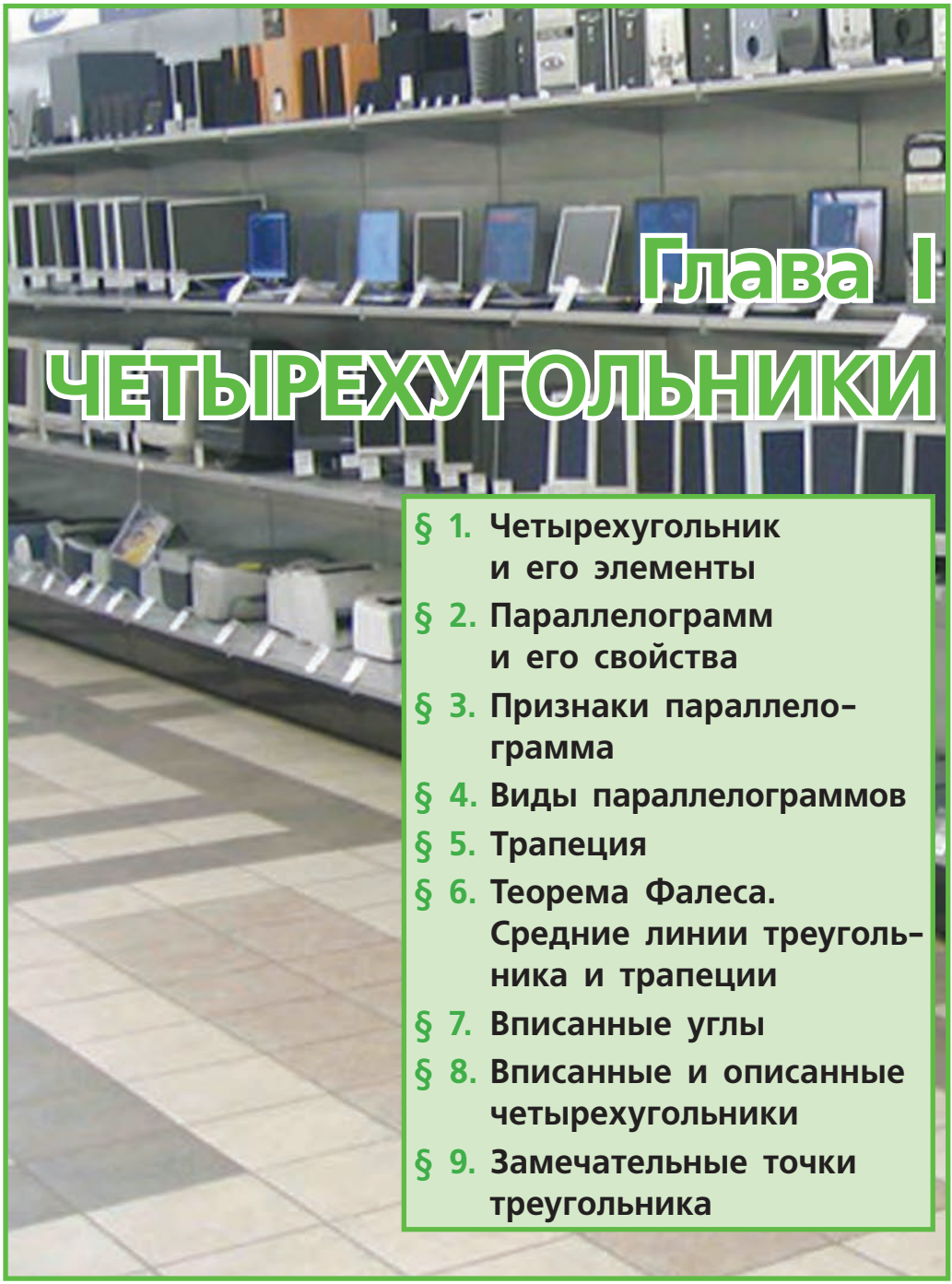
Устные упражнения помогут вам понять, насколько успешно вы усвоили теоретический материал. Эти упражнения не обязательно выполнять «в уме» — для их решения вы можете использовать чертежи, провести необходимые рассуждения в черновике. После устных можно переходить к ***графическим упражнениям***, которые выполняются в тетради или на компьютере. Дальше идут ***письменные упражнения***. Сначала проверьте свои знания, выполняя задачи ***уровня А***. Более сложными являются задачи ***уровня Б***. И наконец, если вы хорошо усвоили материал и хотите проявить свои творческие способности, вас ждут задачи ***уровня В***.

Стрелочки рядом с номерами упражнений означают, что эти упражнения предназначены для выполнения дома.

После каждого параграфа в рубрике ***«Повторение»*** указано, какие именно понятия и факты следует вспомнить для успешного изучения следующего материала (рядом, в частности, указаны соответствующие параграфы в учебнике: Ершова А. П. Геометрия. 7 класс: Проб. учеб. / А. П. Ершова, В. В. Голобородько, А. Ф. Крижановский.— Харьков: Веста: Издательство «Ранок».— 2007.— 224 с.: ил.), а также приводятся соответствующие задачи для повторения, которые подготовят вас к восприятию новой темы.

В конце каждой главы даны ***задачи для подготовки к контрольным работам*** и ***контрольные вопросы***, которые помогут вам лучше подготовиться к тематическому оцениванию. ***Дополнительные задачи*** к главам откроют вам новые грани геометрии, помогут обобщить изученный материал и ощутить красоту нестандартного мышления.

Итоговые обзоры в конце каждой главы служат своеобразным геометрическим компасом и помогут ориентироваться в изученном материале. ***Приложения***, приведенные в конце учебника, углубят ваши знания по отдельным изученным темам, а ***исторические справки*** к главам познакомят с некоторыми интересными фактами из истории развития геометрии и с деятельностью выдающихся ученых-геометров. В конце учебника также приведены ответы и указания к большинству задач.



Глава I
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

В огромном саду геометрии каждый может подобрать себе букет по вкусу.

Давид Гильберт,
немецкий математик

Изучая геометрию в седьмом классе, вы познакомились с основными свойствами треугольников. Курс геометрии восьмого класса начинается с рассмотрения более сложных фигур — четырехугольников. Но это не означает, что уже изученную и, наверное, немного забытую за лето тему «Треугольники» не следует вспоминать. Наоборот, этот материал нужно повторить еще до того, как вы придете на первый урок геометрии в восьмом классе. Ведь именно свойства треугольников являются тем ключом, который открывает дверь в мир геометрии.

Отдельные виды четырехугольников уже известны вам из курса математики 5—6 классов. Наиболее внимательные и наблюдательные могли заметить, что особое место среди четырехугольников занимают те, у которых имеются параллельные стороны. Именно поэтому уже в ближайшее время пригодятся свойства и признаки параллельных прямых, доказанные в седьмом классе; этот материал также следует повторить.

Среди теорем, которые будут рассматриваться в этой главе, особая роль отводится теореме Фалеса — одной из древнейших теорем геометрии. С ее помощью мы продолжим открывать новые секреты геометрических фигур.

§ 1. Четырехугольник и его элементы

1.1. Определение четырехугольника

С четырехугольником вы уже знакомились на уроках математики. Дадим строгое определение этой фигуры.

Определение

Четырехугольником называется фигура, состоящая из четырех точек (**вершин четырехугольника**) и четырех отрезков, которые их последовательно соединяют (**сторон четырехугольника**). При этом никакие три его вершины не лежат на одной прямой и никакие две стороны не пересекаются.

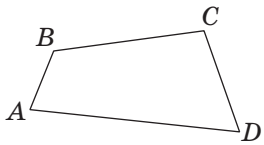


Рис. 1. Четырехугольник $ABCD$

На рисунке 1 изображен четырехугольник с вершинами A, B, C и D и сторонами AB, BC, CD и AD.

Говорят, что две вершины четырехугольника являются ***соседними вершинами***, если они соединены одной стороной; вершины, которые не являются соседними, называют ***противолежащими вершинами***. Аналогично стороны четырехугольника, имеющие общую вершину, являются ***соседними сторонами***, а стороны, не имеющие общих точек,— ***противолежащими сторонами***. На рисунке 1 стороны AB и CD — соседние для стороны BC, а сторона AD — противолежащая стороне BC; вершины B и D — соседние с вершиной A, а вершина C — противолежащая вершине A.

Четырехугольник обозначают, последовательно указывая все его вершины, причем буквы, которые стоят рядом, должны обозначать соседние вершины. Например, четырехугольник на рисунке 1 можно обозначить $ABCD$, $BCDA$ или $CBAD$, но нельзя обозначать $ABDC$ или $BDCA$.

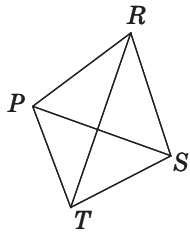


Рис. 2. Отрезки PS и RT — диагонали четырехугольника $PRST$

Определение

Диагональю четырехугольника называется отрезок, соединяющий две противолежащие вершины.

В четырехугольнике $PRST$ (рис. 2) диагоналями являются отрезки PS и RT.

Следует отметить, что любой четырехугольник имеет диагональ, которая делит его на два треугольника.

Определение

Периметром четырехугольника называется сумма длин всех его сторон.

Периметр четырехугольника (как и треугольника) обозначают буквой P:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD.$$

1.2. Выпуклые четырехугольники. Сумма углов четырехугольника

Любой четырехугольник ограничивает конечную часть плоскости, которую называют ***внутренней областью*** этого четырехугольника (на рис. 3, *а*, *б* она закрашена).

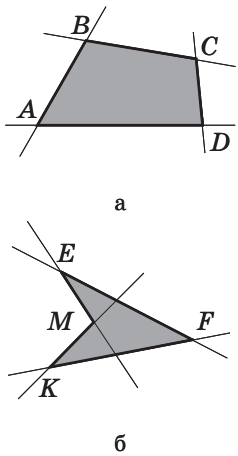


Рис. 3. Выпуклый (*а*) и невыпуклый (*б*) четырехугольники

На рисунке 3 изображены два четырехугольника и проведены прямые, на которых лежат стороны этих четырехугольников. В четырехугольнике $ABCD$ эти прямые не проходят через внутреннюю область — такой четырехугольник является выпуклым (рис. 3, *а*). В четырехугольнике $EFKM$ прямые EM и KM проходят через внутреннюю область — этот четырехугольник является невыпуклым (рис. 3, *б*).

Определение

Четырехугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от любой прямой, содержащей его сторону.

Действительно, четырехугольник $ABCD$ на рисунке 3, *а* лежит по одну сторону от любой из прямых AB, BC, CD или AD. В школьном курсе геометрии мы будем рассматривать только

выпуклые четырехугольники (другие случаи будут оговорены отдельно).

Определение

Углом (внутренним углом) выпуклого четырехугольника $ABDC$ при вершине A называется угол BAD.

Угол, смежный с внутренним углом четырехугольника при данной вершине, называют ***внешним углом четырехугольника*** при данной вершине.

Углы, вершины которых являются соседними, называют ***соседними углами***, а углы, вершины которых являются противолежащими,— ***противолежащими углами*** четырехугольника.

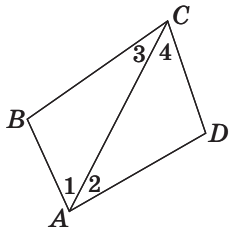


Рис. 4. Сумма углов четырехугольника равна сумме углов двух треугольников

Теорема (о сумме углов четырехугольника)

Сумма углов четырехугольника равна 360°.

Доказательство[1]

□ В данном четырехугольнике $ABCD$ проведем диагональ, которая делит его на два треугольника (рис. 4). Поскольку $\angle BAD = \angle 1 + \angle 2$, $\angle BCD = \angle 3 + \angle 4$, сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна сумме всех углов треугольников ABC и ADC, то есть равна 360°. Теорема доказана. ■

Задача

Углы четырехугольника ABCD, соседние с углом C, равны, а противолежащий угол в два раза больше угла C (см. рис. 1). Найдите угол C, если $\angle B = 60°$.

Решение

Углами, соседними с углом C, являются углы B и D, а углом, противолежащим к C,— угол A. По условию задачи $\angle B = \angle D = 60°$. Поскольку сумма углов четырехугольника равна 360°, то $\angle A + \angle C = 360° - 2 \cdot 60° = 240°$. Если градусная мера угла C равна x, то градусная мера угла A по условию равна $2x$. Отсюда имеем: $x + 2x = 240$; $3x = 240$; $x = 80$. Следовательно, $\angle C = 80°$.

Ответ: 80°.

[1] Отметим, что данная теорема и ее доказательство справедливы также и для невыпуклых четырехугольников (см. задачу 29).

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Сколько соседних вершин имеет вершина четырехугольника? Сколько противолежащих? Назовите соседние и противолежащие вершины для вершины B четырехугольника $ABCD$.

2. Сколько соседних сторон имеет сторона четырехугольника? Сколько противолежащих? Назовите соседние и противолежащие стороны для стороны AD четырехугольника $ABCD$.

3. Отрезок, соединяющий две вершины четырехугольника, не является его диагональю. Могут ли данные вершины быть противолежащими?

4. Вершинами четырехугольника являются точки K, L, M, N.

а) Известно, что KM и ML — стороны четырехугольника. Назовите его диагонали.

б) Известно, что KL — диагональ четырехугольника. Назовите вершины, соседние с вершиной K.

в) Данный четырехугольник можно назвать $KMLN$. Можно ли назвать его $MLKN$?

5. Существует ли четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $AC = 21$ см? Ответ обоснуйте.

6. Могут ли все углы выпуклого четырехугольника быть острыми; тупыми; прямыми?

7. Может ли выпуклый четырехугольник иметь три острых угла; три тупых угла; два прямых угла; три прямых угла и один непрямой?

8. Могут ли углы треугольника равняться трем углам четырехугольника? Ответ обоснуйте.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

9. Начертите выпуклый четырехугольник с вершинами A, B, C и D.

а) Дайте название полученному четырехугольнику и проведите его диагонали.

б) Измерьте три угла четырехугольника. Пользуясь соответствующей теоремой, найдите градусную меру четвертого угла. Проверьте полученный результат измерением.

10. Проведите две параллельные прямые. Обозначьте на одной из них точки A и D, а на другой — точки B и C так, чтобы при последовательном соединении этих точек образовался четырехугольник $ABCD$.

а) Является ли построенный четырехугольник выпуклым? Почему?

б) Измерьте внешние углы четырехугольника $ABCD$ (по одному при каждой вершине) и вычислите их сумму.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

11. Найдите периметр четырехугольника, если его наименьшая сторона равна 5 см, а каждая следующая сторона на 2 см больше предыдущей.

12. Периметр четырехугольника равен 20 см. Найдите стороны четырехугольника, если одна из них составляет 40 % периметра, а три другие равны.

13. Два угла четырехугольника равны 80° и 100°, а два других угла имеют равные градусные меры. Найдите наибольший угол четырехугольника.

14. Найдите углы четырехугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$, а сумма углов A и B равна 160°.

15. Если три угла четырехугольника являются тупыми, то четвертый угол — острый. Докажите.

16. Если сумма трех углов четырехугольника равна 270°, то две стороны четырехугольника перпендикулярны. Докажите.

Уровень Б

17. Определите, может ли четырехугольник $ABCD$ быть выпуклым, если:

а) точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC;

б) прямая AB пересекает прямую CD;

в) прямая AB пересекает отрезок CD.

Выполните рисунки.

18. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 3 дм, а одна сторона меньше каждой из трех других на 2 см, 3 см и 5 см соответственно.

19. Стороны четырехугольника относятся как $3:4:5:6$. Найдите периметр четырехугольника, если сумма его наибольшей и наименьшей сторон равна 18 см.

20. Найдите углы четырехугольника, если один из них вдвое меньше второго, на $20°$ меньше третьего и на $40°$ меньше четвертого.

21. Найдите наименьший угол четырехугольника, если суммы его углов, взятых по три, равны $240°$, $260°$ и $280°$.

22. Если один из углов выпуклого четырехугольника — острый, то в этом четырехугольнике обязательно есть тупой угол. Докажите.

23. Один из углов выпуклого четырехугольника равен сумме двух других углов. Докажите, что данный угол является тупым.

Уровень В

24. Периметры четырехугольников $ABCD$ и $ABCD_1$ равны. Может ли один из этих четырехугольников быть выпуклым, а другой — невыпуклым? Ответ подтвердите рисунком.

25. Периметр четырехугольника $ABCD$ равен 23 дм. Найдите длину диагонали AC, если периметр треугольника ABC равен 15 дм, а периметр треугольника ADC равен 22 дм.

26. В четырехугольнике три угла равны, а четвертый угол меньше их суммы на $240°$. Найдите углы четырехугольника.

27. Докажите, что диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются.

28. Докажите, что любой отрезок с концами на сторонах выпуклого четырехугольника лежит во внутренней области этого четырехугольника.

29. В невыпуклом четырехугольнике $ABCD$ градусной мерой угла при вершине B считают градусную меру α угла ABC, если хотя бы одна из внутренних точек отрезков CD или AD лежит во внутренней области угла ABC (рис. 5, *а*), или $(360° - \alpha)$, если ни одна внутренняя точка отрезков CD и AD не лежит во внутренней области угла ABC (рис. 5, *б*). Докажите, что сумма углов невыпуклого четырехугольника равна 360°.

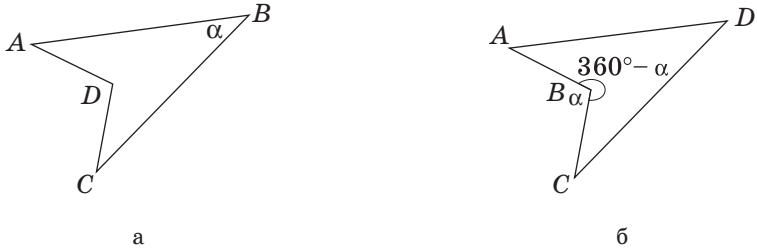


Рис. 5

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 2

Теоретический материал

- треугольник и его элементы; 7 класс, § 7, 8, 10
- признаки равенства треугольников; 7 класс, § 13—15
- свойства и признаки параллельных прямых.

Задачи[1]

30. Известно, что $\triangle KMN = \triangle NPK$ (рис. 6).

а) Докажите, что $MK \parallel NP$.

б) Найдите угол P, если $\angle M = 65°$.

31. На рисунке 6 $MK = PN$, $\angle MKN = \angle PNK$.

а) Докажите, что $MN \parallel KP$.

б) Найдите MN, если $KP = 14$ см.

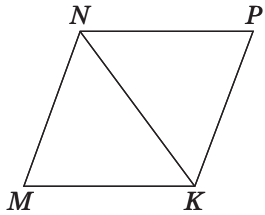


Рис. 6

[1] Напомним, что запись $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ означает равенство соответствующих сторон и углов, то есть $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

§ 2. Параллелограмм и его свойства

Параллелограмм — от греческих слов «параллелос» — идущий рядом, параллельный, и «грамма» — линия

2.1. Определение параллелограмма

Рассмотрим на плоскости две параллельные прямые, пересеченные двумя другими параллельными прямыми (рис. 7).

В результате такого пересечения образуется четырехугольник, который имеет специальное название — ***параллелограмм***.

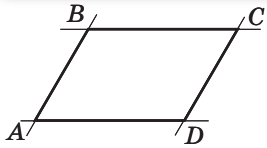


Рис. 7. Параллелограмм $ABCD$

Определение

Параллелограммом называется четырехугольник, противолежащие стороны которого попарно параллельны.

На рисунке 7 изображен параллелограмм $ABCD$, в котором $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.

Задача

На рисунке 8 $\triangle KLM = \triangle MNK$. Докажите, что четырехугольник KLMN — параллелограмм.

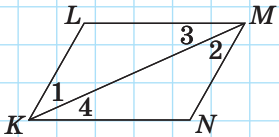


Рис. 8

Решение

Из равенства треугольников KLM и MNK следует равенство углов: $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Углы 1 и 2 являются внутренними накрест лежащими при прямых KL и MN и секущей KM. Аналогично углы 3 и 4 являются внутренними накрест лежащими при прямых LM и KN и секущей KM. По признаку параллельности прямых имеем: $KL \parallel MN$ и $LM \parallel KN$. Следовательно, в четырехугольнике KLMN противолежащие стороны попарно параллельны, т.е. KLMN — параллелограмм по определению.

Как и в треугольнике, в параллелограмме можно провести высоты (рис. 9).

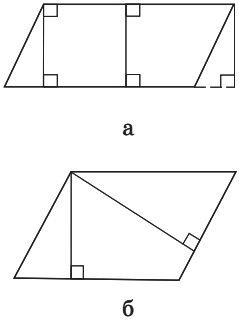


Рис. 9. Высоты параллелограмма

Определение

Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведенный из точки одной стороны к прямой, которая содержит противолежащую сторону.

Очевидно, что к одной стороне параллелограмма можно провести бесконечно много высот (рис. 9, *а*),— все они будут равны как расстояния между параллельными прямыми, а из одной вершины параллелограмма можно провести две высоты к разным сторонам (рис. 9, *б*). Часто, говоря «высота параллелограмма», имеют в виду ее длину.

2.2. Свойства параллелограмма

Непосредственно из определения параллелограмма следует, что любые два его соседних угла являются внутренними односторонними при параллельных прямых, которые содержат противолежащие стороны. Это означает, что ***сумма двух соседних углов параллелограмма равна*** **180°**.

Докажем еще несколько важных свойств сторон, углов и диагоналей параллелограмма.

Теорема (свойства параллелограмма)

В параллелограмме:
1) противолежащие стороны равны;
2) противолежащие углы равны;
3) диагонали точкой пересечения делятся пополам.

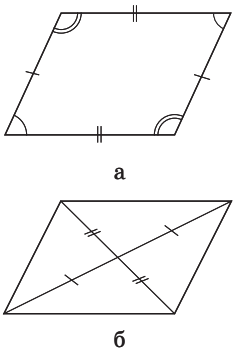


Рис. 10. Свойства параллелограмма

Свойства 1 и 2 иллюстрирует рисунок 10, *а*, а свойство 3 — рисунок 10, *б*.

Доказательство

□ Проведем в параллелограмме $ABCD$ диагональ AC (рис. 11) и рассмотрим треугольники ABC и CDA. У них сторона AC — общая,

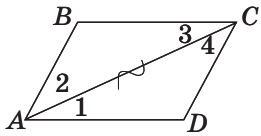


Рис. 11. Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника

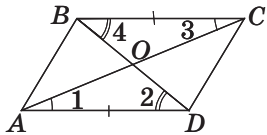


Рис. 12. При пересечении диагоналей параллелограмма образуются равные треугольники

$\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC, $\angle 2 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle CDA$ по второму признаку равенства треугольников. Отсюда, в частности, следует, что $AB = CD$, $AD = BC$ и $\angle B = \angle D$. А поскольку $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$, то $\angle BAD = \angle BCD$. Следовательно, свойства 1 и 2 доказаны.

Для доказательства свойства 3 проведем в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD, которые пересекаются в точке O (рис. 12).

Рассмотрим треугольники AOD и COB. У них $AD = BC$ по доказанному, $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC, $\angle 2 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD. Следовательно, $\triangle AOD = \triangle COB$ по второму признаку. Отсюда следует, что $AO = CO$ и $BO = DO$, т. е. точка O является серединой каждой из диагоналей AC и BD. Теорема доказана полностью. ■

Задача

Сумма двух углов параллелограмма равна 200°. Найдите углы параллелограмма.

Решение

Пусть дан параллелограмм ABCD.

Поскольку сумма двух соседних углов параллелограмма равна 180°, то данные углы могут быть только противолежащими. Пусть $\angle B + \angle D = 200°$. Тогда по свойству углов параллелограмма $\angle B = \angle D = 200° : 2 = 100°$.

Сумма всех углов параллелограмма равна 360°, поэтому $\angle A = \angle C = (360° - 200°) : 2 = 80°$.

Ответ: 80° и 100°.

Задача

В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A делит сторону BC пополам. Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 6$ см.

Решение

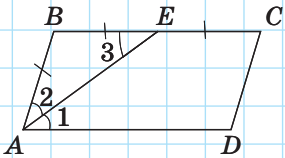


Рис. 13

Пусть в параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E, $BE = EC$ (рис. 13). Заметим, что $\angle 1 = \angle 2$, поскольку AE — биссектриса угла BAD, а $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AE. Отсюда $\angle 2 = \angle 3$, т.е. по признаку равнобедренного треугольника треугольник ABE — равнобедренный с основанием AE, значит, $BE = AB = 6$ см. По условию $BE = EC$, т.е. $BC = 12$ см. Следовательно, поскольку противолежащие стороны параллелограмма равны, то $P_{ABCD} = 2 \cdot (6 + 12) = 36$ (см).

Ответ: 36 см.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

32. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Назовите:
а) сторону, параллельную стороне BC;
б) сторону, равную стороне CD;
в) угол, равный углу A.

33. Верно ли, что любой параллелограмм имеет:
а) два угла, сумма которых равна 180°;
б) два острых и два тупых угла?

34. В параллелограмме $ABCD$ $\angle B < \angle C$. Сравните углы A и D.

35. В параллелограмме $ABCD$ $AB + CD > AD + BC$. Сравните стороны BC и CD.

36. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (см. рис. 12). Назовите:

а) отрезок, который является медианой треугольника ACD;

б) треугольник, медианой которого является отрезок AO.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

37. Проведите две параллельные прямые. Обозначьте на одной из них точки A и D и проведите через эти точки две другие параллельные прямые, которые пересекают вторую прямую в точках B и C соответственно.

а) Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

б) Измерьте угол A параллелограмма $ABCD$. Используя свойства параллелограмма, найдите градусные меры других его углов. Проверьте полученные результаты измерениями.

в) Проведите диагональ AC и обозначьте ее середину — точку O. С помощью линейки проверьте, принадлежит ли эта точка отрезку BD.

38. Начертите треугольник ABD. Проведите через вершины B и D прямые, параллельные сторонам AD и AB соответственно. Обозначьте точку пересечения этих прямых буквой C.

а) Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

б) Проведите две высоты параллелограмма из вершины B. Равны ли они?

в) Измерьте стороны AD и AB и найдите периметр параллелограмма. Каким свойством параллелограмма вы воспользовались?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

39. Начертите в тетради треугольник и проведите через каждую его вершину прямую, параллельную противолежащей стороне. Сколько параллелограммов образовалось на рисунке? Сколько общих вершин имеют любые два из образовавшихся параллелограммов?

40. Три параллельные прямые пересекаются с двумя другими параллельными прямыми. Сколько параллелограммов образовалось?

41. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если сторона AD равна 12 см и составляет $\frac{2}{3}$ стороны AB.

42. Периметр параллелограмма равен 24 см. Найдите стороны параллелограмма, если:

а) одна из них на 2 см больше другой;
б) одна из них в три раза меньше другой;
в) сумма трех его сторон равна 17 см.

43. Найдите углы параллелограмма, если:

а) один из них равен $110°$;
б) один из них на $70°$ меньше другого;
в) сумма двух его углов равна $90°$;
г) диагональ образует с его сторонами углы $30°$ и $45°$.

44. Найдите углы параллелограмма, если:

а) один из них является прямым;
б) градусные меры двух его углов относятся как $2:7$;
в) разность двух его углов равна $40°$;
г) сумма трех его углов равна $330°$.

45. Точка пересечения диагоналей параллелограмма удалена от двух его вершин на 5 см и 8 см. Найдите длины диагоналей параллелограмма.

46. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $\angle ADB = \angle CBD$. Докажите по определению, что $ABCD$ — параллелограмм.

47. В четырехугольнике $VXYZ$ $VX \parallel YZ$, $\angle V + \angle X = 180°$. Докажите по определению, что $VXYZ$ — параллелограмм.

Уровень Б

48. На плоскости даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм, тремя вершинами которого являются данные точки. Сколько решений имеет задача?

49. Сколько различных параллелограммов можно образовать из двух равных разносторонних треугольников, прикладывая их друг к другу?

50. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 14 дм, а периметр треугольника ABC — 10 дм. Найдите длину диагонали AC.

51. Сумма трех сторон параллелограмма равна 15 м, а сумма трех других его сторон — 18 м. Найдите периметр параллелограмма.

52. Найдите углы параллелограмма, если:

а) биссектриса одного из его углов пересекает сторону под углом 35°;

б) высота параллелограмма образует с одной из его сторон угол 42°.

53. Найдите углы параллелограмма, если:

а) все его стороны равны, а диагональ образует со стороной угол 25°;

б) высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, делит данный угол в отношении 1 : 3.

54. Биссектриса угла D параллелограмма $ABCD$ делит сторону BC в отношении 1 : 4, начиная от точки B. Найдите периметр параллелограмма, если $BC = 15$ см.

55. Биссектриса угла параллелограмма делит его сторону на отрезки длиной 5 см и 6 см. Найдите периметр параллелограмма. Сколько решений имеет задача?

56 (опорная). ***Любой отрезок с концами на противолежащих сторонах параллелограмма, проходящий через точку пересечения его диагоналей, делится этой точкой пополам.*** Докажите.

57. Из вершин тупых углов B и D параллелограмма $ABCD$ проведены перпендикуляры BA_1 и DC_1 к сторонам AD и BC соответственно. Докажите, що четырехугольник A_1BC_1D — параллелограмм.

58. По данным рисунка 14 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

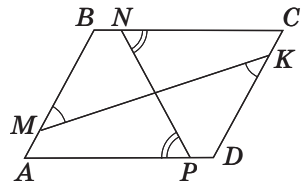


Рис. 14

Уровень B

59. Через точку, принадлежащую стороне равностороннего треугольника, проведены прямые, параллельные двум другим его сторонам. Определите периметр образовавшегося параллелограмма, если периметр треугольника равен 18 см.

60. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и D делят сторону BC на отрезки длиной 5 см, 3 см и 5 см. Найдите периметр параллелограмма. Сколько решений имеет задача?

61. Найдите углы параллелограмма, если его диагональ перпендикулярна одной из сторон и равна половине другой стороны.

62. Найдите углы параллелограмма, который делится диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника (рассмотрите два случая).

63 (опорная). ***Биссектрисы двух соседних углов параллелограмма перпендикулярны, а биссектрисы двух противолежащих углов параллельны или лежат на одной прямой.*** Докажите.

64 (опорная). ***Угол между высотами параллелограмма, проведенными из одной вершины, равен углу параллелограмма при соседней вершине.*** Докажите.

65. Если диагональ делит четырехугольник на два равных треугольника, то такой четырехугольник является параллелограммом. Верно ли такое утверждение? Ответ обоснуйте.

66. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то все его стороны равны. Докажите. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 3

Теоретический материал

- признаки равенства треугольников; 7 класс, § 8, 10, 13
- свойства и признаки параллельных прямых;
- понятие о свойствах и признаках. 7 класс, § 14, 15

Задачи

67. Докажите, что прямая, проходящая через середины боковых сторон равнобедренного треугольника, параллельна его основанию.

68. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$. Какие соотношения необходимо добавить к условию, чтобы по данным задачи доказать, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм? Выскажите предположение.

§ 3. Признаки параллелограмма

3.1. Теоремы о признаках параллелограмма

Для того чтобы использовать свойства параллелограмма, во многих случаях необходимо сначала убедиться, что данный четырехугольник действительно является параллелограммом. Это можно доказать либо по определению (см. задачу в п. 2.1), либо по признакам — условиям, гарантирующим, что данный четырехугольник — параллелограмм. Докажем признаки параллелограмма, которые чаще всего применяются на практике.

Теорема (признаки параллелограмма)

1) Если две противолежащие стороны четырехугольника параллельны и равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

2) Если противолежащие стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

3) Если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Доказательство

□ 1) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AD \parallel BC$ и $AD = BC$ (рис. 15). Проведем диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и CDA. Они имеют общую сторону AC, $AD = BC$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle CDA$ по первому признаку равенства треугольников. Из равенства этих треугольников следует равенство углов 3 и 4. Но эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых AB и CD и секущей AC. Тогда по признаку параллельности прямых $AB \parallel CD$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ противолежащие стороны попарно параллельны, откуда следует, что $ABCD$ — параллелограмм по определению.

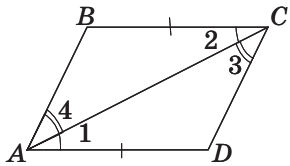


Рис. 15. Если в четырехугольнике $ABCD$ $AD \parallel BC$ и $AD = BC$, то $ABCD$ — параллелограмм

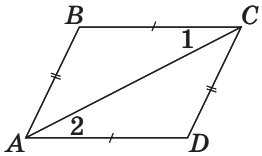


Рис. 16. Если в четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $AD = BC$, то $ABCD$ — параллелограмм

2) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $AD = BC$ (рис. 16). Снова проведем диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и CDA. В этом случае они равны по третьему признаку: сторона AC — общая, $AB = CD$ и $AD = BC$ по условию. Из равенства треугольников следует равенство углов 1 и 2, которые являются внутренними накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей AC. По признаку параллельности прямых $AD \parallel BC$. Следовательно, в четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны и равны, и по только что доказанному признаку 1 $ABCD$ — параллелограмм.

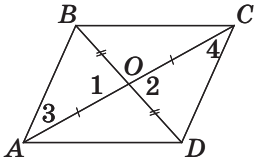


Рис. 17. Если в четырехугольнике $ABCD$ $AO = CO$ и $BO = DO$, то $ABCD$ — параллелограмм

3) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $AO = CO$ и $BO = DO$ (рис. 17). Рассмотрим треугольники AOB и COD. Эти треугольники равны по первому признаку: $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, а $AO = CO$ и $BO = DO$ по условию. Следовательно, равны и соответствующие стороны и углы этих треугольников: $AB = CD$ и $\angle 3 = \angle 4$. Тогда $AB \parallel CD$, и $ABCD$ — параллелограмм по признаку 1.

Теорема доказана полностью. ■

Задача

В параллелограмме ABCD точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно (рис. 18). Докажите, что четырехугольник MBND — параллелограмм.

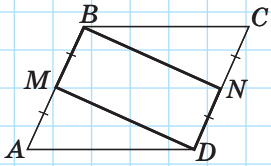


Рис. 18

Решение

Рассмотрим четырехугольник MBND. Стороны MB и ND параллельны, т.к. лежат на прямых, содержащих противолежащие стороны параллелограмма ABCD. Кроме того, MB = ND как половины равных сторон AB и CD параллелограмма ABCD. Таким образом, в четырехугольнике MBND две стороны параллельны и равны. Следовательно, четырехугольник MBND — параллелограмм.

Попробуйте самостоятельно найти другие способы решения этой задачи, основанные на применении других признаков и определения параллелограмма.

3.2*. Необходимые и достаточные условия[1]

Каждый из признаков параллелограмма указывает на определенную особенность, наличия которой в четырехугольнике *достаточно* для того, чтобы утверждать, что он является параллелограммом. Вообще в математике признаки иначе называют ***достаточными условиями***. Например, перпендикулярность двух прямых третьей — достаточное условие параллельности данных двух прямых.

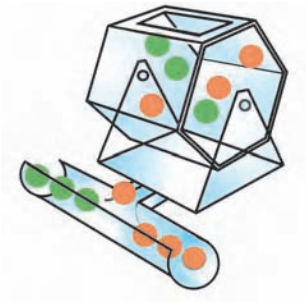
В отличие от признаков, свойства параллелограмма указывают на ту особенность, которую обязательно имеет любой параллелограмм. Свойства иначе называют ***необходимыми условиями***. Поясним такое название примером: равенство двух углов *необходимо* для того, чтобы углы были вертикальными, ведь если этого равенства нет, вертикальными такие углы быть не могут.

В случае верности теоремы «Если A, то B» утверждение A является достаточным условием для утверждения B, а утверждение B — необходимым условием для утверждения A. Схематически это можно представить так:

Если A, то B
A — достаточное условие для B
B — необходимое условие для A

Таким образом, необходимые условия (свойства) параллелограмма *следуют из того*, что данный четырехугольник — параллелограмм; из достаточных условий (признаков) *следует то*, что данный четырехугольник — параллелограмм.

[1] Здесь и далее звездочкой отмечен материал, изучение которого не является обязательным.



Сравнивая свойства и признаки параллелограмма, нетрудно заметить, что одно и то же условие (например, попарное равенство противолежащих сторон) является и свойством, и признаком параллелограмма. В таком случае говорят, что условие является ***необходимым и достаточным***. Необходимое и достаточное условие иначе называют ***критерием***. Например, равенство двух углов треугольника — критерий равнобедренного треугольника.

Немало примеров необходимых и достаточных условий можно найти в других науках и в повседневной жизни. Все мы знаем, что воздух — необходимое условие для жизни человека, но не достаточное (человеку для жизни нужно еще много чего, среди прочего — пища). Выигрыш в лотерею — достаточное условие для материального обогащения человека, но оно не является необходимым — ведь улучшить свое финансовое положение можно и другим способом. Попробуйте самостоятельно найти несколько примеров необходимых и достаточных условий.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

69. Диагонали четырехугольника $DEFK$ пересекаются в точке O, причем $DO = OF$, $EO = OK$. Назовите параллельные стороны четырехугольника и объясните, почему они параллельны.

70. В четырехугольнике $KLMN$ $KL \parallel MN$ и $KL = MN$. Назовите равные углы четырехугольника и объясните, почему они равны.

71. В четырехугольнике $PRSQ$ $PR = SQ$, $PQ = RS$. Найдите сумму углов R и S.

72. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$. Какое соотношение между сторонами четырехугольника необходимо добавить к условию задачи, чтобы доказать, что $ABCD$ — параллелограмм? Приведите все возможные варианты ответа.

73. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 30°$, $\angle C = 50°$. Может ли данный четырехугольник быть параллелограммом? Какая особенность параллелограмма (свойство или признак) используется для решения этой задачи?

74. Поставьте вместо точек слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно», чтобы полученное утверждение было верным:

а) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, ..., чтобы его диагонали точкой пересечения делились пополам;

б) для того чтобы два угла были смежными, ..., чтобы их сумма была равна 180°;

в) для того чтобы прямые AB и CD были параллельными, ..., чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

75. Проведите две параллельные прямые. Отложите на одной из них отрезок AD, а на другой прямой — отрезок BC, равный AD, так, чтобы отрезки AB и CD не пересекались. Постройте отрезки AB и CD.

а) Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

б) Отметьте точку M так, чтобы четырехугольник $ABMC$ был параллелограммом. Лежат ли точки M, C и D на одной прямой?

76. Начертите треугольник ABC и проведите его медиану BO. На луче BO постройте отрезок OD, равный BO. Соедините точку D с точками A и C.

а) Объясните, почему четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом.

б) Отметьте точку M так, чтобы четырехугольник $ABDM$ был параллелограммом. Лежат ли точки M, C и D на одной прямой?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

77. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Является ли данный четырехугольник параллелограммом, если $AO = 4$ см, $OC = 40$ мм, $BD = 1{,}2$ дм, $OD = 6$ см? Ответ обоснуйте.

78. По данным рисунка 19 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

а б

Рис. 19

79. По данным рисунка 20 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

$\triangle AOB = \triangle COD$

а б

Рис. 20

80. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны. Найдите периметр четырехугольника, если $AB = CD = 9$ см, $AD = 4$ см.

81. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $AD = BC$. Найдите углы четырехугольника, если угол A втрое больше угла B.

82. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки B_1 и D_1 — середины отрезков BO и DO соответственно. Докажите, что четырехугольник AB_1CD_1 — параллелограмм.

83. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противолежащих сторон параллелограмма, делит данный параллелограмм на два четырехугольника, которые также являются параллелограммами.

Уровень Б

84. В техническом черчении для построения параллельных прямых используют механическую рейсшину (рис. 21). Объясните принцип ее действия.

85. Объясните, почему ось CD, на которой укреплена лампа (рис. 22), всегда остается вертикальной.

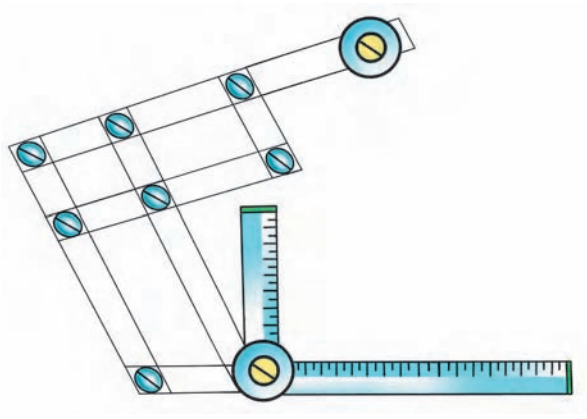


Рис. 21

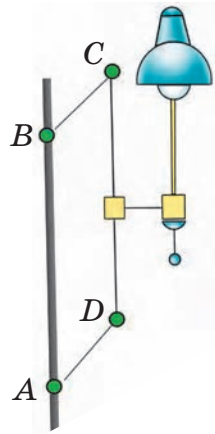
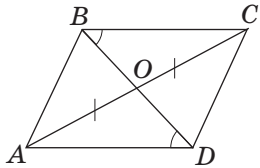
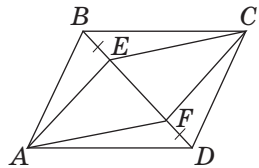


Рис. 22

86. По данным рисунка 23 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.



а



$AECF$ — параллелограмм

б

Рис. 23

87. По данным рисунка 24 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

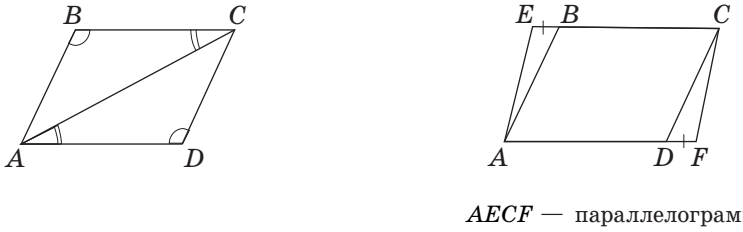


Рис. 24

88. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в точках E и F соответственно. Докажите, что четырехугольник $BEDF$ — параллелограмм.

89. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что середины отрезков AO, BO, CO и DO являются вершинами другого параллелограмма.

Уровень B

90. По данным рисунка 25 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

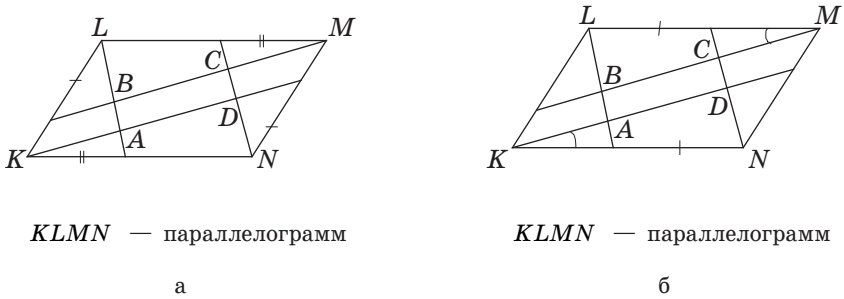


Рис. 25

91. По данным рисунка 26 докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

$AECF$ — параллелограмм
а

$KLMN$ — параллелограмм
б

Рис. 26

92 (опорная). ***Если в четырехугольнике противолежащие углы попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.*** Докажите.

93. Внутри данного угла A отмечена точка O. Постройте отрезок с концами на сторонах угла, серединой которого является точка O.

94. Точка M находится внутри угла A, вершина которого недоступна (рис. 27). Постройте луч с началом в точке M, направленный на точку A.

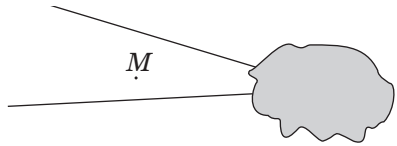


Рис. 27

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 4

Теоретический материал

- равнобедренный треугольник;
- прямоугольный треугольник.

7 класс, § 11, 17

Задачи

95. Высоты треугольника ABC, проведенные из вершин A и B, пересекаются в точке O, причем $AO = BO$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

96. Прямоугольные треугольники ABC и DCB имеют общий катет BC, а гипотенузы AC и BD параллельны. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DCB$.

§ 4. Виды параллелограммов

4.1. Прямоугольник

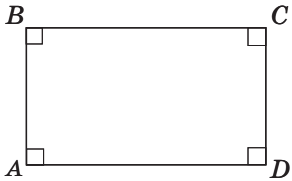


Рис. 28. Прямоугольник $ABCD$

Определение

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

На рисунке 28 изображен прямоугольник $ABCD$. Поскольку прямоугольник является частным случаем параллелограмма, он имеет все свойства параллелограмма: противолежащие стороны прямоугольника параллельны и равны, противолежащие углы равны, диагонали точкой пересечения делятся пополам и т. д. Однако прямоугольник имеет некоторые особые свойства. Докажем одно из них.

Теорема (свойство прямоугольника)

Диагонали прямоугольника равны.

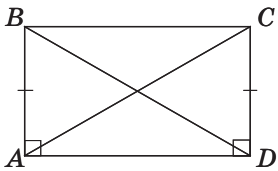


Рис. 29. Если $ABCD$ — прямоугольник, то $AC = BD$

Доказательство

☐ Пусть дан прямоугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD (рис. 29). Треугольники BAD и CDA прямоугольные и равны по двум катетам (AD — общий, $AB = CD$ как противолежащие стороны прямоугольника). Отсюда следует равенство гипотенуз этих треугольников, т. е. $AC = BD$, что и требовалось доказать. ■

Имеет место и обратное утверждение **(признак прямоугольника):**

если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Таким образом, можно утверждать, что равенство диагоналей параллелограмма — необходимое и достаточное условие (критерий) прямоугольника.

Опорная задача

Если все углы четырехугольника прямые, то этот четырехугольник — прямоугольник. Докажите.

Решение

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ (см. рис. 28). Углы A и B являются внутренними односторонними при прямых AD и BC и секущей AB. Поскольку сумма этих углов составляет $180°$, то по признаку параллельности прямых $AD \parallel BC$. Аналогично доказываем параллельность сторон AB и CD. Следовательно, по определению параллелограмма $ABCD$ — параллелограмм. А поскольку все углы этого параллелограмма прямые, то $ABCD$ — прямоугольник по определению.

4.2. Ромб

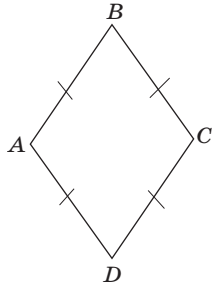


Рис. 30. Ромб $ABCD$

Определение

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

На рисунке 30 изображен ромб $ABCD$. Он обладает всеми свойствами параллелограмма, а также некоторыми дополнительными свойствами, которые мы сейчас докажем.

Теорема (свойства ромба)

Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам.

Эти свойства ромба иллюстрируются рисунком 31.

Доказательство

□ Пусть диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 32). Поскольку стороны ромба равны, то треугольник ABC равнобедрен-

Ромб — от греческого «ромбос» — бубен (в древние времена этот ударный музыкальный инструмент имел форму ромба)

ный с основанием AC, а по свойству диагоналей параллелограмма точка O — середина AC. Следовательно, отрезок BO — медиана равнобедренного треугольника, которая одновременно является его высотой и биссектрисой. Это означает, что $BD \perp AC$, т. е. диагонали ромба перпендикулярны, и $\angle ABD = \angle CBD$, т. е. BD — биссектриса угла ABC.

Аналогично доказываем, что диагонали ромба являются биссектрисами и других его углов. Теорема доказана. ■

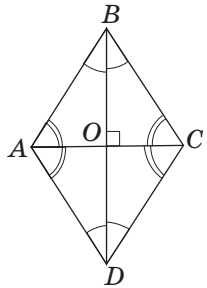


Рис. 31. Свойства ромба

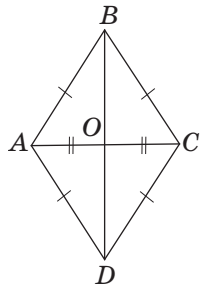


Рис. 32. К доказательству свойств ромба

Опорная задача

Если все стороны четырехугольника равны, то этот четырехугольник — ромб. Докажите.

Решение

Очевидно, что в четырехугольнике, все стороны которого равны, попарно равными являются и противолежащие стороны. Следовательно, по признаку параллелограмма такой четырехугольник — параллелограмм, а по определению ромба параллелограмм, у которого все стороны равны, является ромбом.

Решая задачи, помещенные в конце этого параграфа, вы докажете другие признаки прямоугольника и ромба.

4.3. Квадрат

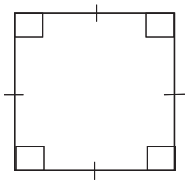


Рис. 33. Квадрат

На рисунке 33 изображен еще один вид параллелограмма — квадрат.

Определение

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Иначе можно сказать, что квадрат — это прямоугольник, который является ромбом. Действительно, поскольку квадрат является прямоугольником и ромбом и, конечно же, произвольным параллелограммом, то:

1) все стороны квадрата равны, а противолежащие стороны параллельны;
2) все углы квадрата прямые;
3) диагонали квадрата равны, перпендикулярны, делят углы квадрата пополам и делятся точкой пересечения пополам.

Квадрат — от латинского «квадро» — четыре

4.4*. Связь между отдельными видами параллелограммов. Равносильные утверждения

Исходя из определений произвольного параллелограмма и его отдельных видов, мы можем схематически отобразить связь между ними (рис. 34).

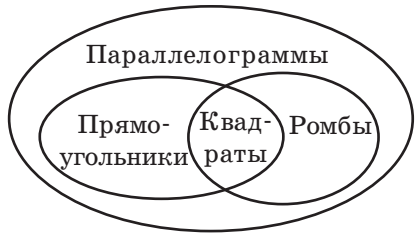
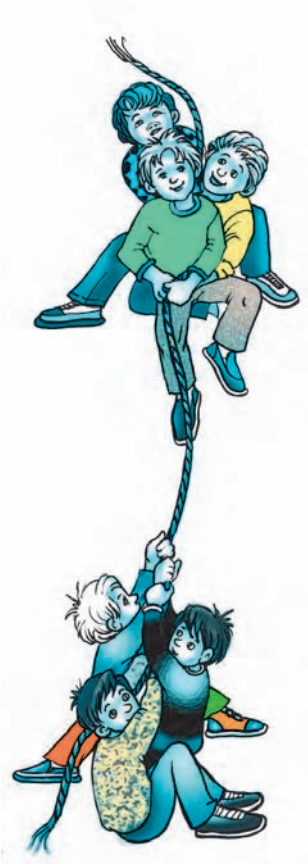


Рис. 34. Диаграмма «Виды параллелограммов»

На схеме представлены множества параллелограммов, прямоугольников и ромбов. Такой способ наглядного представления множеств называют



диаграммами Эйлера — Венна. Диаграмма Эйлера — Венна для параллелограммов демонстрирует, что множества прямоугольников и ромбов являются частями (***подмножествами***) множества параллелограммов, а множество квадратов — общей частью (***пересечением***) множеств прямоугольников и ромбов. Диаграммы Эйлера — Венна часто используют для подтверждения или проверки правильности логических рассуждений.

Подытоживая материал этого параграфа, обратим также внимание на то, что возможно и другое определение квадрата: квадратом называется ромб с прямыми углами. В самом деле, оба приведенных определения описывают одну и ту же фигуру. Такие определения называют равносильными. Вообще два утверждения называются ***равносильными***, если они или оба выполняются, или оба не выполняются. Например, равносильными являются утверждения «В треугольнике две стороны равны» и «В треугольнике два угла равны», ведь оба они верны, если рассматривается равнобедренный треугольник, и оба ложны, если речь идет о разностороннем треугольнике.

Равносильность двух утверждений также означает, что любое из них является необходимым и достаточным условием для другого. В самом деле, рассмотрим равносильные утверждения «Диагонали параллелограмма равны» и «Параллелограмм имеет прямые углы». Из того, что диагонали параллелограмма равны, следует, что он является прямоугольником, т. е. имеет прямые углы, и наоборот: параллелограмм с прямыми углами является прямоугольником, т. е. имеет равные диагонали. На этом примере легко проследить логические шаги перехода от признаков фигуры к ее определению и далее — к свойствам. Такой переход довольно часто приходится выполнять в процессе решения задач.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

97. Назовите виды параллелограммов, в которых:

а) все углы равны;

б) все стороны равны;

в) диагонали равны;

г) диагонали перпендикулярны.

98. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O (см. рис. 31). Назовите:

а) биссектрису треугольника ABD;

б) высоту треугольника ABC;

в) медиану треугольника BCD.

99. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 8$ см, $BC = 5$ см. Найдите:

а) расстояние от точки C до стороны AD;

б) расстояние между прямыми AB и CD.

100. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Назовите все равные треугольники, которые образуются при пересечении диагоналей. Определите их вид.

101. Может ли диагональ прямоугольника быть равной его стороне? Может ли диагональ ромба быть равной его стороне?

102. Может ли прямоугольник быть ромбом? В каком случае?

103. Приведите контрпримеры, опровергающие приведенные неверные утверждения:

а) четырехугольник, который имеет два прямых угла,— прямоугольник;

б) четырехугольник с перпендикулярными диагоналями — ромб;

в) четырехугольник с равными диагоналями — прямоугольник;

г) четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны,— квадрат.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

104. Начертите две перпендикулярные прямые, которые пересекаются в точке O. На одной из прямых отложите по разные стороны от точки O равные отрезки OA и OC, а на второй прямой — равные отрезки OB и OD. Соедините точки A, B, C и D.

а) Измерьте стороны четырехугольника $ABCD$ и определите его вид.

б) Измерьте угол A четырехугольника $ABCD$. Используя свойства этого четырехугольника, найдите градусные меры других его углов. Проверьте полученные результаты измерением.

в) Измерьте углы ADB и CDB. Выделите цветом все пары равных углов между диагоналями и сторонами четырехугольника.

105. Начертите прямоугольный треугольник ABD с гипотенузой BD. Проведите через вершины B и D прямые, параллельные сторонам AD и AB соответственно. Обозначьте точку C — точку пересечения этих прямых.

а) Измерьте стороны четырехугольника $ABCD$ и определите его вид.

б) Проведите диагональ AC. Измерьте и сравните длины диагоналей четырехугольника.

в) Обозначьте на прямых BC и AD точки C_1 и D_1 так, чтобы четырехугольник ABC_1D_1 был квадратом.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

106. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если $AC = 15$ см, а периметр треугольника ABC равен 36 см.

107. Найдите стороны прямоугольника, периметр которого равен 36 см, а одна сторона в два раза больше другой.

108. В прямоугольнике $ABCD$ $\angle BAC = 65°$. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

109. Диагонали прямоугольника пересекаются под углом 80°. Найдите углы, на которые диагональ делит угол прямоугольника.

110. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $\angle COD = 60°$, $CD = 8$ см. Найдите длину диагонали.

111. Найдите углы ромба, если:
а) один из них на 120° больше другого;
б) одна из его диагоналей равна стороне.

112. Найдите углы ромба, если:
а) сумма двух из них равна 220°;
б) диагональ образует с одной из его сторон угол 25°.

113. Периметр квадрата равен 40 м. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его стороны.

114. Расстояние между противолежащими сторонами квадрата равно 5 см. Найдите периметр квадрата.

115 (опорная). ***Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм является прямоугольником.*** Докажите.

116 (опорная). ***Если в параллелограмме соседние стороны равны, то этот параллелограмм является ромбом.*** Докажите.

Уровень Б

117. Точка пересечения диагоналей прямоугольника удалена от двух его сторон на 3 см и 4 см. Найдите периметр прямоугольника.

118. Биссектриса угла прямоугольника делит его сторону длиной 12 см пополам. Найдите периметр прямоугольника.

119. Из точки окружности проведены две перпендикулярные хорды, удаленные от центра окружности на 3 см и 5 см. Найдите длины этих хорд.

120. Найдите углы ромба, если:
а) углы, образованные его стороной с диагоналями, относятся как 1 : 4;
б) высота ромба в два раза меньше его стороны.

121. Найдите углы ромба, если:
а) высота, проведенная из вершины тупого угла, отсекает от ромба равнобедренный треугольник;
б) высота, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам.

122. Из вершины угла ромба, который равен 120°, проведена диагональ длиной 6 см. Найдите периметр ромба.

123. Диагональ квадрата равна 18 м, а его сторона является диагональю другого квадрата. Найдите периметр второго квадрата.

124. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах (рис. 35). Найдите гипотенузу треугольника, если сторона квадрата равна 2 см.

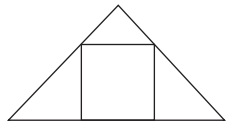


Рис. 35

125. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что прямой угол является общим для обеих фигур (рис. 36). Найдите периметр квадрата, если катет треугольника равен 4 см.

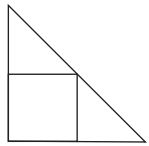


Рис. 36

126 (опорная). ***Параллелограмм с перпендикулярными диагоналями является ромбом.*** Докажите.

127 (опорная). ***Если диагональ параллелограмма лежит на биссектрисе его угла, то этот параллелограмм — ромб.*** Докажите.

128. Отрезки AC и BD — диаметры окружности. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

Уровень B

129. Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника делит его сторону в отношении 2 : 1. Найдите углы, на которые диагональ делит угол прямоугольника.

130. Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника пересекает его сторону под углом, равным углу между диагоналями. Найдите этот угол.

131. Докажите, что все высоты ромба равны. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

132. Из точки пересечения диагоналей ромба проведены перпендикуляры к его сторонам. Докажите, что основания этих перпендикуляров являются вершинами прямоугольника.

133. Если диагонали четырехугольника лежат на биссектрисах его углов, то этот четырехугольник — ромб. Докажите.

134. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма, не являющегося ромбом, при пересечении образуют прямоугольник.

135. Докажите, что биссектрисы углов прямоугольника, не являющегося квадратом, при пересечении образуют квадрат.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 5

Теоретический материал

7 класс, § 11, 17, 20

- равнобедренный треугольник;
- прямоугольный треугольник;
- задачи на построение.

Задачи

136. Прямая, параллельная основанию AC равнобедренного треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и BC в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что $AE = CD$.

б) Найдите углы четырехугольника $ADEC$, если $\angle B = 80°$.

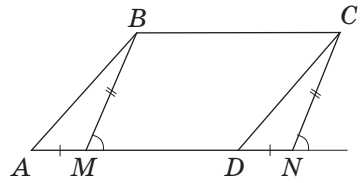
137. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, а стороны AB и CD равны. Обязательно ли данный четырехугольник является параллелограммом? Приведите контрпример.

Задачи для подготовки к контрольной работе № 1

1. Высота параллелограмма делит тупой угол на два угла, разность которых равна 20°. Найдите углы параллелограмма.

2. Сумма двух сторон параллелограмма равна 48 см, а периметр — 88 см. Найдите стороны параллелограмма.

3. По данным рисунка докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.



4. Биссектриса угла параллелограмма при пересечении с его стороной образует углы, градусные меры которых относятся как 1 : 3. Определите вид параллелограмма.

5. Докажите, что ромб является квадратом, если его диагонали образуют со стороной равные углы.

6. Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника делит его сторону на части, одна из которых равна меньшей стороне прямоугольника. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

§ 5. Трапеция

5.1. Определение трапеции

Трапеция — от греческого «трапезос» — маленький стол. Однокоренным является слово «трапеза»

Как известно, любой параллелограмм имеет две пары параллельных сторон. Рассмотрим теперь четырехугольник, который имеет только одну пару параллельных сторон.

Определение

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Параллельные стороны трапеции называют ее **основаниями**, а непараллельные стороны — **боковыми сторонами**. На рисунке 37 в трапеции $ABCD$ стороны AD и BC являются основаниями, а AB и CD — боковыми сторонами.

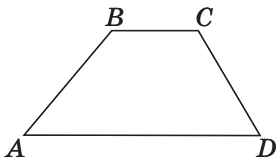


Рис. 37. Трапеция $ABCD$

Углы, прилежащие к одной боковой стороне, являются внутренними односторонними при параллельных прямых, на которых лежат основания трапеции. По теореме о свойстве параллельных прямых из этого следует, что сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180°. На рисунке 37 $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

Определение

Высотой трапеции называется перпендикуляр, проведенный из точки одного основания к прямой, содержащей другое основание.

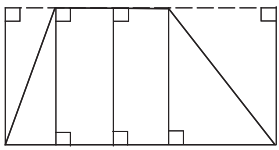


Рис. 38. Высоты трапеции

Очевидно, что в трапеции можно провести бесконечно много высот (рис. 38),— все они равны как расстояния между параллельными прямыми.

Чаще всего в процессе решения задач высоты проводят из вершин углов при меньшем основании трапеции.

5.2. Частные случаи трапеций

Как среди треугольников и параллелограммов, так и среди трапеций выделяются отдельные виды, обладающие дополнительными свойствами.

Определение

Прямоугольной трапецией называется трапеция, в которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям.

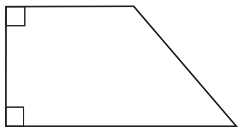


Рис. 39. Прямоугольная трапеция

На рисунке 39 изображена прямоугольная трапеция. У нее два прямых угла при меньшей боковой стороне. Эта сторона одновременно является и высотой трапеции.

Определение

Равнобедренной трапецией называется трапеция, в которой боковые стороны равны.

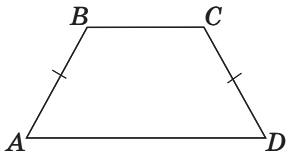


Рис. 40. Равнобедренная трапеция $ABCD$

На рисунке 40 изображена равнобедренная трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD. Иногда равнобедренную трапецию также называют равнобокой или равнобочной.

У равнобедренной трапеции так же, как и у равнобедренного треугольника, углы при основании равны. Докажем это в следующей теореме.

Теорема (свойство равнобедренной трапеции)

В равнобедренной трапеции углы при основании равны.

Доказательство

□ Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD \parallel BC$, $AB = CD$.

Перед началом доказательства заметим, что этой теоремой утверждается равенство углов при каждом из двух оснований трапеции, т. е. необходимо доказать, что $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle C$.

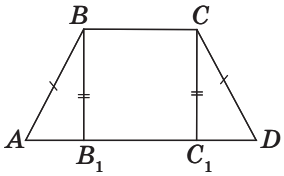


Рис. 41. Высоты, проведенные из вершин тупых углов, отсекают от равнобедренной трапеции равные треугольники

Проведем высоты BB_1 и CC_1 из вершин тупых углов и рассмотрим прямоугольные треугольники ABB_1 и DCC_1 (рис. 41). У них $AB = CD$ как боковые стороны равнобедренной трапеции, $BB_1 = CC_1$ как расстояния между параллельными прямыми AD и BC. Следовательно, $\triangle ABB_1 = \triangle DCC_1$ по гипотенузе и катету. Отсюда следует, что $\angle A = \angle D$. Углы трапеции B и C также равны, поскольку они дополняют равные углы A и D до 180°.

Теорема доказана. ■

Имеет место также обратное утверждение **(признак равнобедренной трапеции)**:

если в трапеции углы при основании равны, то такая трапеция является равнобедренной.

Докажите этот факт самостоятельно.

Задача

Меньшее основание равнобедренной трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.

Решение

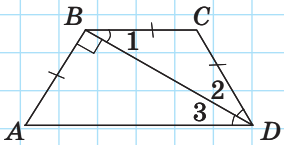


Рис. 42

Пусть дана равнобедренная трапеция ABCD, в которой $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD$, $BD \perp AB$ (рис. 42). По условию задачи треугольник BCD равнобедренный с основанием BD, т.е. $\angle 1 = \angle 2$; с другой стороны, $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD. Пусть градусная мера угла 1 равна x, тогда в данной трапеции $\angle A = \angle D = 2x$, $\angle B = \angle C = x + 90$. Поскольку сумма углов, прилежащих к боковой стороне, составляет 180°, имеем: $2x + x + 90 = 180$; $3x = 90$; $x = 30$. Следовательно, $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$.

Ответ: 60° и 120°.

5.3*. Построение параллелограммов и трапеций

Задачи на построение параллелограммов и трапеций часто решают методом вспомогательного треугольника. Напомним, что для этого необходимо выделить в искомой фигуре треугольник, который можно построить по имеющимся данным. Построив его, получаем две или три вершины искомого четырехугольника, а остальные вершины находим по данным задачи.

Задача

Постройте параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.

Решение

Пусть d_1 и d_2 — данные диагонали параллелограмма, α — угол между ними.

Анализ

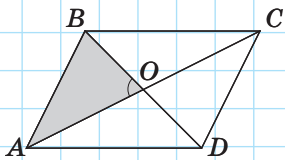


Рис. 43

Пусть параллелограмм $ABCD$ построен (рис. 43). Треугольник AOB можно построить по двум сторонам и углу между ними $\left(AO = \frac{d_1}{2},\ BO = \frac{d_2}{2},\ \angle AOB = \alpha\right)$.

Таким образом, мы получим вершины A и B искомого параллелограмма.

Вершины C и D можно получить, «удвоив» отрезки AO и BO.

Построение

1. Разделим отрезки d_1 и d_2 пополам.
2. Построим треугольник AOB по двум сторонам и углу между ними.
3. На лучах AO и BO отложим отрезки $OC = AO$ и $OD = BO$.
4. Последовательно соединим точки B, C, D и A.

Доказательство

Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, поскольку по построению его диагонали AC и BD точкой пересечения делятся пополам. В этом параллелограмме $\angle AOB = \alpha$ (по построению), $AC = \frac{d_1}{2} \cdot 2 = d_1$, $BD = \frac{d_2}{2} \cdot 2 = d_2$.

Исследование

Задача имеет единственное решение при любых значениях d_1, d_2 и α.

В некоторых случаях для построения вспомогательного треугольника на рисунке-эскизе необходимо провести дополнительные линии.

Задача

Постройте трапецию по четырем сторонам.

Решение

Пусть a и b $(a < b)$ — основания искомой трапеции, c и d — ее боковые стороны.

Анализ

Пусть искомая трапеция $ABCD$ построена (рис. 44). Проведем через вершину C прямую CE, параллельную AB. Тогда $ABCE$ — параллелограмм по определению, следовательно, $CE = AB = c$. Кроме того, $AE = BC = a$, следовательно, $ED = b - a$. Вспомогательный треугольник ECD можно построить по трем сторонам. После этого для получения вершин A и B надо отложить на луче DE и на луче с началом в точке C, параллельном DE, отрезки длиной a.

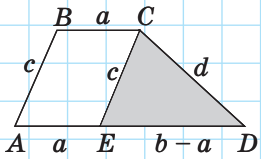


Рис. 44

Построение

1. Построим отрезок $b - a$.
2. Построим треугольник ECD по трем сторонам ($EC = c$, $CD = d$, $ED = b - a$).

3. Построим луч, проходящий через точку C и параллельный DE. При этом построенный луч и луч DE должны лежать по одну сторону от прямой CD.
4. На луче DE от точки E отложим отрезок $EA = a$, на луче с началом C — отрезок $CB = a$.
5. Соединим точки A и B.

Доказательство

По построению $BC \parallel AD$, $BC = AE = a$, следовательно, $ABCE$ — параллелограмм по признаку. Отсюда $AB = CE = c$. Кроме того, $AD = a + b - a = b$, $CD = d$. Следовательно, $ABCD$ — искомая трапеция.

Исследование

Задача имеет единственное решение, если числа $b - a$, c и d удовлетворяют неравенству треугольника.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

138. Могут ли основания трапеции быть равными? Почему?

139. Могут ли быть равными:

а) соседние углы трапеции;

б) противолежащие углы трапеции?

140. Обязательно ли углы трапеции, прилежащие к большему основанию, должны быть острыми? Приведите примеры.

141. Может ли равнобедренная трапеция быть прямоугольной?

142. Может ли высота трапеции быть больше боковой стороны; быть равной боковой стороне?

143. Диагонали трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ пересекаются в точке O.

а) Может ли треугольник AOD быть равным треугольнику BOC?

б) Может ли треугольник AOB быть равным треугольнику DOC?

144. Может ли точка пересечения диагоналей трапеции быть серединой каждой из них; одной из них?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

145. Начертите параллелограмм $ABCD$ и проведите в нем высоту CH так, чтобы получилась трапеция $ABCH$.

а) Определите вид трапеции $ABCH$.

б) Является ли высотой трапеции любая высота параллелограмма? Приведите контрпример.

146. Начертите равнобедренный треугольник AMD с основанием AD. Отметьте на стороне AM точку B и проведите через нее прямую, параллельную AD. Отметьте точку C — точку пересечения этой прямой со стороной MD.

а) Определите вид трапеции $ABCD$.

б) Проведите диагонали трапеции. Измерьте и сравните их длины.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

147. Найдите неизвестные углы:

а) трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $\angle A = 40°$, $\angle D = 50°$;

б) равнобедренной трапеции, один из углов которой равен 58°;

в) прямоугольной трапеции, наибольший угол которой в три раза больше наименьшего угла.

148. Найдите неизвестные углы:

а) равнобедренной трапеции, в которой высота, проведенная из вершины тупого угла, образует с боковой стороной угол 22°;

б) прямоугольной трапеции, которую диагональ, проведенная из вершины тупого угла, делит на два равнобедренных прямоугольных треугольника.

149. В равнобедренной трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки длиной 6 см и 30 см. Найдите меньшее основание трапеции.

150. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 10 см. Найдите большее основание трапеции, если высота, проведенная из вершины тупого угла, делит ее на отрезки, один из которых равен 3 см.

151. Докажите, что сумма противолежащих углов равнобедренной трапеции равна $180°$.

Уровень Б

152. Найдите углы:

а) равнобедренной трапеции, если разность двух ее противолежащих углов равна $80°$;

б) прямоугольной трапеции, в которой диагональ является биссектрисой тупого угла и образует с меньшей боковой стороной угол $35°$.

153. Найдите углы:

а) прямоугольной трапеции, если отношение наибольшего и наименьшего из них равно $3:2$;

б) равнобедренной трапеции, меньшее основание которой равно боковой стороне и вдвое меньше большего основания.

154. В трапеции $ABCD$ через вершину B проведена прямая BK, параллельная стороне CD (рис. 45).

а) Докажите, что $KBCD$ — параллелограмм.

б) Найдите периметр трапеции, если $BC = 4$ см, $P_{\triangle ABK} = 11$ см.

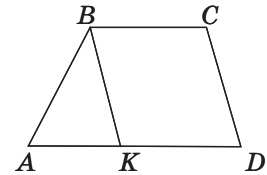


Рис. 45

155. В равнобедренной трапеции середина большего основания соединена с вершинами меньшего основания. При этом образовались три равносторонних треугольника. Найдите:

а) углы трапеции;

б) периметр трапеции, если периметр одного треугольника равен 12 м.

156. Диагональ равнобедренной трапеции делит пополам ее острый угол, равный 60°. Найдите периметр трапеции, если ее меньшее основание равно 15 см.

157. Диагональ равнобедренной трапеции делит пополам ее тупой угол. Найдите периметр трапеции, если ее основания равны 5 см и 10 см.

158. Докажите, что биссектрисы углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, перпендикулярны.

159. Постройте:

а) параллелограмм по двум сторонам и диагонали;
б) ромб по стороне и диагонали;
в) равнобедренную трапецию по большему основанию, боковой стороне и острому углу.

160. Постройте:

а) ромб по углу и диагонали, противолежащей этому углу;
б) прямоугольник по диагонали и углу между диагоналями;
в) прямоугольную трапецию по меньшему основанию, большей боковой стороне и большей диагонали.

Уровень В

161. Диагональ делит равнобедренную трапецию на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции.

162. Длины боковых сторон трапеции равны $2a$, а длины оснований — $7a$ и $9a$. Найдите углы трапеции.

163 (опорная). ***Диагонали равнобедренной трапеции равны, и наоборот: если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.*** Докажите.

164 (опорная). ***Диагонали равнобедренной трапеции образуют с ее основанием равные углы, и наоборот: если диагонали трапеции образуют с ее основанием равные углы, то трапеция равнобедренная.*** Докажите.

165. Постройте:

а) параллелограмм по стороне, диагонали и углу, противолежащему этой диагонали;
б) ромб по высоте и диагонали;
в) трапецию по основаниям и диагоналям.

166. Постройте:

а) прямоугольник по диагонали и периметру;

б) ромб по высоте и острому углу;

в) равнобедренную трапецию по разности оснований, боковой стороне и диагонали.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 6

Теоретический материал

- признаки параллельных прямых;
- свойства параллельных прямых.

7 класс, § 14, 15

Задачи

167. Точки D, E и F — середины сторон AB, BC и AC равностороннего треугольника ABC соответственно. Докажите, что четырехугольник $ADEF$ — ромб. Назовите другие ромбы, тремя вершинами которых являются точки D, E и F.

168. Отрезки AD и CE — равные высоты треугольника ABC. Докажите, что треугольник DBE равнобедренный.

§ 6. Теорема Фалеса. Средние линии треугольника и трапеции

6.1. Теорема Фалеса

Для дальнейшего изучения свойств трапеции докажем важную теорему.

Теорема (Фалéса)

Параллельные прямые, которые пересекают стороны угла и отсекают на одной из них равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой стороне.

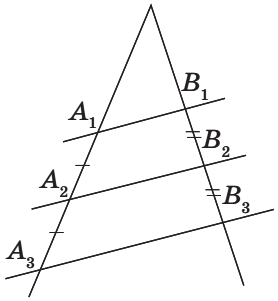


Рис. 46. Теорема Фалеса

Доказательство

□ Пусть A_1, A_2, A_3 — точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон данного угла, а B_1, B_2, B_3 — соответствующие точки пересечения этих прямых с другой стороной угла. Докажем, что если $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$ (рис. 46).

Проведем через точку B_2 прямую CD, параллельную A_1A_3 (рис. 47). Четырехугольники $A_2A_1CB_2$ и $A_3A_2B_2D$ — параллелограммы по определению. Тогда $A_1A_2 = CB_2$, $A_2A_3 = B_2D$, а поскольку $A_1A_2 = A_2A_3$, то $CB_2 = B_2D$.

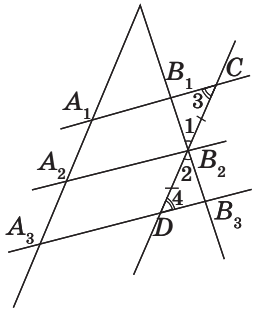


Рис. 47. К доказательству теоремы Фалеса

Рассмотрим треугольники B_1B_2C и B_3B_2D. У них $CB_2 = B_2D$ по доказанному, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, а $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых A_1B_1 и A_3B_3 и секущей CD. Следовательно, $\triangle B_1B_2C = \triangle B_3B_2D$ по второму признаку, откуда $B_1B_2 = B_2B_3$.

Теорема доказана. ■

Заметим, что в условии данной теоремы вместо сторон угла можно рассматривать две произвольные прямые, поэтому теорема Фалеса может формулироваться и следующим образом:

параллельные прямые, которые пересекают две данные прямые и отсекают на одной из них равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.

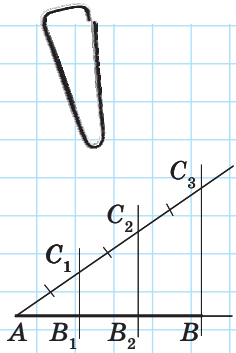


Рис. 48. Деление отрезка на равные части

Задача

Разделите данный отрезок на n равных частей.

Решение

Решим задачу для $n = 3$, т.е. разделим данный отрезок AB на три равные части (рис. 48). Для этого проведем из точки A произвольный луч, не дополнительный к лучу AB, и отложим на нем равные отрезки AC_1, C_1C_2 и C_2C_3. Проведем прямую C_3B и параллельные ей прямые через точки C_1 и C_2. По теореме Фалеса эти прямые делят отрезок AB на три равные части.

Аналогично можно разделить произвольный отрезок на любое количество равных частей.

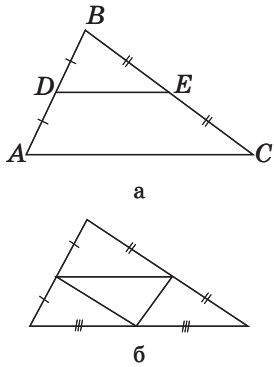


Рис. 49. Средняя линия треугольника

6.2. Средняя линия треугольника

Теорема Фалеса помогает исследовать еще одну важную линию в треугольнике.

Определение

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

На рисунке 49, *а* отрезок DE — средняя линия треугольника ABC. В любом треугольнике можно провести три средние линии (рис. 49, *б*).

Теорема (свойство средней линии треугольника)

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство

☐ Пусть DE — средняя линия треугольника ABC (рис. 50). Докажем сначала, что $DE \parallel AC$. Проведем через точку D прямую, параллельную AC. По теореме Фалеса она пересечет отрезок BC в его середине, т. е. будет содержать отрезок DE. Следовательно, $DE \parallel AC$.

Проведем теперь среднюю линию EF. По только что доказанному она будет параллельна стороне AB. Четырехугольник $ADEF$ с попарно параллельными сторонами по определению является параллелограммом, откуда $DE = AF$. А поскольку точка F — середина AC, то $DE = \frac{1}{2}AC$.

Теорема доказана. ■

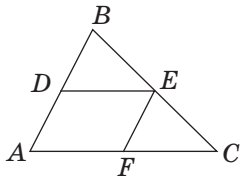


Рис. 50. К доказательству свойства средней линии треугольника

Опорная задача (теорема Вариньона)

Середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Докажите.

Решение

Пусть точки K, L, M, N — середины сторон четырехугольника ABCD (рис. 51). Проведем диагональ BD. Отрезки KN и ML — средние линии треугольников ABD и CBD соответственно. По свойству средней линии треугольника они параллельны стороне BD и равны ее половине, т. е. параллельны и равны между собой. Тогда по признаку параллелограмма четырехугольник KLMN — параллелограмм.

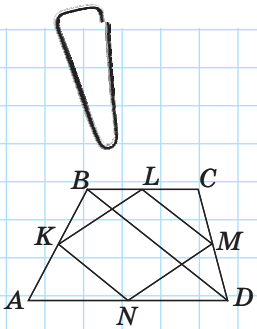


Рис. 51. Середины сторон четырехугольника $ABCD$ — вершины параллелограмма

6.3. Средняя линия трапеции

Определение

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

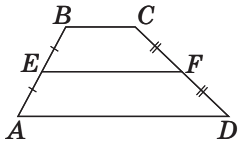


Рис. 52. Средняя линия трапеции

На рисунке 52 отрезок EF — средняя линия трапеции $ABCD$.

Теорема (свойство средней линии трапеции)

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство

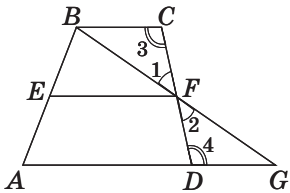


Рис. 53. К доказательству свойства средней линии трапеции

□ Пусть EF — средняя линия трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 53). Проведем прямую BF и отметим точку G — точку пересечения прямых BF и AD. Рассмотрим треугольники BFC и GFD. У них $FC = FD$, поскольку F — середина CD, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, а $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей CD. Следовательно, $\triangle BFC = \triangle GFD$ по второму признаку, откуда $BF = FG$. Тогда по определению EF — средняя линия треугольника ABG. По свойству средней линии треугольника $EF \parallel AG$, поэтому $EF \parallel AD$ и $EF \parallel BC$. Кроме того, из доказанного равенства треугольников следует, что $BC = DG$, откуда $AG = AD + DG = AD + BC$. По свойству средней линии треугольника $EF = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Теорема доказана. ■

Задача

Через точки, делящие боковую сторону трапеции на три равные части, проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите длины отрезков этих прямых, заключенных внутри трапеции, если ее основания равны 2 м и 5 м.

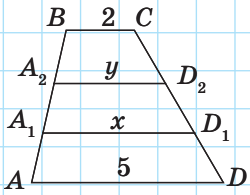


Рис. 54

Решение

Пусть в трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AA_1 = A_1A_2 = A_2B$ (рис. 54). По теореме Фалеса параллельные прямые, которые проходят через точки A_1 и A_2, отсекают на боковой стороне CD равные отрезки, т.е. $DD_1 = D_1D_2 = D_2C$. Тогда по определению A_1D_1 — средняя линия трапеции AA_2D_2D, A_2D_2 — средняя линия трапеции A_1BCD_1. Пусть $A_1D_1 = x$ м, $A_2D_2 = y$ м. По свойству средней линии трапеции имеем систему:

$$\begin{cases} x = \dfrac{y+5}{2}, \\ y = \dfrac{x+2}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 5, \\ 2y - x = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: 3 м и 4 м.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

169. Отрезок DE — средняя линия треугольника ABC (см. рис. 49, *а*).

а) Определите вид четырехугольника $ADEC$.

б) Назовите медиану треугольника, исходящую из вершины A.

170. Может ли средняя линия треугольника быть перпендикулярной его стороне; двум его сторонам?

171. Могут ли средние линии треугольника быть равными 3 см, 4 см и 10 см? Почему?

172. В треугольнике ABC проведена средняя линия DE, параллельная стороне AC. В каком отношении прямая DE делит медиану BM; высоту BH?

173. Середины оснований трапеции соединены отрезком. Является ли он средней линией трапеции?

174. Может ли средняя линия трапеции быть меньше обоих ее оснований; равной одному из оснований?

175. Может ли средняя линия трапеции проходить через точку пересечения диагоналей? Почему?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

176. Начертите треугольник ABC. Отметьте на стороне AB точки A_1, A_2 и A_3 так, чтобы они делили отрезок AB на четыре равные части. Проведите через эти точки прямые, параллельные стороне AC, и обозначьте точки их пересечения со стороной BC буквами C_1, C_2 и C_3 соответственно.

а) Измерьте и сравните длины отрезков, на которые точки C_1, C_2 и C_3 делят сторону BC.

б) Выделите красным цветом среднюю линию треугольника ABC.

в) Выделите синим цветом среднюю линию трапеции AA_2C_2C.

177. Начертите треугольник ABC. Отметьте точки D, E и F — середины сторон AB, BC и AC соответственно. Соедините отмеченные точки.

а) Определите вид четырехугольника $ADEF$.

б) Определите вид четырехугольника $ADEC$.

в) Назовите все треугольники, которые равны треугольнику DEF. Запишите соответствующие равенства.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

178. По данным рисунка 55 найдите x, если $a \parallel b$.

а б

Рис. 55

179. Через середину D стороны AB треугольника ABC проведена прямая, которая параллельна AC и пересекает сторону BC в точке E. Найдите BC, если $BE = 8$ см.

180. Стороны треугольника равны 12 см, 16 см и 20 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

181. Средняя линия равностороннего треугольника равна 3,5 см. Найдите периметр треугольника.

182. Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.

183. Средняя линия треугольника отсекает от него трапецию с боковыми сторонами 3 м и 4 м и меньшим основанием 5 м. Найдите периметр треугольника.

184. Диагонали четырехугольника равны 18 см и 22 см. Найдите периметр параллелограмма, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.

185. Найдите:

а) среднюю линию трапеции с основаниями 8 см и 12 см;

б) основания трапеции, в которой диагональ делит среднюю линию на отрезки длиной 3 см и 4 см.

186. Найдите:

а) среднюю линию равнобедренной трапеции с боковой стороной 5 см и периметром 26 см;

б) основания трапеции, если одно из них больше другого на 6 см, а средняя линия трапеции равна 5 см.

187. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

188. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

Уровень Б

189. Прямая, которая параллельна основанию равнобедренного треугольника и проходит через середину боковой стороны, отсекает от данного треугольника трапецию. Найдите ее периметр, если периметр данного треугольника равен 26 см, а основание относится к боковой стороне как 5 : 4.

190. Средние линии треугольника относятся как 4 : 5 : 6. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 60 см.

191. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей его среднюю линию.

192. Докажите, что середины сторон равнобедренной трапеции являются вершинами ромба.

193. Как построить треугольник, если заданы середины его сторон?

194. Как разрезать треугольник на две части так, чтобы из них можно было составить параллелограмм?

195. Прямоугольная трапеция делится диагональю на равносторонний треугольник со стороной a и прямоугольный треугольник. Найдите среднюю линию трапеции.

196. Концы диаметра окружности удалены от касательной к этой окружности на 14 см и 20 см. Найдите диаметр окружности.

197. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой l и удалены от нее на 7 см и 11 см соответственно. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

198. Боковую сторону равнобедренного треугольника разделили на четыре равные части. Через точки деления проведены прямые, параллельные основанию треугольника. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, если его основание равно 12 см.

Уровень B

199. Точки M и N — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и CN делят диагональ BD на три равные части.

200. Разделите данный отрезок в отношении $3:2$.

201. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям трапеции и равен их полуразности. Решите задачу 197 при условии, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой l.

202. Середина боковой стороны равнобедренной трапеции с основаниями a и b $(a<b)$ соединена с основанием ее высоты (рис. 56). Докажите, что:

а) $HD=\frac{b-a}{2}$;

б) $AH=MN=\frac{a+b}{2}$.

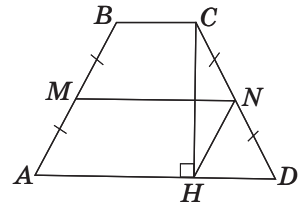


Рис. 56

203. В равнобедренной трапеции диагональ длиной 4 см образует с основанием угол 60°. Найдите среднюю линию трапеции.

204. а) В треугольнике ABC каждая из боковых сторон AB и BC разделена на m равных частей (рис. 57). Докажите, что отрезки, соединяющие соответствующие точки деления, параллельны между собой и параллельны стороне AC.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для трапеции.

в) Сформулируйте утверждение, обратное теореме Фалеса, и опровергните его с помощью контрпримера.

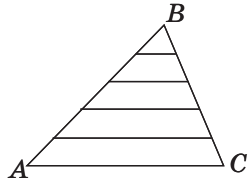


Рис. 57

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 7

Теоретический материал

- внешний угол треугольника; 7 класс, § 19, 22
- окружность;
- окружность, описанная около треугольника; 7 класс, п. 16.3, 23.1
- геометрическое место точек.

Задачи

205. Через вершину равностороннего треугольника, вписанного в окружность, проведена прямая, параллельная его стороне. Докажите, что эта прямая является касательной к окружности.

206. Внешний угол равнобедренного треугольника равен 80°. Найдите углы треугольника.

§ 7. Вписанные углы

7.1. Градусная мера дуги

В седьмом классе изучение свойств треугольников завершалось рассмотрением описанной и вписанной окружностей. Но перед тем как рассмотреть описанную и вписанную окружности для четырехугольника, нам необходимо остановиться на дополнительных свойствах углов.

До сих пор мы изучали только те углы, градусная мера которых не превышала 180°. Расширим понятие угла и введем в рассмотрение вместе с самим углом части, на которые он делит плоскость.

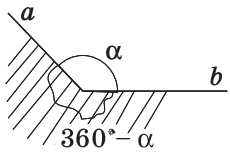


Рис. 58. Углы на плоскости

На рисунке 58 угол (ab) делит плоскость на две части, каждая из которых называется ***плоским углом***. Их градусные меры равны α и $(360° - \alpha)$.

Используем понятие плоского угла для определения центрального угла в окружности.

Определение

Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в центре окружности.

На рисунке 59, *а*, *б* стороны угла с вершиной в центре окружности O пересекают данную окружность в точках A и B. При этом образуются две дуги, одна из которых меньше полуокружности (на ней обозначена промежуточная точка L, рис. 59, *а*), а другая — больше полуокружности (на ней обозначена промежуточная точка M, рис. 59, *б*).

Для того чтобы уточнить, какой из двух плоских углов со сторонами OA и OB мы рассматриваем как центральный, мы будем указывать

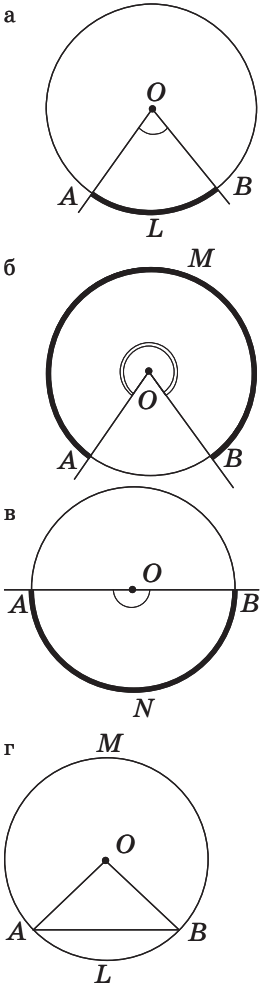


Рис. 59. Центральный угол и дуга окружности

дугу окружности, которая *соответствует данному центральному углу* (т. е. содержится внутри него).

На рисунке 59, *а* центральному углу AOB, обозначенному дужкой, соответствует дуга ALB, а на рисунке 59, *б* — дуга AMB. В случае, когда лучи OA и OB дополнительные, соответствующая дуга ANB является полуокружностью (рис. 59, *в*).

Определение

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Градусную меру дуги, как и саму дугу, обозначают так: $\cup ALB$ (или $\cup AB$). Например, на рисунке 59, *в* $\cup ANB = 180°$, т. е. градусная мера полуокружности составляет 180°. Очевидно, что градусная мера дуги всей окружности составляет 360°.

Концы хорды AB делят окружность на две дуги — ALB и AMB (рис. 59, *г*). Говорят, что эти дуги стягиваются хордой AB.

7.2. Вписанный угол

Определение

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.

На рисунке 60 изображен вписанный угол ABC. Его вершина B лежит на окружности, а стороны пересекают окружность в точках A и C. Дуга AC (на рисунке она выделена) лежит внутри этого угла. В таком случае говорят, что вписанный угол ABC *опирается на дугу* AC.

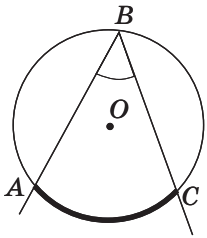


Рис. 60. Вписанный угол ABC

Теорема (о вписанном угле)

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

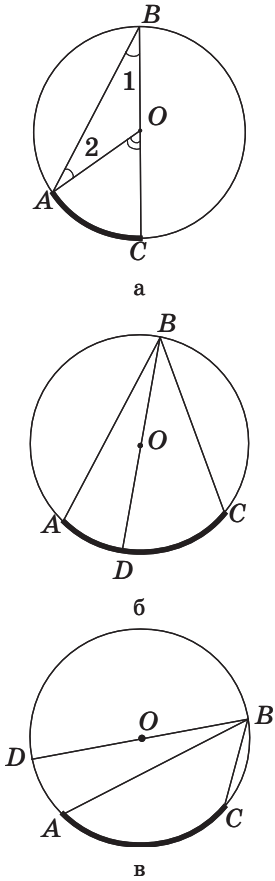


Рис. 61. Измерение вписанного угла ABC

Доказательство

☐ Пусть в окружности с центром O вписанный угол ABC опирается на дугу AC. Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$. Рассмотрим три случая расположения центра окружности относительно данного вписанного угла (рис. 61).

1) Пусть центр окружности лежит на одной из сторон данного угла (рис. 61, *а*). В этом случае центральный угол AOC является внешним углом при вершине O равнобедренного треугольника AOB. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2$. А поскольку углы 1 и 2 равны как углы при основании равнобедренного треугольника, то $\angle AOC = 2\angle ABC$, т. е. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \cup AC$.

2) Пусть центр окружности лежит внутри угла ABC (рис. 61, *б*). Луч BO делит угол ABC на два угла. По только что доказанному $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$, $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$, следовательно, $\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\cup AD + \cup DC\right) = \frac{1}{2} \cup AC$.

3) Аналогично в случае, когда центр окружности лежит вне вписанного угла (рис. 60, *в*), $\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\cup DC - \cup AD\right) = \frac{1}{2} \cup AC$.

Теорема доказана. ■

Только что доказанную теорему можно сформулировать иначе.

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

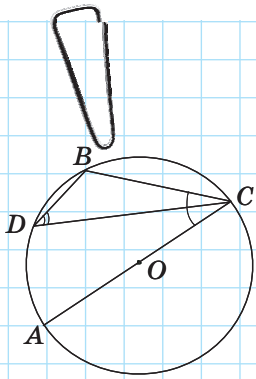


Рис. 62

Задача

Найдите угол BDC, если $\angle BCA = 50°$ (рис. 62).

Решение

Для того чтобы найти угол BDC, необходимо найти градусную меру дуги BC, на которую он опирается. Но непосредственно по данным задачи мы можем найти только градусную меру дуги AB, на которую опирается угол BCA: из теоремы о вписанном угле $\cup AB = 2\angle BCA = 100°$. Заметим, что дуги AB и BC вместе составляют полуокружность, т.е. $\cup AB + \cup BC = 180°$, следовательно, $\cup BC = 180° - 100° = 80°$. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle BDC = \frac{1}{2} \cup BC = 40°$.

Ответ: 40°.

7.3. Следствия теоремы о вписанном угле

По количеству и значимости следствий теорема о вписанном угле является одной из «богатейших» геометрических теорем. Сформулируем наиболее важные из этих следствий.

Следствие 1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

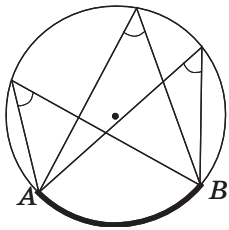


Рис. 63. Вписанные углы, опирающиеся на дугу AB, равны

Действительно, по теореме о вписанном угле градусная мера каждого из вписанных углов на рисунке 63 равна половине дуги AB.

Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность,— прямой, и наоборот: **любой прямой вписанный угол опирается на полуокружность.**

Действительно, поскольку градусная мера полуокружности равна 180°, то угол ABC, который опирается на полуокружность, равен 90°

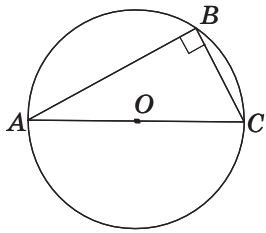


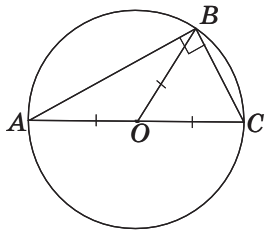
Рис. 64. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность,— прямой

(рис. 64). Обоснование обратного утверждения проведите самостоятельно.

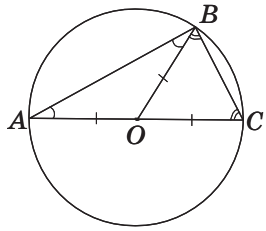
Следствие 3

Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Первое из приведенных утверждений вытекает из следствия 2. Если в треугольнике ABC угол ABC прямой (рис. 65, *а*), то дуга AC, на которую опирается этот угол, является полуокружностью. Тогда гипотенуза AC — диаметр описанной окружности, т. е. середина гипотенузы — центр окружности. Утверждение о длине медианы следует из равенства радиусов: $BO = AO = CO = \frac{1}{2}AC$.



а



б

Рис. 65. Прямоугольный треугольник ABC вписан в окружность

Отметим еще один интересный факт: медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит данный треугольник на два равнобедренных треугольника с общей боковой стороной. Из этого, в частности, следует, что углы, на которые медиана делит прямой угол, равны острым углам треугольника (рис. 65, *б*).

В качестве примера применения следствий теоремы о вписанном угле приведем другое решение задачи, которую мы рассмотрели в п. 7.2.

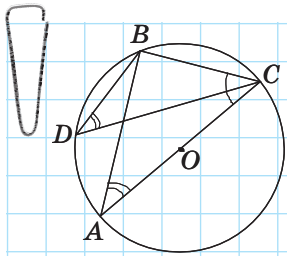


Рис. 66

Задача

Найдите угол BDC, если $\angle BCA = 50°$ (см. рис. 62).

Решение

Проведем хорду AB (рис. 66). Поскольку вписанный угол ABC опирается на полуокружность, то по следствию 2 $\angle ABC = 90°$. Значит, треугольник ABC прямоугольный, $\angle BCA = 50°$, тогда

$\angle BAC = 40°$. По следствию 1 углы BAC и BDC равны, поскольку оба они опираются на дугу BC. Следовательно, $\angle BDC = \angle BAC = 40°$.

Ответ: 40°.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

207. Определите, является ли вписанный угол ABC острым, прямым или тупым, если:

а) дуга ABC меньше полуокружности;
б) дуга ABC больше полуокружности;
в) дуга ABC равна полуокружности.

208. Сторона вписанного угла проходит через центр окружности (см. рис. 61, *а*). Может ли данный угол быть тупым; прямым?

209. Трое футболистов пробивают штрафные удары по воротам из точек A, B и C, которые лежат на окружности (рис. 67). У кого из них угол обстрела ворот наибольший?

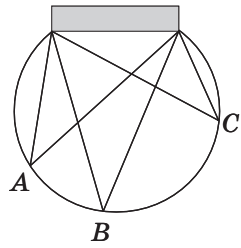


Рис. 67

210. Могут ли два вписанных угла быть равными, если они не опираются на одну дугу?

211. Могут ли вписанные углы ABC и AB_1C не быть равными? Приведите пример.

212. Может ли:

а) угол, стороны которого пересекают окружность в концах диаметра, быть острым;
б) угол с вершиной на окружности, стороны которого пересекают окружность в концах диаметра, быть острым?

213. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10. Может ли высота, проведенная к ней, быть равной 6? Ответ обоснуйте.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

214. Начертите окружность с центром в точке O и отметьте на ней точки A, B и C.

а) Выделите двумя цветами два угла, образованные лучами OA и OC.

б) Каким цветом выделен угол, который в два раза больше угла ABC?

в) Отметьте на окружности точку D так, чтобы вписанные углы ABC и ADC были равны.

215. Начертите окружность с центром O и проведите ее диаметр AB.

а) Отметьте на окружности точку C и измерьте угол ACB. Объясните полученный результат.

б) Начертите и выделите красным цветом центральный угол, который в два раза больше угла ABC.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

216. В окружности построен центральный угол. Найдите градусные меры дуг, которые образовались, если:

а) одна из них больше другой на 120°;

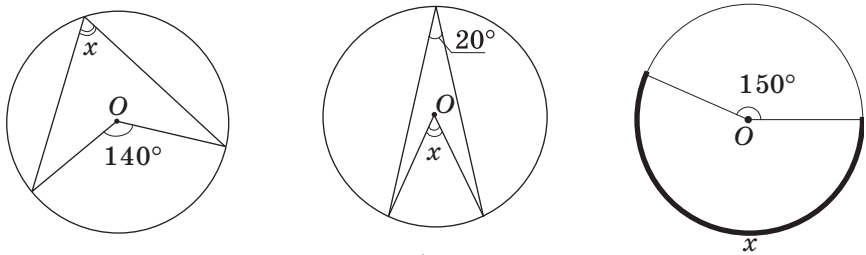
б) они относятся как 2 : 7.

217. Найдите градусную меру дуги, которая составляет:

а) четверть окружности; б) треть окружности;

в) $\frac{5}{18}$ окружности.

218. По данным рисунка 68 найдите градусную меру x (точка O — центр окружности).



а б в

Рис. 68

219. По данным рисунка 69 найдите градусную меру x (точка O — центр окружности).

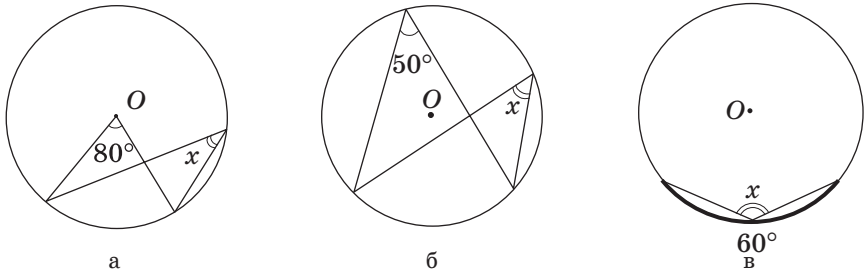


Рис. 69

220. На окружности отмечены точки A, B, C и D. Найдите угол ABC, если $\angle ADC = \alpha$. Сколько решений имеет задача?

221. На окружности отмечены точки A, B и C, причем хорда AC равна радиусу окружности. Найдите угол ABC. Сколько решений имеет задача?

222. Треугольник ABC вписан в окружность, центр которой лежит на отрезке AB. Найдите:

а) угол B, если $\angle A = 65°$;

б) медиану, проведенную из вершины C, если $AB = 12$ см.

223. Отрезок AC — диаметр окружности с центром O, а точка B лежит на этой окружности. Найдите:

а) угол между хордами BA и BC;

б) отрезок AC, если $BO = 5$ см.

224. Докажите, что биссектриса вписанного угла делит пополам дугу, на которую он опирается.

Уровень Б

225. По данным рисунка 70 найдите угол x (точка O — центр окружности).

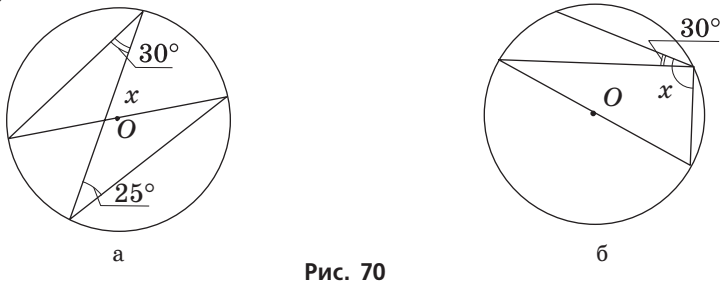


Рис. 70

226. По данным рисунка 71 найдите угол x (точка O — центр окружности).

а б

Рис. 71

227. Хорда AC делит окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как $11:7$. Найдите угол ABC, если точка B лежит на большей дуге.

228. Найдите углы вписанного треугольника, если его вершины делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как $3:4:5$.

229. Сторона равнобедренного треугольника, вписанного в окружность, стягивает дугу $100°$. Найдите углы треугольника. Сколько решений имеет задача?

230 (опорная). ***Угол между хордой и касательной к окружности, проведенной через конец хорды, измеряется половиной дуги, лежащей внутри этого угла.*** Докажите.

231 (опорная).

а) ***Дуги окружности, заключенные между двумя параллельными хордами, равны.*** Докажите.

б) ***Если две дуги окружности равны, то равны и хорды, стягивающие их.*** Докажите. Пользуясь рисунком, сформулируйте и докажите обратное утверждение.

232. Хорда окружности стягивает угол $100°$. Найдите угол между касательными, проведенными через концы этой хорды.

233. На окружности обозначены точки A, B и C, причем AC — диаметр окружности, $\angle BCA = 60°$, $BC = 4$ см. Найдите радиус окружности.

234. Найдите меньший катет прямоугольного треугольника, если его медиана, проведенная к гипотенузе, равна 9 см и образует с гипотенузой угол $60°$.

Уровень В

235 (опорная). ***Центр окружности, описанной около остроугольного треугольника, лежит внутри треугольника, а центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника,— вне треугольника.*** Докажите.

236 (опорная). ***Угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, одна из которых заключена между сторонами этого угла, а другая — между их продолжениями.*** Докажите.

237 (опорная). ***Угол между двумя секущими, которые пересекаются вне окружности, измеряется полуразностью большей и меньшей дуг, заключенных между его сторонами.*** Докажите.

238. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведенной к гипотенузе.

239. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.

240. Найдите геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через концы отрезка AB.

241. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB видно под заданным углом α.

242. Точка A лежит вне данной окружности с центром в точке O. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через точку A.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 8

Теоретический материал

7 класс, § 23

- описанная и вписанная окружности;
- свойство отрезков касательных;
- теорема о биссектрисе угла.

7 класс, п. 21.3, 22.2

Задачи

243. В равнобедренный треугольник с углом при основании 40° вписана окружность. Найдите угол между радиусами, проведенными в точки касания окружности с боковыми сторонами треугольника.

244. Найдите периметр равнобедренного треугольника, если точка касания вписанной окружности делит боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 9 см, начиная от основания.

§ 8. Вписанные и описанные четырехугольники

8.1. Вписанные четырехугольники

Определение

Четырехугольник называется **вписанным в окружность**, если все его вершины лежат на этой окружности.

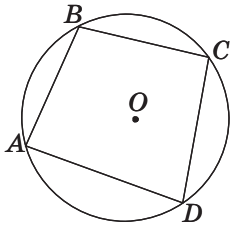


Рис. 72. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность

Четырехугольник $ABCD$ на рисунке 72 является вписанным в окружность. Иначе говорят, что окружность описана около четырехугольника.

Как известно, около любого треугольника можно описать окружность. Для четырехугольника это можно сделать не всегда. Докажем свойство и признак вписанного четырехугольника.

Теорема (о вписанном четырехугольнике)

1) Сумма противолежащих углов вписанного четырехугольника равна 180° (*свойство вписанного четырехугольника*).

2) Если сумма противолежащих углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность (*признак вписанного четырехугольника*).

Доказательство

□ 1) *Свойство*. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 72). По теореме о вписанном угле $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$, $\angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$. Следовательно, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$. Аналогично доказываем, что $\angle B + \angle D = 180°$.

2)* *Признак*. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180°$. Опишем окружность

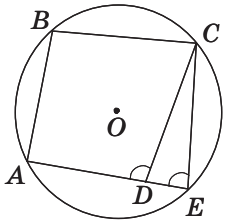


Рис. 73. К доказательству от противного признака вписанного четырехугольника

около треугольника ABC и докажем от противного, что вершина D не может лежать ни внутри этой окружности, ни вне ее. Пусть точка D лежит внутри окружности, а точка E — точка пересечения луча AD с дугой AC (рис. 73). Тогда четырехугольник $ABCE$ — вписанный. По условию $\angle B + \angle D = 180°$, а по только что доказанному свойству вписанного четырехугольника $\angle B + \angle E = 180°$, т. е. $\angle D = \angle E$. Но угол D четырехугольника $ABCD$ — внешний угол треугольника CDE, и по теореме о внешнем угле треугольника он должен быть больше угла E. Следовательно, мы пришли к противоречию, т. е. точка D не может лежать внутри окружности. Аналогично можно доказать, что точка D не может лежать вне окружности. Тогда точка D лежит на окружности, т. е. около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Теорема доказана. ■

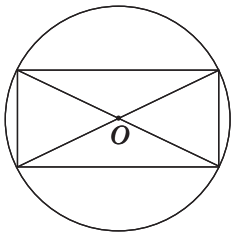


Рис. 74. Прямоугольник, вписанный в окружность

Следствие 1

Около любого прямоугольника можно описать окружность.
Если параллелограмм вписан в окружность, то он является прямоугольником.

Прямоугольник, вписанный в окружность, изображен на рисунке 74. Центр описанной окружности является точкой пересечения диагоналей прямоугольника (см. задачу 255).

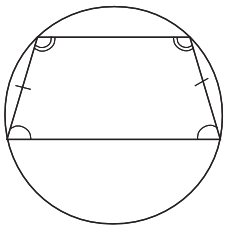


Рис. 75. Равнобедренная трапеция, вписанная в окружность

Следствие 2

Около равнобедренной трапеции можно описать окружность.
Если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная.

Равнобедренная трапеция, вписанная в окружность, изображена на рисунке 75.

Примеры решения задач о вписанных четырехугольниках представлены в п. 8.4.

8.2. Описанные четырехугольники

Определение

Четырехугольник называется **описанным около окружности**, если все его стороны касаются этой окружности.

Четырехугольник $ABCD$ на рисунке 76 является описанным около окружности. Иначе говорят, что окружность вписана в четырехугольник.

Оказывается, что не в любой четырехугольник можно вписать окружность. Докажем соответствующие свойство и признак.

Теорема (об описанном четырехугольнике)

1) В описанном четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны (*свойство описанного четырехугольника*).

2) Если в четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность (*признак описанного четырехугольника*).

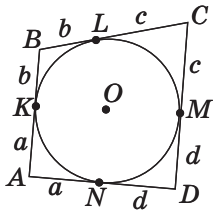


Рис. 76. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности

Доказательство

□ 1) *Свойство*. Пусть стороны четырехугольника $ABCD$ касаются вписанной окружности в точках K, L, M и N (рис. 76). По свойству отрезков касательных $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$. С учетом обозначений на рисунке $AB + CD = a + b + c + d = AD + BC$.

2)* *Признак*. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ с наименьшей стороной AB $AB + CD = AD + BC$. Поскольку по теореме о биссектрисе угла точка O (точка пересечения биссектрис углов A и B) равноудалена от сторон AB, BC и AD, то можно построить окружность с центром O, которая касается этих трех сторон (рис. 77, *а*). Докажем от противного, что эта окружность касается также стороны CD.

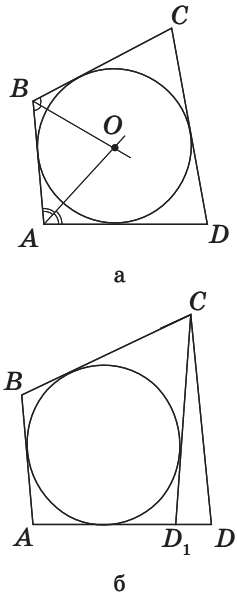


Рис. 77. К доказательству признака описанного четырехугольника

Предположим, что это не так. Тогда прямая CD либо не имеет общих точек с окружностью, либо является секущей окружности. Рассмотрим первый случай (рис. 77, *б*). Проведем через точку C касательную к окружности, которая пересекает сторону AD в точке D_1. Тогда по свойству описанного четырехугольника $ABCD_1$ $BC + AD_1 = AB + CD_1$. Но по условию $BC + AD = AB + CD$. Вычитая из второго равенства первое, имеем: $AD - AD_1 = CD - CD_1$, т. е. $DD_1 = CD - CD_1$, что противоречит неравенству треугольника для треугольника CD_1D.

Таким образом, наше предположение неверно. Аналогично можно доказать, что прямая CD не может быть секущей окружности. Следовательно, окружность касается стороны CD, т. е. четырехугольник $ABCD$ описанный. Теорема доказана. ■

Замечание. Напомним, что в данной теореме рассматриваются только выпуклые четырехугольники.

Следствие

В любой ромб можно вписать окружность.

Если в параллелограмм вписана окружность, то он является ромбом.

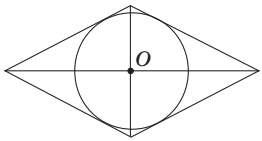


Рис. 78. Ромб, описанный около окружности

Ромб, описанный около окружности, изображен на рисунке 78. Центр вписанной окружности является точкой пересечения диагоналей ромба (см. задачу 265, а).

Задача

В равнобедренную трапецию с боковой стороной 6 см вписана окружность. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение

Пусть ABCD — данная равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC. По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = AD + BC = 12$ см. Средняя линия трапеции равна $\frac{AD + BC}{2}$, т.е. равна 6 см.

Ответ: 6 см.

8.3*. Геометрические софизмы

Софизм — от греческого «софизма» — выдумка, уловка, головоломка

Многим из вас, наверное, известна древнегреческая история об Ахиллесе, который никак не может догнать черепаху. История математики знает немало примеров того, как ложные утверждения и ошибочные результаты выдавались за истинные, а их опровержение давало толчок настоящим математическим открытиям. Но даже ошибки и неудачи могут принести пользу математикам. Эти ошибки остались в учебниках и пособиях в виде ***софизмов*** — заведомо ложных утверждений, доказательства которых на первый взгляд кажутся правильными, но на самом деле таковыми не являются. Поиск и анализ ошибок, содержащихся в этих доказательствах, часто позволяют определить причины ошибок в решении других задач. Поэтому в процессе изучения геометрии софизмы иногда даже более поучительны и полезны, чем «безошибочные» задачи и доказательства.

Рассмотрим пример геометрического софизма, связанного с четырехугольниками, вписанными в окружность.

Окружность имеет два центра.

«Доказательство»

Обозначим на сторонах произвольного угла B точки A и C и проведем через эти точки перпендикуляры к сторонам BA и BC соответственно (рис. 79). Эти перпендикуляры должны пересекаться (ведь если бы они были параллельны, то параллельными были бы и стороны данного угла — обоснуйте это самостоятельно). Обозначим точку D — точку пересечения перпендикуляров.

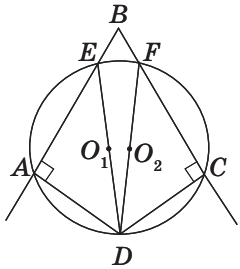


Рис. 79

Через точки A, D и C, не лежащие на одной прямой, проведем окружность (это

можно сделать, поскольку окружность, описанная около треугольника ADC, существует и является единственной). Обозначим точки E и F — точки пересечения этой окружности со сторонами угла B. Прямые углы EAD и FCD являются вписанными в окружность. Значит, по следствию теоремы о вписанных углах, отрезки DE и DF являются диаметрами окружности, которые имеют общий конец D, но не совпадают. Тогда их середины O_1 и O_2 являются двумя разными центрами одной окружности, т. е. окружность имеет два центра.

Ошибка этого «доказательства» заключается в неправильности построений на рисунке 79. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, т. е. он вписан в окружность. Это означает, что в ходе построений окружность, проведенная через точки A, D и C, обязательно пройдет через точку B. В таком случае отрезки DE и DF совпадут с отрезком DB, середина которого и является единственным центром построенной окружности.

Среди задач к этому и следующим параграфам вы найдете и другие примеры геометрических софизмов и сможете самостоятельно потренироваться в их опровержении. Надеемся, что опыт, который вы при этом приобретете, поможет в дальнейшем избежать подобных ошибок при решении задач.

8.4*. Четырехугольник и окружность в задачах. Метод вспомогательной окружности

При решении задач об окружностях и четырехугольниках иногда следует использовать специальные подходы. Один из них заключается в рассмотрении вписанного треугольника,

вершины которого являются вершинами данного вписанного четырехугольника.

Задача

Найдите периметр равнобедренной трапеции, диагональ которой перпендикулярна боковой стороне и образует с основанием угол 30°, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен 8 см.

Решение

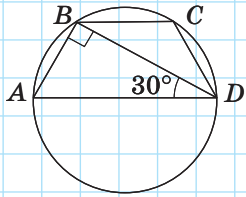


Рис. 80

Пусть дана вписанная трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $BD \perp AB$, $\angle ADB = 30°$ (рис. 80). Заметим, что окружность, описанная около трапеции, описана также и около прямоугольного треугольника ABD, значит, ее центром является середина гипотенузы AD. Тогда $AD = 2R = 16$ см. В треугольнике ABD $AB = 8$ см как катет, противолежащий углу 30°. Поскольку в прямоугольном треугольнике ABD $\angle A = 60°$, то углы при большем основании трапеции равны 60°. $\angle ADB = \angle CBD$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD. Следовательно, в треугольнике BCD два угла равны, т.е. он является равнобедренным с основанием BD, откуда $BC = CD = AB = 8$ см. Тогда $P_{ABCD} = 16 + 8 + 8 + 8 = 40$ (см).

Ответ: 40 см.

Особенно интересным и нестандартным является применение окружности (как описанной, так и вписанной) при решении задач, в условиях которых окружность вообще не упоминается.

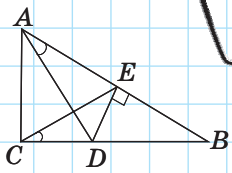


Рис. 81

Задача

Из точки D, лежащей на катете BC прямоугольного треугольника ABC, проведен перпендикуляр DE к гипотенузе AB (рис. 81). Докажите, что $\angle DCE = \angle DAE$.

Решение

В четырехугольнике ACDE $\angle ACD + \angle AED = 180°$, значит, около него можно описать окружность. В этой окружности вписанные углы DCE и DAE будут опираться на одну и ту же дугу, и по следствию теоремы о вписанном угле $\angle DCE = \angle DAE$.

Метод решения задач с помощью дополнительного построения описанной или вписанной окружности называют ***методом вспомогательной окружности***.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

245. В какой прямоугольник можно вписать окружность? Около какого ромба можно описать окружность?

246. Можно ли описать окружность около четырехугольника, у которого только один прямой угол; только два прямых угла?

247. Можно ли описать окружность около прямоугольной трапеции?

248. Трапеция $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ описана около окружности (рис. 82). Как построить точку M, чтобы треугольник AMD был описан около той же окружности?

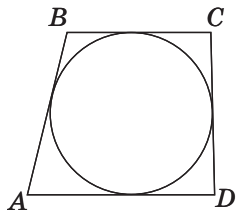


Рис. 82

249. В трапеции три стороны равны. Можно ли в такую трапецию вписать окружность? Можно ли около такой трапеции описать окружность?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

250. Начертите окружность с центром в точке O и отметьте на ней точки A, B, C и D так, чтобы при их последовательном соединении образовался вписанный четырехугольник $ABCD$. Измерьте углы A и B этого четырехугольника. Используя свойства вписанного четырехугольника, вычислите градусные меры углов C и D. Проверьте полученные результаты измерением.

251. Начертите окружность с центром в точке O и проведите к ней четыре касательные так, чтобы при их попарном пересечении образовался описанный четырехугольник $ABCD$. Измерьте длины сторон AB, BC и CD этого четырехугольника. Используя свойства описанного четырехугольника, вычислите длину стороны AD. Проверьте полученный результат измерением.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

252. Определите, можно ли описать окружность около четырехугольника $ABCD$, если углы A, B, C и D равны соответственно:

а) $90°$, $90°$, $20°$, $160°$;

б) $5°$, $120°$, $175°$, $60°$.

253. Найдите неизвестные углы:

а) вписанного четырехугольника, если два его угла равны $46°$ и $125°$;

б) вписанной трапеции, если один из ее углов равен $80°$;

в) вписанного четырехугольника, диагонали которого точкой пересечения делятся пополам.

254. Найдите неизвестные углы:

а) вписанного четырехугольника $ABCD$, если углы A и C равны, а угол D равен $50°$;

б) вписанной трапеции, если сумма двух из них равна $230°$.

255 (опорная). ***Центр окружности, описанной около прямоугольника, является точкой пересечения его диагоналей.*** Докажите.

256. Из точки C, лежащей внутри острого угла A, проведены перпендикуляры CB и CD к сторонам угла. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

257. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$. Докажите, что около этого четырехугольника можно описать окружность.

258. Найдите периметр:

а) описанного четырехугольника, три последовательные стороны которого равны 7 см, 9 см и 8 см;

б) описанной трапеции, боковые стороны которой равны 3 см и 11 см.

259. Равнобедренная трапеция описана около окружности. Найдите:
а) боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 7 см;
б) среднюю линию трапеции, если ее периметр равен 16 см.

260. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 3 см. Найдите периметр квадрата.

Уровень Б

261. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, центр которой лежит на стороне AD. Найдите углы четырехугольника, если $\angle ACB = 20°$, $\angle DBC = 10°$.

262. Найдите углы трапеции, если центр окружности, описанной около нее, лежит на большем основании, а угол между диагоналями равен 70°.

263. В треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке D. Докажите, что точки A_1, B, C_1, D лежат на одной окружности.

264. Если биссектрисы углов четырехугольника, пересекаясь, образуют четырехугольник, то около образованного четырехугольника можно описать окружность. Докажите.

265 (опорная).
а) ***Центр окружности, вписанной в ромб, является точкой пересечения его диагоналей, а радиус окружности равен половине высоты ромба.*** Докажите.
б) ***Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен половине ее высоты.*** Докажите.

266. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC (точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC). Докажите, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

267. Стороны четырехугольника равны 4 м, 9 м, 8 м и 5 м. Назовите пары противолежащих сторон этого четырехугольника, если в него можно вписать окружность.

268. Диагональ ромба, исходящая из вершины угла 60°, равна 24 см. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

269. Найдите среднюю линию прямоугольной трапеции, в которой бо́льшая боковая сторона равна 10 см, а радиус вписанной окружности равен 3 см.

270. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, делит данный треугольник на трапецию и треугольник с периметром 24 см. Основание данного треугольника равно 12 см. Докажите, что в полученную трапецию можно вписать окружность.

271. Из точки A, лежащей вне окружности с центром в точке O, проведены касательные AB и AC к этой окружности (B и C — точки касания). Докажите, что в четырехугольник $ABOC$ можно вписать окружность.

Уровень B

272 (опорная). ***Если трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) описана около окружности с центром в точке O, то:***

а) точка O — точка пересечения биссектрис углов трапеции;

б) треугольники AOB и COD прямоугольные.

Докажите.

273. Если сторону четырехугольника, соединяющую две его вершины, видно из двух других вершин под равными углами, то около этого четырехугольника можно описать окружность. Докажите.

274. Из вершины тупого угла ромба $ABCD$ проведены высоты BM и BN, причем отрезок MN вдвое меньше диагонали BD. Найдите углы ромба.

275. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построен квадрат $ABDE$, диагонали которого пересекаются в точке K. Найдите угол ACK.

276. Найдите ошибку в «доказательстве» геометрического софизма: *внешний угол треугольника равен внутреннему углу, не смежному с ним.*

«Доказательство»

Рассмотрим четырехугольник ABCD, в котором $\angle B + \angle D = 180°$ (рис. 83). Через точки A, B и C проведем окружность, которая пересечет стороны AD и CD в некоторых точках E и F. Соединив точки E и C, получим четырехугольник ABCE, вписанный в данную окружность. По свойству вписанного четырехугольника $\angle B + \angle E = 180°$. Но по условию $\angle B + \angle D = 180°$, следовательно, $\angle D = \angle E$. Это означает, что угол CEA, который является внешним углом треугольника CDE, равен внутреннему углу CDE этого треугольника, т.е. внешний угол треугольника равен внутреннему углу, не смежному с ним.

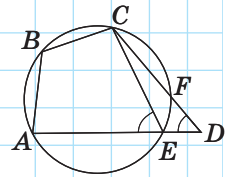


Рис. 83

277. Найдите ошибку в «доказательстве» геометрического софизма: *в окружности хорда, которая не проходит через центр, равна диаметру.*

«Доказательство»

Пусть AB — диаметр окружности с центром в точке O (рис. 84). Проведем через точку A произвольную хорду AC и обозначим ее середину — точку D. Проведем через точки B и D хорду BE и соединим точки E и C. В треугольниках ADB и CDE углы при вершине D равны как вертикальные, $\angle BAD = \angle CED$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC, а $AD = CD$ по построению. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум углам, откуда $AB = EC$, т.е. диаметр окружности равен хорде, которая не проходит через центр окружности.

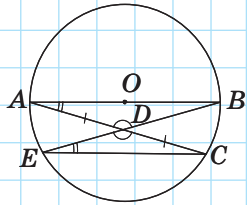


Рис. 84

278. Постройте ромб по диагонали и радиусу вписанной окружности.

279. Постройте равнобедренную трапецию по боковой стороне и радиусу вписанной окружности.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 9

Теоретический материал

- медиана, биссектриса и высота треугольника;
- описанная и вписанная окружности для треугольника.

7 класс, § 12, 23

Задачи

280. Один из углов треугольника равен 60°. Под каким углом пересекаются биссектрисы двух других его углов?

281. Один из углов треугольника равен 60°. Под каким углом пересекаются высоты, проведенные к сторонам этого угла?

§ 9*. Замечательные точки треугольника

9.1. Точка пересечения медиан

В седьмом классе в ходе изучения вписанной и описанной окружностей треугольника рассматривались две его замечательные точки — точка пересечения биссектрис (иначе ее называют ***инцентром*** треугольника) и точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Рассмотрим еще две замечательные точки треугольника.

Теорема (о точке пересечения медиан треугольника)

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, начиная от вершины треугольника.

Доказательство

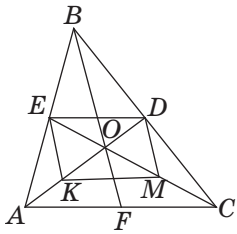


Рис. 85. Медианы треугольника пересекаются в одной точке

□ Пусть в треугольнике ABC проведены медианы AD, BF и CE (рис. 85). Докажем, что они пересекаются в некоторой точке O, причем $AO : OD = BO : OF = CO : OE = 2 : 1$.

Пусть O — точка пересечения медиан AD и CE, точки K и M — середины отрезков AO и CO соответственно. Отрезок ED — средняя линия треугольника ABC, и по свойству средней линии треугольника $ED \parallel AC$, $ED = \frac{1}{2}AC$. Кроме того, KM — средняя линия треугольника AOC, и по тому же свойству $KM \parallel AC$, $KM = \frac{1}{2}AC$. Значит, в четырехугольнике $KEDM$ две стороны параллельны и равны. Таким образом, $KEDM$ —

параллелограмм, и его диагонали KD и EM точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, $AK = KO = OD$, $CM = MO = OE$, т. е. точка O делит медианы AD и CE в отношении $2:1$.

Аналогично доказываем, что и третья медиана BF точкой пересечения с каждой из медиан AD и CE делится в отношении $2:1$. А поскольку такая точка деления для каждой из медиан единственная, то, следовательно, все три медианы пересекаются в одной точке. ■

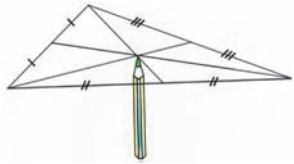


Рис. 86. Точка пересечения медиан — центр масс треугольника

Точку пересечения медиан треугольника иначе называют ***центроидом*** или ***центром масс*** треугольника. В уместности такого названия вы можете убедиться, проведя эксперимент: вырежьте из картона треугольник произвольной формы, проведите в нем медианы и попробуйте удержать его в равновесии, положив на иглу или острый карандаш в точке пересечения медиан (рис. 86).

Задача

Если в треугольнике две медианы равны, то он равнобедренный. Докажите.

Решение

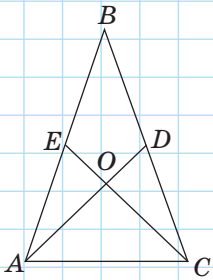


Рис. 87

Пусть в треугольнике ABC медианы AD и CE равны и пересекаются в точке O (рис. 87).

Рассмотрим треугольники AOE и COD. Поскольку точка O делит каждую из равных медиан AD и CE в отношении $2:1$, то $AO = CO$, $EO = DO$. Кроме того, $\angle AOE = \angle COD$ как вертикальные. Значит, $\triangle AOE = \triangle COD$ по первому признаку. Отсюда следует, что $AE = CD$.

Но по определению медианы эти отрезки — половины сторон AB и CB. Следовательно, $AB = CB$, т. е. треугольник ABC равнобедренный.

9.2. Точка пересечения высот

Теорема (о точке пересечения высот треугольника)

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

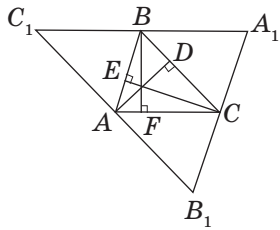


Рис. 88. Высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке

Доказательство

☐ Пусть AD, BF и CE — высоты треугольника ABC (рис. 88). Проведя через вершины треугольника прямые, параллельные противолежащим сторонам, получим треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого перпендикулярны высотам треугольника ABC. По построению четырехугольники C_1BCA и B_1ABC — параллелограммы, откуда $C_1A = BC$ и $BC = AB_1$. Следовательно, точка A — середина отрезка B_1C_1. Аналогично доказываем, что B — середина A_1C_1 и C — середина A_1B_1.

Таким образом, высоты AD, BF и CE лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, которые пересекаются в одной точке по следствию теоремы об окружности, описанной около треугольника. ■

Точку пересечения высот (или их продолжений) иначе называют ***ортоцентром*** треугольника.

Таким образом, замечательными точками треугольника являются:

- точка пересечения биссектрис — центр окружности, вписанной в треугольник;
- точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам — центр окружности, описанной около треугольника;
- точка пересечения медиан — делит каждую из медиан в отношении 2 : 1, начиная от вершины треугольника;
- точка пересечения высот (или их продолжений).

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

282. Какие из замечательных точек треугольника могут лежать вне треугольника?

283. Может ли ортоцентр треугольника совпадать с его вершиной?

284. Как расположены замечательные точки в равностороннем треугольнике?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

285. Начертите треугольник ABC, проведите его медианы AD и CE. Обозначьте точку O — точку их пересечения.

а) Измерьте длины отрезков AO, OD и CO. Используя теорему о точке пересечения медиан треугольника, вычислите приближенно длину отрезка OE. Проверьте полученный результат измерением.

б) Проведите луч BO и обозначьте точку F, в которой он пересекает сторону AC. В каком отношении эта точка делит сторону AC?

286. Начертите треугольник ABC, проведите его высоты AD и CE. Обозначьте точку O — точку пересечения этих высот (или их продолжений). Проведите луч BO. Под каким углом он пересекает прямую AC? Почему?

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

287. Докажите, что в равнобедренном треугольнике все четыре замечательные точки лежат на одной прямой. Какая это прямая?

288. В треугольнике точка пересечения медиан совпадает с ортоцентром. Докажите, что данный треугольник равносторонний.

289. Точка пересечения медиан треугольника делит одну из медиан на отрезки, разность которых составляет 3 см. Найдите длину этой медианы.

Уровень Б

290. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что точка A — ортоцентр треугольника HBC.

291. Точки D, E, F — середины сторон треугольника ABC. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника DEF совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

292. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и CDA лежат на диагонали BD и делят ее на три равные части.

Уровень В

293. Расстояние от центра окружности, описанной около равнобедренного треугольника, до его основания равно 3 см, а радиус этой окружности равен 6 см. Найдите длины отрезков, на которые точка пересечения медиан делит медиану, проведенную к основанию.

294. Постройте треугольник по трем медианам.

295. Центр окружности, описанной около треугольника, является ортоцентром треугольника, образованного средними линиями данного треугольника. Докажите.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 10

Теоретический материал

- пропорции; — 6 класс
- равенство треугольников; — 7 класс, § 7
- теорема Фалеса. — 8 класс, § 6

Задачи

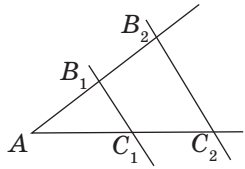
296. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle B = 90°)$ через середину катета AB проведена прямая, параллельная медиане BM. Найдите длины отрезков, на которые эта прямая делит гипотенузу, если $BM = 6$ см.

297. Найдите x из пропорции: а) $5{,}4 : x = 2{,}7 : 7{,}2$; б) $\frac{x+1}{144} = \frac{25}{60}$.

Задачи для подготовки к контрольной работе № 2

1. В равнобедренной трапеции противолежащие углы относятся как $2:7$. Найдите углы трапеции.

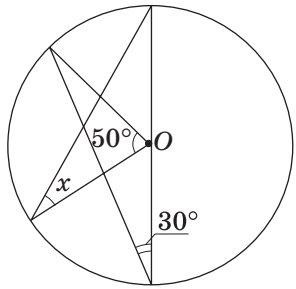
2. По данному рисунку найдите AB_1, если $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, $AC_1 = C_1C_2$, $AB_2 = 12$ см.



3. Средняя линия отсекает от данного треугольника треугольник, периметр которого равен 17 см. Найдите периметры данного треугольника и треугольника, образованного его средними линиями.

4. В равнобедренной трапеции с углом 45° отрезки, соединяющие середину большего основания с вершинами тупых углов, перпендикулярны боковым сторонам. Найдите среднюю линию трапеции, если ее меньшее основание равно 4 см.

5. По данным рисунка найдите угол x.

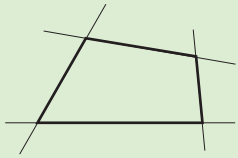
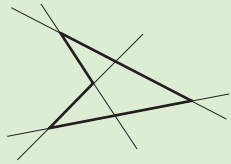


6. В равнобедренную трапецию вписана окружность, которая делит боковую сторону на отрезки в отношении $9:16$. Найдите длины этих отрезков, если средняя линия трапеции равна 50 см.

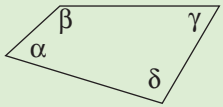
Итоги главы I

ИТОГОВЫЙ ОБЗОР ГЛАВЫ I

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

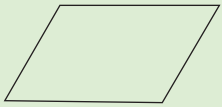
Выпуклый четырехугольник	Невыпуклый четырехугольник
	

Теорема о сумме углов четырехугольника

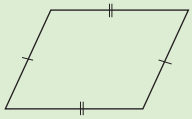
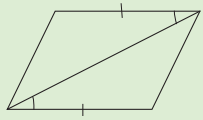
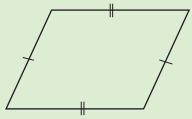


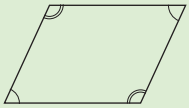
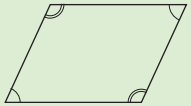
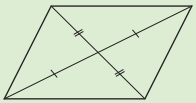
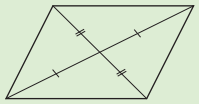
Сумма углов четырехугольника равна 360°:
$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

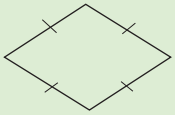
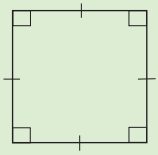


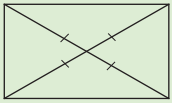
Параллелограммом называется четырехугольник, противолежащие стороны которого попарно параллельны

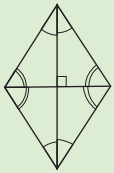
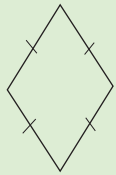
Свойства параллелограмма	Признаки параллелограмма
 Противолежащие стороны параллелограмма равны	 Если две противолежащие стороны четырехугольника параллельны и равны, то этот четырехугольник — параллелограмм  Если противолежащие стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм

	Противолежащие углы параллелограмма равны		Если противолежащие углы четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм
	Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам		Если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм

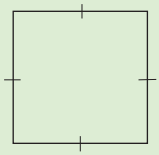
ВИДЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ

	***Прямоугольником*** называется параллелограмм, у которого все углы прямые
	***Ромбом*** называется параллелограмм, у которого все стороны равны
	***Квадратом*** называется прямоугольник, у которого все стороны равны

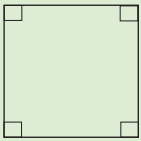
Свойство прямоугольника	Признак прямоугольника
 Диагонали прямоугольника равны	 Если все углы четырехугольника равны, то этот четырехугольник является прямоугольником

Свойства ромба	Признак ромба
 Диагонали ромба перпендикулярны и делят его углы пополам	 Если все стороны четырехугольника равны, то этот четырехугольник является ромбом

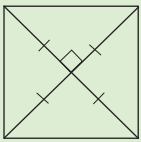
Свойства квадрата



Все стороны квадрата равны, а противолежащие стороны параллельны

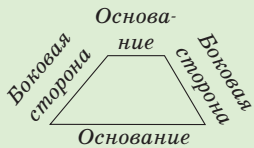


Все углы квадрата прямые

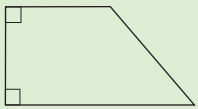


Диагонали квадрата равны, перпендикулярны, делят углы квадрата пополам и точкой пересечения делятся пополам

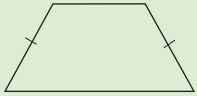
ТРАПЕЦИЯ



Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие непараллельны

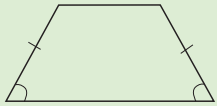


Прямоугольной трапецией называется трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям

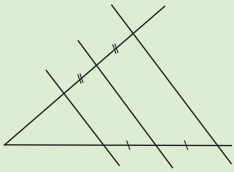


Равнобедренной трапецией называется трапеция, у которой боковые стороны равны

Свойство равнобедренной трапеции	Признак равнобедренной трапеции
В равнобедренной трапеции углы при основании равны	Если в трапеции углы при основании равны, то такая трапеция равнобедренная



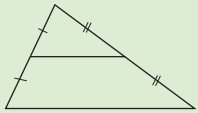
ТЕОРЕМА ФАЛЕСА



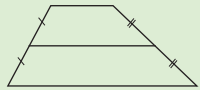
Параллельные прямые, которые пересекают стороны угла и отсекают на одной из них равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой стороне

СРЕДНИЕ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТРАПЕЦИИ

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон

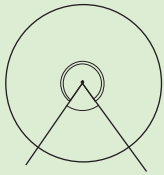


Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции

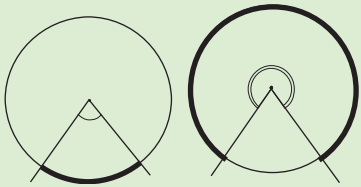


Свойство средней линии треугольника	Свойство средней линии трапеции
Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны	Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме

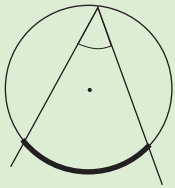
УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ



Центральным углом в окружности называется плоский угол с вершиной в центре окружности



Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла

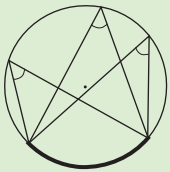


Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность

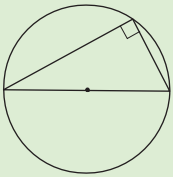
Теорема о вписанном угле

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается

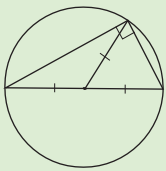
Следствия теоремы о вписанном угле



Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны



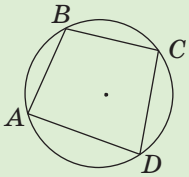
Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой, и наоборот: любой прямой вписанный угол опирается на полуокружность



Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы

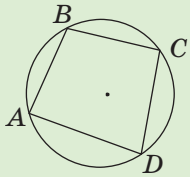
ВПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ



Четырехугольник называется ***вписанным в окружность***, если все его вершины лежат на этой окружности

Свойство вписанного четырехугольника

Сумма противолежащих углов вписанного четырехугольника равна 180°

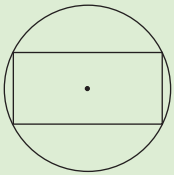


$\angle A + \angle C =$
$= \angle B + \angle D =$
$= 180°$

Признак вписанного четырехугольника

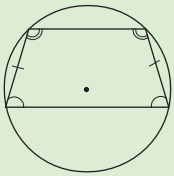
Если сумма противолежащих углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность

Если параллелограмм вписан в окружность, то он является прямоугольником



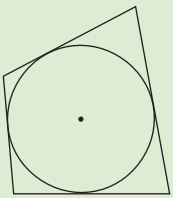
Около любого прямоугольника можно описать окружность

Если трапеция вписана в окружность, то она равнобедренная



Около равнобедренной трапеции можно описать окружность

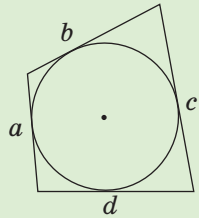
ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ



Четырехугольник называется ***описанным около окружности***, если все его стороны касаются этой окружности

Свойство описанного четырехугольника

В описанном четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны

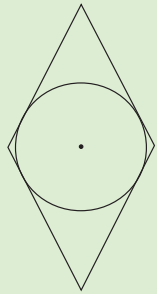


$$a + c = b + d$$

Признак описанного четырехугольника

Если в выпуклом четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность

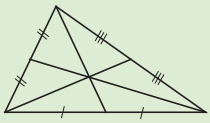
Если в параллелограмм вписана окружность, то он является ромбом



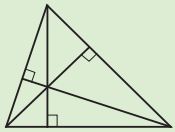
В любой ромб можно вписать окружность

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

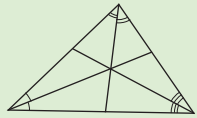
Точка пересечения медиан (центр масс)



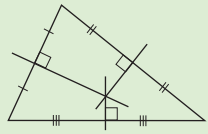
Точка пересечения высот или их продолжений (ортоцентр)

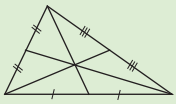


Точка пересечения биссектрис (инцентр) — центр вписанной окружности

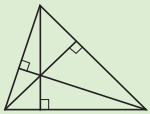


Точка пересечения серединных перпендикуляров — центр описанной окружности





Теорема о точке пересечения медиан треугольника
Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, начиная от вершины треугольника



Теорема о точке пересечения высот треугольника
Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ I

1. Начертите выпуклый четырехугольник $ABCD$. Назовите его стороны и диагонали. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов выпуклого четырехугольника.

2. Дайте определение параллелограмма. Сформулируйте и докажите свойства параллелограмма.

3. Сформулируйте и докажите признаки параллелограмма.

4. Дайте определение прямоугольника. Сформулируйте и докажите свойства прямоугольника.

5. Дайте определение ромба. Сформулируйте и докажите свойства ромба.

6. Дайте определение квадрата. Назовите свойства квадрата.

7. Дайте определение трапеции. Назовите виды трапеций, которые вам известны. Какими свойствами они обладают?

8. Сформулируйте и докажите теорему Фалеса.

9. Дайте определение средней линии треугольника. Сформулируйте и докажите свойство средней линии треугольника.

10. Дайте определение средней линии трапеции. Сформулируйте и докажите свойство средней линии трапеции.

11. Дайте определение центрального угла в окружности. Какова связь между градусной мерой дуги окружности и градусной мерой соответствующего центрального угла?

12. Дайте определение вписанного угла. Сформулируйте и докажите теорему о вписанном угле.

13. Сформулируйте следствия теоремы о вписанном угле.

14. Дайте определение четырехугольника, вписанного в окружность. Сформулируйте и докажите свойство вписанного четырехугольника. Сформулируйте признак вписанного четырехугольника.

15. Дайте определение четырехугольника, описанного около окружности. Сформулируйте и докажите свойство описанного четырехугольника. Сформулируйте признак описанного четырехугольника.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

298. Если в выпуклом четырехугольнике не все углы равны, то хотя бы один из них острый. Докажите.

299. Найдите углы параллелограмма, если один из них равен сумме двух других. Может ли такой параллелограмм быть ромбом; квадратом?

300. Диагональ квадрата $ABCD$ равна 7 см. Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно диагонали AC, пересекает прямые BC и CD в точках E и F. Найдите EF.

301. Найдите углы треугольника, если две его средние линии перпендикулярны и равны.

302. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон четырехугольника, точкой пересечения делятся пополам.

303. Основания прямоугольной трапеции равны 8 см и 12 см, а тупой угол трапеции в три раза больше острого. Найдите высоту трапеции.

304. Прямая, проходящая через вершину тупого угла трапеции, делит ее на ромб и равносторонний треугольник. Найдите среднюю линию трапеции, если ее периметр равен 60 см.

305. В треугольнике ABC высота BH делит сторону AC на отрезки $AH = 2$ см, $HC = 6$ см. Отрезок AM — медиана треугольника ABC, отрезок MD — высота треугольника AMC. Найдите отрезки AD и DC.

306. Дана трапеция, которая является вписанной в окружность и описанной около окружности. Найдите:

а) углы трапеции, если сумма трех из них равна 300°;

б) стороны трапеции, если ее периметр равен 16 см.

307. По рисунку 89 докажите:

а) свойство средней линии трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$;

б) если в четырехугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD, равен полусумме сторон AD и BC, то $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

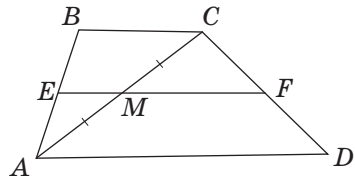


Рис. 89

308. Если диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, то ее высота равна полусумме оснований. Докажите.

Задачи повышенной сложности

309. Прямая проходит через вершину B параллелограмма $ABCD$. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния a и c соответственно. Найдите расстояние от точки D до данной прямой. Рассмотрите два случая.

310. Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что точка пересечения прямых BN и DM лежит на диагонали AC.

311. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противолежащим сторонам CD и BC соответственно. Докажите, что точка пересечения этих прямых принадлежит прямой AC.

312. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.

313. Через точку плоскости проведены три прямые так, что угол между любыми двумя из них равен $60°$. Докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из любой точки плоскости к этим прямым, являются вершинами равностороннего треугольника.

314. Отрезки AB и AC — отрезки касательных к окружности, проведенных из точки A. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

315. Найдите углы равнобедренной трапеции, в которой боковая сторона равна меньшему основанию, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

316. Даны остроугольный треугольник ABC и точка M такая, что $BM \perp AB$, $CM \perp AC$. Докажите, что точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

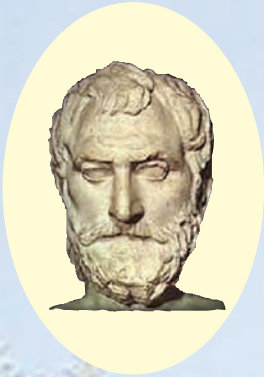
317. Если сумма углов при основании трапеции равна $90°$, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

а) Докажите данное утверждение.

б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Историческая справка

Бо́льшая часть теоретических положений, связанных с четырехугольником, была известна еще в Древней Греции. Например, параллелограмм упоминается в работах **Евклида** под названием «параллельно-линейная площадь». Основные свойства четырехугольников были установлены на практике и только со временем доказаны теоретически.



Фалес Милетский

Одним из творцов идеи геометрического доказательства по праву признан древнегреческий ученый **Фалес Милетский** (ок. 625–547 гг. до н. э.). Его считали первым среди прославленных «семи мудрецов» Эллады. Механик и астроном, философ и общественный деятель, Фалес значительно обогатил науку своего времени.

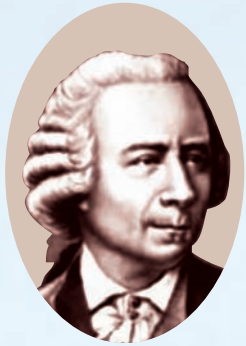
Именно он познакомил греков с достижениями египтян в геометрии и астрономии. По свидетельству историка Геродота, Фалес предсказал затмение Солнца, которое произошло 28 мая 585 г. до н. э. Он дал первые представления об электричестве и магнетизме. Достижения Фалеса в геометрии не ограничиваются теоремой, названной его именем. Считается, что Фалес открыл теорему о вертикальных углах, доказал равенство углов при основании равнобедренного треугольника, первым описал окружность около прямоугольного треугольника и обосновал, что угол, который опирается на полуокружность, прямой. Фалесу приписывают и доказательство второго признака равенства треугольников, на основании которого он создал дальномер для определения расстояния до кораблей на море.

В молодые годы Фалес побывал в Египте. Согласно легенде, он удивил египетских жрецов, измерив высоту пирамиды Хеопса с помощью подобия треугольников (о подобии треугольников – в следующей главе).

Изучая замечательные точки треугольника, нельзя не вспомнить имена еще нескольких ученых.

Теорему о пересечении высот треугольника доказал в XV в. немецкий математик **Региомонтан** (1436–1476) – в его честь эту теорему иногда называют задачей Региомонтана.

Выдающийся немецкий ученый **Леонард Эйлер** (1707–1783), который установил связь между замечательными точками треугольника, является уникальной исторической фигурой. Геометрия и механика, оптика и баллистика, астрономия и теория музыки, математическая физика и судостроение – вот далеко не полный перечень тех областей науки, которые он обогатил своими открытиями. Перу Эйлера принадлежит более 800 научных работ, причем, по статистическим подсчетам, он делал в среднем одно изобретение в неделю! Человек чрезвычайной широты интересов, Эйлер был академиком Берлинской, Петербургской и многих других академий наук, он существенным образом повлиял на развитие мировой науки. Недаром французский математик Пьер Лаплас, рассуждая об ученых своего поколения, утверждал, что Эйлер – «учитель всех нас».



Леонард Эйлер

М. В. Остроградский

Среди украинских математиков весомый вклад в исследование свойств четырехугольников внес **Михаил Васильевич Остроградский** (1801–1862). Этот выдающийся ученый, профессор Харьковского университета, получил мировое признание благодаря работам по математической физике, математическому анализу, аналитической механике. Талантливый педагог и методист, Остроградский создал «Учебник по элементарной геометрии», который, в частности, содержал ряд интересных и сложных задач на построение вписанных и описанных четырехугольников и вычисление их площадей.

ТЕМАТИКА СООБЩЕНИЙ И РЕФЕРАТОВ К ГЛАВЕ I

1. Дельтоид и его свойства.
2. Построение выпуклых четырехугольников.
3. Фалес Милетский и древнегреческая наука.
4. Леонард Эйлер — уникальная фигура мировой науки.
5. Геометрические места точек, связанные с окружностью.
6. Точки Эйлера. Окружность девяти точек. Теорема Фейербаха.
7. Дополнительные сведения о вписанных и описанных четырехугольниках. Теорема Симпсона.
8. Особые виды треугольников (ортоцентрический, педальный, разностный, треугольник Наполеона).

РЕКОМЕНДОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ

1. Никулин, А. В. Геометрия на плоскости (Планиметрия) : Учеб. пособие [Текст] / А. В. Никулин, А. Г. Кукуш, Ю. С. Татаренко; под ред. Ю. С. Татаренко. — Мн. : ООО «Попурри», 1996. — 592 с.
2. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
3. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 2 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
4. Бевз, В. Г. Геометрія чотирикутника [Текст] / В. Г. Бевз. — Х. : Вид. група «Основа», 2003. — 80 с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»).
5. Бевз, В. Г. Геометрія кіл [Текст] / В. Г. Бевз. — Х. : Вид. група «Основа», 2004. — 112 с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»).
6. Бевз, В. Г. Геометрія трикутника. 7—11 класи : Навч. посіб. — К. : Ґенеза, 2005. — 120 с.
7. Глейзер, Г. И. История математики в школе. VII—VIII классы: Пособие для учителей [Текст] / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982. — 240 с.
8. Кушнір, І. А. Повернення втраченої геометрії [Текст] / І. А. Кушнір. — К. : Факт, 2000. — 280 с. — (Серія «Математичні обрії України»).
9. Математична хрестоматія для 6—8 класів. Т. 1 [Текст]. — К. : Рад. шк., 1968. — 320 с.
10. Математична хрестоматія для старших класів. Геометрія. Т. 2 [Текст] / упоряд. Л. В. Кованцова. — К. : Рад. шк., 1969. — 383 с.
11. Интернет-библиотека МЦНМО. http : //ilib.mirror0.mccme.ru/

Глава II
ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора, а второе — деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота, а второе больше напоминает драгоценный камень.

Иоганн Кеплер,
немецкий астроном и математик

В этой главе вы начнете знакомиться с подобием фигур. Отношение подобия является одной из важнейших характеристик евклидовой геометрии. Проявления подобия часто встречаются и в повседневной жизни. Например, авиамодели самолетов подобны реальным машинам, а репродукции классических картин подобны оригиналам.

В основе теории подобия лежит обобщение теоремы Фалеса. Благодаря свойствам подобных треугольников устанавливаются важные геометрические соотношения. В частности, с помощью подобия будет доказана знаменитая теорема Пифагора. Правда, такое доказательство не является классическим, ведь во времена Пифагора некоторые геометрические факты, которые мы будем рассматривать, еще не были открыты. Но сегодня даже обычный школьник может овладеть знаниями, неизвестными великому Пифагору.

§ 10. Подобные треугольники

10.1. Обобщенная теорема Фалеса

Напомним некоторые понятия, связанные с делением и пропорциями, которые понадобятся нам для дальнейших рассуждений.

Отношением отрезков длиной a и b называется частное их длин, т. е. число $\frac{a}{b}$.

Иначе говоря, отношение $\frac{a}{b}$ показывает, сколько раз отрезок b и его части укладываются в отрезке a. Действительно, если отрезок b принять за единицу измерения, то данное отношение будет равняться длине отрезка a.

Отрезки длиной a и c **пропорциональны** отрезкам длиной b и d, если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Например, отрезки длиной 8 см и 12 см пропорциональны отрезкам длиной 10 см и 15 см, поскольку $\frac{8}{10}=\frac{12}{15}=0{,}8$.

Сформулируем обобщенную теорему Фалеса для неравных отрезков, которые отсекаются параллельными прямыми на сторонах угла.

Теорема (о пропорциональных отрезках)

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах этого угла пропорциональные отрезки: $\frac{AB}{BC}=\frac{AB_1}{B_1C_1}$, или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

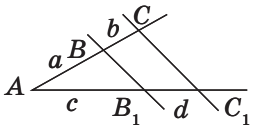


Рис. 90. Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки

Утверждение теоремы иллюстрирует рисунок 90. Приведем рассуждения, на которых основывается доказательство этой теоремы. Отношение $\frac{AB}{BC}$ показывает, сколько раз отрезок BC укладывается в отрезке AB, а отношение $\frac{AB_1}{B_1C_1}$ — сколько раз отрезок B_1C_1

укладывается в отрезке AB_1. Теорема Фалеса устанавливает соответствие между процессами измерения отрезков AB и AB_1. Действительно, прямые, параллельные BB_1, «переводят» равные отрезки на одной стороне угла в равные отрезки на другой его стороне: отрезок AB «переходит» в отрезок AB_1, десятая часть отрезка AB — в десятую часть отрезка AB_1 и т. д. Поэтому если отрезок BC укладывается в отрезке AB n раз, то отрезок B_1C_1 укладывается в отрезке AB_1 также n раз.

Полное доказательство этой теоремы представлено в Приложении 1.

Замечание. Поскольку $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$, т. е. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, и следствие данной теоремы можно записать в виде $\frac{AC}{AB}=\frac{AC_1}{AB_1}$. На такое равенство мы также будем ссылаться как на теорему о пропорциональных отрезках.

Задача

Даны отрезки a, b, c. Постройте отрезок $x=\frac{bc}{a}$.

Решение

Построим произвольный неразвернутый угол O и отложим на одной его стороне отрезки $OA=a$ и $AB=b$, а на другой стороне — отрезок $OC=c$ (рис. 91). Проведем прямую AC и прямую, которая параллельна AC, проходит через точку B и пересекает другую сторону угла в точке D. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}$, откуда $CD=\frac{AB\cdot OC}{OA}=\frac{b\cdot c}{a}$. Следовательно, отрезок CD — искомый.

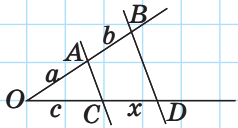
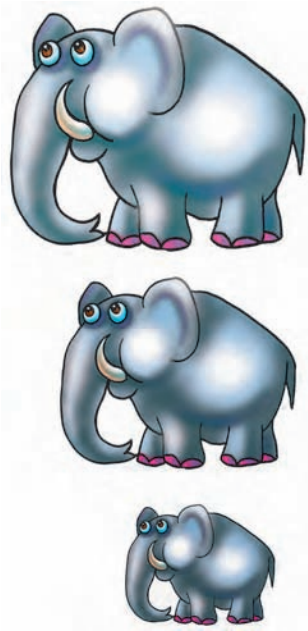


Рис. 91

Заметим, что в задаче величина x является четвертым членом пропорции $a:b=c:x$. Поэтому построенный отрезок называют ***четвертым пропорциональным отрезком***.



10.2. Определение подобных треугольников

Равные фигуры представляются в нашем воображении как фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры. Но в повседневной жизни часто встречаются вещи, у которых одинаковая форма, но разные размеры: например, чайное блюдце и тарелка, одинаковые модели обуви разных размеров и т. п. В геометрии фигуры одинаковой формы принято называть подобными. Например, подобными друг другу являются любые два квадрата, любые две окружности. Введем для начала понятие о подобных треугольниках.

Определение

Два треугольника называются **подобными**, если углы одного из них соответственно равны углам другого и соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны.

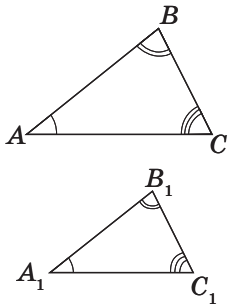


Рис. 92. Подобные треугольники

На рисунке 92 изображены подобные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Подобие этих треугольников кратко обозначают так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. В этой записи, как и в записи равенства треугольников, названия треугольников будем записывать так, чтобы вершины равных углов указывались в порядке соответствия. Это означает:

если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, **то** $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = k$.

Число k, равное отношению соответствующих сторон подобных треугольников, называют ***коэффициентом подобия***.

Очевидно, что два равных треугольника являются подобными с коэффициентом подобия 1.

Опорная задача

Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия. Докажите.

Решение

Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия k. Это означает, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, т.е. $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $AC = kA_1C_1$. Имеем:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kP_{A_1B_1C_1}}{P_{A_1B_1C_1}} = k.$$

Отметим также, что ***отношение соответствующих линейных элементов (медиан, биссектрис, высот и т.п.) подобных треугольников равно коэффициенту подобия***. Докажите это самостоятельно.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

318. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle KMN$. Назовите соответственно равные углы этих треугольников.

319. Треугольник ABC и треугольник с вершинами D, E, F подобны, причем $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FD} = \frac{AC}{ED}$. Закончите запись $\triangle ABC \sim \triangle \ldots$.

320. Являются ли равными любые два подобных треугольника? Подобны ли любые два равных треугольника? Назовите соответствующий коэффициент подобия.

321. Могут ли быть подобными прямоугольный и тупоугольный треугольники?

322. Два треугольника подобны с коэффициентом 0,25. Во сколько раз стороны одного треугольника больше соответствующих сторон другого?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

323. Начертите треугольник ABC. Отметьте на стороне AB точку D так, чтобы $AD:DB=2:1$. Проведите через точку D прямую, параллельную стороне AC, и обозначьте точку E — точку пересечения этой прямой со стороной BC. Измерьте отрезок BE и вычислите длину отрезка EC по теореме о пропорциональных отрезках. Проверьте полученный результат измерением.

324. Начертите треугольник ABC и проведите в нем среднюю линию DE, параллельную AC. Назовите подобные треугольники, которые образовались на рисунке.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

325. Определите, являются ли отрезки длиной a и b пропорциональными отрезкам c и d, если:

а) $a=8$ см, $b=24$ см, $c=4$ см, $d=12$ см;

б) $a=9$ см, $b=14$ см, $c=7$ см, $d=18$ см.

326. На рисунке 93 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. По данным рисунка найдите x и y.

327. На рисунке 94 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. По данным рисунка найдите x и y.

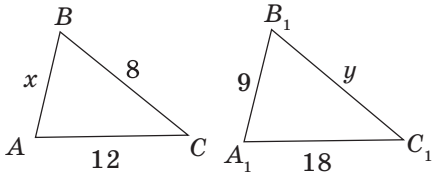


Рис. 93

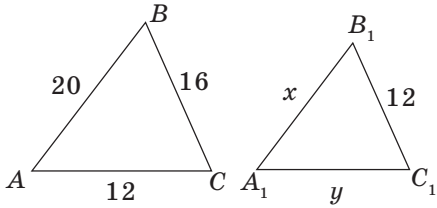


Рис. 94

328. Прямая KM параллельна стороне AC треугольника ABC (рис. 95). Найдите отрезок MC, если:

а) $AK=2$ см, $KB=6$ см, $BM=9$ см;

б) $AK:KB=2:3$, $BC=10$ см.

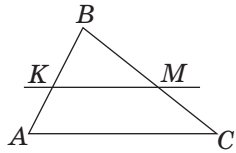


Рис. 95

329. Прямая KM параллельна стороне AC треугольника ABC (рис. 95). Найдите отрезок AB, если $AK = 6$ см, $BM : MC = 4 : 3$.

330. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. Найдите:

а) угол C, если $\angle A = 45°$, $\angle E = 110°$;

б) угол F, если $\angle B = 80°$, $\angle A = \angle C$.

331. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если в подобном ему треугольнике разность наибольшего и наименьшего углов равна 70°.

332. Стороны треугольника равны 2,5 см, 4 см и 5 см. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если:

а) его периметр равен 46 см;

б) его наименьшая сторона равна наибольшей стороне данного треугольника.

333. Стороны треугольника равны 16 см, 12 см и 10 см. Найдите периметр треугольника, подобного данному, если его наибольшая сторона равна 8 см.

334. Докажите по определению, что любые два равносторонних треугольника подобны.

335. Докажите от противного, что тупоугольный и равносторонний треугольники не могут быть подобными.

Уровень Б

336. Прямая MN параллельна основаниям трапеции $ABCD$ (рис. 96). Найдите:

а) сторону CD, если $AM : AB = 4 : 5$, $CN = 3$ см;

б) сторону AB, если $AM : ND = 3 : 2$, $CN = 2$ см, $AM = 9$ см.

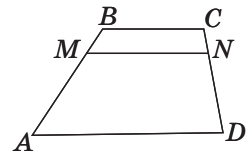


Рис. 96

337. Прямая MN параллельна основаниям трапеции $ABCD$ (рис. 96). Найдите сторону AB, если $AM - MB = 1$ см, $CN : CD = 3 : 7$.

338. По данным рисунка 97 найдите x, если $a \parallel b$.

а б

Рис. 97

339. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, причем $\angle D = 70°$, $\angle B = 55°$. Докажите, что $AB = AC$.

340. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle KMN$, причем $\angle A + \angle M = 90°$. Докажите, что AB — наибольшая сторона треугольника ABC.

341. Докажите, что треугольник с вершинами в серединах сторон данного треугольника подобен данному. Чему равен коэффициент подобия?

342. В треугольнике ABC точки D и E — середины сторон AB и BC соответственно. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle DBE$, и найдите коэффициент подобия.

Уровень В

343. Каждый из двух неравных, но подобных треугольников имеет стороны длиной 12 см и 18 см. Найдите неизвестные стороны этих треугольников.

344. Треугольники со сторонами a, b, c и b, c, d подобны. Докажите, что коэффициент подобия не может быть равным 2.

345. Найдите ошибку в «доказательстве» геометрического софизма: *отрезки параллельных прямых, заключенные между сторонами угла, равны.*

«Доказательство»

Пусть AB и CD — отрезки параллельных прямых, которые пересекают стороны угла O (рис. 98). По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$ или $AO \cdot DO = BO \cdot CO$. Умножим обе части этого равенства на отличную от нуля разность $AB - CD$:

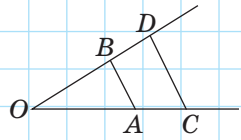


Рис. 98

$AO \cdot DO \cdot (AB - CD) = BO \cdot CO \cdot (AB - CD)$,

$AO \cdot DO \cdot AB - AO \cdot DO \cdot CD = BO \cdot CO \cdot AB - BO \cdot CO \cdot CD$.

Перенесем первый член правой части равенства в левую часть равенства, а второй член левой части — в правую часть:

$AO \cdot DO \cdot AB - BO \cdot CO \cdot AB = AO \cdot DO \cdot CD - BO \cdot CO \cdot CD$, или

$(AO \cdot DO - BO \cdot CO) \cdot AB = (AO \cdot DO - BO \cdot CO) \cdot CD$.

Разделив обе части последнего равенства на выражение в скобках, получим $AB = CD$, т.е. отрезки параллельных прямых, заключенные между сторонами угла, равны.

346. Диагональ AC делит трапецию $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ на два подобных треугольника ABC и ACD. Найдите AC, если $BC = 4$ см, $AD = 9$ см.

347. Диагональ AC трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ равна стороне CD и делит трапецию на два подобных треугольника ABC и ACD. Найдите периметр трапеции, если $AB = 9$ см, $CD = 12$ см.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 11

Теоретический материал

- признаки равенства треугольников;
- трапеция.

7 класс, § 8, 10, 13

8 класс, § 5

Задачи

348. Через вершину треугольника проведена прямая, которая делит данный треугольник на два равных треугольника. Определите вид данного треугольника. Может ли такая прямая разделить треугольник на два неравных, но подобных треугольника? Выскажите предположение.

349. Диаметр AC пересекает хорду BD в точке K, делящей хорду пополам. Докажите равенство треугольников ABC и ADC. Могут ли хорды AB и CD быть параллельными, если точка K не является центром окружности?

§ 11. Признаки подобия треугольников

11.1. Подобие треугольников по двум углам

Для доказательства подобия двух треугольников, как и для доказательства их равенства, не обязательно проверять все соотношения сторон и углов согласно определению — достаточно проверить лишь некоторые из них. Какие именно? Ответ на этот вопрос дают три признака подобия треугольников.

Теорема (признак подобия треугольников по двум углам)

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство

□ Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 99). Докажем подобие этих треугольников. Из теоремы о сумме углов треугольника очевидно следует, что $\angle C = \angle C_1$. Отложим на луче AB отрезок AB_2, равный A_1B_1, и проведем прямую B_2C_2, параллельную BC. Тогда $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ как соответственные углы при параллельных прямых, поэтому $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ по второму признаку, откуда $AC_2 = A_1C_1$. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, следовательно, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Аналогично доказываем, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Таким образом, по определению подобных треугольников $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Теорема доказана. ■

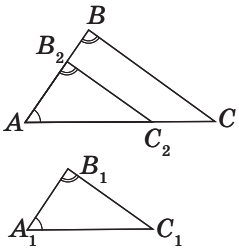


Рис. 99. К доказательству подобия треугольников по двум углам

Задача

Точка пересечения диагоналей трапеции делит одну из них на отрезки длиной 4 см и 7 см. Меньшее основание трапеции равно 8 см. Найдите среднюю линию трапеции.

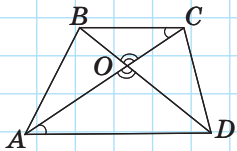


Рис. 100

Решение

Пусть в трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ диагонали пересекаются в точке O, $BC = 8$ см (рис. 100). Рассмотрим треугольники AOD и COB. В них углы при вершине O равны как вертикальные, $\angle CAD = \angle BCA$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC. Тогда $\triangle AOD \sim \triangle COB$ по двум углам.

Отсюда следует, что $\frac{BC}{AD} = \frac{BO}{DO}$. Поскольку по условию $BC < AD$, то $BO < OD$, значит, $BO = 4$ см, $OD = 7$ см. Тогда $AD = \frac{BC \cdot DO}{BO} = \frac{8 \cdot 7}{4} = 14$ (см).

Средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований, т.е. $\frac{8+14}{2} = 11$ (см).

Ответ: 11 см.

11.2. Подобие треугольников по двум сторонам и углу между ними

Теорема (признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними)

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

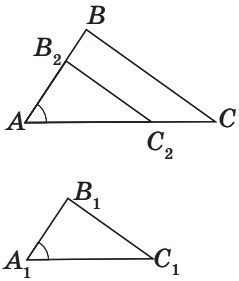
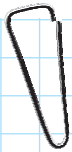


Рис. 101. К доказательству подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними

Доказательство

□ Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (рис. 101). Докажем подобие этих треугольников. Отложим на луче AB отрезок AB_2, равный A_1B_1, и проведем прямую B_2C_2, параллельную BC. Тогда $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ как соответственные углы при параллельных прямых, поэтому $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$ по двум углам. Отсюда $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, а поскольку $AB_2 = A_1B_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $A_1C_1 = AC_2$. Тогда $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников, следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = \angle AB_2C_2$. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум углам. Теорема доказана. ■



Задача

Прямая, пересекающая стороны BA и BC треугольника ABC, делит каждую из них в отношении $m:n$, начиная от вершины B. Докажите, что эта прямая параллельна AC.

Решение

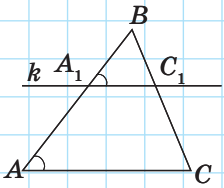


Рис. 102

Пусть прямая k пересекает стороны BA и BC треугольника ABC в точках A_1 и C_1 соответственно (рис. 102). Поскольку по условию задачи $\frac{BA_1}{A_1A} = \frac{BC_1}{C_1C} = \frac{m}{n}$, то $\frac{BA_1}{BA} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{m}{m+n}$. Тогда треугольники ABC и A_1BC_1 подобны по двум сторонам и углу между ними. Из подобия треугольников следует, что $\angle BA_1C_1 = \angle BAC$. Но эти углы являются соответственными при прямых k и AC и секущей AB. Следовательно, $k \parallel AC$ по признаку параллельности прямых.

11.3. Подобие треугольников по трем сторонам

Теорема (признак подобия треугольников по трем сторонам)

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство

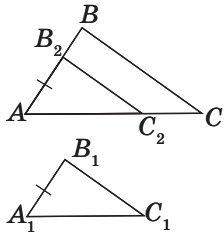


Рис. 103. К доказательству подобия треугольников по трем сторонам

□ Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ (рис. 103). Докажем подобие этих треугольников. Как и в предыдущих теоремах, отложим на луче AB отрезок AB_2, равный отрезку A_1B_1, и проведем прямую B_2C_2, параллельную BC. Тогда $\angle ABC=\angle AB_2C_2$ как соответственные углы при параллельных прямых, поэтому $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$ по двум углам. Отсюда $\frac{AB}{AB_2}=\frac{BC}{B_2C_2}=\frac{AC}{AC_2}$, а поскольку $AB_2=A_1B_1$, то $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_2C_2}$. Учитывая, что $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$, имеем $B_2C_2=B_1C_1$. Аналогично доказываем, что $AC_2=$ $=A_1C_1$. Тогда $\triangle AB_2C_2=\triangle A_1B_1C_1$ по третьему признаку равенства треугольников, следовательно, $\angle A=\angle A_1$, $\angle A_1B_1C_1=\angle ABC=\angle AB_2C_2$, $\triangle ABC \sim$ $\sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум углам. Теорема доказана. ■

Таким образом, для доказательства всех трех признаков подобия треугольников использован один и тот же подход, а доказательство каждого из признаков подобия основывается на соответствующем признаке равенства треугольников.

В ходе доказательства признаков подобия треугольников мы показали также, что ***прямая, которая параллельна стороне треугольника и пересекает две другие стороны, отсекает от данного треугольника подобный.***

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

350. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=k$. Какое равенство необходимо добавить к условию, чтобы можно было доказать подобие этих треугольников? Назовите все возможные варианты ответа.

351. Даны треугольники ABC и KMN, в которых $\frac{AB}{KN}=\frac{BC}{MN}=\frac{AC}{MK}$. Назовите угол треугольника KMN, равный углу C. Почему эти углы равны?

352. Даны треугольники ABC и KMN, в которых $\frac{AB}{BC}=\frac{MN}{NK}$ и $\angle B=\angle N$. Назовите угол треугольника ABC, равный углу M. Почему эти углы равны?

353. Могут ли быть подобными:

а) прямоугольный и равнобедренный треугольники;
б) прямоугольный и равносторонний треугольники;
в) треугольник с углом $50°$ и треугольник с углом $100°$;
г) треугольник с углом $60°$ и треугольник с углом $120°$?

354. Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют:

а) по равному острому углу;
б) по равному тупому углу?

355. Два подобных треугольника имеют общий угол. Обязательно ли их стороны, противолежащие этому углу, параллельны? Приведите контрпример.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

356. Начертите трапецию и проведите ее диагонали.

а) Выделите цветом подобные треугольники, которые образовались на рисунке. По какому признаку можно доказать их подобие?
б) Измерьте длины отрезков одной диагонали, на которые она делится точкой пересечения диагоналей. Измерьте длину одного из оснований трапеции и вычислите длину второго основания, используя подобие треугольников. Проверьте полученный результат измерением.

357. Начертите треугольник и проведите прямую, которая параллельна одной из его сторон и пересекает две другие стороны.

а) Выделите цветом подобные треугольники, образовавшиеся на рисунке. По какому признаку можно доказать их подобие?

б) Измерьте углы, под которыми данная прямая пересекает стороны треугольника, и найдите все углы данного треугольника.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

358. На рисунке 104 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

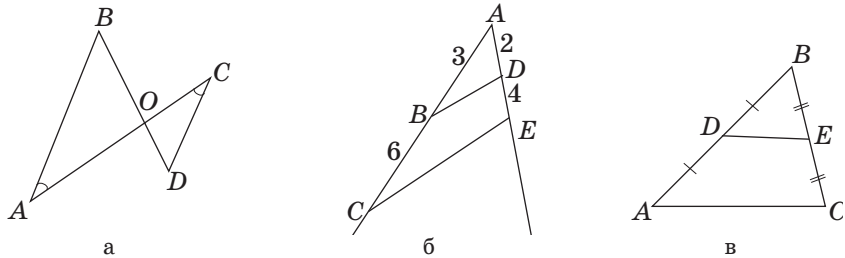


Рис. 104

359. По данным рисунка 105 докажите подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

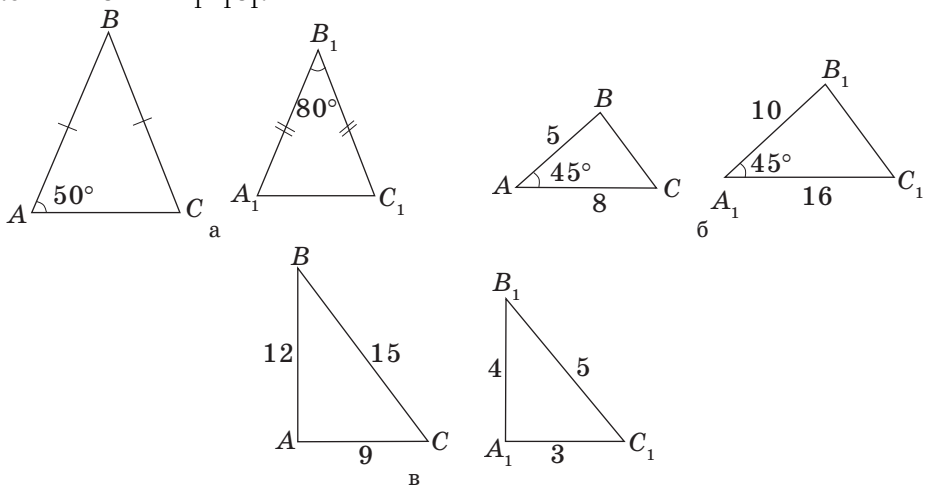


Рис. 105

360. Определите расстояние на местности от точки A до недоступной точки B (рис. 106), если $CA = 60$ м, $CB = 90$ м, $CD = 20$ м, $CE = 30$ м, $DE = 40$ м. Проведите необходимые доказательства.

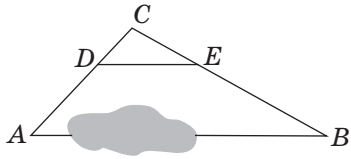


Рис. 106

361. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O.

а) Докажите, что $\triangle AOD \sim \triangle BOC$.

б) Найдите AD, если $BC = 4$ см, $OB = 6$ см, $OA = 9$ см.

362. Диагонали трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ пересекаются в точке O.

а) Докажите, что $\triangle AOD \sim \triangle COB$.

б) Найдите BC, если $AD = 16$ см, $AO : OC = 4 : 3$.

363. Определите, подобны ли треугольники со сторонами:

а) 3, 4, 6 и 9, 15, 18; б) 2, 3, 3 и 8, 12, 12.

364. Два равнобедренных треугольника имеют равные углы при основаниях. Основание одного треугольника равно 8 см, а боковая сторона — 6 см. Найдите периметр другого треугольника, если его основание равно 4 см.

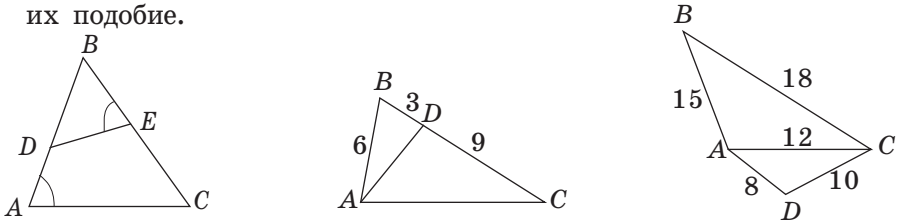
365. Два равнобедренных треугольника имеют равные углы, противолежащие основаниям. Периметры этих треугольников равны соответственно 15 см и 10 см. Найдите стороны второго треугольника, если боковая сторона первого треугольника равна 6 см.

366. Докажите, что любые два равнобедренных прямоугольных треугольника подобны.

367. Докажите, что отношение соответствующих средних линий подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Уровень Б

368. На рисунке 107 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.



а б в

Рис. 107

369. На рисунке 108 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

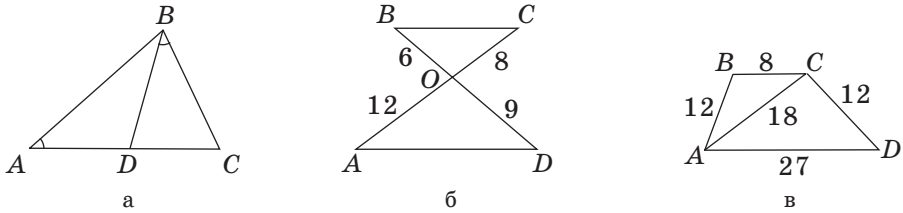


Рис. 108

370. В треугольник ABC вписан ромб $AKLM$ (рис. 109). Найдите периметр ромба, если $BK = 4$ см, $MC = 9$ см.

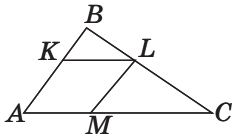


Рис. 109

371. Диагонали трапеции точкой пересечения делятся в отношении 3 : 7. Найдите основания трапеции, если ее средняя линия равна 10 см.

372. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол B равен 36°, AD — биссектриса треугольника. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle CAD$.

373. На одной стороне неразвернутого угла O отложены отрезки $OA = 9$ см и $OB = 12$ см, а на другой стороне — отрезки $OC = 6$ см и $OD = 18$ см. Подобны ли треугольники OAC и OBD? Подобны ли треугольники OBC и ODA?

374. Докажите, что отношение соответствующих медиан подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

375. Докажите, что отношение соответствующих биссектрис подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

376. Через вершину наибольшего угла разностороннего треугольника необходимо провести прямую, которая отсекает от данного треугольника подобный треугольник. Сколькими способами это можно сделать? Как изменится ответ, если в условии задачи рассмотреть другую вершину треугольника? Проведите исследование.

377. Через точку на стороне произвольного треугольника необходимо провести прямую, которая отсекает от данного треугольника подобный треугольник. Сколькими способами это можно сделать? Как изменится ответ, если в условии задачи вместо произвольного треугольника рассмотреть прямоугольный? Проведите исследование.

Уровень В

378. Отрезок, концы которого лежат на боковых сторонах трапеции, параллелен ее основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b.

379. В трапеции через точку, которая делит боковую сторону в отношении $m:n$, начиная от меньшего основания, проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции, если ее основания равны a и b $(a<b)$.

380 (опорная). ***Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам.*** Докажите.

381. Отрезок MN, концы которого лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC, параллелен стороне BC. Докажите, что медиана треугольника, проведенная из вершины A, делит этот отрезок пополам.

382. Через некоторую вершину равнобедренного треугольника проведена прямая, делящая данный треугольник на два неравных равнобедренных треугольника, один из которых подобен данному. Найдите углы треугольника. Сколько решений имеет задача?

383. Через точку внутри произвольного треугольника необходимо провести прямую, которая отсекает от данного треугольника подобный треугольник. Сколькими способами это можно сделать? Проведите исследование. Обобщите в виде исследования результаты решения задач № 376, 377, 382 и 383.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 12

Теоретический материал

- перпендикуляр к прямой;
- прямоугольный треугольник.

7 класс, § 9, 17

Задачи

384. В прямоугольном треугольнике угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе, равен 20°. Найдите острые углы треугольника.

385. Постройте прямоугольный треугольник по катету и радиусу описанной окружности.

§ 12. Подобие прямоугольных треугольников

12.1. Признаки подобия прямоугольных треугольников

Признаки подобия прямоугольных треугольников являются следствиями соответствующих признаков подобия произвольных треугольников. Наиболее важным признаком подобия прямоугольных треугольников является следующий.

Если два прямоугольных треугольника имеют по равному острому углу, то такие треугольники подобны.

Действительно, поскольку в прямоугольном треугольнике один угол прямой, этот признак следует из признака подобия треугольников по двум углам.

Другие признаки подобия прямоугольных треугольников сформулируйте и докажите самостоятельно (задачи № 395, 413).

Задача

В треугольнике ABC с острым углом B проведены высоты AA_1 и CC_1 (рис. 110). Докажите, что $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$.

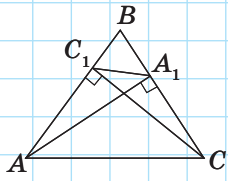


Рис. 110

Решение

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABA_1 и CBC_1. Поскольку они имеют общий острый угол B, они подобны. Из этого следует, что соответствующие катеты и гипотенузы этих треугольников пропорциональны, т.е. $\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA}{BC}$.

Рассмотрим теперь треугольники A_1BC_1 и ABC. У них также общий угол B, а по только что доказанному стороны, прилегающие к этому углу, пропорциональны. Следовательно, $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

12.2. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Подобие треугольников позволяет установить ряд соотношений между длинами некоторых отрезков в треугольнике и окружности (такие соотношения называют ***метрическими***). Сначала введем несколько вспомогательных понятий.

Отрезок x называется **средним пропорциональным** между отрезками a и b, если $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, т.е. $x^2 = ab$.

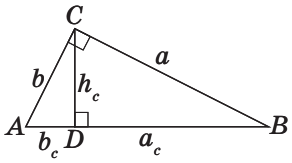


Рис. 111. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $BC = a$ и $AC = b$ и гипотенузой $AB = c$ проведем высоту CD и обозначим ее h_c (рис. 111). Отрезки AD и DB, на которые эта высота делит гипотенузу, называют **проекциями катетов на гипотенузу.** Проекции катетов a и b на гипотенузу c обозначают a_c и b_c соответственно.

Теорема (метрические соотношения в прямоугольном треугольнике)

В прямоугольном треугольнике:

1) высота, проведенная к гипотенузе, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу:

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c;$$

2) катет является средним пропорциональным между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу:

$$a^2 = c \cdot a_c \text{ и } b^2 = c \cdot b_c;$$

3) высота, проведенная к гипотенузе, равна произведению катетов, деленному на гипотенузу:

$$h_c = \frac{ab}{c}.$$

Доказательство

□ По признаку подобия прямоугольных треугольников $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ (у этих треугольников общий острый угол A), $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ (у этих треугольников общий острый угол C) и $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ (острые углы этих треугольников равны острым углам треугольника ABC).

Из подобия треугольников CBD и ACD имеем: $\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD}$, или $\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}$, откуда $h_c^2 = a_c \cdot b_c$.

Из подобия треугольников CBD и ABC имеем: $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$, или $\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}$, откуда $a^2 = c \cdot a_c$.

Аналогично из подобия треугольников ACD и ABC получаем $b^2 = c \cdot b_c$.

И наконец, из подобия треугольников ACD и ABC имеем: $\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB}$, или $\frac{h_c}{b} = \frac{a}{c}$, откуда $h_c = \frac{ab}{c}$.

Теорема доказана. ■

В ходе доказательства теоремы мы установили интересный факт: ***высота прямоугольного треугольника делит его на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.*** Среди всех видов треугольников такое свойство имеет лишь прямоугольный.

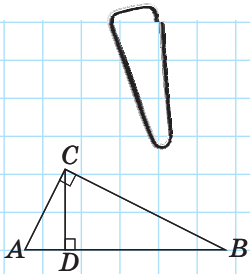


Рис. 112

Задача

Найдите периметр прямоугольного треугольника, в котором катет равен 15 см, а его проекция на гипотенузу равна 9 см.

Решение

Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $CD \perp AB$, $AC = 15$ см, $AD = 9$ см (рис. 112). Из метрического соотношения в треугольнике ABC

получаем: $AC^2 = AB \cdot AD$, т.е. $15^2 = 9AB$, откуда $AB = 25$ см, тогда $DB = AB - AD = 16$ см. Из соотношения $BC^2 = AB \cdot BD$ имеем: $BC^2 = 25 \cdot 16 = 400$, откуда $BC = 20$ (см). Следовательно, $P_{ABC} = 15 + 20 + 25 = 60$ (см).

Ответ: 60 см.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

386. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если:

а) они имеют общий угол;

б) они имеют общий острый угол;

в) один из них имеет угол 20°, а другой — угол 70°;

г) один из них имеет угол 50°, а катет другого вдвое меньше гипотенузы?

387. Может ли высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, быть меньше каждой из проекций катетов на гипотенузу; быть равной проекции катета на гипотенузу?

388. Отрезки a_c и b_c — проекции катетов a и b прямоугольного треугольника на гипотенузу. Сравните:

а) a и b, если $a_c < b_c$;

б) a_c и b_c, если $a > b$.

389. Могут ли быть подобными неравные прямоугольные треугольники с общей гипотенузой; с общим катетом?

390. Для построения четвертого пропорционального отрезка $x = \frac{ab}{c}$ ученик предложил построить прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c и провести в нем высоту h_c, равную x. Другой ученик утверждает, что этот способ ошибочный. Кто из учеников прав?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

391. Начертите прямоугольный треугольник и проведите его высоту из вершины прямого угла. Выделите цветом проекции катетов на гипотенузу и измерьте их длины. Используя метрические соотношения, вычислите приближенно:

а) длину проведенной высоты;

б) длины катетов.

Проверьте полученные результаты измерением.

392. Начертите прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Обозначьте на катете AC точку M и проведите к гипотенузе перпендикуляр MN. Из точки N проведите к катету AC перпендикуляр NK. Назовите три треугольника, подобные треугольнику ABC, и запишите их подобие.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ[1]

Уровень А

393. На рисунке 113 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.

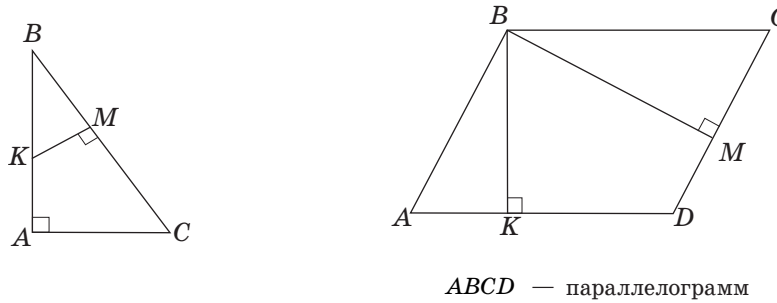
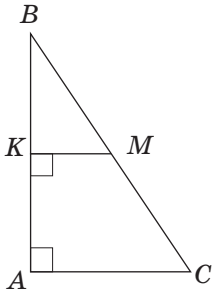


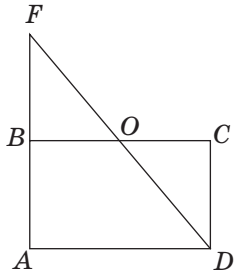
Рис. 113

[1] Все задачи параграфов 12—14 могут быть решены без использования формулы корней квадратного уравнения. Соответствующие задачи, которые решаются с помощью квадратных уравнений, представлены в конце главы, в рубрике «Дополнительные задачи».

394. На рисунке 114 найдите подобные треугольники и докажите их подобие.



а



$ABCD$ — прямоугольник

б

Рис. 114

395. Сформулируйте и докажите признак подобия прямоугольных треугольников по двум катетам.

396. Наблюдатель, который находится в точке A, видит конец жерди B и верхнюю точку башни D, причем точки A, B и D расположены на одной прямой (рис. 115). Определите высоту башни, если $BC = 4$ м, $AC = 6$ м, $AE = 90$ м.

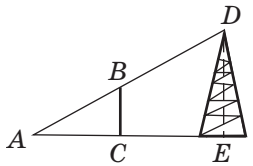


Рис. 115

397. Высота дерева равна 9,2 м, а длина тени человека, рост которого 1,8 м, равна 2,7 м. Найдите длину тени дерева.

398. В прямоугольном треугольнике ABC $(\angle C = 90°)$ проведена высота CD (см. рис. 111). Найдите:

а) CD, если $AD = 4$ см, $DB = 25$ см;

б) AC и BC, если $AB = 50$ см, $AD = 18$ см.

399. Найдите периметр прямоугольного треугольника, высота которого делит гипотенузу на отрезки длиной 4,5 см и 8 см.

400. Докажите, что отношение соответствующих высот подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Уровень Б

401. В прямоугольный треугольник вписан квадрат (рис. 116).

а) Найдите на рисунке 116 подобные треугольники и докажите их подобие.

б) Найдите сторону квадрата, если $BK = 9$ см, $MC = 4$ см.

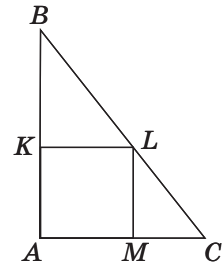


Рис. 116

402. Две окружности с радиусами 4 см и 6 см касаются внешним образом. Их общая касательная, которая не проходит через точку касания окружностей, пересекает линию центров в точке A. Найдите расстояния от точки A до центров окружностей.

403. Отрезки BK и BM — высоты параллелограмма $ABCD$, проведенные из вершины угла B к сторонам AD и CD соответственно. Найдите BK, если $BM = 4$ см, $AD : CD = 2 : 3$.

404. Докажите, что проекции катетов на гипотенузу прямоугольного треугольника относятся как квадраты катетов: $\frac{a_c}{b_c} = \frac{a^2}{b^2}$.

405. По данным рисунка 111 выразите a_c и b_c через a, b и c.

406. Высота прямоугольного треугольника равна 24 см и делит гипотенузу в отношении 9 : 16. Найдите катеты треугольника.

407. Точка C делит диаметр окружности AB на отрезки $AC = 10$ см и $CB = 8$ см. Отрезок CD — перпендикуляр к AB. Определите расположение точки D относительно данной окружности, если $CD = 9$ см.

408. Перпендикуляр, проведенный из середины основания равнобедренного треугольника к боковой стороне, делит ее на отрезки длиной 2,25 см и 4 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к боковой стороне.

409. Точка касания окружности, вписанной в ромб, делит сторону ромба на отрезки длиной 20 см и 5 см. Найдите высоту ромба.

Уровень В

410. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону в отношении $1:7$. В каком отношении эта высота делит диагональ параллелограмма?

411. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляр AK, проведенный к диагонали BD, пересекает сторону BC в точке M. Найдите $BM:MC$, если $BK:KD=3:7$. Изменится ли ответ, если K — произвольная точка отрезка BD?

412. Отрезки AM и AN — высоты параллелограмма $ABCD$, проведенные к сторонам BC и CD соответственно. Докажите, что $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.

413. Сформулируйте и докажите признак подобия прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 13

Теоретический материал

- прямоугольный треугольник;
- соотношения между сторонами треугольника.

7 класс, § 17, 18

Задачи

414. Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу в отношении $1:4$. Во сколько раз эта высота меньше гипотенузы?

415. Острый угол прямоугольного треугольника равен $36°$. Найдите углы, под которыми катеты видны из центра описанной окружности.

§ 13. Теорема Пифагора и ее следствия

13.1. Теорема Пифагора

Сформулируем и докажем одну из важнейших теорем геометрии — теорему Пифагора.

Теорема (Пифагора)

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Доказательство

□ Согласно доказанным метрическим соотношениям в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c (рис. 117) $a^2 = c \cdot a_c$, $b^2 = c \cdot b_c$.

Складывая эти равенства почленно, имеем: $a^2 + b^2 = c \cdot a_c + c \cdot b_c = c \cdot (a_c + b_c) = c^2$.

Теорема доказана. ■

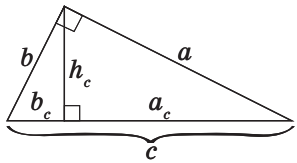


Рис. 117. К доказательству теоремы Пифагора

Соотношение между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника было известно задолго до Пифагора. Но именно Пифагору удалось доказать его, опираясь на понятие площади (к этому доказательству мы вернемся в следующей главе). Всего же на сегодня известно более 150 способов доказательства теоремы Пифагора. С некоторыми из них вы сможете познакомиться в п. 18.3.

Доказательство, которое мы рассмотрели, является по сути алгебраическим. Собственно, важность теоремы Пифагора заключается, в частности, в том, что она значительно расширяет возможности применения алгебры в геометрии.

С ее помощью можно найти любую сторону прямоугольного треугольника, зная две другие стороны. Например, если $a=5$, $b=12$, то $c=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$. Если $c=17$, $b=15$, то $a=\sqrt{17^2-15^2}=\sqrt{(17+15)(17-15)}=$ $=\sqrt{32\cdot 2}=\sqrt{64}=8$.

Теорема Пифагора позволяет использовать для решения геометрических задач и другие алгебраические приемы, например составление уравнений.

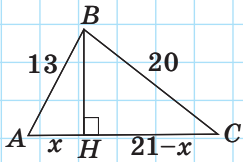


Рис. 118

Задача

Стороны треугольника равны 13 см, 20 см и 21 см. Найдите высоту треугольника, проведенную к наибольшей стороне.

Решение

Пусть BH — высота треугольника ABC, в котором $AB=13$ см, $BC=20$ см, $AC=21$ см (рис. 118). Поскольку AC — наибольшая сторона треугольника, то точка H лежит на этой стороне (докажите это самостоятельно). Примем длину отрезка AH равной x см, тогда $HC=(21-x)$ см. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABH имеем: $BH^2=AB^2-AH^2$, т.е. $BH^2=13^2-x^2$, а из прямоугольного треугольника BCH имеем: $BH^2=BC^2-CH^2$, т.е. $BH^2=20^2-(21-x)^2$. Приравнивая два выражения для BH^2, получаем:

$$169-x^2=400-(21-x)^2;$$
$$169-x^2=400-441+42x-x^2;$$
$$42x=210;$$
$$x=5.$$

Таким образом, $AH=5$ см.

Тогда из треугольника ABH по теореме Пифагора имеем: $BH=\sqrt{13^2-5^2}=12$ (см).

Ответ: 12 см.

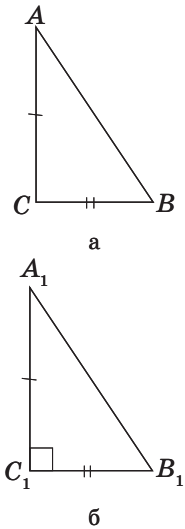


Рис. 119. К доказательству теоремы, обратной теореме Пифагора

Рис. 120. Египетский треугольник

13.2. Теорема, обратная теореме Пифагора

Наряду с теоремой Пифагора не менее важной является обратная теорема. Эту теорему можно рассматривать как признак прямоугольного треугольника.

Теорема (обратная теореме Пифагора)

Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник прямоугольный: если $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle C = 90°$.

Доказательство

□ Пусть в треугольнике ABC (рис. 119, *а*) $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Докажем, что угол C прямой. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1, в котором $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$ (рис. 119, *б*). По теореме Пифагора $A_1B_1{}^2 = A_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2$, а с учетом равенства двух сторон рассматриваемых треугольников $A_1B_1{}^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$, т. е. $A_1B_1 = AB$. Тогда $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ по трем сторонам, откуда $\angle C = \angle C_1 = 90°$. ■

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 — прямоугольный: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Об этом знали еще древние египтяне: для построения прямых углов на местности они делили бечевку на 12 равных частей, связывали ее концы, а потом с помощью кольев натягивали ее так, чтобы получился прямоугольный треугольник (рис. 120). Именно поэтому прямоугольные треугольники со сторонами, пропорциональными числам 3, 4 и 5, называют ***египетскими треугольниками***. Вообще, тройки чисел a, b, c, для которых выполняется равенство $a^2 + b^2 = c^2$, принято называть ***пифагоровыми тройками***, а треугольники, длины сторон которых являются пифагоровыми тройками,— ***пифагоровыми треугольниками***. Попробуйте самостоятельно составить несколько пифагоровых троек чисел (поможет в этом решение задачи № 443).

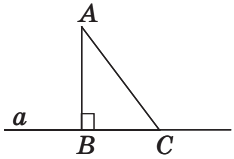


Рис. 121. Перпендикуляр и наклонная

Проекция — от латинского «проектио» — бросок вперед

13.3. Перпендикуляр и наклонная

Пусть точка A не лежит на прямой a, AB — перпендикуляр к этой прямой (рис. 121). Любой отрезок, соединяющий точку A с точкой прямой a и не совпадающий с перпендикуляром, называют **наклонной** к прямой a. На рисунке 121 отрезок AC — наклонная к прямой a, точка C — основание наклонной. При этом отрезок BC прямой a, ограниченный основаниями перпендикуляра и наклонной, называют **проекцией наклонной** AC на данную прямую.

Понятия наклонной и ее проекции взаимосвязаны с понятием перпендикуляра к прямой: невозможно указать проекцию данной наклонной, не построив перпендикуляр. Очевидно, что перпендикуляр и наклонная, проведенные из одной точки, вместе с проекцией наклонной образуют прямоугольный треугольник, в котором наклонная является гипотенузой.

Сформулируем свойства перпендикуляра, наклонных и проекций.

Пусть из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонные. Тогда:

1) любая наклонная больше перпендикуляра и больше своей проекции на данную прямую (рис. 122, *а*);

2) равные наклонные имеют равные проекции, и наоборот: **если проекции двух наклонных равны, то равны и сами наклонные (рис. 122, *б*);**

3) бо́льшая наклонная имеет бо́льшую проекцию, и наоборот: **из двух наклонных больше та, которая имеет бо́льшую проекцию (рис. 122, *в*).**

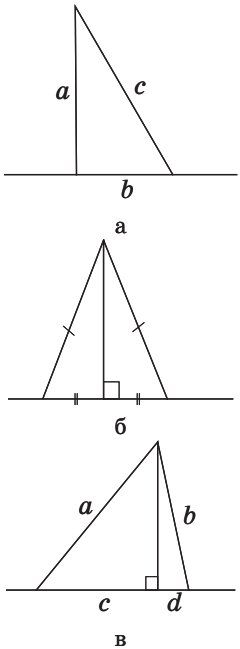


Рис. 122. Свойства наклонных

Все эти свойства следуют из теоремы Пифагора (самостоятельно объясните почему). Но некоторые из них можно также получить и из других свойств прямоугольного треугольника.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

416. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника вдвое больше квадрата катета. Чему равны острые углы треугольника?

417. Какова градусная мера наибольшего угла треугольника со сторонами 6, 8 и 10? Почему?

418. Стороны параллелограмма равны 3 см и 4 см, а диагональ — 5 см. Определите вид параллелограмма.

419. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$. Назовите:

а) наклонную к прямой AB, проведенную из точки C;

б) проекцию наклонной BC на прямую AC.

420. Отрезки a_1 и a_2 — проекции наклонных l_1 и l_2, проведенных из одной точки к одной прямой. Сравните:

а) l_1 и l_2, если $a_1 < a_2$; б) a_1 и a_2, если $l_1 = l_2$.

421. Две наклонные к одной прямой имеют равные проекции. Обязательно ли эти наклонные равны?

422. Сколько равных наклонных к данной прямой можно провести из точки, которая не лежит на этой прямой?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

423. Начертите прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см. Вычислите по теореме Пифагора длину его гипотенузы. Проверьте полученный результат измерением.

424. Постройте треугольник со сторонами 2,5 см, 6 см и 6,5 см. Измерьте наибольший угол треугольника. Обоснуйте полученный результат с помощью теоремы, обратной теореме Пифагора.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

425. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c найдите:

а) c, если $a = 7$, $b = 24$; б) b, если $a = \sqrt{17}$, $c = 9$;

в) a, если $b = 3\sqrt{3}$, $c = 6$.

426. Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная. Найдите длину:

а) наклонной, если ее проекция равна 9 см, а перпендикуляр имеет длину 40 см;

б) перпендикуляра, если наклонная и ее проекция равны соответственно 29 см и 20 см.

427. В прямоугольнике найдите:

а) диагональ, если стороны равны 10 см и 24 см;

б) периметр, если диагональ равна 10 см, а одна из сторон — 6 см.

428. В равнобедренном прямоугольном треугольнике найдите:

а) гипотенузу, если катет равен: 4 см; $2\sqrt{2}$ см; a см;

б) катет, если гипотенуза равна: 10 см; $\sqrt{2}$ см; c см.

429. В квадрате найдите:

а) диагональ, если сторона равна a;

б) сторону, если диагональ равна d.

430. Определите, является ли прямоугольным треугольник со сторонами:

а) 4, 5, 6; б) 5, 12, 13;

в) 2, $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$; г) 6, 8, $\sqrt{10}$.

431. Стороны треугольника равны 12 см, 16 см и 20 см. Какой угол образует с наименьшей стороной биссектриса наибольшего угла?

432. Основание равнобедренного треугольника равно 16 см. Найдите периметр треугольника, если его биссектриса, проведенная к основанию, равна 6 см.

433. Периметр равнобедренного треугольника равен 36 см, а боковая сторона — 13 см. Найдите медиану треугольника, проведенную к основанию.

434. Диагонали параллелограмма равны 16 см и 30 см, а сторона — 17 см. Докажите, что данный параллелограмм является ромбом.

435. Найдите периметр ромба с диагоналями 10 м и $2\sqrt{11}$ м.

Уровень Б

436. Две стороны прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите длину третьей стороны. Сколько решений имеет задача?

437. В прямоугольном треугольнике найдите неизвестные стороны, если:

а) катеты относятся как $3:4$, а гипотенуза равна 45 см;

б) высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см, а проекция одного из катетов на гипотенузу имеет длину 16 см.

438. В прямоугольном треугольнике найдите неизвестные стороны, если:

а) катет и гипотенуза относятся как $12:13$, а второй катет равен 10 см;

б) проекции катетов на гипотенузу равны 18 см и 32 см.

439. В равностороннем треугольнике найдите:

а) высоту, если сторона равна: 6 см; $2\sqrt{3}$ см; a см;

б) сторону, если высота равна: 1 см; $3\sqrt{3}$ см; h см.

440. Найдите высоту ромба, если она делит сторону на отрезки длиной 6 см и 4 см, начиная от вершины острого угла.

441. Высота равнобедренного треугольника делит боковую сторону на отрезки длиной 1 см и 12 см, начиная от основания. Найдите основание треугольника.

442. Стороны треугольника равны 15 см, 20 см и 25 см. Найдите медиану и высоту, проведенные к наибольшей стороне.

443. Если m и n — натуральные числа, то числа $2mn$, m^2-n^2 и m^2+n^2 составляют пифагорову тройку. Докажите.

444. Основания равнобедренной трапеции равны 8 см и 18 см, а высота — 12 см. Найдите периметр трапеции. Можно ли вписать в нее окружность?

445. Основания прямоугольной трапеции равны 21 см и 28 см, а бо́льшая боковая сторона — 25 см. Найдите периметр трапеции. Можно ли вписать в нее окружность?

446. Из точки к прямой проведены перпендикуляр длиной 8 см и две наклонные с длинами 10 см и 17 см. Найдите расстояние между основаниями наклонных. Сколько решений имеет задача?

447. Найдите высоту, проведенную к наибольшей стороне треугольника со сторонами:

а) 15, 41 и 52; б) 10, 17 и 21.

448. Из точки к прямой проведены перпендикуляр и две наклонные, разность длин которых составляет 8 см. Найдите длину перпендикуляра, если проекции наклонных равны 8 см и 20 см.

449. Точка окружности удалена от концов диаметра на 15 см и 20 см. Найдите расстояние от данной точки до диаметра.

450. На окружности отмечены точки A, B и C так, что $AB = 9$ см, $BC = 40$ см, $AC = 41$ см. Найдите радиус окружности.

Уровень В

451. Две окружности с радиусами 4 см и 9 см касаются внешним образом. Найдите расстояние между точками касания данных окружностей с их общей внешней касательной.

452. Две окружности касаются внешним образом. Расстояния от точки касания A этих окружностей до точек B и C касания данных окружностей с их общей внешней касательной равны соответственно 5 см и 12 см. Найдите BC.

453. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 1 м и $\sqrt{3}$ м. Найдите среднюю линию трапеции.

454. Медиана и высота, проведенные к гипотенузе прямоугольного треугольника, равны соответственно 25 см и 24 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

455. Докажите, что квадрат высоты равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равен произведению ее оснований.

456. Если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то суммы квадратов длин его противолежащих сторон равны. Докажите. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 14

Теоретический материал

- касательная к окружности;
- геометрическое место точек.

7 класс, § 20, 22

Задачи

457. На катете AB прямоугольного треугольника ABC $(\angle A = 90°)$ отмечена точка K. Отрезок KM — перпендикуляр к гипотенузе BC, причем $KM = AK$. Докажите, что CK — биссектриса треугольника ABC.

458. В остроугольном треугольнике ABC $AB > BC$, BD — высота треугольника. Сравните длины отрезков AD и DC. Изменится ли ответ, если BD — биссектриса треугольника? Выскажите предположение.

§ 14. Применение подобия треугольников

14.1. Свойство биссектрисы треугольника

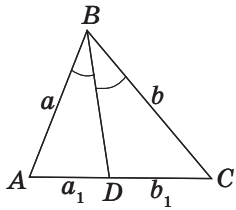


Рис. 123. Свойство биссектрисы треугольника

Теорема (свойство биссектрисы треугольника)

Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.

По данным рисунка 123 это означает, что

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}.$$

Доказательство

□ Пусть BD — биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

В случае, если $AB = BC$, утверждение теоремы очевидно, поскольку биссектриса BD является одновременно и медианой. Рассмотрим случай, когда $AB \neq BC$.

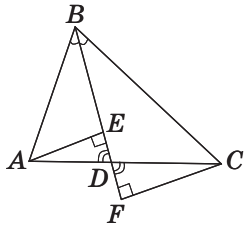


Рис. 124. К доказательству свойства биссектрисы треугольника

Проведем перпендикуляры AE и CF к прямой BD (рис. 124). Прямоугольные треугольники ADE и CDF подобны, поскольку их острые углы при вершине D равны как вертикальные. Из подобия этих треугольников имеем: $\frac{AE}{CF} = \frac{AD}{DC}$. С другой стороны, прямоугольные треугольники ABE и CBF также подобны, поскольку имеют равные острые углы при вершине B. Отсюда следует, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CF}$. Сравнивая это равенство

с предыдущим, получаем $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, что и требовалось доказать. ■

Задача

Найдите периметр прямоугольного треугольника, если его биссектриса делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см.

Решение

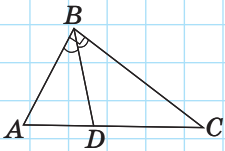


Рис. 125

Пусть BD — биссектриса прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC, $AD = 15$ см, $DC = 20$ см (рис. 125). По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, т.е. $AB : BC = 15 : 20 = 3 : 4$.

Тогда если $AB = 3x$ см, то $BC = 4x$ см, и по теореме Пифагора имеем:

$(3x)^2 + (4x)^2 = 35^2$;

$25x^2 = 1225$;

$x = 7$.

Следовательно, $AB = 21$ см, $BC = 28$ см, $AC = 35$ см, тогда $P_{ABC} = 84$ см.

Ответ: 84 см.

14.2*. Метрические соотношения в окружности

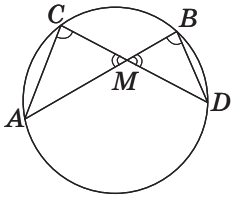


Рис. 126. К доказательству пропорциональности отрезков хорд

Теорема (о пропорциональности отрезков хорд)

Произведения отрезков пересекающихся хорд равны.

По данным рисунка 126 это означает, что $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

Доказательство

□ Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке M. Проведем хорды AC и BD. Треугольники ACM и DBM подобны по двум углам: $\angle C = \angle B$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, а углы при вершине M равны как вертикальные. Из подобия треугольников следует, что $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$, т. е. $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. ■

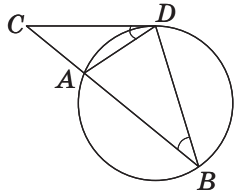


Рис. 127. К доказательству пропорциональности отрезков секущей и касательной

Теорема (о пропорциональности отрезков секущей и касательной)

Произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки.

По данным рисунка 127 это означает, что $CB \cdot CA = CD^2$.

Доказательство

□ Пусть из точки C к окружности проведены секущая, которая пересекает окружность в точках A и B, и касательная CD (D — точка касания). Проведем хорды AD и BD. Треугольники BCD и DCA подобны по двум углам: у них общий угол C, а углы CBD и CDA измеряются половиной дуги AD (см. опорную задачу № 230). Следовательно, из подобия треугольников получаем: $\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CA}$, т. е. $CB \cdot CA = CD^2$. ■

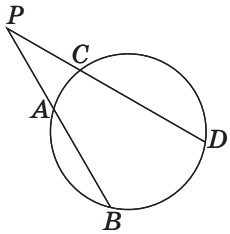


Рис. 128. Пропорциональность отрезков секущих

Следствие

Произведение секущей на ее внешнюю часть для данной окружности и точки вне ее постоянно.

По данным рисунка 128 это означает, что $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

14.3*. Метод подобия

Подобие треугольников дает ключ к решению задач на доказательство и вычисление, которые содержат соотношения между произведениями некоторых отрезков. Для этого соответствующие равенства превращают в пропорции, благодаря которым можно доказать подобие соответствующих треугольников.

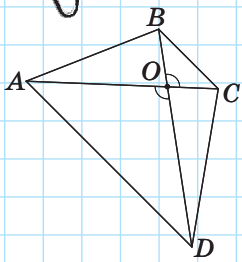


Рис. 129

Задача

Диагонали четырехугольника ABCD пересекаются в точке O, $AO \cdot BO = CO \cdot DO$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

Решение

Перепишем данное равенство в виде пропорции $\frac{BO}{CO} = \frac{DO}{AO}$. Элементы этой пропорции являются соответствующими сторонами треугольников BOC и DOA (рис. 129). Поскольку $\angle BOC = \angle DOA$ как вертикальные, то эти треугольники подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, поэтому $\angle CBO = \angle ADO$. Но углы CBO и ADO внутренние накрест лежащие при прямых CB и AD и секущей BD. Следовательно, по признаку параллельности прямых $BC \parallel AD$.

Подобие треугольников может использоваться не только как инструмент геометрических доказательств или вычислений, но и как средство для решения задач на построение. Метод подобия для решения задач на построение заключается в построении вспомогательной фигуры, подобной искомой.

Задача

Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведенной из вершины третьего угла.

Решение

Анализ

Обратим внимание на то, что два данных угла (пусть они равны α и β) определяют форму искомого треугольника, а длина данной биссектрисы (пусть она равна l) — его размеры.

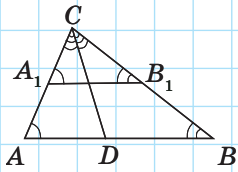


Рис. 130

При этом искомый треугольник будет подобен любому треугольнику с углами α и β. Отсюда следует план построения: строим сначала произвольный треугольник с углами α и β, проводим в нем биссектрису и, пользуясь подобием треугольников, строим искомый треугольник (рис. 130).

Построение

1. Построим треугольник A_1B_1C, в котором $\angle A_1 = \alpha$, $\angle B_1 = \beta$.
2. Построим биссектрису угла C.
3. Отложим на построенной биссектрисе отрезок $CD = l$.
4. Проведем через точку D прямую, параллельную A_1B_1. Пусть A и B — точки ее пересечения со сторонами угла C. Треугольник ABC искомый.

Доказательство

Поскольку по построению $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ как соответственные углы при параллельных прямых. Значит, в треугольнике ABC CD — биссектриса и $CD = l$ по построению, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Исследование

Задача имеет единственное решение при условии $\alpha + \beta < 180°$ и ни одного, если $\alpha + \beta \geqslant 180°$.

Итак, при решении задач на построение методом подобия следует придерживаться следующего плана.

1. Выделить из условий задачи те, которые определяют форму искомой фигуры.
2. Построить по этим данным фигуру, подобную искомой.
3. Используя условия задачи, определяющие размеры искомой фигуры, построить эту фигуру.

Среди задач на построение, связанных с подобием, одной из наиболее интересных является задача деления отрезка на две части таким образом, чтобы одна из них была средним пропорциональным между второй частью и всем отрезком. Такое деление отрезка называют ***делением в среднем и крайнем отношениях***, или ***золотым сечением***. Подробнее о таком делении вы можете узнать в Приложении 2.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

459. Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону в отношении $1:2$. Могут ли углы, прилежащие к этой стороне, быть равными? Почему?

460. Может ли биссектриса равнобедренного треугольника делить боковую сторону в отношении $2:1$, начиная от основания? Какой теореме это противоречит?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

461. Начертите треугольник ABC и проведите его биссектрису BD. Измерьте отрезки AB, AD и DC. С помощью свойства биссектрисы треугольника вычислите длину стороны BC. Проверьте полученный результат измерением.

462. Постройте треугольник ABC со сторонами $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см. Обозначьте на стороне BC точку D так, чтобы $BD = 3$ см. Соедините точки A и D. Измерьте углы BAD и CAD. Обоснуйте полученный результат.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

463. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Найдите:

а) AB, если $BC = 8$ см, $AD = 3$ см, $DC = 2$ см;

б) AD и DC, если $AB = 9$ см, $BC = 6$ см, $AC = 10$ см.

464. Биссектриса равнобедренного треугольника делит боковую сторону на отрезки длиной 2 см и 4 см, начиная от основания треугольника. Найдите основание треугольника.

465. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Найдите стороны треугольника, если $AD = 8$ см, $DC = 12$ см, а периметр треугольника равен 45 см.

466. Биссектриса прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки, разность которых составляет 5 см. Найдите стороны треугольника, если отношение катетов равно $3:4$.

467. Биссектриса прямоугольного треугольника делит его катет на отрезки длиной 4 см и 5 см. Найдите периметр треугольника.

Уровень Б

468. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки длиной 16,5 см и 27,5 см. Найдите отрезки, на которые эта биссектриса делит боковую сторону треугольника.

469. Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию как 5 : 6. Биссектриса угла при основании делит высоту, проведенную к основанию, на отрезки, разность которых составляет 4 см. Найдите периметр треугольника.

470. При пересечении двух хорд одна из них делится на отрезки длиной 6 см и 16 см, а вторая — в отношении 3 : 2. Найдите длину второй хорды.

471. При пересечении хорды с диаметром окружности хорда делится на отрезки длиной 3 см и 4 см, а диаметр — в отношении 1 : 3. Найдите радиус окружности.

472. Секущая, проведенная из точки A, пересекает окружность в точках B и C, причем $AB = 4$ см, $BC = 5$ см. Найдите длину отрезка касательной, проведенной к окружности из точки A.

473. Из точки вне окружности, удаленной от центра окружности на 39 см, проведена касательная к окружности. Найдите радиус окружности, если отрезок касательной равен 36 см.

Уровень В

474. Катет прямоугольного треугольника равен 18 см. Точка на этом катете удалена от гипотенузы и другого катета на 8 см. Найдите периметр треугольника.

475. Точка на катете прямоугольного треугольника равноудалена от второго катета и гипотенузы. Перпендикуляр, проведенный из данной точки к гипотенузе треугольника, делит ее на отрезки 3 см и 12 см. Найдите периметр треугольника.

476. В треугольнике ABC для высоты CD и отрезков AD и BD, на которые она делит сторону AB, имеет место соотношение $CD^2 = AD \cdot BD$. Докажите, что угол ACB прямой.

477. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC к стороне BC проведена высота AD. Докажите, что $2DC \cdot BC = AC^2$.

478. Постройте треугольник:

а) по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла;

б) по углу, биссектрисе этого угла и отношению сторон, которые образуют данный угол.

479. Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведенной из вершины меньшего из них.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 15

Теоретический материал

- определение треугольника;
- сумма углов треугольника;
- четырехугольник и его элементы.

7 класс, § 7, 16

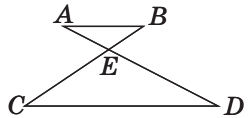
8 класс, § 1

Задачи

480. Докажите, что периметр параллелограмма больше суммы длин его диагоналей.

481. Два угла треугольника равны 10° и 70°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины третьего угла.

Задачи для подготовки к контрольной работе № 3



1. По рисунку докажите подобие треугольников ABE и DCE, если $AB \parallel CD$.

2. Периметр прямоугольника равен 34 см, а одна из сторон 5 см. Найдите диагональ прямоугольника.

3. Стороны треугольника пропорциональны числам 21, 20 и 29. Докажите, что данный треугольник прямоугольный.

4. Из точки к прямой проведены перпендикуляр и две наклонные длиной 17 см и 10 см. Проекции наклонных относятся как 2 : 5. Найдите длину перпендикуляра.

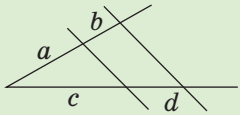
5. В прямоугольном треугольнике биссектриса делит гипотенузу на отрезки 15 см и 20 см. На какие отрезки делит гипотенузу высота треугольника?

6. В окружности проведены две равные пересекающиеся хорды. Докажите, что отрезки первой хорды соответственно равны отрезкам второй хорды.

Итоги главы II

ИТОГОВЫЙ ОБЗОР ГЛАВЫ II

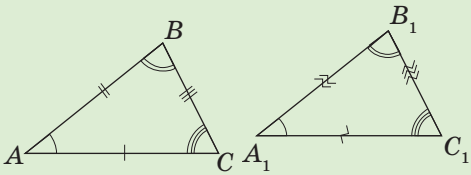
ТЕОРЕМА О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ



Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах этого угла пропорциональные отрезки:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

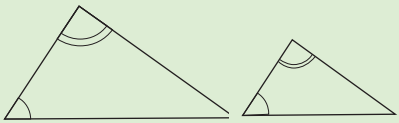
ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Два треугольника называются ***подобными***, если углы одного из них соответственно равны углам другого и соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны

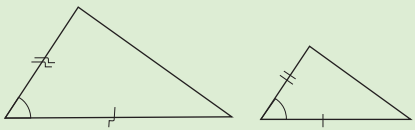
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Признак подобия треугольников по двум углам



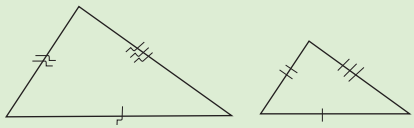
Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны

Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними



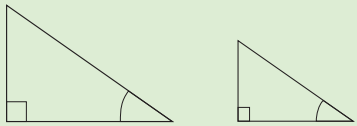
Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны

Признак подобия треугольников по трем сторонам



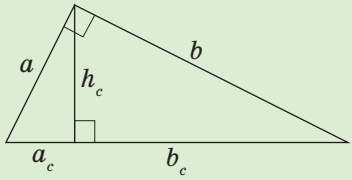
Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны

ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Если два прямоугольных треугольника имеют по равному острому углу, то такие треугольники подобны

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



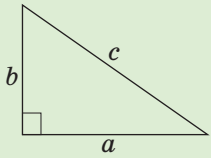
Высота, проведенная к гипотенузе, является средним пропорциональным между проекциями катетов на гипотенузу: $h_c^2 = a_c \cdot b_c$

Катет является средним пропорциональным между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу: $a^2 = c \cdot a_c$ и $b^2 = c \cdot b_c$

Высота, проведенная к гипотенузе, равна произведению катетов, деленному на гипотенузу: $h_c = \dfrac{ab}{c}$

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

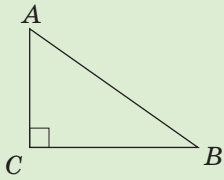
Теорема Пифагора



В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема, обратная теореме Пифагора



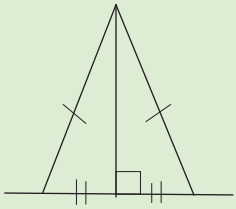
Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник прямоугольный:

если $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то $\angle C = 90°$

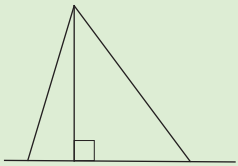
ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Пусть из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонные. Тогда:

- любая наклонная больше перпендикуляра и больше своей проекции на данную прямую

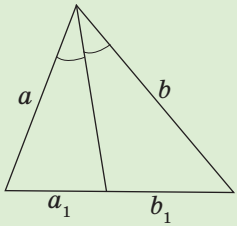


- равные наклонные имеют равные проекции, и наоборот: если проекции двух наклонных равны, то равны и сами наклонные



- бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию, и наоборот: из двух наклонных больше та, которая имеет бóльшую проекцию

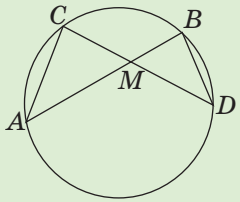
СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА



Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам:

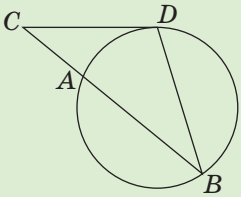
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$$

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ОКРУЖНОСТИ



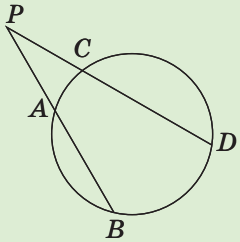
Произведения отрезков пересекающихся хорд равны:

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM$$



Произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки:

$$CB \cdot CA = CD^2$$



Произведение секущей на ее внешнюю часть для данной окружности и точки вне ее постоянно:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ II

1. Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.

2. Дайте определение подобных треугольников.

3. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по двум углам.

4. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними.

5. Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по трем сторонам.

6. Сформулируйте признаки подобия прямоугольных треугольников.

7. Сформулируйте и докажите метрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

8. Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

9. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.

10. Сформулируйте свойства перпендикуляра и наклонных, проведенных из одной точки к прямой.

11. Сформулируйте свойство биссектрисы треугольника.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

482. Катет прямоугольного треугольника равен 6, а проекция другого катета на гипотенузу равна 5. Найдите гипотенузу треугольника.

483. Периметр прямоугольника равен 46 см, а диагональ — 17 см. Найдите стороны прямоугольника.

484. Найдите стороны равнобедренного треугольника с периметром 16 см, если медиана, проведенная к основанию, равна 4 см.

485. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см. Найдите катеты треугольника, если высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.

486. Периметр треугольника равен 27 см. Вычислите его стороны, если биссектриса делит одну из них на отрезки длиной 4 см и 5 см.

487. Периметр равнобедренной трапеции равен 1 м, а разность оснований составляет 14 см. Найдите радиус окружности, вписанной в трапецию.

488. Катет прямоугольного треугольника равен 32 см. Точка, лежащая на этом катете, удалена от концов гипотенузы на 25 см. Найдите периметр треугольника.

489. Прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c подобен прямоугольному треугольнику с катетами a_1 и b_1 и гипотенузой c_1. Докажите, что $aa_1 + bb_1 = cc_1$.

490. Пользуясь рисунками 131, *а, б*, докажите теорему о точке пересечения медиан треугольника еще двумя способами.

а б

Рис. 131

491. На рисунке 132 отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $CM \parallel BD$. Пользуясь этим рисунком и теоремой о пропорциональных отрезках, докажите свойство биссектрисы треугольника.

492. На рисунке 133 CM — биссектриса внешнего угла треугольника ABC, $BD \parallel CM$. Пользуясь этим рисунком и теоремой о пропорциональных отрезках, докажите, что $AM : BM = AC : BC$.

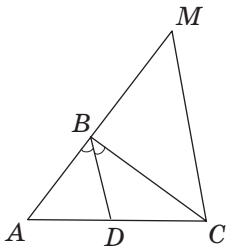


Рис. 132

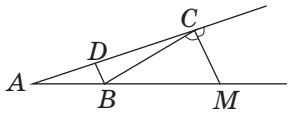


Рис. 133

Задачі підвищеної складності

494. У трикутнику ABC на сторонах BC і AC позначено точки A_1 і B_1 відповідно. Відрізки AA_1 і BB_1 перетинаються в точці O. Знайдіть:

а) $AO : A_1O$, якщо $AB_1 : B_1C = 2 : 1$, $BA_1 = A_1C$;

б) $BA_1 : A_1C$, якщо $AO : OA_1 = 4 : 1$, $AB_1 : B_1C = 2 : 1$;

в) $BA_1 : A_1C$ і $AB_1 : B_1C$, якщо $AO : OA_1 = 4 : 1$, $BO : OB_1 = 7 : 8$.

495. У трикутнику ABC медіана AM ділить висоту BH у відношенні $3 : 1$, починаючи від вершини B. У якому відношенні дана висота ділить дану медіану?

496. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 12 см. Середини кожної з основ сполучені з кінцями іншої основи. Знайдіть відстань між точками перетину проведених відрізків.

497. Дано рівнобедрений трикутник з основою 6 м і бічною стороною 9 м. Відрізки якої довжини треба відкласти від вершини на бічних сторонах, щоб при сполученні їх кінців отримати трикутник із периметром 16 м, подібний до даного?

498. Основи трапеції дорівнюють a і b $(a < b)$. Через точку перетину продовжень бічних сторін проведено пряму, паралельну основам. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься між продовженнями діагоналей.

499. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см, а бічна сторона — 54 см. До бічних сторін проведено висоти. Знайдіть довжину відрізка, кінцями якого є основи цих висот.

500. Доведіть, що квадрат найменшої медіани прямокутного трикутника в 5 разів менший за суму квадратів двох інших медіан.

501. Три кола з радіусами 1, 2 і 3 дотикаються одне до одного зовні. Знайдіть радіус кола, яке проходить через центри цих кіл, і радіус кола, яке проходить через точки їх дотику.

502. Усередині прямокутника $ABCD$ позначено точку M, причому $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. Знайдіть MD.

503. Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до даних точок A і B стала, коли ця множина містить точки A і B.

502. Внутри прямоугольника $ABCD$ обозначена точка M, причем $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$. Найдите MD.

503. Найдите геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до данных точек A и B постоянна.

504 (теорема Птолемея). Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений двух пар его противолежащих сторон: $d_1 \cdot d_2 = ac + bd$ (рис. 134). Докажите.

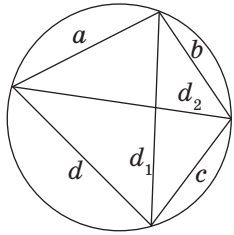


Рис. 134

505 (опорная). ***Квадрат биссектрисы треугольника равен разности между произведением боковых сторон и произведением отрезков, на которые эта биссектриса делит основание:*** $l_c^2 = ab - mn$ (рис. 135). Докажите.

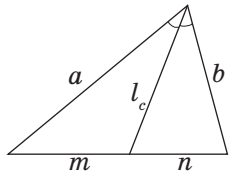


Рис. 135

Историческая справка

Евклид

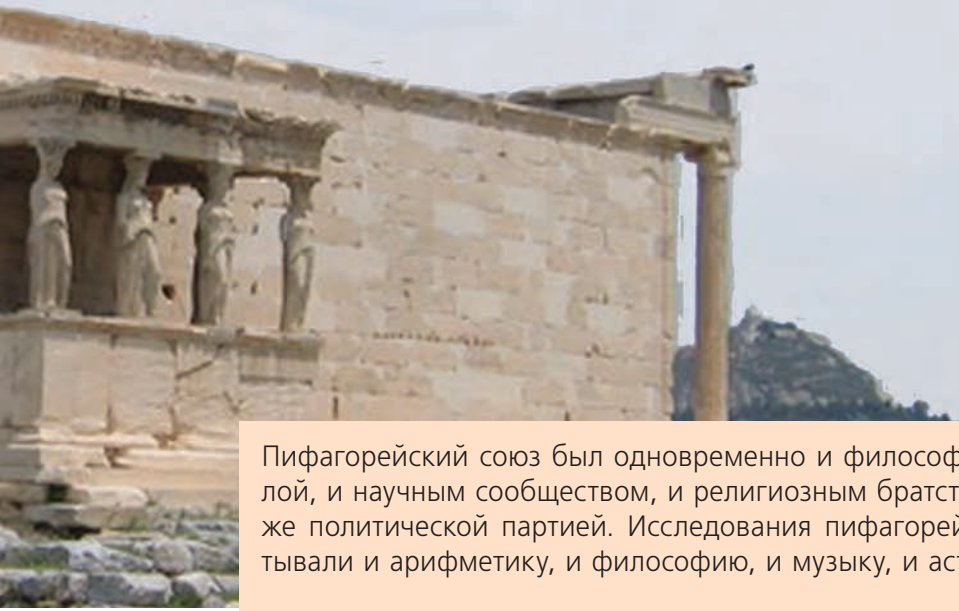
Теории подобия треугольников посвящен шестой раздел «Начал» **Евклида**. Интересно, что, например, в геометрии Лобачевского не существует подобных треугольников, которые не были бы равны. Оказывается, что аксиома параллельных прямых в евклидовой геометрии равносильна предположению о существовании подобных, но неравных треугольников.

Центральное место в евклидовой геометрии занимает теорема Пифагора. **Пифагор Самосский** (ок. 580—500 гг. до н. э.) долгое время жил в Египте и Вавилоне, потом поселился в городе Кротон (греческая колония на юге Италии) и основал там так называемый пифагорийский союз. Считается, что именно от пифагорейцев происходит слово «математика» (греческое «матема» означает «наука», «познание»). Свойства треугольника со сторонами 3, 4 и 5 были известны древним египтянам и китайским ученым. Пифагор начал исследовать другие прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами. Рассмотрев

равнобедренный прямоугольный треугольник с единичными катетами, он увидел, что длина его гипотенузы не выражается целым числом — так были открыты иррациональные числа. Вскоре Пифагору удалось доказать, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе,— именно так выглядела теорема Пифагора в классической формулировке. По легенде, в честь своего открытия он принес богам в жертву сто быков.

Пифагор

Сегодня нельзя с уверенностью сказать, какие из открытий пифагорейцев принадлежат самому Пифагору, а какие — его ученикам. Вообще, школа Пифагора существовала достаточно закрыто и обособленно от общества. Это породило ненависть к пифагорейцам, и школа была разгромлена, а сам Пифагор вынужден был спасаться бегством, но в дороге был убит. После смерти Пифагора его ученики разбрелись по всей Греции и стали распространять его учение, которое дошло и до наших дней.



Пифагорейский союз был одновременно и философской школой, и научным сообществом, и религиозным братством, и даже политической партией. Исследования пифагорейцев охватывали и арифметику, и философию, и музыку, и астрономию.

ТЕМАТИКА СООБЩЕНИЙ И РЕФЕРАТОВ К ГЛАВЕ II

1. Пифагор Самосский — ученый, философ, общественный деятель.
2. Архимед и его достижения в геометрии. Задачи об арбелосе.
3. Пропорциональные отрезки в трапеции.
4. Теоремы Чеви и Менелая и их следствия.
5. «Золотое сечение» в архитектуре и искусстве.
6. Прикладное применение подобия треугольников. Пропорциональный циркуль.

РЕКОМЕНДОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ

1. Литцман, В. Теорема Пифагора [Текст] / В. Литцман ; под ред. И. М. Яглома ; пер. с нем. В. С. Бермана. — 3-е изд. — М. : Физматгиз, 1960. — 114 с.
2. Никулин, А. В. Геометрия на плоскости (Планиметрия) : Учеб. пособие [Текст] / А. В. Никулин, А. Г. Кукуш, Ю. С. Татаренко ; под ред. Ю. С. Татаренко. — Мн. : ООО «Попурри», 1996. — 592 с.
3. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
4. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 2 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 240 с. — (Б-ка мат. кружка).
5. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. 7—9 классы : От учебной задачи к творческой: Учеб. пособие [Текст] / И. Ф. Шарыгин. — М. : Дрофа, 1997. — (Задачники «Дрофы»).
6. Бевз, В. Г. Геометрія кіл [Текст] / В. Г. Бевз. — Х. : Вид. група «Основа», 2004. — 112 с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»).
7. Бевз, В. Г. Геометрія трикутника. 7—11 класи : Навч. посібник [Текст] / В. Г. Бевз. — К. : Ґенеза, 2005. — 120 с.
8. Білецький, Ю. О. Фігури на піску [Текст] / Ю. О. Білецький, Г. Б. Філіпповський. — Х. : Вид. група «Основа», 2003. — 96 с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»).
9. Еленьский, Щ. По следам Пифагора [Текст] / Щ. Еленьский. — М. : Детгиз, 1961.
10. Кушнір, І. А. Повернення втраченої геометрії [Текст] / І. А. Кушнір. — К. : Факт, 2000. — 280 с. — (Серія «Математичні обрії України»).
11. Математична хрестоматія для 6—8 класів. Т. 1 [Текст]. — К. : Рад. шк., 1968. — 320 с.
12. Интернет-библиотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/

Глава III
МНОГОУГОЛЬНИКИ. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

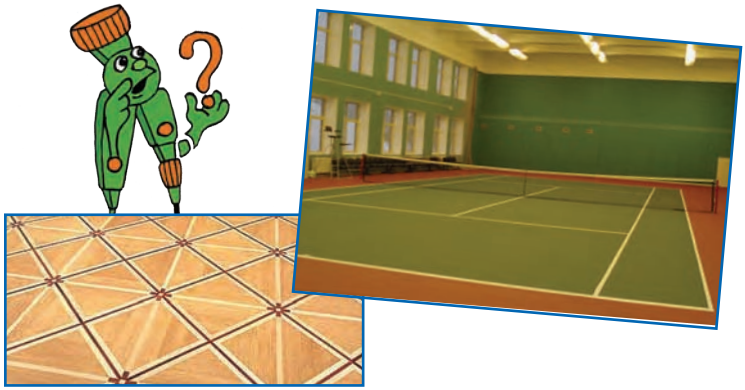
Математика, отделяя линию от площади и площадь от тела, утверждает, что реально только тело, а линия и площадь — абстракции.

Александр Герцен,
русский писатель

До настоящего времени в теоремах и задачах рассматривались лишь числовые характеристики отдельных элементов геометрических фигур — длины сторон, градусные меры углов и т. п. В отличие от них площадь характеризует фигуру в целом, т. е. зависит как от ее формы, так и от размеров.

В повседневной жизни человек имеет дело с площадями каждый день — измеряет жилые помещения и приусадебные участки, лесные массивы и сельскохозяйственные угодья и т. д. Вычислением площадей вы занимались и на уроках математики в младших классах. Тем не менее, дать строгое с научной точки зрения определение площади не так просто, и соответствующая математическая теория была создана значительно позже многих известных теорем.

В этой главе мы обобщим сведения о многоугольниках и их площадях. Благодаря этому ваш математический багаж пополнится немалым количеством новых формул, которые необходимо знать и уметь применять. В этой связи дадим вам совет: усвоить какую-либо формулу значительно проще, если понять и запомнить способ ее получения. Более того, откроем вам маленькую профессиональную тайну: иногда даже профессиональные математики не запоминают формулы, а выводят их в уме в случае необходимости. Будет очень здорово, если такую математическую эрудицию удастся приобрести и вам.



§ 15. Многоугольник и его элементы

15.1. Определение многоугольника

Рассмотрим фигуру, которая состоит из отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1. Отрезки расположены так, что никакие два *соседних отрезки* (то есть те, которые имеют общий конец), не лежат на одной прямой, а несоседние отрезки не имеют общих точек (рис. 136, *а*). Такую фигуру называют **многоугольником**. Точки A_1, A_2, ..., A_n называют ***вершинами многоугольника***, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 — ***сторонами многоугольника***.

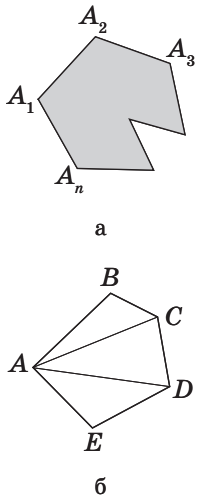


Рис. 136. Многоугольники

В зависимости от количества вершин многоугольник называют треугольником, четырехугольником, пятиугольником и т. д. Многоугольник, который имеет n вершин (а следовательно, n сторон), называют ***n-угольником***.

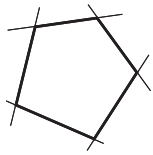
Многоугольник обозначают по его вершинам. При этом буквы, которые стоят в названии многоугольника рядом, должны обозначать вершины, которые принадлежат одной стороне (*соседние вершины*). Например, пятиугольник на рисунке 136, *б* можно обозначить $ABCDE$ или $DCBAE$, но нельзя обозначать $ABDEC$.

Определение

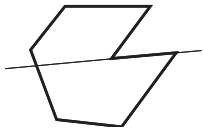
Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий две несоседние вершины.

Например, на рисунке 136, *б* отрезки AC и AD являются диагоналями пятиугольника $ABCDE$, выходящими из вершины A. Периметр



а



б

Рис. 137. Выпуклый (*а*) и невыпуклый (*б*) многоугольники

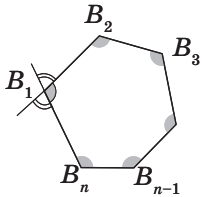
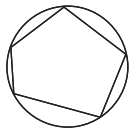
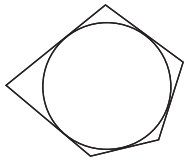


Рис. 138. Внутренний и внешние углы многоугольника



а



б

Рис. 139. Вписанный (*а*) и описанный (*б*) многоугольники

этого многоугольника вычисляется по формуле $P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + AE$.

Любой многоугольник делит плоскость на две части. Одна из них (на рисунке 136, *а* она закрашена) является ***внутренней областью многоугольника***. Фигуру, состоящую из многоугольника и его внутренней области, называют ***плоским многоугольником***, или, в некоторых случаях, просто многоугольником.

Определение

Многоугольник называется **выпуклым,** если он лежит по одну сторону от любой прямой, которая содержит его сторону.

На рисунке 137, *а* изображен выпуклый многоугольник, а на рисунке 137, *б* — невыпуклый. Далее мы будем рассматривать только выпуклые многоугольники.

Рассмотрим выпуклый многоугольник $B_1B_2...B_n$ (рис. 138). Углы $B_1B_2B_3$, $B_2B_3B_4$, ..., $B_{n-1}B_nB_1$, $B_nB_1B_2$ (на рисунке они закрашены) называют ***углами (внутренними углами) многоугольника*** $B_1B_2...B_n$. В частности, угол данного многоугольника при вершине B_1 на рисунке обозначен одной дужкой. Углы, смежные с данным внутренним углом, являются ***внешними углами многоугольника*** $B_1B_2...B_n$ при вершине B_1 (на рисунке они обозначены двумя дужками).

Любой внутренний угол выпуклого многоугольника меньше 180°.

Определение

Многоугольник называется **вписанным в окружность**, если все его вершины лежат на этой окружности.

Многоугольник называется **описанным около окружности**, если все его стороны касаются этой окружности.

На рис. 139, *а* изображен вписанный многоугольник, а на рис. 139, *б* — описанный.

15.2. Сумма углов выпуклого многоугольника

Как известно, сумма углов треугольника равна 180°, а сумма углов четырехугольника — 360°. Нетрудно предположить, что сумма углов выпуклого многоугольника должна зависеть от количества его сторон. Эта зависимость выражается следующей теоремой.

Теорема (о сумме углов выпуклого n-угольника)

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

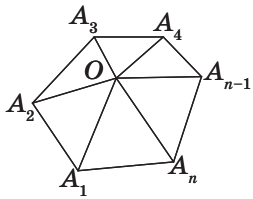


Рис. 140. К доказательству теоремы о сумме углов выпуклого n-угольника

Доказательство

□ Пусть дан выпуклый n-угольник $A_1A_2...A_n$ (рис. 140). Обозначим внутри него произвольную точку O и соединим ее с вершинами A_1, A_2, A_3, ..., A_n. При этом образуется n треугольников. Обратим внимание на то, что сумма углов данного многоугольника равна сумме всех углов этих треугольников, кроме углов при вершине O. Поскольку сумма углов A_1OA_2, A_2OA_3, ..., A_nOA_1 составляет 360°, то искомая сумма углов многоугольника равна $180° \cdot n - 360°$, т. е. $180°(n-2)$. ■

Задача

Докажите, что сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

Решение

Поскольку внешний угол многоугольника по определению является смежным с соответствующим внутренним углом, то сумма этих двух углов равна 180°. Таким образом, сумма всех внутренних и внешних углов равна $180° \cdot n$. Чтобы получить сумму внешних углов, вычтем из этой суммы сумму внутренних углов: $180° \cdot n - 180°(n-2) = 360°$.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

506. Сколько диагоналей исходит из одной вершины семиугольника?

507. Может ли диагональ шестиугольника делить его:

а) на два треугольника;

б) на два четырехугольника;

в) на треугольник и пятиугольник?

508. Диагональ отсекает от пятиугольника четырехугольник. Какой вид имеет оставшаяся часть?

509. Может ли выпуклый пятиугольник иметь четыре острых угла; четыре прямых угла; четыре тупых угла?

510. Могут ли четыре угла выпуклого пятиугольника быть равными соответственно четырем углам выпуклого четырехугольника?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

511. Начертите выпуклый пятиугольник.

а) Проведите все диагонали пятиугольника. Сколько диагоналей исходит из одной вершины?

б) Какая фигура образовалась при попарном пересечении диагоналей?

в) Измерьте углы пятиугольника и вычислите их сумму. Проверьте полученный результат, используя соответствующую теорему.

→ **512.** Начертите выпуклый шестиугольник.

а) Проведите красным цветом диагональ, которая делит данный шестиугольник на два четырехугольника. Сколько существует таких диагоналей?

б) Проведите синим цветом диагональ, которая делит данный шестиугольник на треугольник и пятиугольник. Установите зависимость между количеством углов выпуклого многоугольника и суммарным количеством углов многоугольников, на которые он делится диагональю.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

513. Найдите сумму углов выпуклого:

а) шестиугольника; б) двенадцатиугольника.

514. Определите количество сторон выпуклого многоугольника, сумма углов которого равна:

а) 540°; б) 900°; в) 1260°.

515. Все углы выпуклого восьмиугольника равны. Найдите их градусную меру.

516. Два угла выпуклого пятиугольника прямые, а остальные три равны. Найдите их градусную меру.

517. Каждый из пяти углов выпуклого шестиугольника равен 120°. Докажите, что в этом шестиугольнике все углы равны.

Уровень Б

518. Определите, существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна:

а) 1620°; б) 1350°; в) 1980°.

В случае утвердительного ответа укажите количество его сторон.

519. Диагональ делит выпуклый многоугольник на пятиугольник и четырехугольник. Определите вид данного многоугольника и найдите сумму его углов.

520. Каждый из трех углов выпуклого многоугольника равен 80°, а каждый из оставшихся — 160°. Определите количество сторон многоугольника.

521. Определите количество сторон выпуклого многоугольника, каждый угол которого равен:

а) 60°; б) 108°; в) 120°.

522. Все углы выпуклого многоугольника прямые. Докажите, что он является прямоугольником.

Уровень В

523. Определите количество диагоналей n-угольника.

524. Докажите, что выпуклый многоугольник не может иметь больше трех острых углов.

525. В равностороннем пятиугольнике углы при одной стороне прямые. Найдите остальные углы.

526 (опорная). ***Длина любой стороны многоугольника меньше суммы длин остальных сторон.*** Докажите.

527. Периметр выпуклого многоугольника равен 20 см. Может ли его диагональ быть равной 10 см? Ответ обоснуйте.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 16

Теоретический материал

- площади прямоугольника и квадрата;
- параллелограмм и его виды.

5 класс

8 класс, § 2—4

Задачи

528. Через середину стороны AB параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, перпендикулярная прямой BC. Докажите равенство треугольников, образованных этой прямой, отрезками стороны AB и прямыми BC и AD.

529. Докажите, что сумма высот параллелограмма меньше его периметра.

§ 16. Площадь многоугольника. Площади прямоугольника и параллелограмма

16.1. Понятие площади многоугольника

Понятие площади хорошо известно нам из повседневного опыта: мы измеряем площадь спортивной площадки или садового участка, рассчитываем по площади количество обоев или коврового покрытия для ремонта комнаты и т. д. Попробуем придать представлениям о площади определенную математическую строгость.

Условимся, что под площадью многоугольника мы будеем понимать площадь его внутренней области. Как и в случае измерения длин отрезков, измерение площадей основывается на сравнении данной фигуры с фигурой, площадь которой принята за единицу измерения. За единицу измерения площади принимают площадь квадрата, сторона которого равна единице измерения отрезков.

Например, если за единицу измерения отрезков приняты 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения площади принимают площадь квадрата со стороной 1 мм, 1 см или 1 м. Площадь такого квадрата называется квадратным миллиметром (мм^2), квадратным сантиметром (см^2) или квадратным метром (м^2) соответственно. Из курса математики известны и другие единицы площади: ар (площадь квадрата со стороной 10 м), гектар (площадь квадрата со стороной 100 м) и др.

При выбранной единице измерения площадь каждого многоугольника выражается положительным числом, которое показывает,

сколько раз единица измерения площади и ее части укладываются в данном многоугольнике. Обычно площадь обозначается буквой S.

Для определения приближенного значения площади можно использовать палетку — прозрачную пленку с квадратной сеткой (рис. 141). Наложив палетку на фигуру, площадь этой фигуры определяют обычным подсчетом количества единичных квадратов, которые вместились в данной фигуре. Однако на практике применять такой способ неудобно. Поэтому для определения площади многоугольника обычно измеряют лишь некоторые связанные с ним отрезки, а потом вычисляют площадь по соответствующим формулам. Вывод этих формул основывается на свойствах площадей, которые мы рассмотрим ниже.

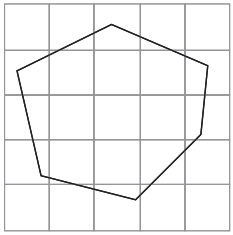


Рис. 141. Измерение площади с помощью палетки

Прежде всего заметим, что когда два многоугольника равны, то единица измерения площади и ее части укладываются в каждом из них одинаковое количество раз, т. е. имеет место следующее свойство.

1. Равные многоугольники имеют равные площади.

Далее, пусть многоугольник состоит из нескольких частей — других многоугольников, которые не имеют общих внутренних точек (рис. 142). Если эти части имеют площади S_1, S_2, S_3, то площадь всего многоугольника равна их сумме: $S = S_1 + S_2 + S_3$. В этом заключается второе свойство площадей.

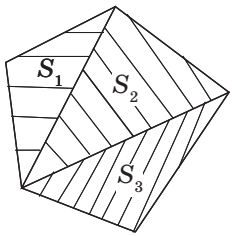


Рис. 142. Площадь многоугольника равна сумме площадей его частей

2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Третье свойство площадей связано с единицей их измерения.

3. Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, равна единице площади.

Три приведенных свойства называют ***аксиомами площадей.***

Итак, **площадь многоугольника** — это положительная величина, численное значение которой удовлетворяет аксиомам площадей.

Из этого, в частности, следует, что ***каждый многоугольник имеет некоторую площадь, которая однозначно определяется в заданных единицах измерения.***

Определение

Две фигуры называются **равновеликими**, если они имеют равные площади.

Очевидно, что по первой аксиоме площадей любые два равных многоугольника равновеликие. Однако не любые два равновеликих многоугольника равны.

Если рассмотреть два равных прямоугольных треугольника (рис. 143, *а*), то, прикладывая их равными сторонами друг к другу, можно получить равнобедренный треугольник (рис. 143, *б*), параллелограмм (рис. 143, *в*), прямоугольник (рис. 143, *г*) или четырехугольник с попарно равными соседними сторонами — дельтоид (рис. 143, *д*). Все эти фигуры **равносоставленные**, т. е. составлены из одних и тех же многоугольников.

По второй аксиоме площадей все образованные таким способом фигуры имеют равные площади. Следовательно, ***любые равносоставленные многоугольники являются равновеликими.*** Интересно, что имеет место и обратное утверждение (теорема Бойяи — Гервина): ***два равновеликих многоугольника являются равносоставленными*** (приводим этот факт без доказательства).

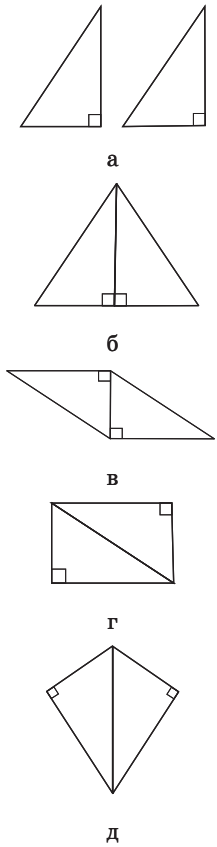


Рис. 143. Равносоставленные многоугольники

16.2. Площадь прямоугольника

Самой простой фигурой с точки зрения вычисления площади является прямоугольник.

Теорема (формула площади прямоугольника)

Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон:

$$S = ab,$$

где a и b — стороны прямоугольника.

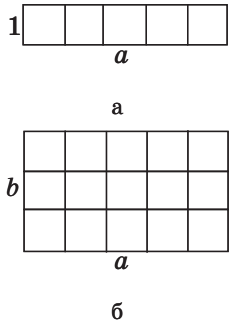


Рис. 144. К обоснованию формулы площади прямоугольника

Приведем рассуждения, на которых основывается доказательство этой теоремы.

Сначала необходимо рассмотреть прямоугольник со сторонами 1 и a. Поскольку в отрезке a единица измерения длины укладывается a раз, то в этом прямоугольнике единица измерения площади (единичный квадрат) будет укладываться также a раз (рис. 144, *а*), т. е. площадь этого прямоугольника равна a.

В общем случае для прямоугольника со сторонами a и b рассуждаем так: поскольку в отрезке b единица измерения длины укладывается b раз, то прямоугольник со сторонами 1 и a будет укладываться в данном прямоугольнике также b раз (рис. 144, *б*). Тогда единица измерения площади укладывается в данном прямоугольнике ab раз, т. е. площадь прямоугольника равна ab.

Полное доказательство этой теоремы приводится в Приложении 1.

Следствие (формула площади квадрата)

Площадь квадрата равна квадрату его стороны:

$$S = a^2,$$

где a — сторона квадрата.

16.3. Площадь параллелограмма

С помощью формулы площади прямоугольника можно доказать формулу площади произвольного параллелограмма.

Теорема (формула площади параллелограмма)

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

$$S = ah_a,$$

где a — сторона параллелограмма, h_a — проведенная к ней высота.

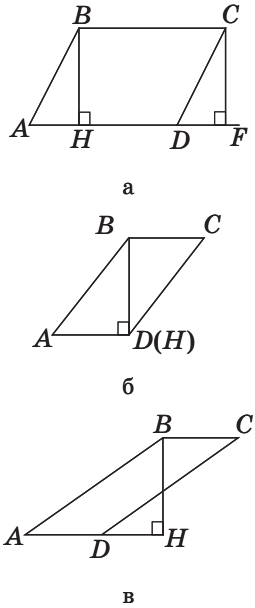


Рис. 145. К доказательству формулы площади параллелограмма

Доказательство

□ Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, не являющийся прямоугольником (рис. 145, *а*). Проведем его высоты BH и CF и докажем, что $S_{ABCD} = AD \cdot BH$. Четырехугольник $ABCF$ является прямоугольной трапецией, площадь которой можно вычислить двумя способами — как сумму площадей параллелограмма $ABCD$ и треугольника DCF или как сумму площадей прямоугольника $HBCF$ и треугольника ABH: $S_{ABCF} = S_{ABCD} + S_{DCF} = S_{HBCF} + S_{ABH}$. Треугольники ABH и DCF равны по гипотенузе и катету ($AB = DC$ как противолежащие стороны параллелограмма, $BH = CF$ как расстояния между параллельными прямыми). Следовательно, эти треугольники имеют равные площади. Тогда площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $HBCF$ также равны, т. е. $S_{ABCD} = BC \cdot BH = AD \cdot BH$. Случаи, когда точка H не является внутренней точкой отрезка AD (рис. 145, *б*, *в*), рассмотрите самостоятельно. ■

Задача

Площадь параллелограмма равна 36 см², а длины его высот — 3 см и 4 см. Найдите периметр параллелограмма.

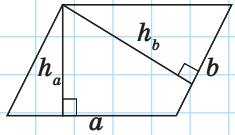


Рис. 146

Решение

Пусть дан параллелограмм с площадью $S = 36$ см^2 и высотами $h_a = 3$ см и $h_b = 4$ см (рис. 146). Поскольку $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$, то $a = \frac{S}{h_a}$, т.е. $a = 36 : 3 = 12$ (см), $b = \frac{S}{h_b}$, т.е. $b = 36 : 4 = 9$ (см).

Следовательно, периметр параллелограмма равен $(12 + 9) \cdot 2 = 42$ (см).

Ответ: 42 см.

Решая приведенную задачу, можно заметить интересную закономерность: чем больше сторона параллелограмма, тем меньше проведенная к ней высота. К обоснованию этого факта мы вернемся в § 18.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

530. Площади двух многоугольников равны. Означает ли это, что сами многоугольники также равны?

531. Два прямоугольника имеют равные периметры. Являются ли они равновеликими?

532. Через середины двух противолежащих сторон параллелограмма проведена прямая. В каком отношении она делит площадь параллелограмма?

533. Определите, какие из данных утверждений верны:

а) если диагонали двух квадратов равны, то эти квадраты равновеликие;

б) два равновеликих прямоугольника равны;

в) два равновеликих квадрата равны.

534. Сторона квадрата равна меньшей стороне прямоугольника. У какой из этих фигур площадь больше?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

535. Начертите параллелограмм, который не является прямоугольником.

а) Проведите из вершины тупого угла меньшую высоту параллелограмма. Измерьте эту высоту и сторону, к которой она проведена, и вычислите площадь параллелограмма.

б) Разрежьте параллелограмм по высоте. Какие фигуры вы получили?

в) Приложите полученные фигуры друг к другу так, чтобы образовался прямоугольник. Равна ли площадь этого прямоугольника площади параллелограмма?

536. На бумаге в клеточку начертите параллелограмм.

а) Подсчитайте приблизительное количество клеток, которые содержатся внутри параллелограмма. Вычислите площадь одной клетки и найдите приближенное значение площади параллелограмма.

б) Проведите необходимые измерения и вычислите площадь параллелограмма по соответствующей формуле. Сравните полученные результаты.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

537. Начертите прямоугольник $ABCD$ и постройте параллелограмм AB_1C_1D, равновеликий данному прямоугольнику.

538. Вырежьте из бумаги два равных равнобедренных треугольника и составьте из них:

а) ромб;

б) параллелограмм, отличный от ромба.

Сравните площади составленных фигур.

539. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если:

а) $AB = 9$ см, $BC = 4$ см;

б) $AB : BC = 5 : 7$, $P_{ABCD} = 48$ см;

в) $AD = 12$ см, $AC = 13$ см.

540. Стороны прямоугольника равны 9 см и 25 см. Найдите периметр квадрата, равновеликого данному прямоугольнику.

541. Диагональ квадрата равна $12\sqrt{2}$ м. Найдите площадь квадрата.

542. Площадь квадрата равна 32 см^2. Найдите его периметр.

543. Площадь прямоугольника равна 128 см^2. Найдите стороны прямоугольника, если одна из них в два раза больше другой.

544. В параллелограмме со стороной a, проведенной к ней высотой h_a и площадью S найдите:

а) S, если $a = 10$ см, $h_a = 6$ см;

б) a, если $S = 48$ см^2, $h_a = 4$ см;

в) h_a, если $S = 120$ см^2, $a = 24$ см.

545. Диагональ параллелограмма перпендикулярна его стороне и равна 15 см. Найдите площадь параллелограмма, если другая его сторона равна 17 см.

546. Стороны параллелограмма равны 12 см и 16 см. Найдите его высоты, если площадь параллелограмма равна 96 см^2.

547. Сторона параллелограмма и проведенная к ней высота равны соответственно 16 см и 9 см. Найдите сторону квадрата, равновеликого данному параллелограмму.

Уровень Б

548. Часть стены, имеющую форму прямоугольника со сторонами 2,25 м на 1,8 м, необходимо покрыть кафелем. Сколько плиток для этого понадобится, если плитка имеет форму квадрата со стороной 15 см?

549. Биссектриса угла прямоугольника делит его сторону на отрезки длиной 3 см и 4 см. Найдите площадь прямоугольника. Сколько решений имеет задача?

550. Стороны прямоугольника относятся как $5:12$. Найдите площадь прямоугольника, если его диагональ равна 26 см.

551. Найдите площадь параллелограмма, если:

а) его периметр равен 42 см, а длины высот — 6 см и 8 см;

б) его сторона равна 5 см, а высота, проведенная из вершины тупого угла, делит другую сторону на отрезки длиной 4 см и 6 см;

в) его стороны равны 8 см и 10 см, а острый угол — 30°.

552. Найдите площадь параллелограмма, если:

а) его диагональ перпендикулярна стороне, а высота, проведенная из вершины тупого угла, делит другую сторону на отрезки длиной 4 см и 9 см;

б) его стороны равны $4\sqrt{2}$ см и 8 см, а острый угол — 45°.

553. Площадь и периметр ромба равны соответственно 24 см^2 и 24 см. Найдите высоту ромба.

554. Диагонали ромба равны 16 см и 30 см. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного ромба.

555. Высота ромба с тупым углом 150° равна 5 см. Найдите площадь ромба.

556. На диагонали квадрата как на стороне построен другой квадрат. Докажите, что его площадь в два раза больше площади данного квадрата.

557. Точка, лежащая на диагонали квадрата, удалена от двух его сторон на 180 см и 2,2 м. Найдите площадь квадрата.

Уровень В

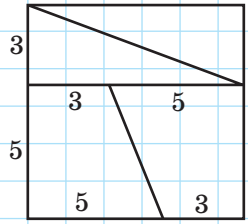
558. Стороны параллелограмма равны 12 см и 16 см, а одна из высот — 15 см. Найдите площадь параллелограмма.

559. Высоты параллелограмма равны 12 см и 16 см, а угол между ними — 30°. Найдите площадь параллелограмма.

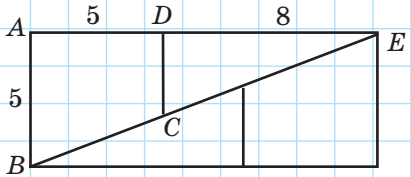
560. Найдите ошибку в «доказательстве» геометрического софизма: *64 см^2 = 65 см^2*.

«Доказательство»

Разрежем квадрат со стороной 8 см так, как показано на рисунке 147, а. Переставив полученные части в другом порядке (рис. 147, б), получим прямоугольник со сторонами 13 см и 5 см. Квадрат и прямоугольник — равносоставленные, т. е. должны быть равновеликими. Но очевидно, что площадь квадрата равна 64 см^2, а площадь прямоугольника — 65 см^2, т.е. 64 см^2 = 65 см^2.



а



б

Рис. 147

561. Диагональ ромба делит его высоту на отрезки длиной 13 см и 5 см. Найдите площадь ромба.

562. Найдите площадь ромба, если его высота и меньшая диагональ равны соответственно 12 см и 13 см.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 17

Теоретический материал

- расстояние между параллельными прямыми; 7 класс, § 15
- трапеция. 8 класс, § 5

Задачи

563. В равнобедренной трапеции биссектриса тупого угла параллельна боковой стороне. Найдите углы трапеции. На какие многоугольники данная биссектриса делит трапецию?

564. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD является высотой, $\angle A = 45°$, $AD = 4$ см. Найдите площади треугольников ABC и BCD.

§ 17. Площади треугольника и трапеции

17.1. Площадь треугольника

Теорема (формула площади треугольника)

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a,$$

где a — сторона треугольника, h_a — проведенная к ней высота.

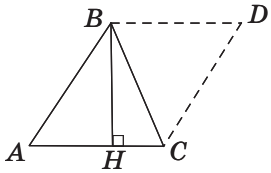


Рис. 148. К доказательству формулы площади треугольника

Доказательство

□ Пусть BH — высота треугольника ABC (рис. 148). Докажем, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

Проведем через вершины B и C прямые, параллельные сторонам треугольника, и обозначим точку их пересечения D. Таким образом, мы «достроили» треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$, в котором отрезок BH также является высотой, проведенной к стороне AC.

По формуле площади параллелограмма $S_{ABDC} = AC \cdot BH$. Треугольники ABC и DCB равны по трем сторонам (у них сторона BC общая, $AB = DC$ и $AC = DB$ как противолежащие стороны параллелограмма). Эти треугольники имеют равные площади. Тогда площадь треугольника ABC составляет половину площади параллелограмма $ABDC$, т. е. $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABDC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$, что и требовалось доказать. ■

Следствие 1

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов:

$$S = \frac{1}{2}ab,$$

где a и b — катеты прямоугольного треугольника.

Действительно, в прямоугольном треугольнике высота, проведенная к катету, совпадает с другим катетом.

Следствие 2

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2,$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба.

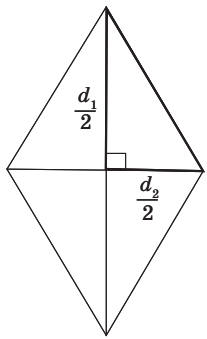


Рис. 149. К вычислению площади ромба

Действительно, диагонали делят ромб на четыре равных прямоугольных треугольника с катетами $\frac{1}{2}d_1$ и $\frac{1}{2}d_2$ (рис. 149). Используя следствие 1, имеем:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}d_1 \cdot \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{2}d_1 d_2.$$

Следствие 3

Площадь равностороннего треугольника со стороной a вычисляется по формуле

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Обоснуйте это следствие самостоятельно.

Опорная задача

Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника. Докажите.

Решение

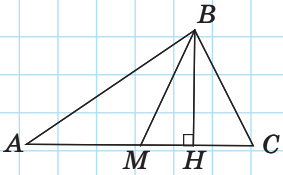


Рис. 150

Пусть BM — медиана треугольника ABC (рис. 150). Проведем высоту BH треугольника ABC. Этот отрезок является одновременно высотой треугольника ABM, проведенной к стороне AM, и высотой треугольника MBC, проведенной к стороне MC. Учитывая равенство отрезков AM и MC, имеем:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BH = \frac{1}{2} MC \cdot BH = S_{MBC}.$$

Эта задача имеет интересные обобщения:

если высоты двух треугольников равны, то отношение площадей этих треугольников равно отношению их оснований;

если основания двух треугольников равны, то отношение площадей этих треугольников равно отношению их высот.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

17.2. Площадь трапеции

Часто для вычисления площади некоторого многоугольника его разбивают на несколько треугольников и находят искомую площадь как сумму площадей этих треугольников. Именно такой подход можно применить для вывода формулы площади трапеции.

Теорема (формула площади трапеции)

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

где a и b — основания трапеции, h — высота трапеции.

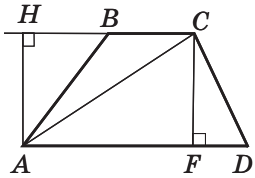


Рис. 151. К доказательству формулы площади трапеции

Доказательство

□ Пусть дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC и высотой h. Диагональ AC делит ее на два треугольника ABC и ACD (рис. 151). Проведем высоты этих треугольников AH и CF. Обе они являются высотами трапеции, т. е. равны h. Имеем:

$$S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot h + \frac{1}{2} BC \cdot h =$$

$$= \frac{AD + BC}{2} \cdot h = \frac{a + b}{2} \cdot h.$$

Теорема доказана. ■

Следствие

Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

17.3*. Решение задач на вычисление площадей

Решение задач на вычисление площадей многоугольников чаще всего сводится к поиску величин отдельных элементов рассматриваемых фигур и дальнейшему применению соответствующих формул площадей.

Во многих задачах наряду с сугубо геометрическими приемами решения (дополнительные построения, применение равенства фигур и т. п.) используются и методы алгебры (составление уравнений или систем уравнений на основе метрических соотношений между элементами фигуры).

В ходе решения особое внимание следует уделить тому, однозначно ли данные задачи определяют взаимное расположение элементов фигуры.

Задача

Найдите площадь трапеции, в которой одно из оснований равно 24 см, высота 12 см, а боковые стороны — 13 см и 20 см.

Решение

Пусть BH и CF — высоты данной трапеции, проведенные из концов основания BC к другому основанию. Пусть $BC = 24$ см, $BH = CF = 12$ см. Проще всего достроить трапецию $ABCD$ так, чтобы точки H и F лежали на основании AD. Но этот вариант — только один из возможных, ведь в условии задачи не говорится о том, принадлежат ли точки H и F отрезку AD. Поскольку из точки, лежащей вне данной прямой, можно провести к этой прямой две равные наклонные заданной длины, то каждую из боковых сторон трапеции можно построить двумя способами: $AB = A_1B = 13$ см, $CD = CD_1 = 20$ см. Следовательно, данную трапецию по условию задачи можно построить четырьмя разными способами (рис. 152, а—г).

По построению четырехугольник $HBCF$ является прямоугольником, откуда $HF = BC = 24$ см.

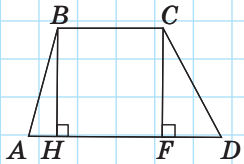
Рассмотрим четыре случая.

1) Для трапеции $ABCD$ (рис. 152, а): из треугольника ABH по теореме Пифагора имеем $AH = 5$ см, аналогично из треугольника DCF имеем $DF = 16$ см; тогда $AD = AH + HF + FD = 45$ см,

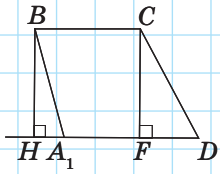
$$S_{ABCD} = \frac{24 + 45}{2} \cdot 12 = 414 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2) Для трапеции A_1BCD (рис. 152, б): из треугольника A_1BH по теореме Пифагора имеем $A_1H = 5$ см, аналогично из треугольника DCF имеем $DF = 16$ см; тогда $A_1D = HF + FD - A_1H = 35$ см,

$$S_{ABCD} = \frac{24 + 35}{2} \cdot 12 = 354 \text{ (см}^2\text{)}.$$

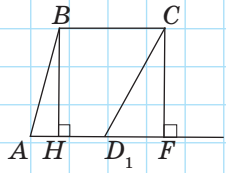


а

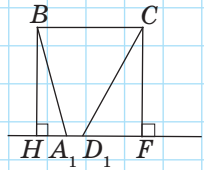


б

Рис. 152. См. также с. 178



в



г

Рис. 152. Окончание

3) Для трапеции $ABCD_1$ (рис. 152, в): из треугольника ABH по теореме Пифагора имеем $AH = 5$ см, аналогично из треугольника D_1CF имеем $D_1F = 16$ см; тогда $AD_1 = AH + HF - D_1F = 13$ см,

$$S_{ABCD} = \frac{24+13}{2} \cdot 12 = 222 \text{ (см}^2\text{)}.$$

4) Для трапеции A_1BCD_1 (рис. 152, г): из треугольника A_1BH по теореме Пифагора имеем $A_1H = 5$ см, аналогично из треугольника D_1CF имеем $D_1F = 16$ см; тогда $A_1D_1 = HF - A_1H - D_1F = 3$ см, т.е. точки H, A_1, B_1, F расположены на прямой в указанном порядке.

$$S_{ABCD} = \frac{24+3}{2} \cdot 12 = 162 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 414 см², или 354 см², или 222 см², или 162 см².

Рассмотренная задача наглядно демонстрирует одну из причин, по которым в процессе решения геометрической задачи может возникать многовариантность. Но даже если такая ситуация не возникает, взаимное расположение элементов фигур нуждается в обосновании.

Задача

Основания трапеции равны 10 см и 35 см, а боковые стороны — 15 см и 20 см. Найдите площадь трапеции.

Прежде всего заметим, что решение данной задачи фактически сводится к нахождению высоты трапеции. Итак, пусть дана трапеция $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AB = 15$ см, $BC = 10$ см, $CD = 20$ см, $AD = 35$ см.

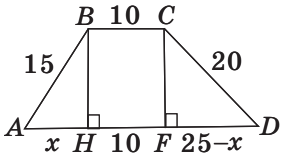


Рис. 153

Естественно было бы провести, как в предыдущей задаче, высоты BH и CF (рис. 153) и составить уравнение на основании теоремы Пифагора, примененной к треугольникам ABH и DCF: $15^2 - x^2 = 20^2 - (25-x)^2$. Такое решение

позволит получить правильный ответ, но не будет полным, ведь принадлежность точек H и F отрезку AD нужно обосновать. Попробуем избежать необходимости такого обоснования, применив для решения другое дополнительное построение.

Решение

Проведем через вершину C прямую CE, параллельную AB (рис. 154). Поскольку по построению $ABCE$ — параллелограмм, то $CE = AB = 15$ см, $AE = BC = 10$ см, следовательно, $ED = 35 - 10 = 25$ (см). Стороны треугольника ECD пропорциональны числам 3, 4, 5, следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, он является прямоугольным с гипотенузой ED.

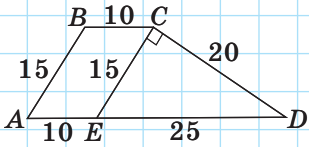


Рис. 154

По формуле $h = \frac{ab}{c}$ находим высоту этого треугольника, которая одновременно является и высотой трапеции: $h = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12$ (см). Следовательно, $S = \frac{10 + 35}{2} \cdot 12 = 270$ (см^2).

Ответ: 270 см^2.

Как видим, этот способ намного более рационален, в частности, с точки зрения вычислений. Рассмотрим еще одну задачу, для решения которой используется дополнительное построение.

Задача

Диагонали трапеции равны 30 см и 40 см и пересекаются под прямым углом. Найдите площадь трапеции.

Попробуем решить эту задачу чисто геометрическими методами. Основная сложность

заключается в том, что данные отрезки не являются сторонами одного треугольника. Попробуем «исправить» эту ситуацию.

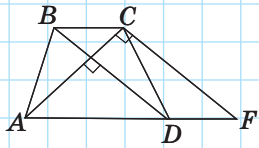


Рис. 155

Решение

Пусть дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$, $AC = 30$ см, $BD = 40$ см.

Проведем через вершину C прямую CF, параллельную диагонали BD (рис. 155). Очевидно, что по построению угол ACF будет прямым, т.е. треугольник ACF прямоугольный с гипотенузой AF. С другой стороны, $DBCF$ — параллелограмм, тогда $DF = BC$, $CF = BD = 40$ см.

Обратим внимание на то, что треугольники ABC и DCF равновеликие, поскольку $DF = BC$, а высоты, проведенные к этим сторонам, являются высотами трапеции. Таким образом, $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = S_{ACD} + S_{DCF} = S_{ACF}$, т.е. искомая площадь трапеции равна площади треугольника ACF, которая, в свою очередь, равна полупроизведению его катетов: $S = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600$ (см^2).

Ответ: 600 см^2.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

565. Площадь треугольника ABC равна S. Чему равна площадь параллелограмма $ABCD$, три вершины которого совпадают с вершинами данного треугольника?

566. По какой формуле целесообразно вычислять площадь прямоугольного треугольника, если известны:

а) длины гипотенузы и проведенной к ней высоты;

б) длины двух катетов?

567. Два равновеликих треугольника имеют равные высоты. Означает ли это, что основания данных треугольников также равны?

568. Две равновеликие трапеции имеют равные высоты. Означает ли это, что основания данных трапеций также соответственно равны?

569. Может ли диагональ трапеции делить ее на два равновеликих треугольника? Ответ обоснуйте.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

570. Начертите остроугольный треугольник и проведите в нем высоту. Выполните необходимые измерения и вычислите:

а) площадь данного треугольника;

б) площади треугольников, на которые данный треугольник делится высотой.

571. Начертите трапецию и проведите в ней диагональ. Выполните необходимые измерения и вычислите:

а) площадь данной трапеции;

б) площади треугольников, на которые данная трапеция делится диагональю.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

572. По данным рисунка 156 найдите площадь треугольника ABC.

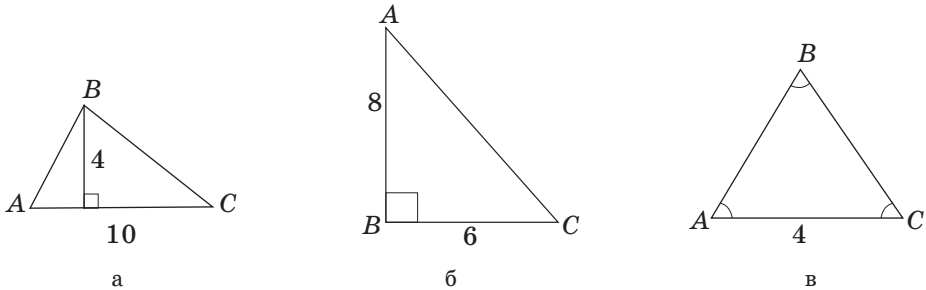


Рис. 156

573. Найдите площадь:

а) равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см;

б) треугольника ABC, в котором $AB = 17$ см, а высота BH делит сторону AC на отрезки $AH = 8$ см и $HC = 2$ см.

574. Найдите площадь:

а) прямоугольного треугольника с гипотенузой 20 см и катетом 12 см;

б) остроугольного треугольника ABC с высотой $AH = 4$ см, если $BH = 2$ см, $\angle C = 45°$.

575. Площадь треугольника равна 150 см^2. Найдите периметр треугольника, если его высоты равны 15 см, 12 см и 20 см.

576. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его площадь равна 20 см^2, а высота, проведенная из вершины прямого угла,— 4 см.

577. На рисунке 157, *а* дан единичный квадрат. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

578. На рисунке 157, *б* дан единичный квадрат. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

Рис. 157

579. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 8 м и 20 м.

580. Найдите диагонали ромба, если одна из них в два раза больше другой, а площадь ромба равна 64 см^2.

581. Точка D — середина высоты BH треугольника ABC. Докажите, что площадь треугольника ADC составляет половину площади треугольника ABC.

582. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOB и AOD равновеликие.

583. Найдите площадь трапеции, если:

а) ее основания равны 4 см и 10 см, а высота — 6 см;

б) высота трапеции и ее средняя линия равны 8 см.

584. Основания равнобедренной трапеции равны 8 см и 16 см, а острые углы — 45°. Найдите площадь трапеции.

585. Основания прямоугольной трапеции равны 6 см и 10 см, а бóльшая боковая сторона — 5 см. Найдите площадь трапеции.

Уровень Б

586. Найдите площадь:

а) треугольника ABC с высотой BH, если $AB = 13$ см, $BC = 15$ см, $BH = 12$ см, а точка H лежит на отрезке AC;

б) прямоугольного треугольника, гипотенуза которого делится высотой на отрезки длиной 9 см и 4 см;

в) равностороннего треугольника с высотой $2\sqrt{3}$ см.

587. Найдите площадь:

а) равнобедренного треугольника с периметром 16 см и высотой 4 см, проведенной к основанию;

б) прямоугольного треугольника с гипотенузой 20 см и отношением катетов $3 : 4$.

588. Биссектриса прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 15 см и 20 см. Найдите площадь треугольника.

589. Площадь закрашенного треугольника равна S (рис. 158). По данным рисунка выразите через S площадь заштрихованной фигуры.

590. Площадь закрашенного треугольника равна S (рис. 159). По данным рисунка выразите через S площадь заштрихованной фигуры.

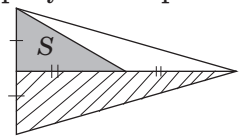


Рис. 158

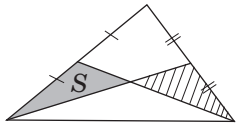


Рис. 159

591. Площадь ромба равна 24 см², а одна из его диагоналей — 8 см. Найдите периметр ромба.

592. Найдите площадь ромба с периметром 24 см и тупым углом 150°.

593. Докажите, что медианы треугольника, пересекаясь, делят данный треугольник на шесть равновеликих треугольников.

594. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC. Докажите, что все треугольники с основанием BC и вершиной на данной прямой равновеликие.

595. Докажите, что диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих треугольника.

596. Найдите площадь:

а) равнобедренной трапеции с основаниями 15 см и 39 см, в которой диагональ перпендикулярна боковой стороне;

б) прямоугольной трапеции с боковыми сторонами 12 см и 13 см, диагональ которой является биссектрисой острого угла.

597. Найдите площадь равнобедренной трапеции с основаниями 14 см и 50 см и диагональю 40 см.

Уровень В

598. Постройте треугольник, равновеликий данной трапеции.

599. Постройте параллелограмм, равновеликий данному треугольнику.

600. Площадь выпуклого четырехугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей. Докажите.

601. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведите две прямые, которые делят параллелограмм на три равновеликие части.

602. В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Определите, какую часть площади треугольника ABC составляет:

а) площадь треугольника AOC;

б) площадь четырехугольника BA_1OC_1.

603. По данным рисунка 160 найдите площадь:

а) заштрихованной фигуры (рис. 160, *а*), если $ABCD$ — параллелограмм;

б) треугольника ABC (рис. 160, *б*).

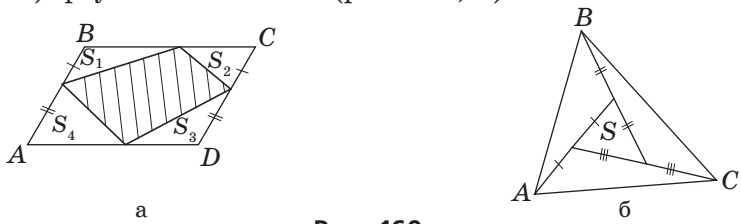


Рис. 160

604. Найдите площадь равнобедренной трапеции с боковой стороной 10 см, описанной около окружности с радиусом 4 см.

605. Боковые стороны и высота трапеции равны соответственно 25 см, 30 см и 24 см. Найдите площадь трапеции, если биссектрисы ее тупых углов пересекаются на большем основании.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 18

Теоретический материал

- средняя линия треугольника; 8 класс, § 6, п. 6.2
- подобие треугольников. 8 класс, § 10, 11

Задачи

606. Точки D, E, F — середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC соответственно. Пользуясь равенством треугольников, докажите, что площадь треугольника DBE составляет треть площади трапеции $ADEC$.

607. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны 2 см и 8 см соответственно. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите отношения:

а) $\frac{CO}{AC}$;

б) $\frac{OD}{BD}$;

в) отрезков, на которые точка O делит высоту трапеции;

г) площадей треугольников BOC и AOD (выскажите предположение).

§ 18. Применение площадей

18.1. Отношение площадей подобных треугольников

Теорема (об отношении площадей подобных треугольников)

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство

□ Пусть $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ с коэффициентом k, т. е. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$. Докажем, что $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$.

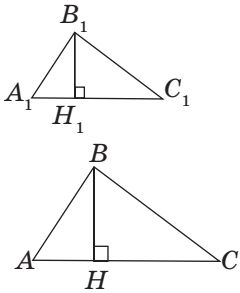


Рис. 161. К доказательству теоремы об отношении площадей подобных треугольников

Проведем в данных треугольниках высоты BH и B_1H_1 (рис. 161). Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ подобны, поскольку $\angle A = \angle A_1$. Это означает, что $\frac{BH}{B_1H_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$, т. е. $BH = kB_1H_1$. Учитывая, что $AC = kA_1C_1$, имеем:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{0{,}5\,AC \cdot BH}{0{,}5\,A_1C_1 \cdot B_1H_1} = \frac{0{,}5 \cdot k\,A_1C_1 \cdot k\,B_1H_1}{0{,}5\,A_1C_1 \cdot B_1H_1} = k^2. \blacksquare$$

Задача

Средняя линия отсекает от данного треугольника треугольник с площадью 8 см². Найдите площадь данного треугольника.

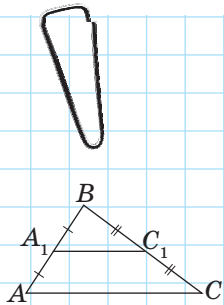


Рис. 162

Решение

Пусть A_1C_1 — средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC (рис. 162), $S_{A_1BC_1} = 8$ см². Треугольники ABC и A_1BC_1 подобны по двум сторонам и углу между ними,

причем $\frac{AB}{A_1B} = \frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2$. Тогда по доказанной теореме $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1BC_1}} = 4$, т.е. $S_{ABC} = 4S_{A_1BC_1}$, откуда $S_{ABC} = 4 \cdot 8 = 32$ (см^2).

Ответ: 32 см^2.

18.2. Метод площадей

Понятия площади и формулы ее вычисления могут применяться даже в тех задачах, в условиях которых площадь не упоминается. Рассмотрим такой пример.

Задача

Стороны параллелограмма равны 16 см и 12 см. Высота параллелограмма, проведенная к большей стороне, равна 3 см. Найдите высоту, проведенную к меньшей стороне.

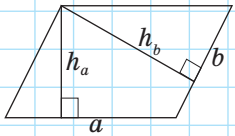


Рис. 163

Решение

Пусть дан параллелограмм со сторонами $a = 16$ см и $b = 12$ см, к которым проведены высоты $h_a = 3$ см и h_b, длину которой необходимо найти (рис. 163). По формуле площади параллелограмма $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$, откуда $h_b = \frac{S}{b} = \frac{a \cdot h_a}{b}$.

Таким образом, $h_b = \frac{16 \cdot 3}{12} = 4$ (см).

Ответ: 4 см.

При решении этой задачи площадь параллелограмма вычислялась двумя разными способами. Поскольку площадь многоугольника независимо от способа ее вычисления определяется однозначно, то полученные выражения приравнивались, благодаря чему удалось связать известные величины

с искомой. Такой метод, основанный на использовании площади как вспомогательной величины, называется ***методом вспомогательной площади*** или просто ***методом площадей***.

Заметим, что из формул площади параллелограмма $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ и площади треугольника $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ следует важное утверждение:

в параллелограмме (треугольнике) большей является высота, проведенная к меньшей стороне, меньшей — высота, проведенная к большей стороне.

Метод площадей используется как в задачах на вычисление, так и для доказательства утверждений.

Задача

Сумма расстояний от точки, взятой внутри равностороннего треугольника, до его сторон не зависит от выбора точки и равна высоте треугольника. Докажите.

Решение

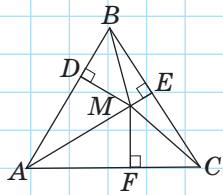


Рис. 164

Пусть точка M лежит внутри равностороннего треугольника ABC со стороной a, MD, ME и MF — расстояния от данной точки до сторон треугольника (рис. 164). Соединим точку M с вершинами треугольника. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AMB, BMC и AMC, в которых отрезки MD, ME и MF являются высотами. Имеем:

$$\frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot MD + \frac{1}{2} a \cdot ME + \frac{1}{2} a \cdot MF =$$

$$= \frac{1}{2} a (MD + ME + MF).$$

Отсюда $MD + ME + MF = h$, т.е. сумма рассматриваемых расстояний равна высоте треугольника и не зависит от выбора точки M.

18.3*. Другие доказательства теоремы Пифагора

Исторически появление и доказательство теоремы Пифагора связаны с вычислением площадей. Поэтому в классической формулировке этой теоремы речь идет не о квадратах сторон прямоугольного треугольника, а о площадях соответствующих фигур:

площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

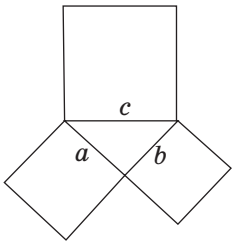


Рис. 165. «Пифагоровы штаны»

Рисунок 165, который наглядно воплощает эту формулировку, стал своеобразным символом геометрии и среди гимназистов позапрошлого столетия получил название «пифагоровы штаны». Шутливый стишок про «пифагоровы штаны» школьники запоминали на всю жизнь.

Докажем теорему Пифагора с помощью площадей.

Доказательство

□ Пусть дан прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c (рис. 166, *а*). Достроим его до квадрата со стороной $a+b$ так, как показано на рисунке 166, *б*. Площадь этого квадрата равна $(a+b)^2$. Построенный квадрат состоит из четырех равных прямоугольных треугольников площадью $\frac{1}{2}ab$ и четырехугольника со сторонами длиной c, который является квадратом (докажите это самостоятельно). Итак, имеем:

$$S=(a+b)^2=4\cdot\frac{1}{2}ab+c^2;$$

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2,$$

т. е. $a^2+b^2=c^2$. Теорема доказана. ■

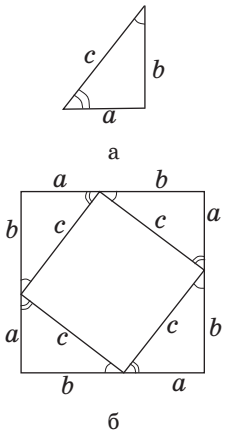
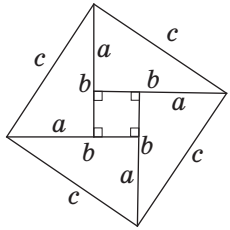


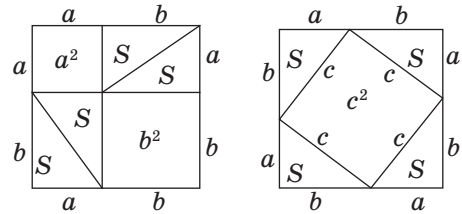
Рис. 166. К доказательству теоремы Пифагора с помощью площадей (см. также с. 190)

На рисунках 166, *в*, *г* показаны другие способы доказательства теоремы Пифагора с помощью площадей. В трактатах индийского математика XII ст. Бхаскари один из них сопровождался только одним словом: «Смотри!». В целом сегодня известно более 150 разных способов доказательства этой знаменитой теоремы. Но каждый из вас может изобрести и свой собственный способ.



$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (b-a)^2$

в



$4S + a^2 + b^2 = 4S + c^2$

г

Рис. 166. Окончание

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

608. Определите, как изменится площадь треугольника, если каждую его сторону:

а) увеличить в 4 раза;

б) уменьшить в 3 раза;

в) уменьшить в n раз.

609. Определите, как надо изменить каждую сторону треугольника, чтобы его площадь:

а) уменьшилась в 25 раз;

б) увеличилась в 49 раз;

в) увеличилась в n^2 раз.

610. Отношение площадей двух треугольников равно 4. Означает ли это, что данные треугольники подобны с коэффициентом 2?

611. В треугольнике со сторонами a, b и c к этим сторонам проведены высоты h_a, h_b и h_c соответственно. Сравните:

а) стороны треугольника, если $h_a < h_b < h_c$;

б) высоты треугольника, если $c < a < b$;

в) стороны a и c, если $a < b$, $h_b > h_c$.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

612. Начертите прямоугольный треугольник и проведите в нем среднюю линию, параллельную одному из катетов.

а) Измерьте катеты данного треугольника и вычислите его площадь.

б) Пользуясь теоремой о площадях подобных треугольников, вычислите площадь треугольника, отсекаемого от данного средней линией.

в) Вычислите площадь треугольника, отсекаемого от данного средней линией, измерив его гипотенузу и высоту. Сравните полученные результаты.

613. Начертите произвольный треугольник и проведите его высоты. Измерьте стороны и высоты треугольника и вычислите его площадь тремя способами. Сравните полученные результаты.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

614. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, причем $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$. Найдите:

а) S_{ABC}, если $S_{A_1B_1C_1} = 9$ см^2;

б) $S_{A_1B_1C_1}$, если $S_{ABC} = 9$ см^2.

615. Стороны равносторонних треугольников равны 2 см и 6 см. Найдите отношение их площадей.

616. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Найдите:

а) сторону A_1B_1, если $S_{ABC} = 24$ см^2, $S_{A_1B_1C_1} = 6$ см^2, $AB = 8$ см;

б) площадь треугольника ABC, если $BC = 2$ см, $B_1C_1 = 6$ см, $S_{A_1B_1C_1} = 18$ см^2.

617. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите площадь треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

618. Найдите площадь треугольника, если треугольник, образованный средними линиями данного треугольника, имеет площадь 5 см^2.

619. Высоты треугольника равны 21 см, 28 см и 60 см. Найдите периметр треугольника, если его наибольшая сторона равна 1 м.

620. Две стороны треугольника равны 12 см и 18 см. Найдите высоту, проведенную к меньшей из них, если высота, проведенная к большей стороне, равна 4 см.

621. Высоты параллелограмма равны 6 см и 4 см, а меньшая сторона — 8 см. Найдите периметр параллелограмма.

622. Пользуясь методом площадей, докажите, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к боковым сторонам, равны.

623. Докажите методом площадей, что треугольник с равными высотами является равносторонним.

Уровень Б

624. Два треугольника подобны с коэффициентом 3, причем площадь одного из них на 24 см^2 больше площади другого. Найдите площади этих треугольников.

625. Площади двух подобных треугольников равны 75 м^2 и 300 м^2. Периметр первого треугольника равен 54 м. Найдите периметр второго треугольника.

626. Соответствующие стороны двух подобных треугольников относятся как 2 : 3. Площадь второго треугольника равна 81 см^2. Найдите площадь первого треугольника.

627. На плане земельный участок имеет форму треугольника с площадью 2,5 см^2. Найдите площадь участка, если масштаб плана 1 : 1000.

628. Периметр параллелограмма равен 56 см. Найдите стороны параллелограмма, если его высоты равны 6 см и 8 см.

629. Диагонали ромба равны 30 см и 40 см. Пользуясь методом площадей, найдите высоту ромба.

630. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если они относятся как 3 : 4, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см.

631. Докажите методом площадей, что параллелограмм с равными высотами является ромбом.

632. Докажите методом площадей метрическое соотношение в прямоугольном треугольнике: $h_c = \frac{ab}{c}$.

Уровень В

633. Прямая, параллельная стороне треугольника, делит его на две равновеликие части. В каком отношении эта прямая делит две другие стороны треугольника?

634. Постройте прямую, параллельную стороне треугольника, которая делит площадь треугольника в отношении 9 : 16.

635. Докажите, что стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам: $a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$.

636. Сумма расстояний от точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон не зависит от выбора точки. Докажите.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 19

Теоретический материал

- прямоугольный треугольник;
- подобие прямоугольных треугольников.

7 класс, § 17

8 класс, § 12

Задачи

637. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A=30°$, BM — медиана, проведенная к гипотенузе. Докажите, что треугольник MBC равносторонний.

638. Найдите углы равнобедренного треугольника, в котором боковая сторона равна 12,6 см, а медиана, проведенная к основанию,— 6,3 см.

Задачи для подготовки к контрольной работе № 4

1. Определите количество сторон выпуклого многоугольника, сумма углов которого равна 1080°.

2. Площадь квадрата равна 144 см^2. Найдите площадь прямоугольника, ширина которого меньше стороны квадрата на 2 см, а длина больше стороны квадрата в два раза.

3. В равнобедренном треугольнике боковая сторона относится к основанию как 5 : 6. Найдите площадь треугольника, если высота, проведенная к основанию, равна 8 см.

4. Найдите углы ромба, если его высота равна 5 см, а площадь — 50 см^2.

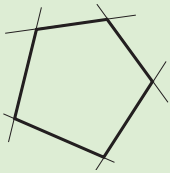
5. Высоты данного параллелограмма равны 15 см и 18 см. Найдите высоты равновеликого параллелограмма, стороны которого в три раза больше соответствующих сторон данного параллелограмма.

6. Докажите, что площадь трапеции с боковой стороной c и радиусом вписанной окружности r вычисляется по формуле $S=2cr$.

Итоги главы III

ИТОГОВЫЙ ОБЗОР ГЛАВЫ III

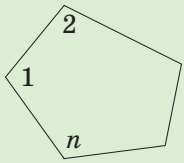
МНОГОУГОЛЬНИК



Многоугольник называется ***выпуклым***, если он лежит по одну сторону от любой прямой, содержащей его сторону

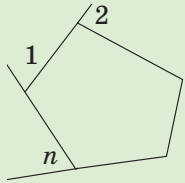
Сумма углов многоугольника

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.



$$\angle 1+\angle 2+\ldots+\angle n=180°(n-2)$$

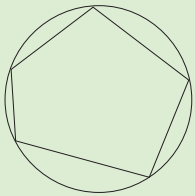
Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$.



$$\angle 1+\angle 2+\ldots+\angle n=360°$$

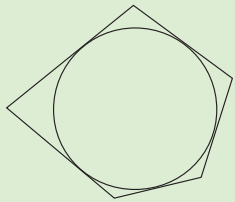
Вписанный многоугольник

Многоугольник называется ***вписанным в окружность***, если все его вершины лежат на этой окружности



Описанный многоугольник

Многоугольник называется ***описанным около окружности***, если все его стороны касаются этой окружности

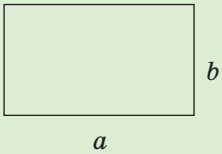
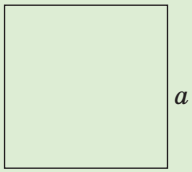
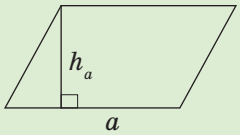


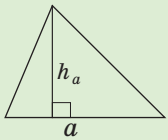
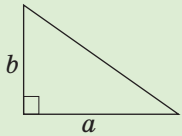
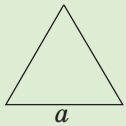
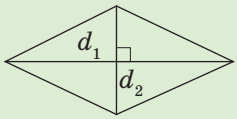
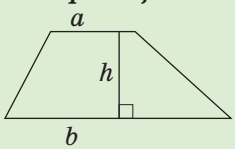
ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Аксиомы площадей

1. Равные многоугольники имеют равные площади.
2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
3. Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, равна единице площади

Две фигуры называются ***равновеликими***, если они имеют равные площади

Фигура	Формула площади
Прямоугольник 	$S = ab$, где a и b — стороны прямоугольника
Квадрат 	$S = a^2$, где a — сторона квадрата
Параллелограмм 	$S = ah_a$, где a — сторона параллелограмма, h_a — проведенная к ней высота

Фигура	Формула площади
Треугольник 	$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, где a — сторона треугольника, h_a — проведенная к ней высота
Прямоугольный треугольник 	$S = \frac{1}{2} ab$, где a и b — катеты прямоугольного треугольника
Равносторонний треугольник 	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника
Ромб 	$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$, где d_1 и d_2 — диагонали ромба
Трапеция 	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b — основания трапеции, h — высота трапеции
Теорема об отношении площадей подобных треугольников Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия	

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ III

1. Дайте определение многоугольника. Какой многоугольник называется выпуклым?
2. Дайте определение описанного многоугольника; вписанного многоугольника.
3. Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов выпуклого многоугольника.
4. Назовите аксиомы площадей. По каким формулам вычисляются площади прямоугольника и квадрата?
5. Докажите формулу площади параллелограмма.
6. Докажите формулу площади треугольника. Запишите формулы площадей прямоугольного треугольника; равностороннего треугольника; ромба.
7. Докажите формулу площади трапеции.
8. Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей подобных треугольников.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

639. Докажите, что среди всех параллелограммов с данными сторонами наибольшую площадь имеет прямоугольник.
640. Параллелограмм и треугольник равновеликие и имеют общую сторону. Сравните их высоты, проведенные к этой стороне.
641. Через вершину треугольника проведите две прямые, которые делят треугольник на три равновеликие части.
642. Пользуясь рисунком 167, докажите методом площадей свойство биссектрисы треугольника.

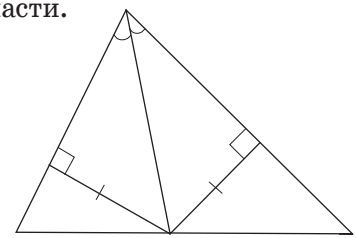


Рис. 167

643. Основания трапеции относятся как 2 : 3, а ее площадь равна 50 см^2. Найдите площади:

а) двух треугольников, на которые данная трапеция делится диагональю;
б) четырех треугольников, на которые данная трапеция делится диагоналями.

644 (опорная). ***Диагонали делят трапецию на четыре треугольника, два из которых равновеликие, а площади двух других относятся как квадраты оснований.*** Докажите.

645. Если диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $S_{AOB} = S_{COD}$, то $ABCD$ — параллелограмм или трапеция. Докажите.

646. Две стороны треугольника равны 25 см и 40 см, а высота, проведенная к третьей стороне, равна 24 см. Найдите площадь треугольника. Сколько решений имеет задача?

647. Дан треугольник ABC. Постройте:

а) равнобедренный треугольник с основанием AB, равновеликий треугольнику ABC;

б) прямоугольный треугольник с гипотенузой AB, равновеликий треугольнику ABC. В каком случае это сделать невозможно?

648. Разрежьте трапецию на три части, из которых можно составить прямоугольник.

Задачи повышенной сложности

649. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Докажите, что данный треугольник прямоугольный.

650. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые точка касания вписанной окружности делит гипотенузу.

651. Отрезки BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle A = \alpha$. Найдите площадь треугольника AB_1C_1, если площадь треугольника ABC равна S.

652. Вычислите площадь треугольника по двум взаимно перпендикулярным медианам m_a и m_b.

653. Докажите, что:

а) площадь описанной прямоугольной трапеции равна произведению ее оснований;

б) высота описанной равнобедренной трапеции является средним пропорциональным ее оснований.

654. Докажите, що для треугольника со сторонами a, b и c и площадью S выполняется неравенство $S < \frac{ab+bc+ac}{6}$.

655. Стороны треугольника DEF равны медианам треугольника ABC. Докажите, что $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$.

656. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь трапеции, если $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$.

657. Докажите, что площадь трапеции $ABCD$ равна произведению боковой стороны AB на перпендикуляр, проведенный из середины M другой боковой стороны CD к прямой AB.

658. Внутри треугольника ABC выбрана точка M так, что треугольники AMB, BMC и AMC равновеликие. Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Историческая справка

Вычисление площадей многоугольников — первая среди тех практических задач, благодаря которым появилась геометрия как наука. Но не всегда представление об измерении площадей было таким, как сегодня.

Например, древние египтяне при вычислении площади любого треугольника брали половину произведения двух его сторон. Так же пять столетий назад измеряли площадь треугольника и в Древней Руси. Чтобы найти площадь четырехугольника, который не является квадратом, в Вавилоне использовали формулу произведения полусумм его противолежащих сторон.

В Средние века для вычисления площади треугольника со стороной и проведенной к ней высотой, которые выражаются целым числом n, брали сумму членов натурального ряда от 1 до n, т.е. число $\frac{n(n+1)}{2}$.

Архимед

Кстати, в то время знали и правильную формулу площади этого треугольника $\frac{n^2}{2}$. Ее обосновал средневековый математик **Герберт**, который в X ст. даже занимал какое-то время престол Римского Папы под именем Сильвестра II.

Древние вавилоняне еще четыре тысячи лет назад умели правильно вычислять площадь квадрата, прямоугольника, трапеции. Немало формул площадей и объемов, с которыми вы познакомитесь в старших классах, открыл знаменитый греческий ученый **Архимед** (ок. 287–212 гг. до н. э.). И это все при том, что в те древние времена не было даже алгебраической символики!

Сегодня, благодаря значительно более широкому применению алгебры в геометрии, мы имеем возможность дать куда более простые и понятные решения многих задач, чем это было возможно в те далекие времена.

ТЕМАТИКА СООБЩЕНИЙ И РЕФЕРАТОВ К ГЛАВЕ III

1. Как измеряли в древние времена? (Из истории измерения площадей.)
2. Способы доказательства теоремы Пифагора.
3. Деление площадей и преобразование равновеликих фигур.
4. Метод площадей в геометрических доказательствах и задачах.
5. Площади и равносоставленные фигуры в математических головоломках.

РЕКОМЕНДОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ

1. Болтянский, В. Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры : Популярные лекции по математике [Текст]. — М. : ГИТТЛ, 1956.
2. Гарднер, М. Математические головоломки и развлечения [Текст] / М. Гарднер ; пер. с англ. Ю. А. Данилова. — М. : Оникс, 1994.
3. Глейзер, Г. И. История математики в школе. VII—VIII классы : Пособие для учителей [Текст] / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982. — 240 с.
4. Литцман, В. Теорема Пифагора [Текст] / В. Литцман ; под ред. И. М. Яглома ; пер. с нем. В. С. Бермана. — 3-е изд. — М. : Физматгиз, 1960. — 114 с.
5. Перельман, Я. И. Занимательная геометрия [Текст] / Я. И. Перельман ; под ред. Б. А. Корденского. — М. : Физматгиз, 1959. — 302 с.
6. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
7. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 2 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 240 с. — (Б-ка мат. кружка).
8. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. 9—11 классы : От учебной задачи к творческой: Учеб. пособие [Текст] / И. Ф. Шарыгин. — М. : Дрофа, 1996. — (Задачники «Дрофы»).
9. Кушнір, І. А. Повернення втраченої геометрії [Текст] / І. А. Кушнір. — К. : Факт, 2000. — 280 с. — (Серія «Математичні обрії України»).
10. Математична хрестоматія для старших класів. Геометрія. Т. 2 [Текст] / упоряд. Л. В. Кованцова. — К. : Рад. шк., 1969. — 383 с.
11. Математична хрестоматія для 6—8 класів. Т. 1 [Текст]. — К. : Рад. шк., 1968. — 320 с.
12. Интернет-библиотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/

Глава IV
РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Занятие геометрией незаметно приводит человеческий разум к открытиям.

Дени Дидро,
французский философ

Из этой главы вы узнаете, как решать прямоугольные треугольники, т. е. находить их неизвестные стороны и углы по известным. Необходимые для этого теоретические знания можно почерпнуть из раздела математики, родственного как с геометрией, так и с алгеброй, — из тригонометрии. Собственно, само слово «тригонометрия» в переводе с греческого означает «измерение треугольников». Поэтому отношения сторон прямоугольного треугольника, с которыми вы познакомитесь далее, получили название тригонометрических функций.

Соотношения, которые будут применяться в этой главе, в полной мере можно считать проявлением подобия треугольников. Вообще, подобие треугольников, теорема Пифагора и площадь — это те три кита, на которых держится геометрия многоугольника. Именно исследование взаимосвязей между этими теоретическими фактами и составляет основное содержание курса геометрии в восьмом классе.

§ 19. Тригонометрические функции острого угла

19.1. Синус, косинус и тангенс

Как уже было доказано, все прямоугольные треугольники, имеющие по равному острому углу, подобны. Свойство подобия обусловливает не только равенство отношений пропорциональных сторон этих треугольников, но и равенство отношений между катетами и гипотенузой каждого из этих треугольников. Именно эти отношения и будут предметом дальнейшего рассмотрения.

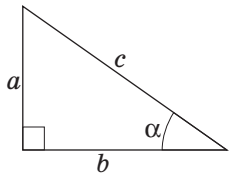


Рис. 168. К определениям тригонометрических функций угла α

Пусть дан прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c и острым углом α (рис. 168).

Определение

Синусом острого угла α прямоугольного треугольника (обозначается $\sin\alpha$) называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинусом острого угла α прямоугольного треугольника (обозначается $\cos\alpha$) называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Тангенсом острого угла α прямоугольного треугольника (обозначается $\mathrm{tg}\,\alpha$) называется отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}.$$

Синус — латинский перевод арабского слова «джайб» — пазуха, вырез ткани. Это слово, в свою очередь, происходит от индийского «джива» — тетива лука, хорда. Именно так синус называли в древнеиндийских математических трактатах

Косинус — от латинского «комплиментари синус» — дополнительный синус.

Тангенс — в переводе с латинского «касательный»

Кроме синуса, косинуса и тангенса, рассматривают также **котангенс** острого угла α прямоугольного треугольника (обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$), который равен отношению прилегающего катета к противолежащему:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Поскольку катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы, то ***синус и косинус острого угла меньше единицы.***

Покажем, что значения тригонометрических функций зависят только от величины угла. Пусть прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют равные острые углы A и A_1 (рис. 169). Эти треугольники подобны, отсюда $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, или, по основному свойству пропорции, $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$. Правая и левая части этого равенства по определению равны синусам острых углов A и A_1 соответственно. Имеем:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1,$$

т. е. синус угла A не зависит от выбора треугольника. Аналогичные рассуждения можно провести и для других тригонометрических функций (сделайте это самостоятельно). Таким образом, ***тригонометрические функции острого угла зависят только от величины угла.***

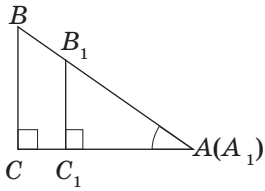


Рис. 169. Значения тригонометрических функций угла A зависят только от величины угла A

Имеет место еще один важный факт: если значения некоторой тригонометрической функции для острых углов A и A_1 равны, то $\angle A = \angle A_1$. Иначе говоря, ***каждому значению тригонометрической функции соответствует единственный острый угол.***

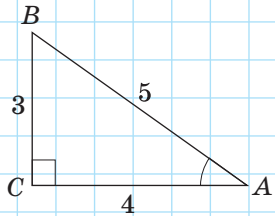


Рис. 170

Задача

Найдите синус, косинус и тангенс наименьшего угла египетского треугольника.

Решение

Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 5$, $BC = 3$, $AC = 4$ (рис. 170). Поскольку в треугольнике наименьший угол лежит против наименьшей стороны, то угол A — наименьший угол треугольника ABC. По определению $\sin A = \frac{BC}{AB}$, т.е. $\sin A = \frac{3}{5} = 0{,}6$; $\cos A = \frac{AC}{AB}$, т.е. $\cos A = \frac{4}{5} = 0{,}8$; $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$, т.е. $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Ответ: 0,6; 0,8; 0,75.

19.2. Тригонометрические тождества

Выведем соотношения (тождества), которые выражают зависимость между тригонометрическими функциями одного угла.

Теорема (основное тригонометрическое тождество)

Для любого острого угла α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Доказательство

☐ По определению синуса и косинуса острого угла прямоугольного треугольника (см. рис. 168) имеем:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}.$$

По теореме Пифагора числитель этой дроби равен c^2, т.е. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. ■

Следствие

Для любого острого угла[1] α

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}\,,\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}\,.$$

Докажем еще несколько тригонометрических тождеств.

Непосредственно из определений синуса и косинуса имеем: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$,

т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Аналогично доказывается, что $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Отсюда следует, что $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Задача

Найдите косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника, синус которого равен 0,8.

Решение

Пусть для острого угла α $\sin\alpha = 0{,}8$.

Тогда $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, т. е. $\cos\alpha = \sqrt{1-0{,}8^2} =$

$= \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3}$.

Ответ: 0,6; $\frac{4}{3}$.

[1] Напоминаем, что по определению тригонометрические функции острого угла являются положительными числами.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

659. По рисунку 171 определите, какая тригонометрическая функция угла K выражается дробью:

а) $\frac{KN}{KM}$; б) $\frac{MN}{KN}$; в) $\frac{MN}{KM}$.

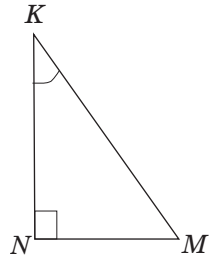


Рис. 171

660. В прямоугольном треугольнике KMN (рис. 171) $KN > MN$. Какой из острых углов треугольника имеет больший синус; больший косинус; больший тангенс?

661. Может ли синус острого угла прямоугольного треугольника быть равным 0,99; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}-2$?

662. Может ли произведение синуса и косинуса одного угла быть равным единице? А произведение тангенса и котангенса?

663. Может ли тангенс острого угла прямоугольного треугольника быть равным $\sqrt{2}$; 0,01; 100?

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

664. Начертите острый угол. Обозначьте на одной стороне угла две точки и проведите из них перпендикуляры к другой стороне угла.

а) Измерьте стороны образовавшихся прямоугольных треугольников и вычислите двумя способами синус построенного угла. Сравните полученные результаты.

б) Вычислите косинус построенного угла двумя способами — по определению и по основному тригонометрическому тождеству. Сравните полученные результаты.

665. Начертите острый угол. Отметьте на разных сторонах угла две точки и проведите из них перпендикуляры к другой стороне угла.

а) Измерьте стороны прямоугольных треугольников, которые образовались, и вычислите двумя способами синус и косинус построенного угла. Сравните полученные результаты.

б) Вычислите тангенс построенного угла двумя способами — по определению и по соответствующему тригонометрическому тождеству. Сравните полученные результаты.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

666. Начертите с помощью транспортира прямоугольный треугольник с острым углом 40°. Измерьте его стороны и вычислите синус, косинус и тангенс этого угла.

667. Постройте прямоугольный треугольник ABC, в котором:

а) $\operatorname{tg} A = \frac{5}{6}$; б) $\sin A = \frac{2}{3}$.

668. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 см и 15 см. Вычислите синус, косинус и тангенс наименьшего угла треугольника.

669. Определите, могут ли синус и косинус одного угла соответственно быть равными:

а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

670. Найдите:

а) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{12}{13}$;

б) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{15}{17}$.

671. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если:

а) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; б) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

672. Упростите выражение:

а) $1 - \cos^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$;

в) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

673. Упростите выражение:

а) $1 - \sin^2\alpha$; б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$;

в) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Уровень Б

674. Постройте угол 75°. С помощью дополнительных построений и измерений найдите синус, косинус, тангенс и котангенс этого угла.

675. Постройте острый угол α, если:

а) $\sin\alpha = \frac{5}{8}$; б) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

676. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, равна 5 см, а длина основания — 24 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла при основании треугольника.

677. Определите, могут ли тангенс и котангенс одного угла быть соответственно равными:

а) 0,4 и 2,5; б) 1,1 и 0,9;

в) $\sqrt{5}+2$ и $\sqrt{5}-2$.

678 (опорная). ***Докажите, что***

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ и } 1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

679. Найдите значения тригонометрических функций острого угла A, если:

а) $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos A = 0{,}28$;

в) $\mathrm{tg}\, A = 2$.

680. Найдите:

а) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}5$; б) $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

681. Упростите выражение:

а) $\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$; б) $\cos\alpha - \cos\alpha\sin^2\alpha$;

в) $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \cos^2\alpha$.

682. Упростите выражение:

а) $\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$; б) $\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \sin^2\alpha$;

в) $\cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$.

Уровень В

683. Докажите, что для любого острого угла A $\operatorname{tg} A > \sin A$.

684. Докажите, что для любого острого угла A $\cos A < \operatorname{ctg} A$.

685. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$; б) $\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$;

в) $\dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$.

686. Упростите выражение:

а) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$;

б) $\dfrac{1}{\sin \alpha} - \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha$.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 20

Теоретический материал

- неравенство треугольника; 7 класс, § 18
- теорема Пифагора. 7 класс, § 13

Задачи

687. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°. Найдите боковую сторону треугольника, если медиана, проведенная к основанию, меньше этой стороны на 8 см.

688. Катет прямоугольного треугольника равен 5 см, а медиана, проведенная к другому катету, равна 13 см. Найдите площадь данного треугольника.

§ 20. Вычисление значений тригонометрических функций

20.1. Формулы дополнения

Тригонометрические тождества, которые мы рассмотрели, устанавливают взаимосвязь между разными тригонометрическими функциями одного угла. Попробуем установить связь между функциями двух острых углов прямоугольного треугольника.

Теорема (формулы дополнения)

Для любого острого угла α

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Доказательство

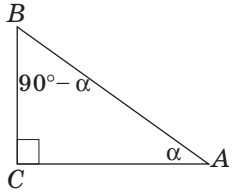


Рис. 172. К доказательству формул дополнения

□ Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB (рис. 172). Если $\angle A = \alpha$, $\angle B = 90^\circ - \alpha$. Выразив синусы и косинусы острых углов треугольника, получим:

$$\sin B = \frac{AC}{AB}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB}, \text{ т. е. } \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \cos B = \frac{BC}{AB}, \text{ т. е. } \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Теорема доказана. ■

Следствие

Для любого острого угла α

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Заметим, что название «формулы дополнения», как и название «косинус», в котором префикс «ко» означает «дополнительный», объясняется тем, что косинус является синусом угла, который дополняет данный угол до 90°. Аналогично объясняется и название «котангенс».

20.2. Значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°

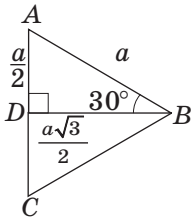


Рис. 173. К вычислению тригонометрических функций угла 30°

Вычислим значения тригонометрических функций угла 30°. Для этого в равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведем высоту BD, которая является также биссектрисой и медианой (рис. 173). В треугольнике ABD $\angle D = 90°$, $\angle B = 30°$, $AB = a$, $AD = \frac{a}{2}$, и по теореме Пифагора $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Имеем:

$$\sin 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{AD}{BD} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}.$$

С помощью формул дополнения получаем значения тригонометрических функций угла 60°:

$$\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{tg}(90° - 30°) = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 60° = \operatorname{ctg}(90° - 30°) = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Для вычисления значений тригонометрических функций угла 45° рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC

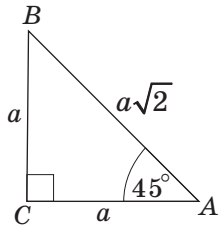


Рис. 174. К вычислению тригонометрических функций угла 45°

с катетами $AC = BC = a$ (рис. 174). По теореме Пифагора $AB = a\sqrt{2}$. Имеем:

$$\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1;$$

$$\operatorname{ctg} 45° = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

Представим значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60° в виде таблицы.

Функция	Угол α		
	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Значения тригонометрических функций других углов можно вычислить с помощью калькулятора или специальных таблиц (см. Приложение 3).

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

689. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB $\sin B = a$. Чему равен косинус угла A?

690. Могут ли синус и косинус острого угла прямоугольного треугольника быть равными? В каком случае?

691. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB $\operatorname{tg} A > \operatorname{tg} B$. Может ли один из этих тангенсов быть равным единице?

692. Углы α и β — острые углы прямоугольного треугольника. Найдите произведение $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

693. Начертите прямоугольный треугольник.

а) Измерьте катет и гипотенузу треугольника и вычислите их отношение.

б) Выделите красным цветом угол, синус которого найден, и синим цветом — угол, косинус которого найден.

694. Начертите равносторонний треугольник и проведите его высоту. Сделайте необходимые измерения и вычислите значения тригонометрических функций углов 30° и 60°. Сравните полученные результаты с табличными.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

695. Найдите острый угол x, если:

а) $\sin x = \cos 36°$; б) $\cos x = \sin 82°$;

в) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; г) $\cos x = \sin x$.

696. Найдите острый угол x, если:

а) $\cos x = \sin 50°$; б) $\sin x = 0{,}5$;

в) $\operatorname{tg} x = 1$.

697. Пользуясь калькулятором или таблицами, найдите $\sin 80°$, $\sin 32°$, $\cos 18°$, $\cos 54°$, $\operatorname{tg} 65°$, $\operatorname{tg} 10°$.

698. Вычислите:

а) $\sin 30° + \operatorname{tg} 45°$; б) $\cos 30° \cdot \operatorname{tg} 60°$;

в) $\sqrt{2}\sin 45° - \cos 60°$.

699. Вычислите:

а) $\sqrt{3}\cos 30° - \cos 60°$; б) $\cos 45° \cdot \sin 45°$;

в) $\sin 60° \cdot \operatorname{tg} 30°$.

700. Углы A и B — острые углы прямоугольного треугольника. Найдите:

а) $\sin B$ и $\cos B$, если $\cos A = 0{,}6$;

б) $\cos A$ и $\operatorname{tg} A$, если $\sin B = 0{,}5$.

701. Найдите:

а) $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если $\sin(90° - \alpha) = 0{,}8$;

б) $\operatorname{tg}(90° - \alpha)$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уровень Б

702. Найдите острый угол x, если:

а) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 22°$; б) $\cos(90° - x) = 0{,}5$.

703. Найдите острый угол x, если:

а) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} 14°$; б) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

704. Углы A и B — острые углы прямоугольного треугольника. Найдите:

а) $\operatorname{tg} A$, если $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

б) $\sin B$, если $\operatorname{ctg} A = \sqrt{3}$;

в) $\sin^2 A + \sin^2 B$.

705. Найдите:

а) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{1}{3}$;

б) $\cos^2\alpha + \cos^2(90° - \alpha)$.

706. Сумма косинусов острых углов прямоугольного треугольника равна b. Найдите сумму синусов этих углов.

Уровень В

707 (опорная). ***При возрастании острого угла синус и тангенс этого угла возрастают, а косинус и котангенс убывают.*** Докажите.

708. Сравните:

а) $\sin 23°$ и $\cos 65°$; б) $\operatorname{tg} 36°$ и $\operatorname{ctg} 64°$.

709. Вычислите значение выражения

$\operatorname{tg} 15° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 75°$.

710. Докажите, что $\operatorname{tg} 1° \cdot \operatorname{tg} 2° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 88° \cdot \operatorname{tg} 89° = 1$.

ПОВТОРЕНИЕ ПЕРЕД ИЗУЧЕНИЕМ § 21

Теоретический материал

- прямоугольный треугольник; 7 класс, § 17
- тригонометрические функции острого угла. 7 класс, § 19

Задачи

711. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, равна 6 см. Найдите площадь треугольника, если угол при его основании равен 75°.

712. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, наименьшая высота которого равна a.

§ 21. Решение прямоугольных треугольников

21.1. Нахождение неизвестных сторон прямоугольного треугольника

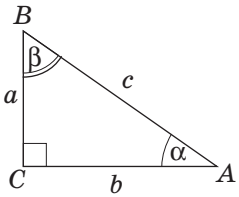


Рис. 175. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

Пусть дан прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c и острыми углами α и β (рис. 175).

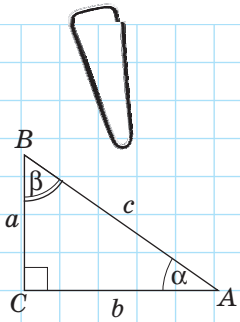
Зная градусную меру угла α и длину любой из сторон треугольника, мы имеем возможность найти две другие его стороны. Правила нахождения неизвестных сторон прямоугольного треугольника непосредственно следуют из определений тригонометрических функций и могут быть обобщены в виде справочной таблицы.

Искомая сторона	Способ нахождения	Формула
Противолежащий катет	Катет, противолежащий углу α, равен: • произведению гипотенузы на $\sin\alpha$; • произведению прилежащего катета на $\operatorname{tg}\alpha$	$a = c\sin\alpha$ $a = b\operatorname{tg}\alpha$
Прилежащий катет	Катет, прилежащий к углу α, равен: • произведению гипотенузы на $\cos\alpha$; • отношению противолежащего катета к $\operatorname{tg}\alpha$	$b = c\cos\alpha$ $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$
Гипотенуза	Гипотенуза равна: • отношению противолежащего катета к $\sin\alpha$; • отношению прилежащего катета к $\cos\alpha$	$c = \frac{a}{\sin\alpha}$ $c = \frac{b}{\cos\alpha}$

Заметим, что для нахождения неизвестных сторон прямоугольного треугольника можно использовать и $\operatorname{ctg}\alpha$ (соответствующие правила и формулы получите самостоятельно).

Запоминать содержание справочной таблицы не обязательно. Для нахождения неизвестной стороны прямоугольного треугольника можно действовать по такому плану.

1. Выбрать формулу определения той тригонометрической функции данного угла, которая связывает искомую сторону с известной (этот этап можно выполнить устно).
2. Выразить из этой формулы искомую сторону.
3. Провести необходимые вычисления.



[Рис. 175]

Задача

В прямоугольном треугольнике с гипотенузой 12 м найдите катет, прилежащий к углу 60°.

Решение

Пусть в прямоугольном треугольнике (см. рисунок) $\alpha = 60^\circ$, $c = 12$ м. Найдем катет b.

Поскольку $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, то $b = c\cos\alpha$, т.е.

$b = 12\cos 60^\circ = 6$ (м).

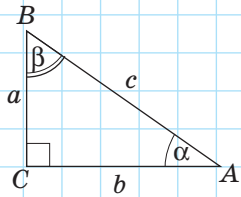
Ответ: 6 м.

21.2. Примеры решения прямоугольных треугольников

Решить треугольник означает найти его неизвестные стороны и углы по известным сторонам и углам.

Прямоугольный треугольник можно решить по стороне и острому углу или по двум сторонам. Рассмотрим примеры конкретных задач

на решение прямоугольных треугольников, пользуясь обозначениями рисунка 175. При этом договоримся округлять значения тригонометрических функций до тысячных, длины сторон — до сотых, а градусные меры углов — до единиц.



[Рис. 175]

Задача 1

Решите прямоугольный треугольник по гипотенузе $c = 10$ и острому углу $\alpha = 50°$ (см. рисунок).

Решение

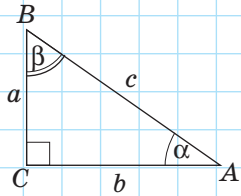
Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\beta = 90° - 50° = 40°$.

Поскольку $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, то $a = c\sin\alpha$,

т.е. $a = 10\sin 50° \approx 10 \cdot 0{,}766 = 7{,}66$.

Поскольку $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, то $b = c\cos\alpha$,

т.е. $b = 10\cos 50° \approx 10 \cdot 0{,}643 = 6{,}43$.



[Рис. 175]

Задача 2

Решите прямоугольный треугольник по катету $a = 6$ и острому углу $\beta = 22°$ (см. рисунок).

Решение

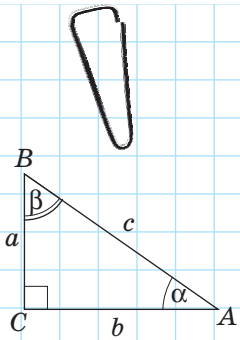
Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\alpha = 90° - 22° = 68°$.

Поскольку $\cos\beta = \frac{a}{c}$, то $c = \frac{a}{\cos\beta}$,

т.е. $c = \frac{6}{\cos 22°} \approx \frac{6}{0{,}927} \approx 6{,}47$.

Поскольку $\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}$, то $b = a\,\mathrm{tg}\beta$,

т.е. $b = 6\,\mathrm{tg}\,22° \approx 6 \cdot 0{,}404 \approx 2{,}42$.



[Рис. 175]

Задача 3

Решите прямоугольный треугольник по гипотенузе $c = 13$ и катету $a = 5$ (см. рисунок).

Решение

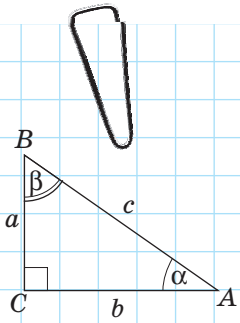
По теореме Пифагора $b = \sqrt{c^2 - a^2}$,

т.е. $b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

Поскольку $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, то $\sin\alpha = \frac{5}{13} \approx 0{,}385$, откуда

$\alpha \approx 23°$.

Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\beta \approx 90° - 23° = 67°$.



[Рис. 175]

Задача 4

Решите прямоугольный треугольник по катетам $a = 8$ и $b = 15$ (см. рисунок).

Решение

По теореме Пифагора $c = \sqrt{a^2 + b^2}$,

т.е. $c = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15} \approx 0{,}533$, откуда

$\alpha \approx 28°$.

Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\beta \approx 90° - 28° = 62°$.

На отдельных этапах решения задач 1—4 можно использовать другие способы. Но следует заметить, что в том случае, когда одна из двух сторон треугольника найдена приближенно, для более точного нахождения третьей стороны целесообразно использовать определения тригонометрических функций.

21.3. Прикладные задачи

Рассмотрим примеры применения решения треугольников в практических задачах.

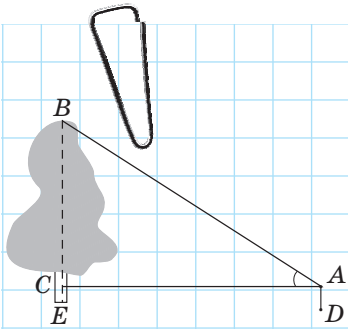


Рис. 176

Задача

Найдите высоту данного предмета (рис. 176).

Решение

На определенном расстоянии от данного предмета выберем точку A и измерим угол BAC.

Поскольку в прямоугольном треугольнике ABC $tgA = \frac{BC}{AC}$, то $BC = AC\,tgA$.

Для определения высоты предмета необходимо прибавить к BC высоту AD прибора, с помощью которого измерялся угол. Следовательно, $BE = AC\,tgA + AD$.

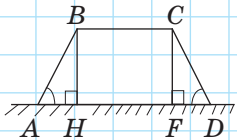


Рис. 177

Задача

Насыпь шоссейной дороги имеет ширину 60 м в верхней части и 68 м в нижней. Найдите высоту насыпи, если углы наклона откосов к горизонту равны 60°.

Решение

Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ (рис. 177), в которой $AD \parallel BC$, $AD = 68$ м, $BC = 60$ м, $\angle A = \angle D = 60°$. Проведем высоты BH и CF. Поскольку $BC = HF$ и $AH = FD$ (докажите это самостоятельно), то $AH = FD = (68 - 60) : 2 = 4$ (м).

В треугольнике ABH $\angle H = 90°$, $\angle A = 60°$, $AH = 4$ м.

Поскольку $tgA = \frac{BH}{AH}$, то $BH = AH\,tgA$,

т.е. $BH = 4tg60° = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ (м).

Ответ: $\approx 6{,}93$ м.

Вопросы и задачи

УСТНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

713. Можно ли решить прямоугольный треугольник по двум сторонам; по двум углам?

714. В прямоугольном треугольнике KMN (рис. 178) известны катет MN и угол K. Выразите через них второй катет и гипотенузу треугольника.

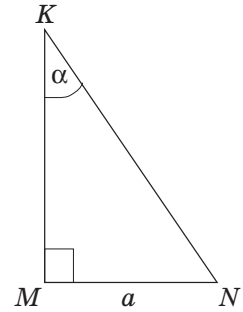


Рис. 178

715. Пользуясь рисунком 178, определите, какие из данных утверждений верны:

а) $KN = \dfrac{MN}{\sin\alpha}$; б) $MK = KN\sin\alpha$;

в) $KN = MN\operatorname{tg}\alpha$; г) $MN = \dfrac{KM}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

ГРАФИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

716. Начертите прямоугольный треугольник и измерьте в нем гипотенузу и острый угол. Решите данный треугольник. Проверьте полученные результаты измерением.

717. Начертите прямоугольный треугольник и измерьте его катеты. Решите данный треугольник. Проверьте полученные результаты измерением.

ПИСЬМЕННЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень А

718. В прямоугольном треугольнике катет длиной 7 см является прилежащим к углу $60°$. Найдите гипотенузу треугольника.

719. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20 см, а синус одного из углов равен 0,6. Найдите катеты треугольника.

720. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 8 см, а один из катетов — $4\sqrt{2}$ см. Найдите острые углы треугольника.

721. Решите прямоугольный треугольник[1] по гипотенузе и острому углу:

а) $c = 8$, $\alpha = 30°$; б) $c = 10$, $\alpha = 42°$.

722. Решите прямоугольный треугольник по катету и острому углу:

а) $a = 2$, $\beta = 45°$; б) $a = 4$, $\alpha = 18°$.

723. Решите прямоугольный треугольник, если:

а) $c = 12$, $\alpha = 28°$; б) $a = 8$, $\beta = 40°$.

724. Решите прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету:

а) $c = 9\sqrt{2}$, $a = 9$; б) $c = 25$, $a = 24$.

725. Решите прямоугольный треугольник по двум катетам:

а) $a = 6\sqrt{3}$, $b = 6$; б) $a = 9$, $b = 40$.

726. Решите прямоугольный треугольник, если:

а) $a = 6$, $c = 10$; б) $a = 5$, $b = \sqrt{11}$.

727. Отрезок BD — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе. Докажите, что $AD \operatorname{tg} A = DC \operatorname{tg} C$.

728. Отрезок BD — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе. Докажите, что $\frac{BD}{\sin A} = AC \cos A$.

Уровень Б

729. Диагональ прямоугольника равна 10, а угол между диагоналями — 40°. Найдите стороны прямоугольника.

730. Синус угла при основании равнобедренного треугольника равен $\frac{8}{17}$, а высота, проведенная к основанию,— 16 см. Найдите основание треугольника.

731. Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите углы ромба.

[1] В задачах 721—726 используются обозначения рисунка 175.

732. Отрезок BD — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе. Решите треугольник ABC, если:

а) $BD = 4\sqrt{3}$, $\angle DBC = 60°$; б) $AD = 9$, $\angle C = 10°$.

733. Отрезок BD — высота прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе. Решите треугольник ABC, если $BD = 3$, $DC = 4$.

734. Основания прямоугольной трапеции равны 8 и 12, а тупой угол — 110°. Найдите боковые стороны трапеции.

735. В равнобедренной трапеции угол при основании равен 135°, меньшее основание и боковая сторона равны соответственно 8 и 10. Найдите среднюю линию трапеции.

736. Тень от столба высотой 11 м равна 4,4 м. Выразите в градусах высоту Солнца над горизонтом.

737. Найдите угол подъема горного шоссе, если на расстоянии 400 м высота подъема равна 28 м.

Уровень В

738. Решите прямоугольный треугольник по сумме катетов m и острому углу α.

739. Решите прямоугольный треугольник по разности острых углов φ и гипотенузе c.

740. Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу в отношении 1 : 3. Найдите острые углы треугольника.

741. На рисунке 179 показан способ измерения высоты предмета, основание которого недоступно. Найдите эту высоту, если $AB = d$, $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$.

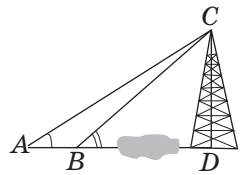


Рис. 179

742. Катеты прямоугольного треугольника равны 30 и 40. Найдите угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.

Задачи для подготовки к контрольной работе № 4

1. Найдите $\sin A$ и $\operatorname{tg} A$, если $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Упростите выражение $\frac{\cos^2 \alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}$.

3. Вычислите $2\sin 60^\circ + 4\cos 60^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ - 2\operatorname{tg} 45^\circ$.

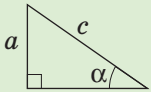
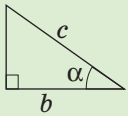
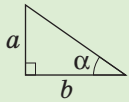
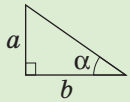
4. В прямоугольном треугольнике против угла 60° лежит катет длиной 18 см. Найдите второй катет и гипотенузу треугольника.

5. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 74 см, а синус одного из углов $\frac{12}{37}$. Найдите периметр треугольника.

6. Бо́льшая боковая сторона описанной прямоугольной трапеции равна c, а острый угол равен α. Докажите, что средняя линия трапеции равна $\frac{c(1+\sin\alpha)}{2}$.

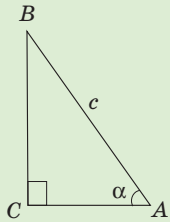
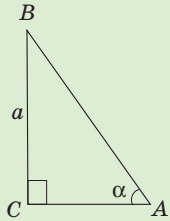
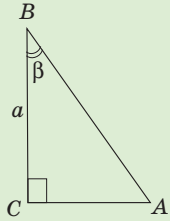
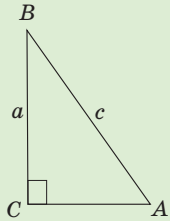
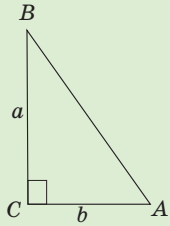
Итоги главы IV

ИТОГОВЫЙ ОБЗОР ГЛАВЫ IV

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА			
Синус	**Косинус**	**Тангенс**	**Котангенс**
Синусом острого угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:	***Косинусом*** острого угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:	***Тангенсом*** острого угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему:	***Котангенсом*** острого угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему:
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$
			

Тригонометрические тождества		
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	***Формулы дополнения*** $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов			
α	**30°**	**45°**	**60°**
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ			
Задача	**Условие**		**Схема решения**
Известны гипотенуза и острый угол		Дано: $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90°$. Найти: $\angle B$, AC, BC.	1. $\angle B = 90° - \alpha$ 2. $AC = c\cos\alpha$ 3. $BC = c\sin\alpha$
Известны катет и острый угол		Дано: $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90°$. Найти: $\angle B$, AB, AC.	1. $\angle B = 90° - \alpha$ 2. $AB = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ 3. $AC = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$
		Дано: $BC = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = 90°$. Найти: $\angle A$, AC, AB.	1. $\angle A = 90° - \beta$ 2. $AB = \dfrac{a}{\cos\beta}$ 3. $AC = a\operatorname{tg}\beta$
Известны гипотенуза и катет		Дано: $BC = a$, $AB = c$, $\angle C = 90°$. Найти: AC, $\angle A$, $\angle B$.	1. $AC = \sqrt{c^2 - a^2}$ 2. $\sin A = \dfrac{a}{c}$ 3. $\angle B = 90° - \angle A$
Известны два катета		Дано: $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = 90°$. Найти: AB, $\angle A$, $\angle B$.	1. $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ 2. $\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$ 3. $\angle B = 90° - \angle A$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ IV

1. Дайте определение синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

2. Докажите основное тригонометрическое тождество.

3. Докажите формулы дополнения.

4. Назовите значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°.

5. Опишите решения прямоугольного треугольника:
а) по гипотенузе и острому углу;
б) по катету и острому углу;
в) по гипотенузе и катету;
г) по двум катетам.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IV

743. Стороны параллелограмма равны $4\sqrt{2}$ см и 8 см, а острый угол — 45°. Найдите высоты и площадь параллелограмма.

744. Радиус окружности, вписанной в ромб с острым углом α, равен r. Найдите сторону и площадь ромба.

745. Сторона треугольника равна 10, а прилежащие к ней углы — 30° и 45°. Найдите другие стороны треугольника.

746. Если два прямоугольных треугольника имеют равные гипотенузы, то синусы их острых углов пропорциональны противолежащим катетам, а косинусы острых углов — прилежащим катетам. Докажите.

747. Биссектриса, проведенная из вершины острого угла α прямоугольного треугольника, равна l. Найдите гипотенузу треугольника.

748. На эскалаторе Киевского метрополитена ширина ступеньки равна 40 см, высота — 30 см. Определите угол наклона эскалатора.

749. На расстоянии 700 м от точки отрыва самолета от земли расположены деревья высотой 24 м. Под каким углом должен подниматься самолет, чтобы не задеть деревьев?

Задачи повышенной сложности

750. Докажите, что катеты прямоугольного треугольника и высота, проведенная к гипотенузе, связаны соотношением $\frac{1}{h_c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

751. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен a. Найдите тангенс угла между основанием и высотой, проведенной к боковой стороне.

752. В треугольнике ABC $AB=BC$, а высота AE в два раза меньше высоты BD. Найдите косинус угла при основании треугольника.

753. Две окружности, расстояние между центрами которых равно d, касаются внешним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если угол между их общими внешними касательными равен 2α.

754. Найдите $\sin 75°$.

Историческая справка

Птолемей

Умение решать треугольники необходимо при рассмотрении многих практических задач, возникающих в связи с потребностями географии, астрономии, навигации. Поэтому элементы тригонометрии появились еще в Древнем Вавилоне в период интенсивного развития астрономии. В работе греческого ученого **Птолемея** «Альмагест» (II в. н. э.), где изложена античная система мира, содержатся элементы сферической тригонометрии.

В Древней Греции вместо синуса угла α рассматривали длину хорды, соответствующей центральному углу 2α. Действительно, если радиус окружности равен единице, то $\sin\alpha$ измеряется половиной такой хорды (проверьте это самостоятельно). Первые тригонометрические таблицы были составлены **Гиппархом** во II в. н. э.

Синус и косинус как вспомогательные величины использовались индийскими математиками в V в., а тангенс и котангенс впервые появились в работах арабского математика X в. **Абу-аль-Вефы.**

Региомонтан

Как отдельный раздел математики тригонометрия выделилась в произведениях персидского ученого **Насреддина Туси** (1201—1274), а системное изложение тригонометрии первым из европейцев представил немецкий математик и механик **Иоганн Мюллер** (1436—1476), более известный под псевдонимом **Региомонтан**.

Современную форму изложения и современную символику тригонометрия приобрела благодаря **Леонарду Эйлеру** в XVIII в.

Кроме известных вам четырех тригонометрических функций иногда рассматриваются еще две:

секанс $\left(\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\right)$

и косеканс $\left(\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\right)$.

ТЕМАТИКА СООБЩЕНИЙ И РЕФЕРАТОВ К ГЛАВЕ IV

1. Из истории развития тригонометрии.
2. Тригонометрические тождества в треугольнике.
3. Геометрические неравенства, связанные с тригонометрией.
4. Применение тригонометрических функций при решении прикладных задач.

РЕКОМЕНДОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ ИНФОРМАЦИИ

1. Глейзер, Г. И. История математики в школе. VII—VIII классы : Пособие для учителей [Текст] / Г. И. Глейзер. — М. : Просвещение, 1982. — 240 с.
2. Мерзляк, А. Г. Тригонометрия : Задачник к школьному курсу [Текст] / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович, М. С. Якир. — М. : АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998.
3. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 320 с. — (Б-ка мат. кружка).
4. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 2 [Текст] / В. В. Прасолов. — Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 240 с. — (Б-ка мат. кружка).
5. Сивашинский, И. Х. Неравенства в задачах [Текст] / И. Х. Сивашинский. — М.: Наука, 1967.
6. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. 9—11 классы : От учебной задачи к творческой : Учеб. пособие [Текст] / И. Ф. Шарыгин. — М.: Дрофа, — 1996. — (Задачники «Дрофы»).
7. Шклярский, Д. О. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум [Текст] / Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. — М. : Наука, 1970.
8. Кушнір, І. А. Повернення втраченої геометрії [Текст] / І. А. Кушнір. — К . : Факт, 2000. — 280 с. — (Серія «Математичні обрії України»).
9. Математична хрестоматія для старших класів. Геометрія. Т. 2 [Текст] / упоряд. Л. В. Кованцова. — К. : Рад. шк., 1969. — 383 с.
10. Математична хрестоматія для 6—8 класів. Т. 1 [Текст]. — К. : Рад. шк., 1968. — 320 с.
11. Інтернет-бібліотека МЦНМО. http://ilib.mirror0.mccme.ru/

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Обобщенная теорема Фалеса и площадь прямоугольника

В ходе доказательства некоторых геометрических теорем используется процедура деления отрезка на некоторое количество равных частей. Это позволяет дать числовые оценки в виде неравенств и с их помощью получить противоречие.

В курсе геометрии 8 класса такой подход целесообразно применить для доказательства двух приведенных ниже теорем.

Теорема (обобщенная теорема Фалеса)

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах этого угла пропорциональные отрезки.

Доказательство

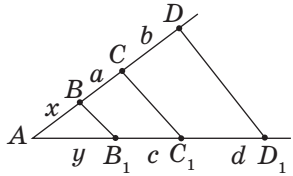


Рис. 180. Обобщенная теорема Фалеса

□ По данным рисунка 180 докажем три формулы:

1) $\frac{AC}{AB}=\frac{AC_1}{AB_1}$; 2) $\frac{AB}{BC}=\frac{AB_1}{B_1C_1}$;

3) $\frac{BC}{CD}=\frac{B_1C_1}{C_1D_1}$.

Докажем сначала формулу 1.

Пусть отрезок AC можно разделить на n равных отрезков так, что одна из точек деления совпадет с точкой B, причем на отрезке AB будут лежать m точек деления. Тогда, проведя через точки деления прямые, параллельные CC_1, по теореме Фалеса получим деление отрезков AC_1 и AB_1 соответственно на n и m равных отрезков. Следовательно, $\frac{AC}{AB}=\frac{n}{m}=\frac{AC_1}{AB_1}$, что и требовалось доказать.

Если описанное деление отрезка AC невозможно, то докажем формулу 1 от противного. Пусть $\frac{AC}{AB}\neq\frac{AC_1}{AB_1}$, т. е. $AB\neq AC\cdot\frac{AB_1}{AC_1}$.

Рассмотрим случай, когда $AB>AC\cdot\frac{AB_1}{AC_1}$ (другой случай рассмотрите самостоятельно).

Отложим на отрезке AB отрезок $AP = AC \cdot \frac{AB_1}{AC_1} < AB$ (рис. 181).

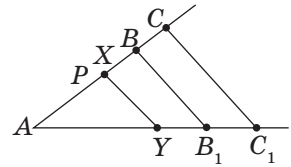


Рис. 181. К доказательству обобщенной теоремы Фалеса

Разобьем отрезок AC на такое количество равных отрезков[1], чтобы одна из точек деления X попала на отрезок PB. Проведем через точки деления прямые, параллельные CC_1. Пусть прямая, проходящая через точку X, пересекает луч AC_1 в точке Y. Тогда по доказанному $\frac{AX}{AC} = \frac{AY}{AC_1}$. Учитывая, что в этой пропорции $AX > AP$ и $AY < AB_1$, имеем: $\frac{AP}{AC} < \frac{AB_1}{AC_1}$, т. е. $AP < AC \cdot \frac{AB_1}{AC_1}$. Это неравенство противоречит выбору длины отрезка AP. Следовательно, формула 1 доказана полностью.

Докажем формулы 2 и 3. Пользуясь обозначениями рисунка 180, по формуле 1 имеем $\frac{a+x}{x} = \frac{c+y}{y}$ и $\frac{a+b+x}{a+x} = \frac{c+d+y}{c+y}$. Разделив в каждом из этих равенств числитель на знаменатель, получим: $1 + \frac{a}{x} = 1 + \frac{c}{y}$, т. е. $\frac{a}{x} = \frac{c}{y}$; $1 + \frac{b}{a+x} = 1 + \frac{d}{c+y}$, т. е. $\frac{b}{a+x} = \frac{d}{c+y}$.

Отсюда $\frac{a}{x} : \frac{b}{a+x} = \frac{c}{y} : \frac{d}{c+y}$, т. е. $\frac{a}{b} \cdot \frac{a+x}{x} = \frac{c}{d} \cdot \frac{c+y}{y}$, или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Таким образом, доказано, что $\frac{a}{x} = \frac{c}{y}$ и $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, т. е. формулы 2 и 3 выполняются.

Теорема доказана полностью. ■

Из курса математики 5 класса известно, что площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон. Так, на рисунке 182 дан прямоугольник 3×5, который делится на 15 квадратов площадью 1. Следовательно, по аксиомам площади, его площадь равна 15 кв. ед., то есть 3×5 кв. ед. Таким способом легко найти площадь

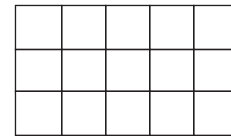


Рис. 182. Прямоугольник 3×5

[1] Длина каждого из этих отрезков может быть равна, например, $\frac{1}{2}PB$.

прямоугольника, у которого длины сторон выражены любыми целыми числами. Но справедливость этой формулы при условии, что длины сторон прямоугольника не являются целыми числами,— совсем неочевидная теорема. Докажем ее.

Теорема (формула площади прямоугольника)

Площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон: $S = ab$, где a и b — стороны прямоугольника.

Доказательство

☐ Докажем сначала, что площади прямоугольников с одним равным измерением относятся как длины других измерений.

Пусть прямоугольники $ABCD$ и AB_1C_1D имеют общую сторону AD (рис. 183, *а*).

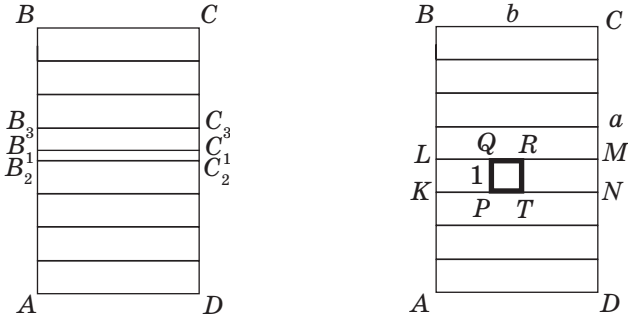


Рис. 183. К доказательству формулы площади прямоугольника

Разобьем сторону AB на n равных частей. Пусть на отрезке AB_1 лежит m точек деления, причем точка деления B_2 имеет номер m, а точка B_3 — номер $m+1$. Тогда $AB_2 \leqslant AB_1 \leqslant AB_3$, откуда $\frac{m}{n}AB \leqslant AB_1 \leqslant \frac{m+1}{n}AB$, т. е. $\frac{m}{n} \leqslant \frac{AB_1}{AB} \leqslant \frac{m+1}{n}$, $\frac{m}{n} \leqslant \frac{AB_1}{AB} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$.

Теперь проведем через точки деления прямые, параллельные AD. Они разделят прямоугольник $ABCD$ на n равных прямоугольников (т. е. таких, которые совмещаются при наложении). Очевидно, что прямоугольник AB_2C_2D содержится внутри прямоугольника AB_1C_1D, а прямоугольник AB_3C_3D содержит прямоугольник AB_1C_1D.

Следовательно, $S_{AB_2C_2D} \leqslant S_{AB_1C_1D} \leqslant S_{AB_3C_3D}$.

Имеем: $\frac{m}{n} \cdot S_{ABCD} \leqslant S_{AB_1C_1D} \leqslant \frac{(m+1)}{n} \cdot S_{ABCD}$, $\frac{m}{n} \leqslant \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} \leqslant \frac{m+1}{n}$,

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

Сравнивая выражения для $\frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}}$, убеждаемся, что оба эти отношения расположены между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$, т. е. отличаются не больше чем на $\frac{1}{n}$ (n — натуральное число). Докажем от противного, что эти отношения равны.

Действительно, если это не так, т. е. $\left| \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} - \frac{AB_1}{AB} \right| = \delta > 0$, то найдется такое натуральное число[1] n, что $\frac{1}{n} < \delta$, т. е. $\delta = \left| \frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} - \frac{AB_1}{AB} \right| \leqslant \frac{1}{n} < \delta$. Полученное противоречие доказывает, что площади прямоугольников с одним равным измерением относятся как длины других измерений.

Рассмотрим теперь прямоугольники $ABCD$ со сторонами a и b, $KLMN$ со сторонами b и 1 и квадрат $PQRT$ со стороной 1 (рис. 183, *б*).

Тогда по доказанному $\frac{S_{KLMN}}{S_{PQRT}} = \frac{b}{1}$, $\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} = \frac{a}{1}$.

Поскольку $S_{PQRT} = 1$ кв. ед., то, перемножив полученные отношения, имеем $S_{ABCD} = ab$.

Теорема доказана. ■

[1] Выберем $n > \frac{1}{\delta}$, например $n = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$, где $\left[\frac{1}{\delta}\right]$ — целая часть дроби $\frac{1}{\delta}$.

Приложение 2. Золотое сечение

С давних времен люди старались познать мир путем поиска гармонии и совершенства. Одним из вопросов, которыми задавались еще древние греки, был поиск наилучшего соотношения неравных частей одного целого. Таким соотношением еще со времен Пифагора считали гармоническое деление, при котором меньшая часть относится к большей, как бо́льшая часть относится ко всему целому. Такое деление отрезка на части описано во II книге «Начал» Евклида и названо ***делением в среднем и крайнем отношении***.

Рассмотрим деление отрезка AB точкой C, при котором $\frac{AC}{CB}=\frac{CB}{AB}$ (рис. 184). Пусть длина отрезка AB равна a, а длина отрезка CB равна x. Тогда $\frac{a-x}{x}=\frac{x}{a}$, т. е. $x^2+ax-a^2=0$, $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{x}{a}+1=0$. Отсюда $\frac{x}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Поскольку $\frac{x}{a}>0$, то геометрический смысл имеет только значение $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}6$. Значит, если длина данного отрезка равна 1, то при делении в крайнем и среднем отношении его бо́льшая часть приблизительно равна 0,6. Полученное число обозначают греческой буквой φ. Кроме того, часто рассматривают и отношение $\Phi=\frac{1}{\varphi}=\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1{,}6$. Заметим, что Φ — первая буква имени древнегреческого скульптора Фидия, который часто использовал такое деление в своем творчестве (в частности, в знаменитой статуе Зевса Олимпийского, которую считают одним из семи чудес света).

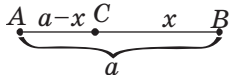


Рис. 184. Деление отрезка AB в крайнем и среднем отношении

В эпоху Возрождения (XV—XVII вв.) интерес к гармоническому делению чрезвычайно возрос. Выдающийся ученый и художник Леонардо да Винчи (1452—1519) назвал такое деление ***золотым сечением***, а его современник и соотечественник, итальянский монах-математик Лука Пачоли (1445—1514) — божественной пропорцией. Золотое сечение и близкие к нему пропорциональные отношения составляли основу композиционного построения многих произведений мирового искусства, в частности архитектуры Античности и Возрождения. Одно из величайших сооружений Древней Эллады — Парфенон в Афинах (V в. до н. э.) — содержит в себе

золотые пропорции (в частности, отношение высоты к длине этого сооружения равно φ).

Итак, дадим определение золотому сечению.

Определение

Золотым сечением называется такое деление величины на две неравные части, при котором меньшая часть относится к большей, как бо́льшая часть относится ко всему целому.

Иначе говоря, золотое сечение — это деление величины в отношении φ (или Φ).

Построить золотое сечение отрезка заданной длины a с помощью циркуля и линейки довольно просто: для этого достаточно построить прямоугольный треугольник с катетами a и $\frac{a}{2}$ и провести две дуги из вершин острых углов так, как показано на рисунке 185. По теореме о пропорциональности отрезков секущей и касательной $AB^2 = AE \cdot AD$. Тогда $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$. Поскольку по построению $AB = 2OD = ED = a$, то $AE = AD - AB$ и $\frac{AD - AB}{AB} = \frac{AB}{AD} = \varphi$ по определению золотого сечения. Следовательно, $\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AB} = \varphi$. Убедиться в правильности построения можно также с помощью теоремы Пифагора (сделайте это самостоятельно.)

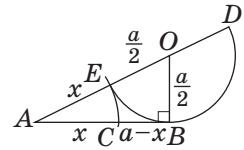


Рис. 185. Построение золотого сечения отрезка

С золотым сечением связывают геометрические фигуры, при построении которых используются отношения φ и Φ. Рассмотрим некоторые из них.

Равнобедренный треугольник называется ***золотым***, если две его стороны относятся в золотом сечении. Докажем, что треугольник с углами 36°, 72°, 72° (рис. 186, *а*) является золотым. Действительно, пусть в треугольнике ABC $\angle A = \angle C = 72°$, $\angle B = 36°$, AK — биссектриса. Тогда $\angle KAC = 36°$, $\angle AKC = 72°$, $\triangle ABC \sim \triangle CAK$ по двум углам. Следовательно, $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{KC} = \frac{AC}{BC - BK} = \frac{AC}{AB - AC} = \Phi$, т. е. треугольник ABC — золотой.

И наоборот: если в равнобедренном треугольнике $A_1B_1C_1$ $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{C_1B_1}{A_1C_1} = \Phi$, то такой треугольник подобен треугольнику ABC, т. е. имеет углы 36°, 72°, 72°.

Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что золотым является также треугольник с углами 36°, 36°, 108° (рис. 186, *б*) и других золотых треугольников не существует.

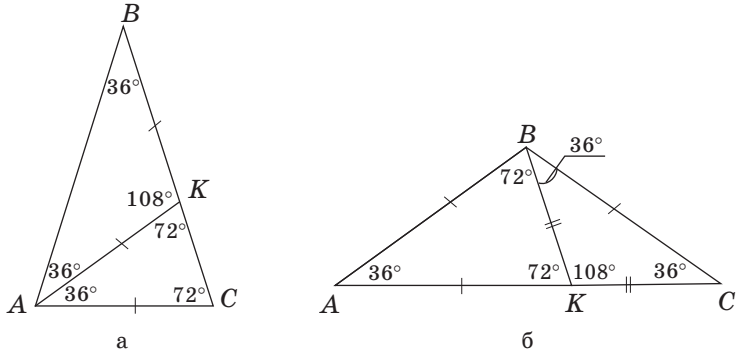


Рис. 186. Золотые треугольники

Золотые треугольники связаны с правильным пятиугольником (т. е. выпуклым пятиугольником, у которого все стороны равны и все углы равны).

В правильном пятиугольнике:

1) диагональ относится к стороне в золотом сечении;
2) точка пересечения диагоналей делит каждую из них в золотом сечении;
3) диагональ делит другую диагональ на два отрезка, один из которых делится в золотом сечении еще одной диагональю.

Согласно обозначениям рисунка 187 это означает, что $\frac{CE}{CD}=\frac{CE}{CN}=\frac{CN}{CM}=\Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Для доказательства этих свойств достаточно заметить, что в правильном пятиугольнике все углы равны $\frac{360°}{5}=108°$, следовательно, треугольники CDE, CMD, MDN являются золотыми. Подробные доказательства предлагаем провести самостоятельно.

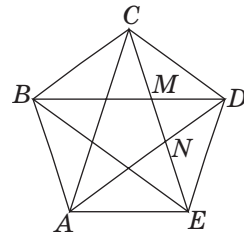


Рис. 187. Правильный пятиугольник

Диагонали правильного пятиугольника образуют звезду, которая в древние времена олицетворяла совершенство и имела мистическое значение. Пифагорейцы называли ее пентаграммой и избрали символом своей научной школы. В наши дни пятиконечная звезда — самая распространенная геометрическая фигура на флагах и гербах многих стран (приведите соответствующие примеры из истории и географии).

Прямоугольник называется ***золотым***, если его стороны относятся в золотом сечении. Для построения золотого прямоугольника произвольный квадрат перегибаем пополам (рис. 188, *а*), проводим диагональ одного из полученных прямоугольников (рис. 188, *б*) и радиусом, равным этой диагонали, проводим дугу окружности с центром O (рис. 188, в). Полученный прямоугольник $ABCD$ — золотой (убедитесь в этом самостоятельно).

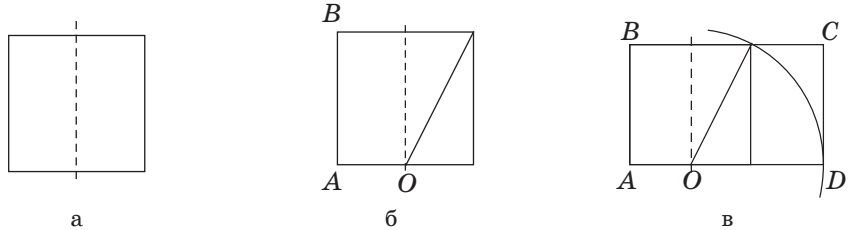


Рис. 188. Построение золотого прямоугольника

Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то оставшийся прямоугольник также будет золотым. Действительно, на рисунке 189, *а* имеем $\frac{a}{b}=\Phi$, тогда $a-b=b\Phi-b=b(\Phi-1)=b\varphi$. Неограниченно продолжая этот процесс (рис. 189, *б*), можно получить так называемые вращающиеся квадраты, и весь данный прямоугольник будет составлен из таких квадратов.

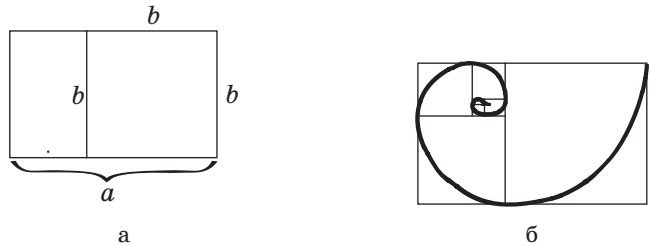


Рис. 189. Построение золотой спирали

Через противолежащие вершины квадратов проходит так называемая ***золотая спираль***, которая часто встречается в природе. Например, по принципу золотой спирали располагаются семена в подсолнечнике; по золотой спирали закручены раковины улиток,

рога архаров, паутина отдельных видов пауков и даже наша Солнечная система, как и некоторые другие галактики.

Отметим также, что золотое сечение имеет немало алгебраических свойств. Отношение φ приближенно может быть выражено дробями $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{13}$, ..., где 2, 3, 5, 8, 13, ...— так называемые числа Фибоначчи[1]. Приведем без доказательства две алгебраические формулы, связанные с числами φ и Ф:

1) $\varphi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}$;

2) $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots}}}}$.

Золотое сечение, золотые многоугольники и золотая спираль являются математическими воплощениями идеальных пропорций в природе. Недаром великий немецкий поэт Иоганн Вольфганг Гете считал их математическими символами жизни и духовного развития.

[1] Числа Фибоначчи — это натуральные числа ряда 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., в котором каждое следующее число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих.

Приложение 3. Таблица значений тригонометрических функций

Градусы	$\sin\alpha$ $0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$	$\operatorname{tg}\alpha$ $0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$	$\operatorname{ctg}\alpha$ $0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$	$\cos\alpha$ $0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$	Градусы
0	0,000	0,000	—	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,335	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
Градусы	$\cos\alpha$ $45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$	$\operatorname{ctg}\alpha$ $45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$	$\operatorname{tg}\alpha$ $45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$	$\sin\alpha$ $45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$	Градусы

Продолжение таблицы

Градусы	$\sin\alpha$ $0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$	$\operatorname{tg}\alpha$ $0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$	$\operatorname{ctg}\alpha$ $0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$	$\cos\alpha$ $0° \leqslant \alpha \leqslant 45°$	Градусы
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
Градусы	$\cos\alpha$ $45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$	$\operatorname{ctg}\alpha$ $45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$	$\operatorname{tg}\alpha$ $45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$	$\sin\alpha$ $45° \leqslant \alpha \leqslant 90°$	Градусы

Значение тригонометрических функций острых углов можно приближенно определять с помощью специальных таблиц. Одна из таких таблиц представлена выше.

Таблица составлена с учетом формул дополнения. В двух крайних столбцах указаны градусные меры углов (в левом — от 0° до 45°, в правом — от 45° до 90°). Между этими столбцами содержатся четыре столбца значений тригонометрических функций:

1-й — синусы углов от 0° до 45° (или косинусы углов от 45° до 90°);
2-й — тангенсы углов от 0° до 45° (или котангенсы углов от 45° до 90°);
3-й — котангенсы углов от 0° до 45° (или тангенсы углов от 45° до 90°);
4-й — косинусы углов от 0° до 45° (или синусы углов от 45° до 90°).

Рассмотрим несколько примеров применения данной таблицы.

1) Определим $\sin 25°$. Поскольку $0° \leqslant 25° \leqslant 45°$, найдем в крайнем левом столбце значение 25 и рассмотрим соответствующую строку первого столбца значений. Углу 25° в ней соответствует число 0,423. Следовательно, $\sin 25° \approx 0{,}423$.

2) Определим $\sin 72°$. Поскольку $45° \leqslant 72° \leqslant 90°$, найдем в крайнем правом столбце значение 72 и рассмотрим соответствующую строку четвертого столбца значений. Углу 72° в нем соответствует число 0,951. Следовательно, $\sin 72° \approx 0{,}951$.

3) Определим угол, синус которого равен 0,839. Для этого в первом или четвертом столбце значений найдем число 0,839. Оно содержится в четвертом столбце, т. е. искомый угол больше 45° и меньше 90°. В соответствующей строке правого столбца значений находим число 57. Следовательно, искомый угол приблизительно равен 57°.

4) Определим $\cos 14°$. Поскольку $0° \leqslant 14° \leqslant 45°$, найдем в крайнем левом столбце значений 14 и рассмотрим соответствующую строку четвертого столбца значений. Углу 14° в нем соответствует число 0,970. Следовательно, $\cos 14° \approx 0{,}970$.

5) Определим угол, тангенс которого равен 0,7. Для этого во втором или третьем столбце значений найдем число 0,700. Оно находится во втором столбце, т. е. искомый угол меньше 45°. В соответствующей строке левого столбца значений находим число 35. Следовательно, искомый угол приблизительно равен 35°.

С большей точностью значения тригонометрических функций можно определять по «Четырехзначным математическим таблицам» В. М. Брадиса или с помощью калькулятора.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава I. Четырехугольники

11. 32 см. **12**. 8 см, 4 см, 4 см, 4 см. **13**. 100°. **14**. 80°, 80°, 100°, 100°. **17**. а) Нет; б) да; в) нет. **18**. 5 см, 7 см, 8 см, 10 см. **19**. 36 см. **20**. 60°, 120°, 80°, 100°. **21**. 60°. **25**. 7 дм. **26**. 100°, 100°, 100°, 60°. **41**. 60 см. **42**. а) 5 см и 7 см; б) 3 см и 9 см; в) 5 см и 7 см. **43**. а) 110° и 70°; б) 55° и 125°; в) 45° и 135°; г) 75° и 105°. **44**. а) Все по 90°; б) 40° и 140°; в) 70° и 110°; г) 30° и 150°. **45**. 10 см и 16 см. **48**. Три. **49**. Три. **50**. 3 дм. **51**. 22 м. **52**. а) 70° и 110°; б) 48° и 132°. **53**. а) 50° и 130°; б) 60° и 120°. **54**. 54 см. **55**. 32 см или 34 см. **59**. 12 см. **60**. 42 см или 36 см. **61**. 30° и 150°. **62**. 45° и 135° или все по 90°. **65**. Нет. **80**. 26 см. **81**. 45° и 135°. **92**. *Указание*. Воспользуйтесь равенством $2\alpha+2\beta=360°$, где α и β — соседние углы четырехугольника. **93**. *Указание*. На луче AO постройте отрезок $OC=AO$ и проведите через точку C прямые, параллельные сторонам угла. **94**. *Указание*. Проведите прямые MB и MC, параллельные сторонам угла (B и C — точки пересечения этих прямых со сторонами). Луч MA пройдет через середину отрезка BC. **106**. 42 см. **107**. 6 см, 12 см. **108**. 50°. **109**. 40°, 50°. **110**. 16 см. **111**. а) 30°, 150°; б) 60°, 120°. **112**. а) 70°, 110°; б) 50°, 130°. **113**. 5 м. **114**. 20 см. **117**. 28 см. **118**. 36 см. **119**. 6 см, 10 см. **120**. а) 36°, 144°; б) 30°, 150°. **121**. а) 45°, 135°; б) 60°, 120°. **122**. 24 см. **123**. 36 м. **124**. 6 см. **125**. 8 см. **129**. 30°, 60°. **130**. 60°. **131**. *Указание*. Докажите отдельно равенство высот, проведенных к противолежащим сторонам, и высот, проведенных к соседним сторонам. **136**. б) 50°, 130°. **143**. а) Нет; б) да. **144**. Нет; нет. **147**. а) $\angle C=130°$, $\angle B=140°$; б) 58°, 122°, 122°; в) 90°, 90°, 135°, 45°. **148**. а) 68° и 112°; б) 90°, 90°, 135°, 45°. **149**. 24 см. **150**. 16 см. **152**. а) 50° и 130°; б) 90°, 90°, 110°, 70°. **153**. а) 90°, 90°, 108°, 72°; б) 60° и 120°. **154**. б) 19 см. **155**. а) 60° и 120°; б) 20 м. **156**. 75 см. **157**. 35 см. **161**. 72° и 108°. **162**. 60° и 120°. **178**. а) 4; б) 8. **179**. 16 см. **180**. 6 см, 8 см и 10 см. **181**. 21 см. **183**. 24 см. **184**. 40 см. **185**. а) 10 см; б) 6 см и 8 см. **186**. а) 8 см; б) 2 см и 8 см. **189**. 23 см. **190**. 16 см, 20 см и 24 см. **193**. Соединить середины сторон отрезками и провести через вершины полученного треугольника прямые, параллельные его сторонам. **194**. Линия разреза является средней линией треугольника. **195**. $0{,}75a$. **196**. 34 см. **197**. 9 см. **198**. 9 см, 6 см, 3 см.

201. 2 см. **202**. *Указание*. Докажите, что $AMNH$ — параллелограмм. **203**. 2 см. **206**. 40°, 40° и 100°. **213**. Нет. Высота не больше медианы, проведенной к гипотенузе. **216**. а) 120°, 240°; б) 80°, 280°. **217**. а) 90°; б) 120°; в) 100°. **218**. а) 70°; б) 40°; в) 210°. **219**. а) 40°; б) 50°; в) 150°. **220**. α или $180° - \alpha$. **221**. 30° или 150°. **222**. а) 25°; б) 6 см. **223**. а) 90°; б) 10 см. **225**. а) 55°; б) 120°. **226**. а) 120°; б) 55°. **227**. 70°. **228**. 45°, 60°, 75°. **229**. 50°, 50°, 80° или 50°, 65°, 65°. **232**. 80°. **233**. 4 см. **234**. 9 см. **240**. Окружность с диаметром AB без точек A и B. **241**. Рис. 190. **242**. *Указание*. Точка касания принадлежит окружности диаметром AO. **243**. 80°. **244**. 50 см. **248**. Продолжить боковые стороны до пересечения. **249**. Нет; да. **252**. а) Нет; б) да. **253**. а) 134°, 55°; б) 100°, 80°, 100°; в) все по 90°. **254**. а) 90°, 130°, 90°; б) 115° и 65°. **258**. а) 30 см; б) 28 см. **259**. а) 7 см; б) 4 см. **260**. 24 см. **261**. 70°, 100°, 110°, 80°. **262**. 55° и 125°. **267**. 4 м и 9 м, 8 м и 5 м. **268**. 6 см. **269**. 8 см. **274**. 30° и 150°. *Указание*. Опишите окружность около четырехугольника $BMDN$. **275**. 45°. *Указание*. Опишите окружность около четырехугольника $ACBK$. **276**. *Указание*. Опровержение аналогично примеру, представленному в п. 8.3. **277**. *Указание*. Треугольники ADB и CDE не равны, поскольку признака равенства треугольников по стороне и двум углам не существует. **280**. 60°. **281**. 60°. **289**. 9 см. **293**. 6 см и 3 см или 2 см и 1 см. **294**. *Указание*. На рисунке 191 треугольник ABC искомый, треугольник AOD вспомогательный, $AOCD$ — параллелограмм. **296**. 3 см и 9 см. **297**. а) 14,4; б) 59. **299**. 60° и 120°. **300**. 14 см. **301**. 90°, 45°, 45°. **303**. 4 см. **304**. 18 см. **305**. 5 см и 3 см. **306**. а) 60°, 120°; б) 2 см, 6 см, 4 см, 4 см. **307**. б) *Указание*. Проведите через точку M средние линии треугольников ABC и ACD; докажите по неравенству треугольника, что точки E, F и M лежат на одной прямой. **309**. $a+c$ или $|a-c|$. **310**. *Указание*. Медианы треугольника BCD пересекаются в одной точке. **311**. *Указание*. Высоты треугольника

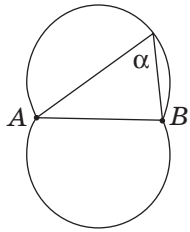


Рис. 190

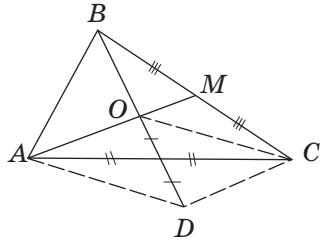


Рис. 191

с вершинами в серединах отрезков AB, AC и AD пересекаются в одной точке. **312**. *Указание*. Данные биссектрисы при пересечении образуют прямоугольный треугольник, в котором отрезок средней линии является медианой. **313.** *Указание*. Докажите, что вершины искомого треугольника и точка пересечения данных прямых лежат на одной окружности. **314**. *Указание*. Воспользуйтесь опорной задачей об угле между касательной и хордой (§ 7, № 230). **315**. 60° и 120°. **316**. *Указание*. Докажите, что четырехугольник $ABMC$ вписанный.

Глава II. Подобие треугольников. Теорема Пифагора

325. а) Да; б) нет. **326.** 6; 12. **327.** 15; 9. **328.** а) 3 см; б) 4 см. **329.** 14 см. **330.** а) 25°; б) 50°. **331.** 20°, 70°. **332.** а) 10 см, 16 см, 20 см; б) 5 см, 8 см, 10 см. **333.** 19 см. **336.** а) 15 см; б) 12 см. **337.** 7 см. **338.** а) 16; б) 3. **343.** 8 см и 27 см. **345.** *Указание*. На последнем шаге доказательства выполнено деление на нуль. **346.** 6 см. **347.** 46 см. **348.** Равнобедренный. **349.** Нет. **360.** 120 м. **361.** б) 6 см. **362.** б) 12 см. **364.** 10 см. **365.** 4 см, 4 см, 2 см. **370.** 24 см. **371.** 6 см и 14 см. **373.** Нет; да. **378.** $\frac{2ab}{a+b}$. **379.** $\frac{an+bm}{m+n}$. **382.** 36°, 72°, 72° или 36°, 36°, 108°. **384.** 35° и 55°. **390.** Второй. Треугольник со сторонами a, b, c может не быть прямоугольным или не существовать вообще. **396.** 60 м. **397.** 13,8 м. **398.** а) 10 см; б) 30 см и 40 см. **399.** 30 см. **401.** б) 6 см. **402.** 20 см и 30 см. **403.** 6 см. **405.** $a_c = \frac{a^2}{c}$, $b_c = \frac{b^2}{c}$. **406.** 30 см и 40 см. **407.** Лежит вне окружности. **408.** 6 см. **409.** 20 см. **410.** 1 : 8 или 7 : 8. **411.** 3 : 4. **413.** *Указание*. Воспользуйтесь дополнительным построением, которое применяется для доказательства соответствующего признака равенства прямоугольных треугольников. **414.** В 2,5 раза. **415.** 72°, 108°. **426.** а) 41 см; б) 21 см. **427.** а) 26 см; б) 28 см. **431.** 45°. **432.** 36 см. **433.** 12 см. **435.** 24 м. **436.** 10 см или $2\sqrt{7}$ см. **437.** а) 27 см и 36 см; б) 15 см, 20 см, 25 см. **438.** а) 24 см и 26 см; б) 30 см, 40 см, 50 см. **440.** 8 см. **441.** $\sqrt{26}$ см. **442.** 12,5 см и 12 см. **444.** 52 см; да. **445.** 98 см; да. **446.** 9 см или 21 см. **447.** а) 9; б) 8. **448.** 15 см. **449.** 12 см. **450.** 20,5 см. *Указание*. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный. **451.** 12 см. **452.** 13 см. *Указание*. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный. **453.** 1 м. *Указание*. Проведите через вершину трапеции прямую, параллельную диагонали.

454. 10 см. **456.** *Указание*. Для доказательства обратного утверждения проведите из двух противолежащих вершин четырехугольника перпендикуляры к диагонали и докажите, что их основания совпадают. **463.** а) 12 см; б) 6 см и 4 см. **464.** 3 см. **465.** 10 см, 15 см, 20 см. **466.** 21 см, 28 см, 35 см. **467.** 36 см. **468.** 25 см и 30 см. **469.** 64 см. **470.** 20 см. **471.** 4 см. **472.** 6 см. **473.** 15 см. **474.** 72 см. *Указание*. Докажите, что данная точка лежит на биссектрисе треугольника. **475.** 36 см. *Указание*. Докажите, что данная точка лежит на биссектрисе треугольника. **476.** *Указание*. Докажите подобие треугольников *ACD* и *CBD*. **477.** *Указание*. Проведите высоту *BH* и докажите подобие треугольников *CAD* и *CBH*. **481.** 30°. **482.** 9. **483.** 8 см и 15 см. **484.** 5 см, 5 см, 6 см. **485.** 15 см и 20 см. **486.** 8 см, 9 см, 10 см. **487.** 12 см. **488.** 96 см. **494.** а) 4 : 1; б) 1 : 1; в) 1 : 2; 4 : 3. **496.** 4 см. **497.** 6 м и 6 м. **498.** $\frac{2ab}{b-a}$. **499.** 28 см. *Указание*. Докажите подобие прямоугольных треугольников, которые отсекаются от данного треугольника высотами. **501.** 2,5 и 1. *Указание*. Центры данных окружностей являются вершинами прямоугольного треугольника. **502.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. *Указание*. Проведите через точку M прямые, параллельные сторонам прямоугольника. **503.** Окружность диаметром AB. **504.** *Решение*. В четырехугольнике $ABCD$ $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$, $BD=d_1$, $AC=d_2$ (рис. 192). Построим треугольник ABE, подобный треугольнику DBC ($\angle 1=\angle 2$ по построению, $\angle 3=\angle 4$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу), из подобия имеем: $\frac{a}{AE}=\frac{d_1}{c}$, т. е. $d_1\cdot AE=ac$. Аналогично из подобия треугольников CBE и DBA имеем $\frac{b}{CE}=\frac{d_1}{d}$, т. е. $d_1\cdot CE=bd$. Сложим полученные равенства: $d_1\cdot AE+d_1\cdot CE=ac+bd$, т. е. $d_1\cdot d_2=ac+bd$, что и требовалось доказать.

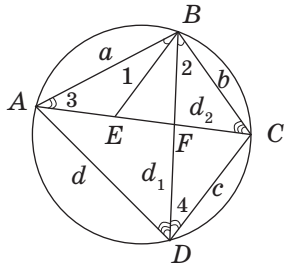


Рис. 192

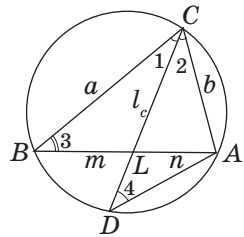


Рис. 193

505. *Решение.* Проведем в треугольнике ABC биссектрису CL и обозначим $BC = a$, $AC = b$, $BL = m$, $AL = n$, $CL = l_c$ (рис. 193). Опишем окружность около данного треугольника и продолжим биссектрису CL до пересечения с окружностью в точке D. По теореме о пропорциональности хорд имеем $BL \cdot AL = CL \cdot DL$ или $m \cdot n = l_c \cdot (CD - l_c)$. Из подобия треугольников BCL и DCA ($\angle 1 = \angle 2$ по определению биссектрисы, $\angle 3 = \angle 4$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу) имеем: $\frac{BC}{CL} = \frac{CD}{AC}$ или $\frac{a}{l_c} = \frac{CD}{b}$, т.е. $CD = \frac{ab}{l_c}$. Подставим это значение в равенство $m \cdot n = l_a \cdot (CD - l_a)$: $m \cdot n = l_c \cdot \left(\frac{ab}{l_c} - l_c\right)$ или $l_c^2 = ab - mn$, что и требовалось доказать.

Глава III. Многоугольники. Площади многоугольников

513. а) 720°; б) 1800°. **514.** а) 5; б) 7; в) 9. **515.** 135°. **516.** 120°. **518.** а) 11; б) нет; в) 13. **519.** Семиугольник; 900°. **520.** 6. **521.** а) 3; б) 5; в) 6. **523.** $\frac{n(n-3)}{2}$. **525.** 150°, 60°, 150°. **526.** *Указание.* Воспользуйтесь неравенством треугольника. **527.** Нет. *Указание.* Воспользуйтесь неравенством треугольника. **539.** а) 36 см²; б) 140 см²; в) 60 см². **540.** 60 см. **541.** 144 м². **542.** $16\sqrt{2}$ см. **543.** 8 см и 16 см. **544.** а) 60 см²; б) 12 см; в) 5 см. **545.** 120 см². **546.** 8 см и 6 см. **547.** 12 см. **548.** 180. **549.** 21 см² или 28 см². **550.** 240 см². **551.** а) 72 см²; б) 30 см²; в) 40 см². **552.** а) 78 см²; б) 32 см². **553.** 4 см. **554.** 120 см². **555.** 50 см². **557.** 16 м². *Указание.* Докажите, что сумма данных расстояний равна стороне квадрата. **558.** 180 см². **559.** 384 см². *Указание.* Данный угол равен острому углу параллелограмма. **560.** *Указание.* Рассмотрите отношения катетов прямоугольных треугольников ABE и DCE и докажите, что эти треугольники не являются подобными, т.е. точка C не лежит на прямой BE. **561.** 351 см². **562.** 202,8 см². **563.** 60° и 120°; параллелограмм и равносторонний треугольник. **564.** 8 см². **572.** а) 20; б) 24; в) $4\sqrt{3}$. **573.** а) 60 см²; б) 75 см². **574.** а) 96 см²; б) 12 см². **575.** 60 см. **576.** 10 см. **577.** $1 - a$. **578.** $\frac{1}{2}$. **579.** 80 м². **580.** 8 см и 16 см. **583.** а) 42 см²; б) 64 см². **584.** 48 см². **585.** 24 см². **586.** а) 84 см²; б) 39 см²; в) $4\sqrt{3}$ см². **587.** а) 12 см²; б) 96 см².

588. 294 см². **589.** $2S$. **590.** S. **591.** 20 см. **592.** 18 см². **596.** а) 486 см²; б) 186 см². **597.** 768 см². **601.** *Указание.* Искомые прямые делят стороны BC и CD в отношении $1:2$, начиная от вершины C. **602.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$. **603.** а) $S_1+S_2+S_3+S_4$; б) $7S$. **604.** 80 см². **605.** 1020 см². **607.** а) $1:5$; б) $4:5$; в) $1:4$. **614.** а) 81 см²; б) 1 см². **615.** $\frac{1}{9}$. **616.** а) 4 см; б) 2 см². **617.** 6 см². **618.** 20 см². **619.** 210 см. **620.** 6 см. **621.** 40 см. **624.** 27 см² и 3 см². **625.** 108 м. **626.** 36 см². **627.** 250 м². **628.** 12 см и 16 см. **629.** 24 см. **630.** 15 см и 20 см. **633.** $1:\left(\sqrt{2}-1\right)$. **634.** Искомая прямая делит стороны треугольника в отношении $3:2$ или $4:1$, начиная от вершины, противолежащей параллельной ей стороне. **638.** 30°, 30°, 120°. **640.** Высота треугольника в два раза больше. **643.** а) 20 см², 30 см²; б) 8 см², 12 см², 18 см², 12 см². **646.** 468 см² или 300 см². **647.** б) Если высота, проведенная к AB, больше $\frac{1}{2}AB$. **648.** *Указание.* Разрезы должны проходить через середины боковых сторон перпендикулярно к основаниям. **649.** *Указание.* Примените метод площадей и обратную теорему Пифагора. **651.** $S\cos^2\alpha$. *Указание.* Докажите, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны с коэффициентом $\cos\alpha$. **652.** $\frac{2}{3}m_am_b$. **654.** *Указание.* Площадь треугольника не превышает половины произведения двух его сторон. **656.** $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\right)^2$. *Указание.* Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны $\sqrt{S_1S_2}$. **657.** *Указание.* Докажите, что $S_{AMB}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Глава IV. Решение прямоугольных треугольников

668. $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{17}$, $\frac{8}{15}$. **670.** а) $\frac{5}{13}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{15}{8}$. **671.** а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **672.** а) $\sin^2\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) 2. **673.** а) $\cos^2\alpha$; б) $\frac{1}{\cos\alpha}$; в) $\operatorname{tg}\alpha$. **676.** $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$, 2,4. **679.** а) $\cos A=\frac{1}{2}, \operatorname{tg}A=\sqrt{3}, \operatorname{ctg}A=\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sin A=0{,}96,\ \operatorname{tg}A=\frac{24}{7},\ \operatorname{ctg}A=\frac{7}{24}$; в) $\sin A=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos A=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \operatorname{ctg}A=\frac{1}{2}$. **680.** а) $\sqrt{3}$; б) 1. **681.** а) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\cos^3\alpha$; в) $\sin^2\alpha$. **682.** а) $\sin\alpha$;

б) 1; в) 1. **685.** а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\sin^2\alpha$; в) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **686.** а) 2; б) $\sin\alpha$; в) 1. **687.** 16 см. **688.** 60 см². **695.** а) 54°; б) 8°; в) 60°; г) 45°. **696.** а) 40°; б) 30°; в) 45°. **698.** а) 1,5; б) 1,5; в) 0,5. **699.** а) 1; б) 0,5; в) 0,5. **700.** а) 0,6 и 0,8; б) 0,5 и $\sqrt{3}$. **701.** а) 0,8 и 0,6; б) 1. **702.** а) 68°; б) 30°. **703.** а) 76°; б) 45°. **704.** а) 2; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1. **705.** а) $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, 3; б) 1. **706.** b. **709.** 1. **711.** 36 см². **712.** a^2. **718.** 14 см. **719.** 12 см и 16 см. **720.** 45°, 45°. **721.** а) $\beta = 60°$, $a = 4$, $b = 4\sqrt{3}$; б) $\beta = 48°$, $a \approx 6{,}69$, $b \approx 7{,}43$. **722.** а) $\alpha = 45°$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{2}$; б) $\beta = 72°$, $c \approx 12{,}94$, $b \approx 12{,}31$. **723.** а) $\beta = 62°$, $a \approx 5{,}63$, $b \approx 10{,}6$; б) $\alpha = 50°$, $c \approx 10{,}44$, $b \approx 6{,}71$. **724.** а) $b = 9$, $\alpha = \beta = 45°$; б) $b = 7$, $\alpha \approx 74°$, $\beta \approx 16°$. **725.** а) $c = 12$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$; б) $c = 41$, $\alpha \approx 13°$, $\beta \approx 77°$. **726.** а) $b = 8$, $\alpha \approx 37°$, $\beta \approx 53°$; б) $c = 6$, $\alpha \approx 56°$, $\beta \approx 34°$. **729.** ≈ 9,40 и ≈ 3,42. **730.** 60 см. **731.** ≈ 45° и ≈ 135°. **732.** а) $AB = 8$, $BC = 8\sqrt{3}$, $AC = 16$, $\angle A = 60°$, $\angle C = 30°$; б) $BC \approx 293{,}94$, $AB \approx 51{,}83$, $AC \approx 298{,}48$, $\angle A = 80°$. **733.** $AB = 3{,}75$, $BC = 5$, $AC = 6{,}25$, $\angle A \approx 53°$, $\angle C \approx 37°$. **734.** ≈ 10,99 и ≈ 11,70. **735.** $8 + 5\sqrt{2}$. **736.** ≈ 68°. **737.** ≈ 4°. **738.** $a = \frac{m}{1 + \operatorname{ctg}\alpha}$, $b = \frac{m}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$, $c = \frac{m}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, $\beta = 90° - \alpha$. *Указание.* Выразите две стороны треугольника через третью сторону и угол α. **739.** $\alpha = 45° - \frac{\varphi}{2}$, $\beta = 45° + \frac{\varphi}{2}$, $a = c\sin\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)$, $b = c\sin\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)$. **740.** 30° и 60°. **741.** $\frac{d}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}$. **742.** ≈ 16°. **743.** 4 см, $4\sqrt{2}$ см, 32 см². **744.** $\frac{2r}{\sin\alpha}$, $\frac{4r^2}{\sin\alpha}$. *Указание.* Проведите высоту h и воспользуйтесь тем, что $h = 2r$. **745.** $5\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$, $10\left(\sqrt{3} - 1\right)$. *Указание.* Проведите высоту к данной стороне и составьте уравнение. **747.** $\frac{l\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$. **748.** ≈ 37°. **749.** Не меньше 2°. **751.** $\frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 + a}$. **752.** $\frac{1}{4}$. *Указание.* Докажите подобие треугольников ACE и BCD. **753.** $\frac{1}{2}d(1 + \sin\alpha)$, $\frac{1}{2}d(1 - \sin\alpha)$. **754.** $\frac{\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)}{4}$. *Указание.* Постройте треугольник с углами 75°, 45° и 60° и проведите его наименьшую высоту.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Ч

СОДЕРЖАНИЕ